

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
СХІДНОУКРАЇНСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ  
імені ВОЛОДИМИРА ДАЛЯ

# ВІСНИК

Східноукраїнського  
національного університету  
імені ВОЛОДИМИРА ДАЛЯ

№ 10 ( 152 )  
Частина 2  
2010

НАУКОВИЙ ЖУРНАЛ

# ВІСНИК

СХІДНОУКРАЇНСЬКОГО  
НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ  
ІМЕНІ ВОЛОДИМИРА ДАЛЯ

**№ 10 (152) 2010**

НАУКОВИЙ ЖУРНАЛ  
ЗАСНОВАНО У 1996 РОЦІ  
ВИХІД З ДРУКУ - ДВАНАДЦЯТЬ  
РАЗІВ НА РІК

Засновник  
Східноукраїнський національний  
університет імені Володимира Даля

Журнал зареєстровано  
в Міністерстві юстиції України

Свідоцтво про державну реєстрацію  
серія КВ № 15607-4079ПР  
від 18.08.2009 р.

# VISNIK

VOLODYMYR DAL EAST  
UKRAINIAN NATIONAL UNIVERSITY

**№ 10 (152) 2010**

THE SCIENTIFIC JOURNAL  
WAS FOUNDED IN 1996  
IT IS ISSUED TWELVE TIMES  
A YEAR  
Founder

of the Volodymyr Dal East Ukrainian  
National University

Registered by the Ministry  
of Yustice of Ukraine

Registration Certificate  
КВ № 15607-4079ПР  
dated 18.08.2009

Журнал включено до Переліків наукових видань ВАК України (Бюл. ВАК №3 2010 р.), (Бюл. ВАК №5 2010 р.), (Бюл. ВАК №3 2010 р.) та (Бюл. ВАК №9 2002 р.) в яких можуть публікуватися результати дисертаційних робіт на здобуття наукових ступенів доктора і кандидата наук з *технічних, історичних, економічних та фізико-математичних наук* відповідно.

ISSN 1998-7927

**Головна редакційна колегія:** Голубенко О.Л., член-кор. Академії педагогічних наук, докт. техн. наук (головний редактор), Осенін Ю.І., докт. техн. наук (заступник головного редактора), Смирний М.Ф., докт. техн. наук (заступник головного редактора), Арлінський Ю.М., докт. фіз.-мат. наук, Будіков Л.Я., докт. техн. наук, Бузько І.Р., докт. екон. наук, Галстян Г.А. докт. хім. наук, Голубничий П.І., докт. фіз.-мат. наук, Гончаров В.М., докт. екон. наук, Грібанов В.М., докт. техн. наук, Довжук І.В., докт. іст. наук, Житна І.П., докт. екон. наук, Козаченко Г.В., докт. екон. наук, Кондратов С.О., докт. хім. наук, Кудюков Ю.П., докт. хім. наук, Куліков Ю.А., докт. техн. наук, Лазор Л.І., докт. юр. наук, Литвиненко В.Ф., докт. істор. наук, Максимов В.В., докт. екон. наук, Михайлюк В.П., докт. іст. наук, Нагорний Б.Г., докт. соціол. наук, Носко П.Л., докт. техн. наук, Петров О.С., докт. техн. наук, Рач В.А., докт. техн. наук, Рей Р.І., докт. техн. наук, Суханцева В.К., докт. філос. наук, Третьяченко В.В., докт. психол. наук, Тюпало М.Ф., докт. хім. наук, Ульшин В.О., докт. техн. наук, Шевченко Г.П., член-кор. Академії педагогічних наук України, докт. пед. наук., Хорошко В.О., докт. техн. наук

**Відповідальний за випуск:** Дейнеко І.Г.

Рекомендовано до друку Вченою радою Східноукраїнського національного університету імені Володимира Даля (Протокол № 10 від 25 червня 2010 р.)

Матеріали номера друкуються мовою оригіналу.

- © Східноукраїнський національний університет імені Володимира Даля, 2010
- © Volodymyr Dal East Ukrainian National University, 2010

# ЗМІСТ

## Технічні науки

<b>Андросов В.И.</b> Модификация информационной модели Active directory для организации защиты данных на основе ииа организации .....	6
<b>Балабанов В. Н.</b> Применение гибридного генетического алгоритма для приближенного решения задачи рационального раскроя рулонного материала .....	10
<b>Беседа А.А.</b> Конструктивно-теоретические исследования процесса распределения семян универсальным рабочим органом при подпочвенно-разбросном посеве .....	19
<b>Борисовська Ю.О., Козлова О.С., Лисенко О.А.</b> Інформаційні технології в системах дистанційного навчання.....	25
<b>Войтиков В.А., Статівка Ю.И.</b> Автоматизация построения когнитивно-семантической модели.....	33
<b>Войтикова А. Ю., Шевченко В. А., Статівка Ю. И.</b> Оценка плотности распределения шумов в изображении кроссовера электронного пучка .....	36
<b>Гребенюк С.Н., Мизерная Е.Л.</b> Напряженно-деформированное состояние волокнистых композиционных материалов в условиях вязкоупругого деформирования .....	41
<b>Григорович А.Г.</b> Модель Версо: реляційні операції над ненормалізованими відношеннями .....	49
<b>Дёмин М.К., Пархоменко В.П.</b> Обработка маршрутных выражений в языке запросов к базам данных информационно-управленческих архитектур .....	59
<b>Зубов Д.А., Григоренко М.С.</b> Программно-аппаратный комплекс сбора и первичной обработки метеоинформации на основе беспроводных технологий с подключением к сети Internet .....	67
<b>Иванов Д.Е.</b> Генетический алгоритм построения диагностических последовательностей цифровых устройств.....	72
<b>Климчук С.А.</b> Разработка онтологии диагностики кранов мостового типа .....	80
<b>Козуб Г.А., Козуб Ю.Г., Дяченко С.В., Хмиль Н.А.</b> Конечноэлементное моделирование термомеханического деформирования слоистых анизотропных конструкций .....	85
<b>Kondrat'yev A.I.</b> Game recognition models and methods in teaching, learning, and evaluation .....	98
<b>Крамаренко Т.А., Тихонов Ю.Л.</b> Рекомендации по выбору механизмов доступа приложений баз данных на C++ для Субд Mysql в средах Code Gear Rad Studio 2009 и Visual Studio 2005 .....	107
<b>Кравцова Л.В., Каминская Н.Г., Пуляева А.В.</b> Технологии и методы проектирования, разработки и использования мультимедийного программно-методического комплекса «Теория и строение судна» .....	115
<b>Лахно В.А., Петров А.С.</b> Моделирование защиты автоматизированных информационных систем транспортных предприятий в пакете matlab .....	121

<b>Лєві О.Л.</b>	Оптимізація операції рефакторингу "Додавання обчислювального стовпця до таблиці" у розподілених базах даних.....	129
<b>Леоненко Л.Л., Баранов В.Ю., Северин Н.В.</b>	Идентификация сообщений, характеризуемых неустранимой неоднозначностью, в системах компьютерного тестирования знаний .....	134
<b>Мазурок Т.Л.</b>	Еволюційне прогнозування в синергетичному управлінні індивідуалізованим навчанням.....	142
<b>Мельник П.В., Бурка М.Л.</b>	Улучшение тяговых свойств моторвагонного подвижного состава.....	148
<b>Мируненко Д.С.</b>	Формализованное представление имитационной модели производственного процесса (порезки металла) в заготовительных цехах ОАО «МЗТМ».....	154
<b>Осадчий С.І., Березюк І.А.</b>	Методологія та етапи забезпечення максимальної якості процесу керування обробкою деревини на стрічкопилковому верстаті.....	165
<b>Палагин А.В., Петренко Н.Г., Тихонов Ю.Л., Величко В.Ю.</b>	к вопросу автоматизированного построения онтологии предметной дисциплины для электронных курсов обучения.....	171
<b>Поперешняк С.В.</b>	Виявлення поштового сламу нейромережевими засобами.....	179
<b>Пранскевичус В. А., Привалов М. В.</b>	Построение масштабируемого сфокусированного поискового робота с использованием принципа отложенных вычислений.....	189
<b>Романюк О.В.</b>	Продуктивні методи квадратичної апроксимації перспективно-коректного текстування.....	194
<b>Сквирский В.Д.</b>	Формирование критериев и алгоритмов оптимального управления обработкой на тяжелых станках.....	199
<b>Спирягин М.И., Спирягин В.И.</b>	Автоматизация тестирования мехатронных систем подвешивания рельсовых транспортных средств .....	205
<b>Старченко В.Н., Кущенко А.В., Руденко Е.Г.</b>	Экспериментальная установка для испытаний дисковых тормозов .....	211
<b>Старченко В.Н., Кущенко А.В., Балинский В.А., Руденко Е.Г.</b>	Выбор и реализация теплового расчета дисковых автомобильных тормозов.....	215
<b>Статьківка Ю.И., Пономарев С.В.</b>	Разработка системы автоматизации терминографических работ .....	223
<b>Статьківка Ю.И., Слипченко А. В.</b>	Разработка серверного компонента мультиагентной системы .....	227
<b>Тарасенко С. О.</b>	Структура автоматизованої системи розрахунку схеми вуглезбагачувальної фабрики.....	233
<b>Тихонов Ю.Л., Скачко В.В., Величко В.Ю.</b>	Особенности разработки программ конвертирования формата Owl в среде разработки Java. ....	237
<b>Ткаченко Р.М.</b>	Обоснование выбора присадочных материалов для двигателя внутреннего сгорания.....	241
<b>Хоменко Ю.А., Кузьменко І.М., Гайдар О.В., Тришин В.В.</b>	Система оперативного виявлення впливу дослідницького ядерного реактора на довкілля його санітарно-захисної зони.....	246
<b>Чертов О.Р., Мальчиков В.В.</b>	Недиадні вейвлет-перетворення: неперервний випадок.....	250
<b>Ширяев Д.А., Лахно В.А.</b>	Моделирование процесса теплопроводности в зерновой массе.....	257

<b>Шкандыбин Ю.А., Могильный Г.А., Сафонов Е.А.</b>	
Особенности построения системы распределения учебной нагрузки.....	262
<b>Могильный Г. А., Киреев И. Ю., Хмель О.В.</b>	
Особенности определения структурных параметров изготовления намоткой композиционных крыльев малого удлинения. ....	266

### Економічні науки

<b>Андросов В.И.</b>	
Информационно-управленческая архитектура организации и экономическая безопасность.....	272
<b>Глуценко Ю.В., Глуценко В.Е.</b>	
Использование когнитивного моделирования для исследования стратегий развития предприятия.....	276
<b>Гончаренко О.Ю.</b>	
Визначення податкового впливу на інвестиції в матеріальні активи .....	280
<b>Гусєва І.І.</b>	
Кількісне оцінювання ризиків суб'єктів електроенергетичного ринку в умовах реформування енергетики України .....	286
<b>Зайцев С.І., Бізянов Є.Є.</b>	
Визначення ефективності використання даних інформаційної системи у бізнес-процесах підприємства.....	295
<b>Іс О.М., Онопченко С.В.</b>	
Розрахунок тарифних ставок у страхуванні життя .....	302
<b>Карасва Н.В., Сегеда І.В., Серебренніков Б.С.</b>	
Цінова політика як елемент інтегрованої структури управління ризиками еколого безпечного сталого розвитку електроенергетики.....	310
<b>Колісниченко І.О.</b>	
Оптимізація виробничо-галузевої структури виробництва зерна на рівні регіону.....	320
<b>Макаренко М.І., Маринич Т.О.</b>	
Моделювання динаміки валютного курсу як чинника фінансової стабільності в Україні.....	325
<b>Мардар Д. О.</b>	
Сучасний стан сільського господарства та необхідність його розвитку у Луганській області.....	332
<b>Маслянюк П.П., Рябушенко А.В.</b>	
Системна інженерія системи управління інвестиційним портфелем цінних паперів.....	340
<b>Мушеник І.М.</b>	
Моделі аналізу стану та стійкості економічних систем.....	346
<b>Назаренко О. М., Васильєва О. А.</b>	
Економетрична ідентифікація моделі Леонтьєва міжгалузевого балансу .....	351
<b>Печенюк А.В., Залуцький С.В., Бордюг О.В.</b>	
Вільне програмне забезпечення: проблеми та перспективи .....	358

# ВІСНИК

Східноукраїнського національного університету імені  
Володимира Даля

№ 10 (152) 2010

науковий журнал

Відповідальний секретар випуску  
Технічний редактор  
Розробка оригінал-макету

*Пожидаєв В.Ф.  
Дрогоров Т.М.  
Могильна О.В.*

Підписано до друку 30.06.2010.

Формат 70x108 <sup>1</sup>/<sub>16</sub>. Папір типограф. Гарнітура Arial Cyr.  
Друк офсетний. Умов. друк. арк. 31,9. Обл.-вид.арк. 32,8.  
Тираж 300 прим. Вид. № 2457. Замов. № . Ціна договірна.

Видавництво

Східноукраїнського національного університету імені Володимира Даля

Свідоцтво про реєстрацію: серія ДК № 1620 від 18.12.2003

Адреса видавництва: 91034, м. Луганськ, кв. Молодіжний, 20а  
Телефон: 8 (0642) 41-34-12. Факс: 8 (0642) 41-31-60  
E-mail: uni@snu.edu.ua. <http://snu.edu.ua>

Надруковано: видавництво "Phoenix" ФОП "Голубятников Олексій Андрійович"  
91000 м. Луганськ, пров. Журавлева, 4. Тел: +38-095-29-555-34.

11. Gruber T.R. Ontology to appear in the Encyclopedia of Database Systems [Электронный ресурс] / Ling Liu and M. Tamer Özsu (Eds.). – Springer-Verlag, 2008. – Режим доступа: <http://tomgruber.org/writing/ontology-definition-2007.htm>
12. On the Relationship between Description Logic-based and F-Logic-based Ontologies [Электронный ресурс] / Jos de Bruijn, Stijn Heymans // Fundam. Inform. – 2008. – № 82(3). – С. 213-236. – Режим доступа: <http://portal.acm.org/citation.cfm?id=1377800>
13. Онтологии и тезаурусы: модели, инструменты, приложения / [Добров Б.В., Иванов В.В., Лукашевич Н.В., Соловьев В.Д.] [Электронный ресурс]: учебный курс Интернет-университета информационных технологий. – Режим доступа: <http://www.intuit.ru/department/expert/ontoth/2/>
14. Ульшин В.А. Модель диагностики кранов мостового типа / В.А. Ульшин, С.А. Климчук // Праці Луганського відділення Міжнародної Академії інформатизації. – 2009. – №2(20) Ч.2. – с. 61-71.
15. Гладун А.Я. Онтологии в корпоративных системах. Часть I / А.Я. Гладун, Ю.В. Рогущина // Корпоративные системы. – 2006. – № 1. – с. 41-47.

**Климчук С.О. Розробка онтології діагностики кранів мостового типу.**

В роботі пропонується один з можливих підходів до моделювання прикладної онтології діагностики кранів мостового типу із застосуванням сучасних засобів розробки.

*Ключові слова:* онтологія, технічна діагностика, система підтримки ухвалення рішень, кран мостового типу, прецедент, програмна реалізація.

**Klimchuk S.A. Developing bridge crane diagnosis ontology.**

One of the possible approaches to modelling applied ontology of bridge cranes with modern developing tools is described.

*Keywords:* ontology, technical diagnosis, decision support system, bridge crane, precedent, software implementation.

Климчук С.А., аспирант кафедри «Системная инженерия», ВНУ им. В. Даля.

Рецензент Ульшин В.А., д.т.н., проф.

*Стаття подана  
24.03.2010.*

УДК 539.3

**Козуб Г.А., Козуб Ю.Г., Дяченко С.В., Хмиль Н.А.**

**КОНЕЧНОЭЛЕМЕНТНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ  
ТЕРМОМЕХАНИЧЕСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ  
СЛОИСТЫХ АНИЗОТРОПНЫХ КОНСТРУКЦИЙ**

Предложен метод определения напряженно-деформированного состояния и полей температуры анизотропных конструкций в условиях термосиловых нагрузок.

*Ключевые слова:* напряженно-деформированное состояние, поля температуры, анизотропные конструкции.

Оценка напряженно-деформированного состояния слоистых конструкций в условиях термосилового нагружения представляет собой достаточно сложную задачу. В настоящее время при решении связанных задач термоупругого деформирования таких конструкций используются различные гипотезы, упрощающие постановку задачи. Такие подходы позволяют получить решение только для конструкций простейшей формы в условиях плоского напряженно-деформированного состояния.

Проблема исследования связанных термомеханических полей в слоистых анизотропных конструкциях связана, в первую очередь, с трудностями, возникающими

ми при моделировании поведения таких конструкций с учетом термомеханических эффектов в слоях композита. Чаще всего, теплофизические свойства слоев композита существенно отличаются друг от друга. Необходимость оценки влияния внутренней неоднородности и взаимодействия отдельных составляющих композита на поведение конструкции в целом, приводит к рассмотрению поведения каждого слоя композита. Этот подход позволяет учесть реальное состояние в каждом слое. Поэтому, в отечественной практике конструирования слоистых конструкций практически отсутствуют методы расчета термомеханического поведения конструкций в трехмерной постановке.

При решении связанных задач термоупругости для конструкций из анизотропных материалов применяются различные теории и подходы, которые базируются на соотношениях связанной задачи термовязкоупругости, полученных А. А. Ильиным, Б. Е. Победрей [1], А. Д. Коваленко [2], В. Г. Карнауховым [3], И. К. Сенченковым, Я. А. Жуком [4] и др. Одним из важных критериев исследования вязкоупругих тел с неравномерным температурным полем является учет зависимости от температуры физических и теплофизических характеристик материала: модуля упругости или модуля сдвига, коэффициента температурного расширения и коэффициента теплопроводности. В этом случае решается связанная задача термовязкоупругости.

При использовании связанной линейной модели температурное и термоупругое состояния определяются решением системы, состоящей из уравнения теплопроводности, классических уравнений движения, уравнений закона Гука и классических уравнений совместности [5] и др.

Представление общего решения квазистатической задачи термоупругости в форме, удобной для практических применений, было предложено П. Ф. Папковичем [6]. В этой форме решение однородного уравнения для вектора перемещения содержит вектор и скаляр, являющиеся произвольными, а частное решение соответствующего неоднородного уравнения, отвечающего заданному температурному полю, определяется через скалярную функцию, получившую название термоупругого потенциала перемещений. Первым этапом решения квазистатической задачи термоупругости является определение соответствующего температурного поля методами теории теплопроводности, на втором этапе определяется напряженно-деформированное состояние.

Существенное влияние на характер напряженно-деформированного состояния оказывает зависимость физико-механических характеристик от температуры, приводящая к существенным изменениям формы и в ряде случаев к разрушению. Для полного анализа прочностных свойств конструкций актуальным является определение величины и характера распределения тепловых напряжений.

Целью работы является использование разработанного метода решения связанных задач термоупругости для слоистых анизотропных конструкций.

Формулировку связанной задачи для квазистационарной постановки можно представить в виде уравнения Био и уравнения теплопроводности [5]:

$$\iiint_V \delta F dv - \iiint_V \bar{P} \delta \bar{u} dv - \iint_S \bar{Q} \delta \bar{u} ds = 0 \quad (1)$$

$$\begin{aligned} & \iiint_V c_\varepsilon (T - T_0) \delta T dv + \iiint_V \beta_{ij} (T - T_0) \delta \varepsilon_{ij} dv = \\ & = \iiint_V \lambda_{ij} T_{,j} \delta T_{,i} dv + \iiint_V w_0 \delta T dv + \iint_S [q + h(T - \theta)] \delta T ds \end{aligned} \quad (2)$$

где  $F$  – свободная энергия;

$\bar{P}$ ,  $\bar{Q}$  – векторы объемных и поверхностных нагрузок;

$\bar{u}$  – вектор перемещений;

$c_\varepsilon$  – теплоемкость при постоянной деформации;



$\beta_q$  – компоненты тензора изотермических упругих постоянных, определяющих взаимное влияние температурного поля и поля деформаций;  
 $a_q$  – компоненты тензора деформаций;  
 $\lambda_q$  – компоненты тензора теплопроводности;  
 $W_0$  – плотность внутренних источников теплообразования;  
 $q$  – тепловой поток;  
 $h$  – коэффициент теплообмена;  
 $\theta$  – температура окружающей среды.

Решение задач для многослойных конструкций сложной формы связано с математическими трудностями, которые возникают при описании геометрических параметров, условий теплообмена с внешней средой, условий соединения, учетом внутренних источников тепла, решением систем интегральных уравнений [7]. Для практической реализации уточненные теории, основанные на непрерывно-структурных моделях, в которых количество и порядок разрешающих уравнений не зависит от числа слоев, являются, наиболее приемлемыми.

Одним из наиболее эффективных численных методов является метод конечных элементов (МКЭ). Характерной особенностью метода является непосредственный переход от континуального объекта к дискретному путем аппроксимации геометрии исследуемого объекта и искомым полям перемещений (напряжений). Популярность метода связана с широкими возможностями современной вычислительной техники [8].

Расчет слоистых конструкций можно осуществить на основе КЭ построенных для слоистых конструкций [9]. В этом случае каждый слой с различными физико-механическими характеристиками подвергается дискретизации на пространственные (плоские) элементы.

Описание напряженно-деформированного состояния композиционных элементов осуществляется с помощью соотношений, учитывающих специфические особенности анизотропных материалов. Эти особенности материала можно задавать физическими соотношениями, связывающими напряжения и деформации, по закону Гука:

$$\sigma^{ij} = C^{ijkl} \varepsilon_{kl}, \quad (3)$$

где  $\sigma^{ij}$  – компоненты тензора напряжений;

$C^{ijkl}$  – компоненты тензора упругих постоянных материала;

$\varepsilon_{kl}$  – компоненты тензора деформаций.

Тензор упругих постоянных анизотропного материала обладает свойством симметрии:

$$C_*^{ijkl} = C_*^{jikl}; \quad C_*^{ijkl} = C_*^{ijlk}; \quad C_*^{ijkl} = C_*^{klij}. \quad (4)$$

Для конечноэлементной формулировки задачи термоупругости для пространственных конструкций из анизотропных материалов, имеющих сложную геометрическую форму, используется базисная  $z^i (z^1, z^2, z^3)$  и местная  $\xi^i (\xi^1, \xi^2, \xi^3)$  ортогональные системы координат, связанные с конечным элементом [9; 10].

Между базисными и местными координатами КЭ принято отображение:

$$z^i = \sum_{l=1}^8 N^l (\xi^1, \xi^2, \xi^3) z_l^i, \quad (5)$$

где  $N^l = \frac{1}{8} (1 + \xi_l^1 \xi^1) (1 + \xi_l^2 \xi^2) (1 + \xi_l^3 \xi^3)$  – функции формы для  $l$ -го узла КЭ;

$z_l^i$  – глобальные координаты  $l$ -го узла КЭ.

Для описания перемещений слоистого композита примем гипотезу о неразрывности поля перемещений на границе раздела слоев.

Для конечных элементов, моделирующих слоистую конструкцию, перемещения произвольной точки  $k$ -го слоя определяются с помощью отображения:

$$u^{(k)} = \sum_{l=1}^8 \varphi_{(l)}^{(k)\pm}(\xi^1, \xi^2, \xi^3) u_{(l)}^{(k)\pm}, \quad (6)$$

где  $u_{(l)}^{(k)\pm}$  – вектор перемещений узловых точек  $k$ -го слоя КЭ;

$\varphi_{(l)}^{(k)\pm}(\xi^1, \xi^2, \xi^3) = \frac{1}{4}(1 + \xi_{(l)}^1 \xi^1)(1 + \xi_{(l)}^2 \xi^2) \chi_{(l)}^{(k)\pm}(\xi^3)$  – базисные функции для аппроксимации перемещений в пределах  $k$ -го слоя.

Знаки „+” или „-” относятся к верхней или нижней поверхности слоя. Причем для  $k$ -го слоя аппроксимация перемещений осуществляется с помощью функции:

$$\chi_{(l)}^{(k)\pm} = \frac{(\pm \xi^3 \mp \xi_{(l)}^{3(k)\mp})}{h_k}, \quad (7)$$

где  $h_k$  – толщина  $k$ -го слоя,  $\xi_{(l)}^{3(k)\mp} \leq \xi^3 \leq \xi_{(l)}^{3(k)+}$ .

Положим, что поле перемещений является непрерывной кусочно-линейной функцией в пределах КЭ. Следовательно, на границе  $k$ -го и  $(k+1)$ -го слоя выполняется условие:

$$u^{(k)+} = u^{(k+1)-}.$$

Для конечного элемента, моделирующего поведение двухслойного композита вектор перемещений по 1-му слою представляется с помощью базисных функций:

$$\begin{aligned} \varphi_{(1)}^{(1)-} &= \frac{1}{4h_1} (1 - \xi^1) (1 - \xi^2) (h_1 - 1 - \xi^3), \\ \varphi_{(2)}^{(1)-} &= \frac{1}{4h_1} (1 + \xi^1) (1 - \xi^2) (h_1 - 1 - \xi^3), \\ \varphi_{(3)}^{(1)-} &= \frac{1}{4h_1} (1 - \xi^1) (1 + \xi^2) (h_1 - 1 - \xi^3), \\ \varphi_{(4)}^{(1)-} &= \frac{1}{4h_1} (1 + \xi^1) (1 + \xi^2) (h_1 - 1 - \xi^3), \\ \varphi_{(5)}^{(1)+} &= \frac{1}{4h_1} (1 - \xi^1) (1 - \xi^2) (1 + \xi^3), \\ \varphi_{(6)}^{(1)+} &= \frac{1}{4h_1} (1 + \xi^1) (1 - \xi^2) (1 + \xi^3), \\ \varphi_{(7)}^{(1)+} &= \frac{1}{4h_1} (1 - \xi^1) (1 + \xi^2) (1 + \xi^3), \\ \varphi_{(8)}^{(1)+} &= \frac{1}{4h_1} (1 + \xi^1) (1 + \xi^2) (1 + \xi^3). \end{aligned} \quad (8)$$

Вектор перемещений по второму слою аппроксимируется с помощью соответствующих базисных функций:

$$\begin{aligned} \varphi_{(1)}^{(2)-} &= \frac{1}{4h_2} (1 - \xi^1) (1 - \xi^2) (1 - \xi^3), \\ \varphi_{(2)}^{(2)-} &= \frac{1}{4h_2} (1 + \xi^1) (1 - \xi^2) (1 - \xi^3), \\ \varphi_{(3)}^{(2)-} &= \frac{1}{4h_2} (1 - \xi^1) (1 + \xi^2) (1 - \xi^3), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varphi_{(4)}^{(2)-} &= \frac{1}{4h_2} (1 + \xi^1) (1 + \xi^2) (1 - \xi^3), \\
\varphi_{(5)}^{(2)+} &= \frac{1}{4h_2} (1 - \xi^1) (1 - \xi^2) (1 - h_1 - \xi^3), \\
\varphi_{(6)}^{(2)+} &= \frac{1}{4h_2} (1 + \xi^1) (1 - \xi^2) (1 - h_1 - \xi^3), \\
\varphi_{(7)}^{(2)+} &= \frac{1}{4h_2} (1 - \xi^1) (1 + \xi^2) (1 - h_1 - \xi^3), \\
\varphi_{(8)}^{(2)+} &= \frac{1}{4h_2} (1 + \xi^1) (1 + \xi^2) (1 - h_1 - \xi^3).
\end{aligned} \tag{9}$$

Для конечных элементов, моделирующих поведение трехслойного композита векторы перемещений в каждом слое аппроксимируются с помощью соответствующих базисных функций.

Для 1-го слоя:

$$\begin{aligned}
\varphi_{(1)}^{(1)-} &= \frac{1}{4h_1} (1 - \xi^1) (1 - \xi^2) (h_1 - 1 - \xi^3), \\
\varphi_{(2)}^{(1)-} &= \frac{1}{4h_1} (1 + \xi^1) (1 - \xi^2) (h_1 - 1 - \xi^3), \\
\varphi_{(3)}^{(1)-} &= \frac{1}{4h_1} (1 - \xi^1) (1 + \xi^2) (h_1 - 1 - \xi^3), \\
\varphi_{(4)}^{(1)-} &= \frac{1}{4h_1} (1 + \xi^1) (1 + \xi^2) (h_1 - 1 - \xi^3), \\
\varphi_{(5)}^{(1)+} &= \frac{1}{4h_1} (1 - \xi^1) (1 - \xi^2) (1 + \xi^3), \\
\varphi_{(6)}^{(1)+} &= \frac{1}{4h_1} (1 + \xi^1) (1 - \xi^2) (1 + \xi^3), \\
\varphi_{(7)}^{(1)+} &= \frac{1}{4h_1} (1 - \xi^1) (1 + \xi^2) (1 + \xi^3), \\
\varphi_{(8)}^{(1)+} &= \frac{1}{4h_1} (1 + \xi^1) (1 + \xi^2) (1 + \xi^3).
\end{aligned} \tag{10}$$

Для 2-го слоя:

$$\begin{aligned}
\varphi_{(1)}^{(2)-} &= \frac{1}{4h_2} (1 - \xi^1) (1 - \xi^2) (h_1 + h_2 - 1 - \xi^3), \\
\varphi_{(2)}^{(2)-} &= \frac{1}{4h_2} (1 + \xi^1) (1 - \xi^2) (h_1 + h_2 - 1 - \xi^3), \\
\varphi_{(3)}^{(2)-} &= \frac{1}{4h_2} (1 - \xi^1) (1 + \xi^2) (h_1 + h_2 - 1 - \xi^3), \\
\varphi_{(4)}^{(2)-} &= \frac{1}{4h_2} (1 + \xi^1) (1 + \xi^2) (h_1 + h_2 - 1 - \xi^3), \\
\varphi_{(5)}^{(2)+} &= \frac{1}{4h_2} (1 - \xi^1) (1 - \xi^2) (1 - h_1 + \xi^3), \\
\varphi_{(6)}^{(2)+} &= \frac{1}{4h_2} (1 + \xi^1) (1 - \xi^2) (1 - h_1 + \xi^3),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi_{(7)}^{(2)+} &= \frac{1}{4h_2} (1 - \xi^1) (1 + \xi^2) (1 - h_1 + \xi^3), \\ \varphi_{(8)}^{(2)+} &= \frac{1}{4h_2} (1 + \xi^1) (1 + \xi^2) (1 - h_1 + \xi^3).\end{aligned}\quad (11)$$

Для 3-го слоя:

$$\begin{aligned}\varphi_{(1)}^{(3)-} &= \frac{1}{4h_3} (1 - \xi^1) (1 - \xi^2) (1 - \xi^3), \\ \varphi_{(2)}^{(3)-} &= \frac{1}{4h_3} (1 + \xi^1) (1 - \xi^2) (1 - \xi^3), \\ \varphi_{(3)}^{(3)-} &= \frac{1}{4h_3} (1 - \xi^1) (1 + \xi^2) (1 - \xi^3), \\ \varphi_{(4)}^{(3)-} &= \frac{1}{4h_3} (1 + \xi^1) (1 + \xi^2) (1 - \xi^3), \\ \varphi_{(5)}^{(3)+} &= \frac{1}{4h_3} (1 - \xi^1) (1 - \xi^2) (1 - h_3 + \xi^3), \\ \varphi_{(6)}^{(3)+} &= \frac{1}{4h_3} (1 + \xi^1) (1 - \xi^2) (1 - h_3 + \xi^3), \\ \varphi_{(7)}^{(3)+} &= \frac{1}{4h_3} (1 - \xi^1) (1 + \xi^2) (1 - h_3 + \xi^3), \\ \varphi_{(8)}^{(3)+} &= \frac{1}{4h_3} (1 + \xi^1) (1 + \xi^2) (1 - h_3 + \xi^3).\end{aligned}\quad (12)$$

Компоненты вектора перемещений точек  $k$ -го слоя КЭ можно так же аппроксимировать в виде разложения:

$$\begin{aligned}u_i^{(k)} &= \omega_i^{(000)} \psi^{(100)} + \omega_i^{(010)} \psi^{(010)} + \omega_i^{(001)} \psi^{(001)} + \omega_i^{(110)} \psi^{(110)} + \\ &+ \omega_i^{(101)} \psi^{(101)} + \omega_i^{(011)} \psi^{(011)} + \omega_i^{(111)} \psi^{(111)} \\ \text{или} \\ u_i^{(k)} &= \sum_{p=0}^1 \sum_{q=0}^1 \sum_{r=0}^1 \omega_i^{(pqr)} \psi^{(pqr)},\end{aligned}\quad (13)$$

где  $\omega_i^{(pqr)}$  – коэффициенты разложения;

$\psi^{(pqr)}$  – набор степенных координатных функций вида:

$$\psi^{(pqr)} = \frac{(\xi^1)^p}{p!} \cdot \frac{(\xi^2)^q}{q!} \cdot \frac{(\xi^3 - \xi_{(0)}^{3(k)})^r}{r!}, \quad (p, q, r = 0, 1), \quad (14)$$

где  $\xi_{(0)}^{3(k)}$  – среднее значение координаты  $\xi^3$  по  $k$ -му слою.

Для координатных функций  $\psi^{(pqr)}$  выполняется условие дифференцирования:

$$\partial^{(\alpha+\beta+\gamma)} \psi^{(pqr)} = \psi^{(p-\alpha \quad q-\beta \quad r-\gamma)}. \quad (15)$$

Производные от функции перемещений внутри  $k$ -го слоя КЭ имеют вид:

$$\begin{aligned}u_{i,1}^{(k)} &= \omega_i^{(100)} + \omega_i^{(110)} \psi^{(010)} + \omega_i^{(001)} \psi^{(001)} + \omega_i^{(111)} \psi^{(011)}; \\ u_{i,2}^{(k)} &= \omega_i^{(010)} + \omega_i^{(110)} \psi^{(100)} + \omega_i^{(011)} \psi^{(001)} + \omega_i^{(111)} \psi^{(101)}; \\ u_{i,3}^{(k)} &= \omega_i^{(001)} + \omega_i^{(101)} \psi^{(100)} + \omega_i^{(011)} \psi^{(010)} + \omega_i^{(111)} \psi^{(110)}.\end{aligned}\quad (16)$$

Между компонентами разложения перемещения по базисным функциям  $\psi^{(pqr)}$  перемещениями узловых точек слоя  $u_{(l)}^{(k)\pm}$  существует взаимосвязь:

$$u_i = \{u_{(l)}^{(k)\pm}\}^T \{\varphi\} = \{\omega_i\}^T \{\psi\}, \quad (17)$$

где

$$\{\omega_i\} = [A] \{u_{(l)}^{(k)\pm}\}; \quad (18)$$

$$\{\varphi\} = [A]^T \{\psi\}. \quad (19)$$

Компоненты тензора деформаций представим в виде разложения по степенным функциям:

$$\varepsilon_{ij} = \sum_{stq} e_{ij}^{(stq)} \psi^{(stq)}. \quad (20)$$

В матричной форме:

$$\varepsilon_{ij} = \{e_{ij}\}^T \{\psi(y)\}, \quad (21)$$

где  $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( a'_k \frac{\partial u_k}{\partial \xi^j} + a'_k \frac{\partial u_k}{\partial \xi^i} \right)$  – линейный тензор деформации;

$a'_k = \frac{\partial z^i}{\partial \xi^k}$  – тензор преобразования координат.

Представим коэффициенты разложения  $e_{ij}$  тензора деформаций  $\varepsilon_{ij}$ , входящие в (20) через коэффициенты аппроксимации перемещений  $\omega_s^{(pqr)}$  (18):

$$\{e_{ij}\} = [F_{ij}^s] \{\omega_s\}. \quad (22)$$

Матрица  $[F_{ij}^s]$  может быть получена в соответствии с моментной схемой конечных элементов [11]:

$$\begin{aligned} e_{11}^{(pqr)} &= \sum_{\mu\nu\eta} \omega_s^{(\mu+1\nu\eta)} b_{(p+1-\mu q-\nu r-\eta)}^s, \\ e_{22}^{(pqr)} &= \sum_{\mu\nu\eta} \omega_s^{(\mu\nu+1\eta)} b_{(p-\mu q+1-\nu r-\eta)}^s, \\ e_{33}^{(pqr)} &= \sum_{\mu\nu\eta} \omega_s^{(\mu\nu\eta+1)} b_{(p-\mu q-\nu r+1-\eta)}^s, \\ e_{12}^{(pqr)} &= \frac{1}{2} \sum_{\mu\nu\eta} \left( \omega_s^{(\mu\nu+1\eta)} b_{(p-\mu+1 q-\nu r-\eta)}^s + \omega_s^{(\mu+1\nu\eta)} b_{(p-\mu q-\nu+1 r-\eta)}^s \right), \\ e_{13}^{(pqr)} &= \frac{1}{2} \sum_{\mu\nu\eta} \left( \omega_s^{(\mu\nu\eta+1)} b_{(p-\mu+1 q-\nu r-\eta)}^s + \omega_s^{(\mu+1\nu\eta)} b_{(p-\mu q-\nu r-\eta+1)}^s \right), \\ e_{23}^{(pqr)} &= \frac{1}{2} \sum_{\mu\nu\eta} \left( \omega_s^{(\mu\nu\eta+1)} b_{(p-\mu q-\nu+1 r-\eta)}^s + \omega_s^{(\mu\nu+1\eta)} b_{(p-\mu q-\nu r-\eta+1)}^s \right). \end{aligned} \quad (23)$$

где

$$b_{(\mu\nu\eta)}^s = \frac{\partial^{(\mu+\nu+\eta)} z^s}{\left(\partial \xi^1\right)^\mu \left(\partial \xi^2\right)^\nu \left(\partial \xi^3\right)^\eta} \Big|_{\xi^1 = \xi^2 = 0, \xi^3 = \xi^3(k)}$$

Анализируя каждую из компонент  $e_{11}^{(pqr)}$  замечаем, что некоторые коэффициенты  $\omega_s^{(mnl)}$  не входят в разложение для аппроксимации перемещений. Коэффициенты разложения деформаций  $e_{11}^{(pqr)}$ , которые содержат хотя бы один из членов, отсутствующих в (19) должны быть опущены в разложении (20). Таким образом, получим следующее разложение:

$$\varepsilon_{11} = e_{11}^{(000)} + e_{11}^{(001)} \psi^{(001)} + e_{11}^{(010)} \psi^{(010)} + e_{11}^{(011)} \psi^{(011)}. \quad (24)$$

На основании разложения (23), (24) строится матрица  $[F_{11}^s]$ .

Проведя аналогично выкладки для остальных компонент тензора деформаций, получаем следующие выражения их разложения в ряд:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{22} &= e_{22}^{(000)} + e_{22}^{(100)} \psi^{(100)} + e_{22}^{(001)} \psi^{(001)} + e_{22}^{(101)} \psi^{(101)}, \\ \varepsilon_{33} &= e_{33}^{(000)} + e_{33}^{(100)} \psi^{(100)} + e_{33}^{(010)} \psi^{(010)} + e_{33}^{(110)} \psi^{(110)}, \\ \varepsilon_{12} &= e_{12}^{(000)} + e_{12}^{(001)} \psi^{(001)}, \\ \varepsilon_{13} &= e_{13}^{(000)} + e_{13}^{(010)} \psi^{(010)}, \\ \varepsilon_{23} &= e_{23}^{(000)} + e_{23}^{(100)} \psi^{(100)}. \end{aligned} \quad (25)$$

Матрицы  $[F_{22}^s]$ ,  $[F_{33}^s]$ ,  $[F_{12}^s]$ ,  $[F_{13}^s]$ ,  $[F_{23}^s]$  строятся аналогично.

Вариация упругой энергии деформации  $k$ -го слоя имеет вид:

$$\delta W_k = \iiint_{V_k} \sigma^{ij} \delta \varepsilon_{ij} dv = \iiint_{V_k} C^{ijnm} \varepsilon_{nm} \delta \varepsilon_{ij} dv. \quad (26)$$

Подставив выражения (2.19) в (2.26) получаем:

$$\begin{aligned} \delta W_k &= \iiint_{V_k} \left\{ \delta \varepsilon_{ij} \right\}^T \left\{ \psi_{(ij)} \right\} \left[ C^{ijnm} \right] \left\{ \psi_{(nm)} \right\} \left\{ e_{nm} \right\} dv = \\ &= \iiint_{V_k} \left\{ \delta u_{(i)s}^{(k)\pm} \right\}^T [A]^T [F_{ij}^s]^T \left\{ \psi_{(ij)} \right\} \left[ C^{ijnm} \right] \left\{ \psi_{(nm)} \right\} [F_{nm}^t] [A] \left\{ u_{(i)t}^{(k)\pm} \right\} dv = \\ &= \iiint_{V_k} \left\{ \delta u_{(i)s}^{(k)\pm} \right\}^T [A]^T [F_{ij}^s]^T \left\{ \psi_{(ij)} \right\} \left[ C^{ijnm} \right] \left\{ \psi_{(nm)} \right\} [F_{nm}^t] [A] \left\{ u_{(i)t}^{(k)\pm} \right\} dv \end{aligned} \quad (27)$$

Для построения матрицы  $[C^{ijkl}]$  компоненты тензора упругих постоянных  $C_*^{ijkl}$  задаются в соответствии с видом анизотропии композита в системе координат  $X_j$ , связанной с осями анизотропии. Для перехода в местную систему координат  $\xi_j^i$  преобразование тензора четвертого ранга осуществляется по формуле [5]:

$$C^{ijkl} = C_*^{mnpq} d_m^i d_n^j d_p^k d_q^l, \quad (28)$$

где  $d_m^i$  – тензор поворота системы координат, который связан с тензором преобразования координат  $h_m^i = \frac{d\xi^i}{dx_m}$  следующим соотношением  $d_m^i = \frac{h_m^i}{\sqrt{g_{mm}}}$ , ( $g_{mm}$  – компоненты метрического тензора).

Вариация энергии упругой деформации КЭ будет иметь вид:

$$\delta W = \sum_k \delta W_k = \delta \{u_s\}^T [K^{st}] \{u_t\}, \quad (29)$$

где  $[K^{st}]$  – матрица жесткости конечного элемента.

Исходя из закона сохранения энергии, вариационное уравнение термоупругости Био как обобщение вариационного принципа Лагранжа имеет вид [2]:

$$\iiint_{V_k} \delta F \sqrt{g} d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3 - \iiint_{V_k} \bar{P} \delta \bar{u} \sqrt{g} d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3 - \iint_{S_k} \bar{q} \delta \bar{u} ds = 0. \quad (30)$$

Вариация свободной энергии  $\delta F$  вычисляется по формуле:

$$\delta F = \delta W - \sigma_{(T)}^{ij} \delta \varepsilon_{ij}, \quad (31)$$

здесь  $\delta W = \sigma^{ij} \delta \varepsilon_{ij}$  – вариация упругой энергии деформации.

В случае совместного действия нагрузки и температуры, возникающие деформации представляются в виде суммы упругой  $\varepsilon_{ij}^{(y)}$  и температурной соответствующей  $\varepsilon_{ij}^{(T)}$ :

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^{(y)} + \varepsilon_{ij}^{(T)}, \quad (32)$$

$$\varepsilon_{ij}^{(T)} = \alpha_{ij}^{(T)} (T - T_0), \quad (33)$$

где  $\alpha_{ij}^{(T)}$  – тензор линейного теплового расширения;

$T$  – температура в точке тела;

$T_0$  – начальная температура.

Контравариантные компоненты тензора напряжений представляются в виде:

$$\sigma^{ij} = \sigma_{(y)}^{ij} - \sigma_{(T)}^{ij}, \quad (34)$$

где  $\sigma_{(y)}^{ij}$  – компоненты тензора напряжений, обусловленные перемещениями тела;

$\sigma_{(T)}^{ij}$  – температурные напряжения.

Компоненты тензора напряжений для анизотропной конструкции определяются законом термоупругости Дюгамеля-Неймана, представляющего собой закон Гука, обобщенный на случай учета температуры [11]:

$$\sigma^{ij} = C^{ijkl} \varepsilon_{kl} - \beta^{ij} (T - T_0), \quad (35)$$

где  $\beta^{ij} = C^{ijkl} \alpha_{kl}$  представляет собой тензор изотермических упругих постоянных, определяющих взаимное влияние температурного поля и поля деформаций.

**Задача.** Квадратная трехслойная плита под действием поперечных нагрузок.

Размеры плиты ( $a \times a$ ), относительный размер в плане  $\frac{a}{h} = 7$ , где  $h$  – общая толщина

пакета слоев. На боковых гранях плиты удовлетворяются граничные условия типа Навье, которым в рамках построенных моделей отвечает шарнирно подвижное закрепление контура. Начало координат принято в левом углу плиты. Каждый слой представляет собой композитный материал, армированный однонаправленными волокнами. В наружных слоях ( $k = 1, 3$ ) направление волокон совпадает с осью  $x_1$ , механические и теплофизические характеристики технических постоянных следующие:

$$E_1 = 172 \cdot 10^3 \text{ МПа}; E_2 = E_3 = 6,9 \cdot 10^3 \text{ МПа}; G_{12} = G_{13} = 3,45 \cdot 10^3 \text{ МПа};$$

$$G_{23} = 1,38 \cdot 10^3 \text{ МПа}; \nu_{21} = \nu_{31} = \nu_{23} = 0,25; \lambda_{11} = \lambda_{22} = \lambda_{33} = 1 \text{ Вт/(м·К)};$$

$$\alpha_{11} = 1 \cdot 10^{-6} \text{ 1/К}; \alpha_{22} = \alpha_{33} = 25 \cdot 10^{-6} \text{ 1/К}.$$

Характеристики внутреннего слоя ( $k = 2$ ) получаются заменой у нижних индексов  $1 \leftrightarrow 2$ , т.е. в этом слое волокна ориентированы под углом  $90^\circ$  к оси  $x_1$ . Толщина внутреннего слоя  $h_2 = 0,5h$ , толщины наружных слоев  $h_1 = 0,4h$ ,  $h_3 = 0,1h$ .

Рассмотрены следующие виды нагрузок:

– нормальная нагрузка, приложенная к верхней поверхности плиты:

$$p_3^{(n)} = \bar{p}_3^{(n)} \sin(\pi x_1 / a) \sin(\pi x_2 / a) ; \bar{p}_3 = 1 \text{ МПа}; \quad (36)$$

– касательная нагрузка, приложенная к верхней поверхности плиты:

$$p_1^{(n)} = \bar{p}_1^{(n)} \cos(\pi x_1 / a) \sin(\pi x_2 / a) ; \bar{p}_1 = -1 \text{ МПа}; \quad (37)$$

– приращение температурного поля, заданное на лицевых поверхностях плиты:

$$T_0 = \bar{T}_0 \sin(\pi x_1 / a) \sin(\pi x_2 / a) ; \bar{T}_0 = -30 \text{ К};$$

$$T_n = \bar{T}_n \sin(\pi x_1 / a) \sin(\pi x_2 / a) ; \bar{T}_n = 30 \text{ К}. \quad (38)$$

Результаты расчета приведены в таблице 1 в виде безразмерных величин  $\bar{\omega} = 10^3 u_3 / h$  и  $(\bar{\sigma}_{11}, \bar{\sigma}_{22}, \bar{\sigma}_{13}, \bar{\sigma}_{23}) = 172 \cdot 10^3 / E_1 (\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{13}, \sigma_{23})$ , полученных при различных сетках конечных элементов.

Нормальные перемещения  $\bar{\omega}$  в задачах статики даны на уровне срединной поверхности, а в задачах термоупругости – на поверхности  $x_3 = 0,5h$ . Максимальные нормальные напряжения  $\bar{\sigma}_{11}$  возникают в точке  $x_3 = 0,5h$ , а напряжения  $\bar{\sigma}_{22}$  – в точке  $x_3 = -0,1h$ . Эти перемещения и напряжения получены в центре плиты ( $x_1 = x_2 = a/2$ ). Максимальные поперечные касательные напряжения  $\bar{\sigma}_{13}$  отвечают точке  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = a/2$ , а напряжение  $\bar{\sigma}_{23}$  – точке  $x_1 = a/2$ ,  $x_2 = 0$ .

Для сравнения в таблице 1 отображены результаты, полученные на основе классической теории пластин, а также результаты расчета на основе уточненной теории пластин, приведены данные работы [12].

Результаты расчета приведены на рисунках 1 – 16.

Таблица 1

Результаты расчета трехслойной плиты

Вид нагрузки (формула)	Модель	$\bar{\omega}$	$\bar{\sigma}_{11}$	$\bar{\sigma}_{22}$	$\bar{\sigma}_{13}$	$\bar{\sigma}_{23}$
(36)	[21]	3,627	37,15	26,390	1,977	1,674
	КТП	1,914	42,86	17,570	2,107	1,223
	МКЭ:					
	(2x7x7)	4,536	53,42	31,913	2,987	2,305
	(2x11x11)	4,254	45,71	28,876	2,457	1,932
(2x15x15)	3,934	41,23	27,631	2,036	1,793	
(37)	[21]	0,482	18,90	-3,293	-1,000	0,238
	КТП	0,551	16,47	-4,793	-1,000	0,344
	МКЭ:					
	(2x7x7)	0,731	21,78	-5,91	-1,000	0,247
	(2x11x11)	0,613	20,43	-4,27	-1,000	0,271
(2x15x15)	0,527	19,68	-3,629	-1,000	0,256	
(38)	[21]	0,986	8,197	-5,679	0,345	0,370
	КТП	0,878	9,829	-4,232	0,384	0,440
	МКЭ:					
	(2x7x7)	1,343	10,273	-7,351	0,537	0,313
	(2x11x11)	1,253	9,217	-6,179	0,413	0,367
(2x5x15)	1,136	8,946	-5,783	0,362	0,383	



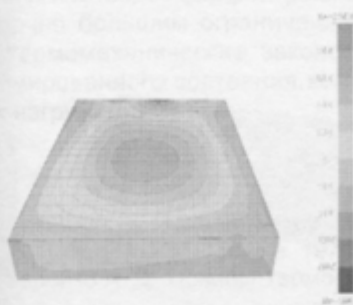


Рис. 1. Распределение поперечных перемещений под действием нормальной нагрузки

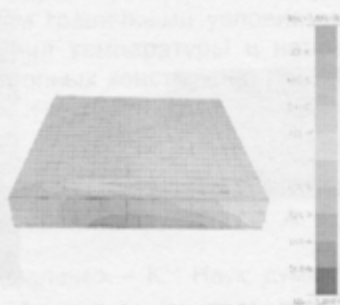


Рис. 2. Распределение напряжений  $\sigma_{11}$  под действием нормальной загрузки

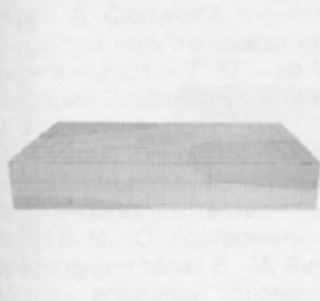


Рис. 3. Распределение напряжений  $\sigma_{12}$  под действием нормальной загрузки

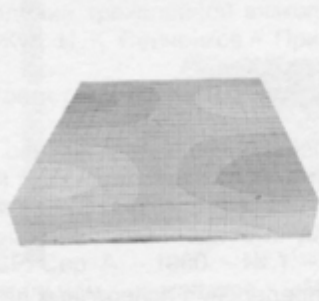


Рис. 4. Распределение напряжений  $\sigma_{23}$  под действием нормальной загрузки

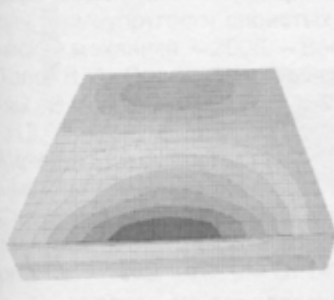


Рис. 5. Распределение напряжений  $\sigma_{13}$  под действием нормальной загрузки

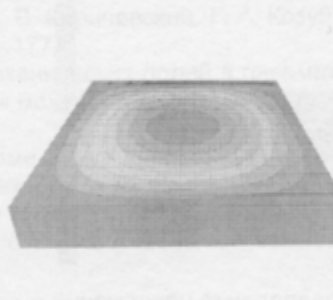


Рис. 6. Распределение поперечных перемещений под действием касательной нагрузки

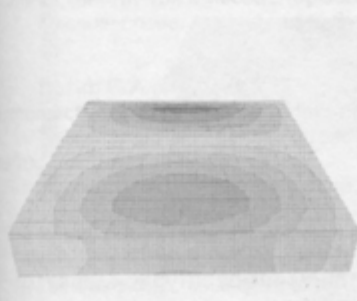


Рис. 7. Распределение напряжений  $\sigma_{13}$  под действием касательной нагрузки

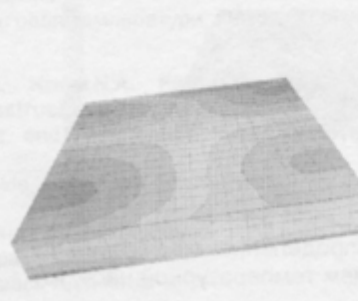


Рис. 8. Распределение напряжений  $\sigma_{12}$  под действием касательной нагрузки

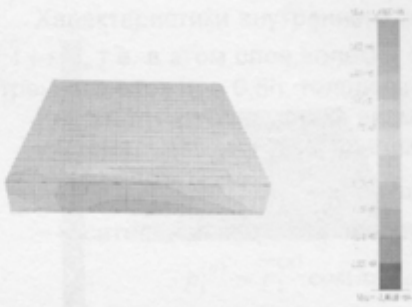


Рис. 9. Распределение напряжений  $\sigma_{11}$  под действием касательной нагрузки

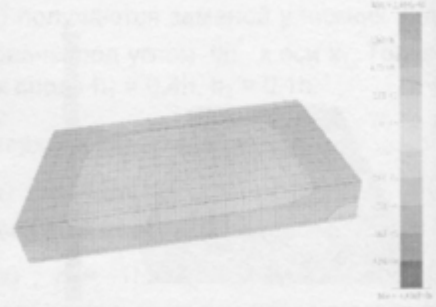


Рис. 10. Распределение напряжений  $\sigma_{22}$  под действием касательной нагрузки

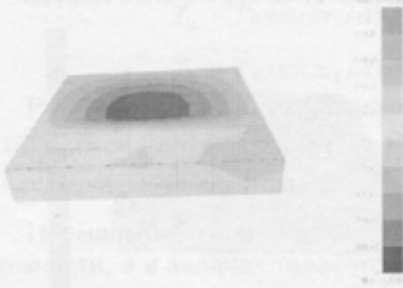


Рис. 11. Распределение поперечных перемещений под действием температурной нагрузки

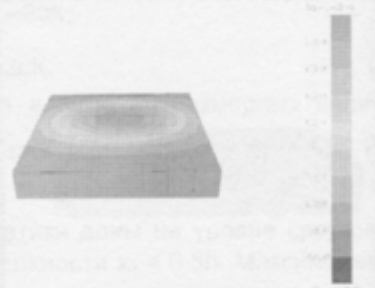


Рис. 12. Распределение напряжений  $\sigma_{11}$  под действием температурной нагрузки

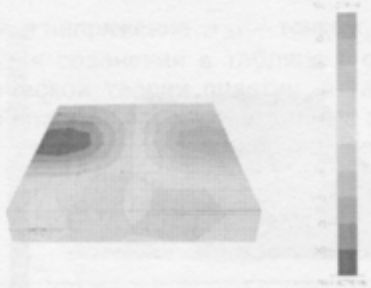


Рис. 13. Распределение напряжений  $\sigma_{12}$  под действием температурной нагрузки

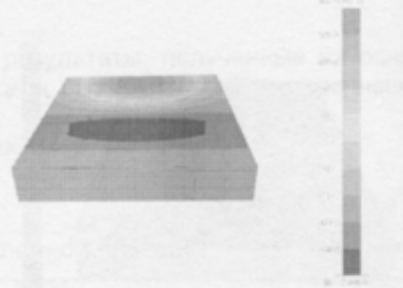


Рис. 14. Распределение напряжений  $\sigma_{13}$  под действием температурной нагрузки

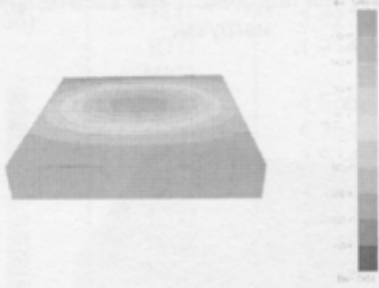


Рис. 15. Распределение напряжений  $\sigma_{22}$  под действием температурной нагрузки

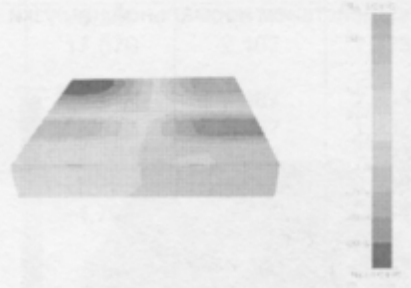


Рис. 16. Распределение напряжений  $\sigma_{23}$  под действием температурной нагрузки

Предложенная методика решения задач термомеханики конструкций построена на основе пространственной теории упругости, не зависит от порядка разрешающих уравнений и от структуры пакета слоев, позволяет проводить расчеты реальных конструкций на тепловые нагрузки. При этом можно избежать использования упро-

щающих гипотез, сводящих трехмерную задачу к плоской постановке, что приводит к достаточно большим ограничениям и погрешностям граничными условиями. Выявлены термомеханические закономерности изменения температуры и напряженно-деформированного состояния композитных анизотропных конструкций при термосиловых нагружениях.

### Л и т е р а т у р а

1. Ильюшин А. А. Основы математической теории термовязкоупругости / А. А. Ильюшин, Б. Е. Победря. – М. : Наука, 1970. – 280 с.
2. Коваленко А. Д. Основы термоупругости / А. Д. Коваленко. – К. : Наук. думка, 1970. – 307 с.
3. Карнаухов В. Г. Связанные задачи термовязкоупругости / В. Г. Карнаухов. – К. : Наук. думка, 1982. – 280 с.
4. Жук Я. А. Связанное термомеханическое поведение трехслойной вязкопластической балки при гармоническом нагружении / Я. А. Жук, И. К. Сенченков // Прикладная механика. – 2001. – Т. 37. – № 1. – С. 93 – 99.
5. Новацкий В. Динамические задачи термоупругости / В. Новацкий. – М. : Мир, 1975. – 256 с.
6. Папкович П. Ф. Выражение общего интеграла основных уравнений теории упругости через гармонические функции / П. Ф. Папкович // Известия АН СССР. Отделение математических и естественных наук. – 1932. – № 10. – С. 1425 – 1435.
7. Вигак В. М. О построении решения уравнения теплопроводности для кусочно-однородного тела / В. М. Вигак // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1980. – № 1. – С. 30 – 32.
8. Метод конечных элементов в вычислительном комплексе «МИРЕЛА+» / В. В. Киричевский, Б. М. Дохняк, Ю. Г. Козуб и др. ; под общ. ред. В. В. Киричевского. – К. : Наук. думка, 2005. – 403 с.
9. Киричевский В. В. Матрица теплопроводности конечного элемента для решения задач термоупругости слоистых композитов / В. В. Киричевский, Г. А. Козуб // Геотехническая механика. – 2006. – Вып. 63. – С. 172 – 177.
10. Толок В. А. Определение связанных термомеханических полей в пневматических шинах / В. А. Толок, Г. А. Козуб // Геотехническая механика. – 2007. – Вып. 70. – С. 107 – 113.
11. Киричевский В. В. Нелинейные задачи термомеханики конструкций из слабосжимаемых эластомеров / В. В. Киричевский, А. С. Сахаров. – К. : Будівельник, 1992. – 216 с.
12. Сипетов В. С. Уточненный анализ поведения слоистых композитных конструкций при тепловом и статическом воздействии / В. С. Сипетов // Механика композитных материалов. – 1989. – № 1. – С. 142 – 149.

**Козуб Г.О., Козуб Ю.Г., Дяченко С.В., Хміль Н.А. Скінченноеlemente моделювання термомеханічного деформування шаруватих анізотропних конструкцій.**

Запропоновано метод визначення напружено-деформованого стану і полів температури анізотропних конструкцій в умовах термосилових навантажень.

*Ключові слова:* напружено-деформований стан, поля температури, анізотропні конструкції.

**Kozub G.A., Kozub Y.G., Dyachenko S.V., Khmil N.A. Finite method modelling of thermomechanic deformation of layer anisotropic constructions.**

The method to define stress-deformed state and temperature fields of layer anisotropic constructions are proposed.

*Keywords:* stress-deformed state, temperature fields, anisotropic constructions.

Козуб Г.А., ст.препод кафедры ИТС, ЛНУ имени Тараса Шевченка

Козуб Ю.Г., доц. кафедры ИГД ЛНУ имени Тараса Шевченка

Дяченко С.В., ас кафедры ИТС ЛНУ имени Тараса Шевченка

Хміль Н.А., ас кафедры ИТС ЛНУ имени Тараса Шевченка

Рецензент Пожидаєв В.Ф., д.т.н., професор.

Стаття подана  
24.03.2010.