**Міністерство освіти і науки України**

**Державний заклад**
**«Луганський національний університет**
**імені Тараса Шевченка»**

# ДОСЛІДЖЕННЯ ОПЕРАЦІЙ

Навчальний посібник

**Луганськ**
**ДЗ «ЛНУ імені Тараса Шевченка»**
**2011**

**УДК 330.45(076.1)**
**ББК 65в631р**
**І 30**

**Р е ц е н з е н т и:**

***Димарський Я.М.*** **–** доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри інформатики та інформаційних технологій у діяльності ОВС Луганського державного університету внутрішніх справ імені Е.О. Дідоренка

***Різун В.І.*** **–** кандидат фізико-математичних наук, професор Східноукраїнського національного університету імені Володимира Даля

***Попов Б.В.*** **–** кандидат фізико-математичних наук, доцент, завідувач кафедри загальної математики Луганського національного університету імені Тараса Шевченка

**І-30** **Іє О.М. Дослідження операцій**: навч. посіб. для студ. вищ. навч. закл. – Держ. закл. «Луган. нац. ун-т імені Тараса Шевченка». – Луганськ: Вид-во ДЗ «ЛНУ імені Тараса Шевченка», 2011. – 128 с.

Видання призначене для студентів та викладачів, які спеціалізуються з прикладних напрямків математики, зокрема для студентів, що навчаються за спеціальностями 7.080101 «Математика», 6.040302 «Інформатика».

Посібник містить програму курсу «Дослідження операцій», повну теоретичну базу з основних тем дисципліни, приклади розв’язування типових задач за цими темами, питання та задачі до кожного модуля курсу, матеріал для самостійного опрацювання. Навчальний посібник пристосовано до організації навчального процесу в умовах кредитно-модульної системи.

**УДК 330.45(076.1)**
**ББК 65в631р**

*Затверджено до друку навчально-методичною радою Луганського національного університету імені Тараса Шевченка (протокол №6 від 2 лютого 2011 року).*

**Зміст**

# ВСТУП

Дослідження операцій належить до порівняльно молодих, що недавно сформувалися, дисциплін (1947 г., США, Англія).

У самих різних областях людської діяльності, таких як організація виробництва і постачання, експлуатація транспорту, розстановка кадрів, побутове обслуговування, охорона здоров'я, зв'язок, обчислювальна техніка і т.п. – все частіше виникають задачі, що схожі між собою по постановці, володіють рядом загальних ознак і вирішуються схожими методами, які і об'єднуються під загальною назвою «задач дослідження операцій».

Таким чином, під терміном «**дослідження операцій»** ми розумітимемо застосування математичних, кількісних методів для обґрунтування рішень у всіх областях цілеспрямованої людської діяльності.

**Об'єктом** теорії дослідження операцій є великі організаційно-управлінські системи (якими є підприємства, об'єднання, фірми і т. п.)

Всякий певний вибір залежних від нас параметрів, називається **рішенням**, а ті параметри, сукупність яких утворює рішення, називаються **елементами рішення**.

Рішення можуть бути вдалими і невдалими, розумними і безрозсудними. Відмітимо, що ухвалення рішення на підставі досвіду або інтуїції – це ще не означає, що ми займаємося «дослідженням операцій». Дослідження операцій починається тоді, коли для обґрунтування рішень застосовується той або інший математичний апарат.

Щоб порівняти між собою по ефективності різні рішення, потрібно мати якийсь кількісний критерій, так званий показник ефективності, величину, що обчислюється на підставі фактичних спостережень, які дають підстави для думок про послідовність деяких гіпотез.

Під **операцією** розумітимемо будь-який захід (або систему дій), об'єднаний єдиним задумом і направлений до досягнення певної мети.

Операція завжди є керованим заходом. Тому ухвалене рішення повинне бути якнайкращим.

**Оптимальним** називається рішення, яке по тих або інших міркуваннях, має перевагу над іншими.

**Основна задача** дослідження операцій полягає в попередньому кількісному обґрунтуванні оптимального рішення.

**Мета операції** – це бажаний стан об'єкту дослідження після перетворення його сукупністю дій або бажаний результат діяльності.

Т.е. задача дослідження операцій полягає в тому, щоб підготувати кількісні дані і рекомендації, що полегшують людині ухвалювати рішення, а не повна автоматизація ухвалення рішень. Іншими словами, дослідження операцій здійснюється на вивчених властивостях математичних моделей об'єктів дослідження.

Разом з основною задачею – обґрунтуванням оптимальних рішень – до області дослідження операцій відносяться і інші задачі, такі як:

1) порівняльна оцінка різних варіантів організації операції;

2) оцінка впливу на результат операції різних параметрів (елементів рішення і заданих умов);

3) дослідження так званих «вузьких місць», тобто елементів керованої системи, порушення яких особливо сильно позначається на успіху операції; і т.д.

Для застосування кількісних методів дослідження в будь-якій області завжди потрібно побудувати математичну модель явища або процесу.

Математичний опис реальних ситуацій за допомогою символів, забезпечених певним смисловим навантаженням, називається побудовою математичної моделі.

**Математична модель** – це система математичних співвідношень, яка відображає найбільш істотні властивості реального об'єкту, тобто встановлює взаємозв'язок між параметрами досліджуваного процесу.

Процес побудови і вивчення математичної моделі називається **математичним моделюванням.**

У дослідженні операцій широко застосовуються як аналітичні, так і статистичні моделі. Аналітичні моделі грубіші, враховують менше число чинників, завжди вимагають якихось допущень і спрощень. Але вони більше пристосовані для пошуку оптимальних рішень.

Статистичні моделі точніші і докладніші, не вимагають грубих допущень і дозволяють врахувати більше число чинників, але з їх допомогою важко шукати оптимальне рішення.

Статистичні моделі встановлюють залежність між показниками і визначальними їх чинниками у вигляді **лінійної** і **нелінійної функції**.

**Економіко-статистичні** моделі пов'язані з показниками, згрупованими різними способами.

**Економіко-математичні** моделі включають систему обмежень і цільову функцію.

**Критерій оптимальності** – це економічний показник, що виражається за допомогою цільової функції через інші економічні показники.

**Показник** – це кількісна характеристика якої-небудь властивості економічних об'єктів і процесів, якісно певна величина, що є результатом вимірювання або розрахунку.

Теорія дослідження операцій включає наступні розділи:

1) Дробово-лінійне програмування;

2) Параметричне програмування;

3) Блокове програмування;

4) Опукле програмування;

5) Динамічне програмування;

6) Нелінійне програмування;

7) Квадратичне програмування;

8) Стохастичне програмування;

9) Теорія ігор;

10) Теорія масового обслуговування;

11) Теорія розкладів;

12) Управління запасами.

Деякі з цих розділів ми і розглянемо в посібнику з урахуванням того, що математичне програмування, яке включає елементи лінійної алгебри і $n$–мірної геометрії, матричне числення і нерівності, лінійне програмування, транспортну задачу і цілочисельне програмування, вже розглянуто.

Даний посібник призначений для успішного оволодіння читачем понять і методів курсу «Дослідження операцій». Виклад основного теоретичного матеріалу супроводжується прикладами та задачами прикладного характеру. Зміст, структура та методика викладення матеріалу сприятимуть індивідуалізації навчального процесу.

## СТРУКТУРА КУРСУ ЗА ТЕМАМИ

### Модуль №1

Тема 1. Дробово–лінійне програмування

1.1. Постановка задачі дробово–лінійного програмування, її економічний і геометричний сенс

1.2. Зведення задачі дробово–лінійного програмування до задачі лінійного програмування

Тема 2. Параметричне програмування

2.1. Постановка задачі параметричного програмування, її економічний і геометричний сенс

2.2. Знаходження рішення задачі параметричного програмування

2.3. Двоїста задача параметричного програмування

### Модуль №2

Тема 3. Нелінійне програмування

3.1. Постановка задачі нелінійного програмування. Основні поняття і визначення

3.2. Метод множників Лагранжа

Тема 4. Опукле програмування

4.1. Опуклі функції. Постановка задачі опуклого програмування

4.2. Теорема Куна–Таккера

Тема 5. Квадратичне програмування

5.1. Основні поняття і постановка задачі квадратичного програмування

Тема 6. Динамічне програмування

6.1. Загальна характеристика задач динамічного програмування і їх геометрична і економічна інтерпретації

6.2. Знаходження рішення задачі методом динамічного програмування

6.3. Види задач, вирішуваних методом ДП. Задача розподілу ресурсів

**МОДУЛЬ №1**

# ТЕМА 1. ДРОБОВО–ЛІНІЙНЕ ПРОГРАМУВАННЯ

## 1.1. Постановка задачі дробово–лінійного програмування, її економічний і геометричний сенс

**Дробово–лінійне програмування** – це розділ математичного програмування, що досліджує екстремальні задачі, цільові функції яких мають вигляд

$$F(x)=\frac{F_1(x)}{F_2(x)},$$

де $F_1(x)=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j$; $F_2(x)=\sum_{j=1}^{n}d_jx_j$ – лінійні функції і $F_2(x)\neq 0$.

При $F_2(x)\equiv 1$ задача дробово–лінійного програмування перетворюється на задачу лінійного програмування.

До задач дробово–лінійного програмування відносяться задачі про оптимізацію деяких економічних показників таких як: мінімізація собівартості або трудомісткості продукції, що випускається, максимізація продуктивності, мінімізація собівартості перевезень і т.д.

Загальна задача дробово-лінійного програмування ставиться так: знайти максимальне значення цільової функції

$$F=\frac{\sum_{j=1}^{n}c_jx_j}{\sum_{j=1}^{n}d_jx_j}=\frac{F_1}{F_2}\rightarrow \max \qquad (1.1)$$

при системі обмежень

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=b_i \quad \left(i=\overline{1,m}\right) \qquad (1.2)$$

і умові позитивності

$$x_j \geq 0 \quad \left(j = \overline{1,n}\right), \tag{1.3}$$

де $c_j$, $d_j$, $b_i$ і $a_{ij}$ – деякі постійні числа; $\sum_{j=1}^{n} d_j x_j \geq 0$ і $\sum_{j=1}^{n} d_j x_j \neq 0$ в області ненегативних рішень системи лінійних рівнянь (1.2). При цьому припускатимемо, що $\sum_{j=1}^{n} d_j x_j \geq 0$ (така умова не порушує спільності задачі, оскільки у тому випадку, коли ця величина негативна, знак мінус можна віднести до чисельника).

Як і у випадку ОЗЛП, своє максимальне значення цільова функція (1.1) приймає в одній з вершин многогранника рішень, що визначається системою обмежень (1.2)–(1.3) (природно, за умови, що ця задача має оптимальний план).

Розглянемо задачу в $R^2$, яка полягає у визначенні максимального значення цільової функції

$$F = \frac{c_1 x_1 + c_2 x_2}{d_1 x_1 + d_2 x_2} \to \max \tag{1.4}$$

при системі обмежень

$$a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 \leq b_i \quad \left(i = \overline{1,m}\right) \tag{1.5}$$

і умовах позитивності

$$x_1 \geq 0, \; x_2 \geq 0. \tag{1.6}$$

Вважатимемо, що

$$d_1 x_1 + d_2 x_2 \neq 0.$$

Щоб знайти рішення графічним методом задачі (1.4)–(1.6), спочатку знаходимо багатокутник рішень, який визначається обмеженнями (1.5)–(1.6). Припускаючи, що цей багатокутник не порожній, вважаємо значення цільової функції, що дорівнює деякому числу $h$: $F = h$, отже пряма

$$\frac{c_1 x_1 + c_2 x_2}{d_1 x_1 + d_2 x_2} = h, \tag{1.7}$$

яка проходить через початок координат, має загальні точки з багатокутником рішень. Обертаючи побудовану пряму (1.7) навколо початку координат, або визначаємо вершину (вершини), в якій функція (1.4) приймає максимальне значення, або встановлює необмеженість функції на безлічі планів задачі.

Отже, процес геометричного знаходження рішення задачі (1.4)–(1.6) включає наступні етапи:

1. У системі обмежень задачі замінюють знаки нерівностей на знаки точної рівності і будують визначувані цією рівністю прямі.

2. Знаходять напівплощини, яки визначаються кожною з нерівностей системи обмежень задачі.

3. Знаходять багатокутник рішень задачі.

4. Знаходять пряму (1.7), рівняння якої виходить, якщо покласти значення цільової функції (1.4) деякому постійному числу.

5. Визначають точку максимуму або встановлюють нерозв'язність задачі.

6. Знаходять значення цільової функції в точці максимуму.

При графічному рішенні задачі дробово–лінійного програмування можуть бути наступні різні випадки.

1. Многогранник рішень обмежений, максимум і мінімум досягаються в його кутових точках (див. рис. 1.1).

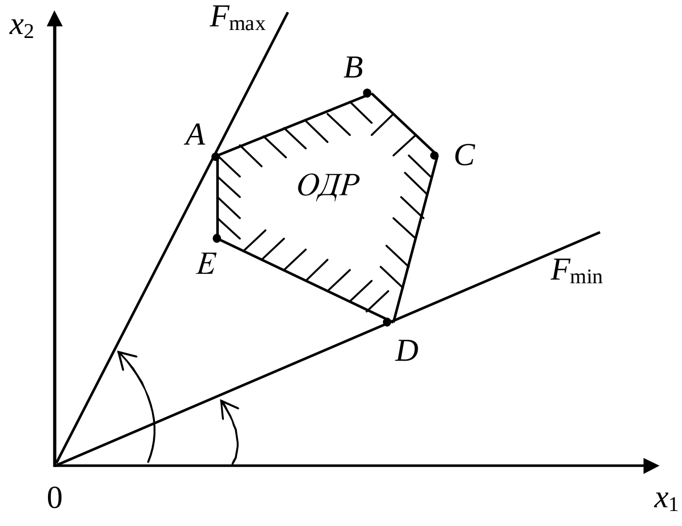



Рисунок 1.1. *ОДР* замкнута

2. Многогранник рішень не обмежений, проте існують кутові точки, в яких цільова функція задачі приймає відповідно максимальне і мінімальне значення (див. рис. 1.2).

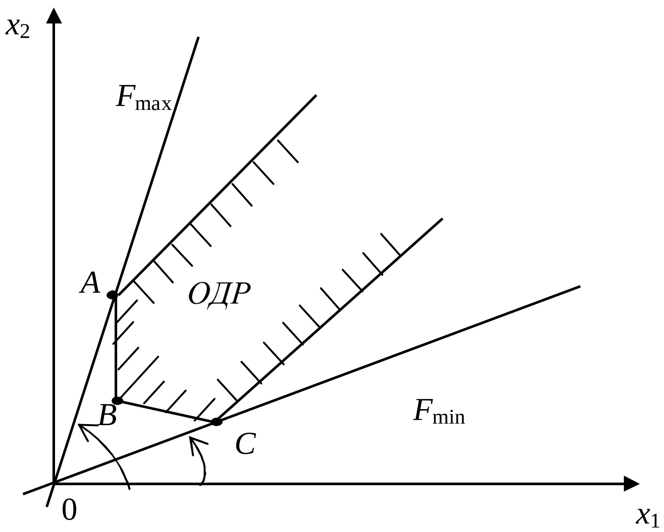



Рисунок 1.2. *ОДР* не обмежена

3. Многогранник рішень не обмежений, і один з екстремумів досягається. Наприклад, мінімум досягається в одній з вершин многогранника рішень і функція $F$ має так званий асимптотичний максимум (див. рис. 1.3).

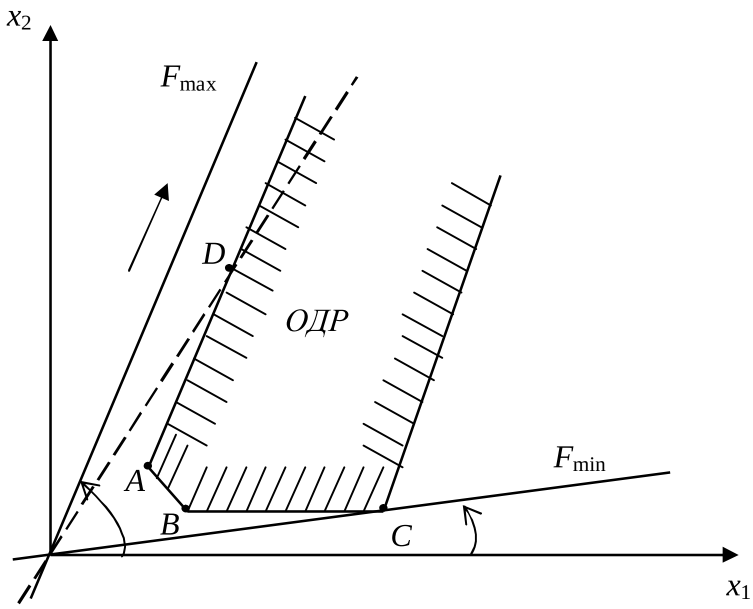



Рисунок 1.3. *ОДР* не обмежена

4. Многогранник рішень не обмежений, як максимум, так і мінімум є асимптотичними (див. рис. 1.4).

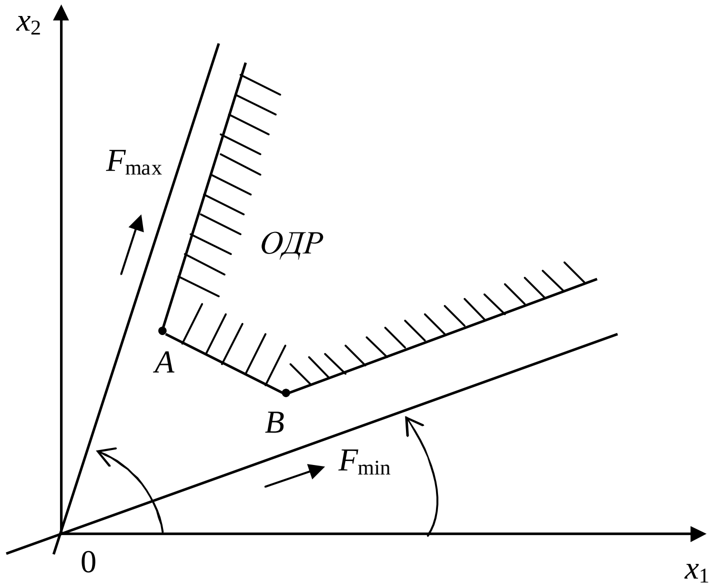



Рисунок 1.4. *ОДР* не обмежена. Рішень немає

**1.2. Зведення задачі дробово–лінійного програмування до задачі лінійного програмування**

Сформульована вище задача (1.4)–(1.6) може бути зведена до задачі лінійного програмування. Для цього слід позначити через

$$y_0 = \left\{ \sum_{j=1}^{n} d_j x_j \right\}^{-1} \tag{1.8}$$

і ввести нові змінні

$$y_j = y_0 x_j \quad \left( j = \overline{1, n} \right). \tag{1.9}$$

Використовуючи введені позначення, початкову задачу (1.4)–(1.6) зведемо до наступної.

Знайти максимум функції

$$F^* = \sum_{j=1}^{n} c_j y_j \to \max \qquad (1.10)$$

при системі обмежень

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j - b_i y_0 = 0 \quad i = \left(\overline{1,m}\right); & (1.11) \\ \sum_{j=1}^{n} d_j y_j = 1 & (1.12) \end{cases}$$

і умові позитивності:

$$y_j \ge 0 \quad \left(j = \overline{1,n}\right) \text{ і } y_0 \ge 0. \qquad (1.13)$$

Задача (1.10)–(1.13) є задачею лінійного програмування, а отже, її рішення можна знайти відомими методами. Знаючи оптимальний план цієї задачі, на основі співвідношень (1.9) отримуємо оптимальний план початкової задачі (1.4)–(1.6).

Таким чином, процес аналітичного знаходження рішення задачі дробово-лінійного програмування включає наступні етапи.

1) Зводять задачу (1.4)–(1.6) до задачі лінійного програмування (1.10)–(1.13).

2) Знаходять рішення задачі (1.10)–(1.13).

3) Використовуючи співвідношення (1.9), визначають оптимальний план задачі (1.4)–(1.6) і знаходять максимальне значення функції (1.4).

*Приклади розв'язання задач*

Поставимо задачу в загальному вигляді, яка полягає у визначенні максимального значення функції

$$F = \frac{c_1 x_1 + c_2 x_2}{d_1 x_1 + d_2 x_2} \to \max \tag{1.14}$$

за умов

$$a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 \le b_i \quad \left(i = \overline{1, m}\right), \tag{1.15}$$

$$x_1, x_2 \ge 0. \tag{1.16}$$

Вважатимемо, що

$$d_1 x_1 + d_2 x_2 \ne 0.$$

Нагадаємо, що процес знаходження рішення задачі (1.14)–(1.16) включає наступні етапи.

1) У системі обмежень задачі замінюють знаки нерівностей на знаки точної рівності і будують визначувані цією рівністю прямі.

2) Знаходять напівплощини, яки визначаються кожною з нерівностей системи обмежень задачі.

3) Знаходять багатокутник рішень задачі.

4) Будують пряму

$$\frac{c_1 x_1 + c_2 x_2}{d_1 x_1 + d_2 x_2} = h, \tag{1.17}$$

тобто потрібно покласти значення цільової функції (1.14) деякому постійному числу $h$.

5) Визначають точку максимуму або встановлюють нерозв'язність задачі.

6) Знаходять значення цільової функції в точці максимуму.

**Приклад 1.1.**

Для виробництва двох видів виробів $A$ і $B$ підприємство використовує три типи технологічного устаткування. Кожний з виробів повинен пройти обробку на кожному з типів устаткування. Час обробки кожного з виробів на устаткуванні даного типу приведено в таблиці 1.1. У ній же вказані витрати, пов'язані з виробництвом одного виробу кожного виду.

Устаткування I і II типів підприємство може використовувати не більше 26 і 39 годин. При цьому устаткування II типу доцільно використовувати не менше 4 годин. Потрібно визначити, скільки виробів кожного виду слід виготовити підприємству, щоб собівартість одного виробу була мінімальною.

Таблиця 1.1. Умови задачі

| Тип устаткування | Витрати часу (г) на обробку одного виробу | |
|---|---|---|
| | $A$ | $B$ |
| I | 2 | 8 |
| II | 1 | 1 |
| III | 12 | 3 |
| Витрати на виробництво одного виробу, грн. | 2 | 3 |

**Рішення**

Припустимо, що підприємство виготовить $x_1$ виробів виду $A$ і $x_2$ виробів виду $B$. Тоді загальні витрати на їх виробництво дорівнюють $2x_1 + 3x_2$ грн., а собівартість одного виробу в гривнах складе

$$F = \frac{2x_1 + 3x_2}{x_1 + x_2} \to \min . \qquad (1.18)$$

Витрати часу на обробку вказаної кількості виробів на кожному з типів устаткування відповідно складуть $2x_1 + 8x_2$ години, $x_1 + x_2$ години і $12x_1 + 3x_2$ години. Так як устаткування I і III типів може бути зайнято обробкою виробів виду $A$ і $B$ не більше 26 і 39 годин, а устаткування II типу – не менше 4 годин, то повинні виконуватися наступні нерівності

$$\begin{cases} 2x_1 + 8x_2 \le 26\,, \\ x_1 + x_2 \ge 4\,, \\ 12x_1 + 3x_2 \le 39. \end{cases} \tag{1.19}$$

По своєму економічному сенсу

$$x_1, x_2 \ge 0\,. \tag{1.20}$$

Таким чином, математична постановка задачі полягає у визначенні ненегативного рішення системи лінійних нерівностей (1.19), що реалізовує мінімум функції (1.18). Щоб знайти рішення задачі, перш за все побудуємо багатокутник рішень (див. рис. 1.5):

Як видно з рисунка 1.5, їм є $\Delta BCD$. Значить, функція (1.18) приймає мінімальне значення в одній з точок: $B$, $C$ або $D$. Щоб визначити, в якій саме, покладемо значення функції $F$, що дорівнює деякому числу, наприклад $11/4$.

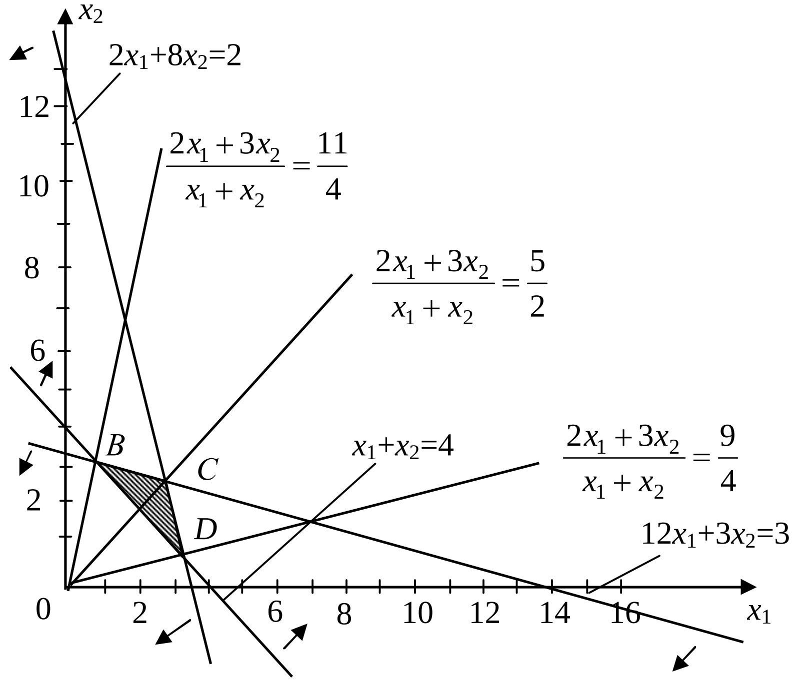



Рисунок 1.5. *ОДР* замкнута

Тоді

$$\frac{2x_1 + 3x_2}{x_1 + x_2} = \frac{11}{4}$$

або

$$-3x_1 + x_2 = 0. \qquad (1.21)$$

Рівняння (1.21) визначає пряму, що проходить через початок координат. Координати точок, що належать цій прямій і багатокутнику рішень, є планами задачі, при яких значення функції (1.18) дорівнює $11/4$. В даному випадку до вказаних точок відноситься лише одна точка $B(1,3)$. Її координати визначають план задачі, при якому значення функції дорівнює $11/4$.

Візьмемо тепер $h = 5/2$, тобто покладемо

$$\frac{2x_1 + 3x_2}{x_1 + x_2} = \frac{5}{2}$$

або

$$-x_1 + x_2 = 0. \qquad (1.22)$$

Рівняння (1.22) визначає пряму, що проходить через точку $O(0,0)$. При цьому координати точок, що належать прямій (1.22) і багатокутнику рішень, є планами задачі, при яких значення функції (1.18), дорівнює $5/2$, менше ніж в точках прямій (1.21). Отже, якщо покласти значення функції (1.18), що дорівнює деякому числу $h_0$,

$$F = \frac{2x_1 + 3x_2}{x_1 + x_2} = h_0, \qquad (1.23)$$

а пряму (1.23), що проходить через початок координат, обертати у напрямі руху годинникової стрілки навколо початку координат, то отримаємо прямі

$$F = \frac{2x_1 + 3x_2}{x_1 + x_2} = h, \text{ де } h < h_0.$$

Знайдемо останню загальну точку прямої, що обертається, з багатокутником рішень. Це точка $D(3,1)$, в якій досягається мінімум функції (1.18).

Таким чином, оптимальним планом виробництва продукції є план, згідно якому виготовляється 3 вироби виду $A$ і один виріб виду $B$. При такому плані собівартість одного виробу є мінімальною і дорівнює

$$F = \frac{2\cdot 3 + 3\cdot 1}{1+3} = \frac{9}{4}.$$

**Приклад 1.2.**

Знайти максимальне значення функції

$$F = \frac{2x_1 + x_2}{x_1 + x_2} \to \max \tag{1.24}$$

за умов

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 11, \\ x_1 - x_2 + x_4 = 8, \\ -x_1 + 3x_2 + x_5 = 9; \end{cases} \tag{1.25}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0. \tag{1.26}$$

**Рішення**

Зведемо дану задачу до задачі лінійного програмування. Для цього позначимо $\left(x_1 + x_2\right)^{-1}$ через $y_0$ і введемо нові змінні $y_j = y_0 \cdot x_j$ $\left(j = \overline{1,5}\right)$.

В результаті приходимо до наступної задачі.

Знайти максимум функції

$$F = 2y_1 + y_2 \to \max \tag{1.27}$$

за умов

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 - y_3 - 11y_0 = 0\,, \\ y_1 - y_2 + y_4 - 8y_0 = 0\,, \\ -y_1 + 3y_2 + y_5 - 9y_0 = 0\,; \end{cases} \tag{1.28}$$

$$y_1 + y_2 = 1,$$

$$y_j \geq 0 \quad \left( j = \overline{0,5} \right). \tag{1.29}$$

Задача (1.27)–(1.29) є задачею лінійного програмування. Її рішення знаходимо методом штучного базису (див. табл. 1.2).

Таблиця 1.2. Симплекс-таблиця

| $i$ | Б | $C_б$ | $\overline{A}_0$ | $c_1 = 2$ | $c_2 = 1$ | $c_3 = 0$ | $c_4 = 0$ | $c_5 = 0$ | $c_6 = -M$ | $c_7 = -M$ | $c_0 = 0$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | $\overline{A}_1$ | $\overline{A}_2$ | $\overline{A}_3$ | $\overline{A}_4$ | $\overline{A}_5$ | $\overline{A}_6$ | $\overline{A}_7$ | $\overline{A}_0$ |
| 1 | $\overline{A}_2$ | 1 | 1/10 | 0 | 1 | -8/30 | -11/30 | 0 | | | 0 |
| 2 | $\overline{A}_1$ | 2 | 9/10 | 1 | 0 | 8/30 | 11/30 | 0 | | | 0 |
| 3 | $\overline{A}_5$ | 0 | 15/10 | 0 | 0 | 5/3 | 7/6 | 1 | | | 0 |
| 4 | $\overline{A}_0$ | 0 | 1/10 | 0 | 0 | 2/30 | -1/30 | 0 | | | 1 |
| $m$+1 | $F_j$–$C_j$ | | $F = \frac{19}{10}$ | 0 | 0 | 8/30 | 11/30 | 0 | | | 0 |

# ТЕМА 2. ПАРАМЕТРИЧНЕ ПРОГРАМУВАННЯ

## 2.1. Постановка задачі параметричного програмування, її економічний і геометричний сенс

У багатьох задачах математичного програмування початкові дані залежать від деякого параметра.

**Параметри** – це показники, тобто постійні величини в умовах даної задачі, що характеризують економічну систему або об'єкт.

**Параметричне програмування** – це розділ математичного програмування, в якому розглядаються екстремальні задачі з цільовими функціями і обмеженнями, залежними від параметрів, розробляються чисельні методи, що дозволяють знаходити рішення відразу для сукупності значень параметрів і вивчається поведінка рішень цих задач при зміні параметрів.

До задач параметричного програмування відносяться задачі лінійного програмування, в яких або коефіцієнти лінійної функції (цільовій функції), або вектор обмежень, або один з рядків матриці умов залежать (не обов'язково лінійно) від одного параметра. У цих випадках, отримавши оптимальне рішення для одного значення параметра за допомогою симплексного методу, визначають інтервал (або область) значень параметра, для якого знайдений базис залишається оптимальним.

Метод параметричного програмування дозволяє оцінити стійкість (або чутливість) рішення задачі по відношенню до зміни початкових даних, які в практичних задачах відомі, як правило, неточно.

Задачі параметричного програмування виникають у зв'язку з необхідністю вивчити поведінку оптимального рішення задачі лінійного програмування залежно від тих або інших змін коефіцієнтів цільовій функції.

Розглянемо залежність початкових даних від деякого параметра стосовно основної задачі лінійного програмування.

1) Задача, в якій коефіцієнти цільової функції лінійно залежать від параметра $t$, полягає в знаходженні для кожного значення параметра $t$ з відрізку його зміни $[\alpha, \beta]$ максимального значення функції

$$F=\sum_{j=1}^{n}(c'_j+c''_j\cdot t)\cdot x_j\to\max \qquad (2.1)$$

за умов

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=b_i \quad \left(i=\overline{1,m}\right), \qquad (2.2)$$

$$x_j\geq 0 \ \left(j=\overline{1,n}\right), \qquad (2.3)$$

де $c'_j$, $c''_j$, $a_{ij}$ та $b_i$ – задані постійні числа.

2) Якщо від параметра $t$ лінійно залежать вільні члени системи обмежень, то задача полягає в знаходженні для кожного значення параметра $t$ з відрізку його зміни $\left[\alpha,\beta\right]$ максимального значення лінійній функції

$$F=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j\to\max \qquad (2.4)$$

за умов

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=b'_i+b''_i\cdot t \quad \left(i=\overline{1,m}\right), \qquad (2.5)$$

$$x_j\geq 0 \quad \left(j=\overline{1,n}\right), \qquad (2.6)$$

де $c_j$, $a_{ij}$, $b'_i$ та $b''_i$ – задані постійні числа.

3) У тому випадку, коли від параметра $t$ лінійно залежать як коефіцієнти цільової функції, так і вільні члени системи обмежень, задача полягає в знаходженні для кожного значення параметра $t$ з відрізку його зміни $\left[\alpha,\beta\right]$ максимального значення функції

$$F=\sum_{j=1}^{n}(c'_j+c''_j\cdot t)\cdot x_j\to\max \qquad (2.7)$$

за умов

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i' + b_i'' \cdot t \quad \left( i = \overline{1,m} \right), \tag{2.8}$$

$$x_j \geq 0 \quad \left( j = \overline{1,n} \right). \tag{2.9}$$

4) Узагальненням цих задач є загальна задача параметричного програмування, в якій від параметра $t$ лінійно залежать коефіцієнти при невідомих в цільовій функції, коефіцієнти при невідомих в системі рівнянь і вільні члени системи рівнянь. Вона полягає в наступному. Для кожного значення параметра $t$ з деякого проміжку його зміни $\left[\alpha, \beta\right]$ потрібно знайти максимальне значення функції

$$F = \sum_{j=1}^{n} \left( c_j' + c_j'' \cdot t \right) \cdot x_j \to \max \tag{2.10}$$

за умов

$$\sum_{j=1}^{n} (a_{ij}' + a_{ij}'' \cdot t) \cdot x_j = b_i' + b_i'' \cdot t \quad \left( i = \overline{1,m} \right), \tag{2.11}$$

$$x_j \geq 0 \quad \left( j = \overline{1,n} \right). \tag{2.12}$$

Рішення сформульованих задач можна знайти методами лінійного програмування.

Розглянемо геометричну інтерпретацію задачі параметричного програмування, зупинившись детальніше на задачі (2.1)–(2.3). Припустимо, що безліч ненегативних рішень системи лінійних рівнянь (2.2) (многогранник рішень) не порожня і включає більш ніж одну точку. Тоді початкова задача полягає у визначенні при кожному значенні параметра $t \in \left[\alpha, \beta\right]$ такої точки многогранника рішень, в якій функція (2.1) приймає максимальне значення. Щоб знайти вказану точку, рахуватимемо $t = t_0$ і, використовуючи геометричну інтерпретацію, знаходимо рішення отриманої задачі лінійного програмування (2.1)–(2.3), тобто або визначаємо вершину многогранника рішень, в якій функція (2.1) має максимальне значення, або встановлюємо, що при даному значенні $t_0$

задача нерозв'язна.

Після того, як знайдена точка, в якій при $t = t_0$ функція (2.1) приймає максимальне значення, шукається безліч значень $t$, для яких координати вказаної точки визначають оптимальний план задачі (2.1)–(2.3).

Знайдені значення параметра $t_0$ виключаються з розгляду, і береться деяке нове значення $t_1 \in [\alpha, \beta]$. Для вибраного значення параметра $t_1$ визначається оптимальний план отриманої задачі або встановлюється її нерозв'язність. Після цього знаходиться відрізок зміни параметра $t_1 \in [\alpha, \beta]$, для якого знайдена точка визначає оптимальний план або для якого задача нерозв'язна. В результаті після кінцевого числа кроків для кожного значення параметра $t \in [\alpha, \beta]$ або знаходиться оптимальний план, або встановлюється нерозв'язність задачі.

## 2.2. Знаходження рішення задачі параметричного програмування

### 1) Рішення задачі, цільова функція якої містить параметр.

Розглянемо задачу (2.1)–(2.3). Вважаючи значення параметра $t$, що дорівнює деякому числу $t_0 \in [\alpha, \beta]$, знаходимо симплексним методом або методом штучного базису рішення отриманої таким чином задачі лінійного програмування.

В результаті при даному значенні $t_0$ або знайдемо оптимальний план задачі (2.1)–(2.3), або встановимо її нерозв'язність. У першому випадку, використовуючи елементи $(m+1)$–го рядка останньої симплекс–таблиці рішення задачі, в якій записані числа $\Delta_j(t_0) = \Delta'_j + t_0 \cdot \Delta''_j$, знаходимо:

$$\underline{t} = \begin{cases} \max\left(-\Delta'_j / \Delta''_j\right), & \text{якщо існує } \Delta''_j > 0, \\ -\infty, & \text{якщо } \Delta''_j \le 0; \end{cases} \tag{2.13}$$

$$\bar{t} = \begin{cases} \min\left(-\Delta'_j / \Delta''_j\right), & \text{якщо існує } \Delta''_j < 0, \\ \infty, & \text{якщо } \Delta''_j \geq 0. \end{cases} \tag{2.14}$$

Для всіх $\underline{t} \leq t \leq \bar{t}$ задача (2.1)–(2.3) має один і той же оптимальний план, що і при $t_0$.

В тому випадку, якщо задача (2.1)–(2.3) при $t_0$ нерозв'язна, в $(m+1)$–му рядку останньої симплекс–таблиці її рішення є число $\Delta_k = \Delta'_k + t_0 \cdot \Delta''_k < 0$, де $x_{ik} \leq 0$ $\left(i = \overline{1,m}\right)$. Тоді:

1) якщо $\Delta''_k = 0$, то задача (2.1)–(2.3) нерозв'язна для будь-якого $t$;

2) якщо $\Delta''_k < 0$, то задача (2.1)–(2.3) нерозв'язна для всіх $t < t_1 = -\Delta'_k / \Delta''_k$;

3) якщо $\Delta''_k > 0$, то задача (2.1)–(2.3) нерозв'язна для всіх $t > t_1$.

Визначивши всі значення параметра $t \in [\alpha, \beta]$, для яких задача (2.1)–(2.3) має один і той же оптимальний план або для яких задача нерозв'язна, отримуємо відрізок зміни параметра $t$, який виключаємо з розгляду. Знову вважаємо значення параметра $t$, що дорівнює деякому числу, належному відрізку $[\alpha, \beta]$, і знаходимо рішення отриманої задачі.

Після кінцевого числа ітерацій визначається або відрізок, в якому для всіх значень параметра задача має один і той же оптимальний план, або відрізок, в якому для всіх значень параметра задача не має рішення.

Отже, процес знаходження рішення задачі (2.1)–(2.3) включає наступні етапи:

1) Вважаючи значення параметра $t$, що дорівнює деякому числу $t_0 \in [\alpha, \beta]$, знаходять оптимальний план $X^*$ або встановлюють нерозв'язність отриманої задачі лінійного програмування.

2) Визначають безліч значень параметра $t \in [\alpha, \beta]$, для яких знайдений оптимальний план є оптимальним або задача нерозв'язна. Ці значення параметра виключають з розгляду.

3) Вважають значення параметра $t$, що дорівнює деякому числу, яке належить частині відрізку $[\alpha, \beta]$, що залишилася, і симплексним методом

знаходять рішення отриманої задачі лінійного програмування.

4) Визначають безліч значень параметра $t$, для яких новий оптимальний план залишається оптимальним або задача нерозв'язна. Обчислення повторюють до тих пір, поки не будуть досліджені всі значення параметра $t \in [\alpha, \beta]$.

**2) Рішення задачі, праві частини обмежень якої містять параметри.**

Алгоритм рішення задачі (2.4)–(2.6) подібний до розглянутого вище алгоритму рішення задачі (2.1)–(2.3).

Вважаючи значення параметра $t$, що дорівнює деякому числу $t_0$, знаходимо рішення отриманої задачі лінійного програмування (2.4)–(2.6). При даному значенні параметра $t_0$ або визначаємо оптимальний план, або встановлюємо нерозв'язність задачі. У першому випадку знайдений план є оптимальним для будь-якого $\underline{t} \le t \le \overline{t}$, де

$$\underline{t} = \begin{cases} \max(-q_i / p_i), & \text{якщо існує } p_i > 0, \\ -\infty, & \text{якщо } \quad p_i \le 0; \end{cases}$$

$$\overline{t} = \begin{cases} \min(-q_i / p_i), & \text{якщо існує } p_i < 0, \\ \infty, & \text{якщо } \quad p_i \ge 0; \end{cases}$$

і числа $q_i$ та $p_i$ визначені компонентами оптимального плану і залежать від $t_0$:

$$x_i^* = q_i + t_0 \cdot p_i \, .$$

Якщо при $t = t_0$ задача (2.4)–(2.6) нерозв'язна, то або цільова функція задачі (2.4) не обмежена на безлічі планів, або система рівнянь (2.5) не має ненегативних рішень. У першому випадку задача нерозв'язна для всіх $t \in [\alpha, \beta]$, а в другому випадку визначаємо всі значення параметра $t \in [\alpha, \beta]$, для яких система рівнянь (2.5) несумісна, і виключаємо їх з розгляду.

Після визначення відрізку, в якому задача (2.4)–(2.6) має один і той же оптимальний план або нерозв'язна, вибираємо нове значення параметра $t$, що не належить знайденому відрізку і знаходимо рішення отриманої задачі лінійного програмування. При цьому рішення нової задачі шукаємо за допомогою двоїстого симплекс-методу. Продовжуючи ітераційний процес, після кінцевого числа кроків отримуємо рішення задачі (2.4)–(2.6).

Отже, процес знаходження рішення задачі (2.4)–(2.6) включає наступні основні етапи:

1) Вважаючи значення параметра $t$, що дорівнює деякому числу $t \in [\alpha, \beta]$, знаходять оптимальний план або встановлюють нерозв'язність отриманої задачі лінійного програмування.

2) Знаходять значення параметра , для якого задача (2.4)–(2.6) має один і той же план або нерозв'язна. Ці значення параметра $t$ виключають з розгляду.

3) Вибирають значення параметра $t$ з частини відрізку $[\alpha, \beta]$, що залишилася, і встановлюють можливість визначення нового оптимального плану. У разі існування оптимального плану знаходять його двоїстим симплекс-методом.

4) Визначають безліч значень параметра $t$, для яких задача має один і той же новий оптимальний план або нерозв'язна. Обчислення проводять до тих пір, поки не будуть досліджені всі значення параметра $t \in [\alpha, \beta]$.

**3) Рішення задачі, цільова функція і праві частини обмежень якої містять параметр.**

Використовуючи описані вище алгоритми рішення задач параметричного програмування, можна знайти рішення задачі, в якій від параметра $t$ лінійно залежать як коефіцієнти цільової функції, так і вільні члени системи рівнянь.

## 2.3. Двоїста задача параметричного програмування

Розглянемо задачу, двоїсту до задачі параметричного програмування. Ця двоїста задача формулюється так.

Дана лінійна функція

$$W = \sum_{i=1}^{m} a_i u_i \tag{2.15}$$

і система лінійних обмежень

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} u_i \ge p_j + t \cdot q_j \quad \left( j = \overline{1,n} \right), \tag{2.16}$$

де $\alpha \le t \le \beta$. Потрібно розбити сегмент $[\alpha, \beta]$ на кінцеве число підмножин так, щоб для всіх значень параметра $t$ з кожної підмножини мінімальне значення цільової функції $W$ досягалося у вершинах, визначуваних однією і тією ж підсистемою системи

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} u_i = p_j + t \cdot q_j \quad \left( j = \overline{1,n} \right),$$

тобто досягалося у вершинах, що відрізняються лише паралельним зрушенням визначальних їх площин. Ця задача вирішується по загальній теорії двоїсті.

*Приклади розв'язання задач*

**Приклад 2.1.**

Підприємство повинне випустити два види продукції $A$ і $B$, для виготовлення яких використовується три види сировини. Норми витрат сировини кожного виду на виробництво одиниці продукції даного вигляду приведені в таблиці 2.1. У ній же вказані запаси сировини кожного виду, які можуть бути використані на виробництво одиниці продукції даного виду.

Таблиця 2.1. Умови задачі

| Вид сировини | Норми витрат сировини на виробництво одиниці продукції | | Запаси сировини |
|---|---|---|---|
| | *A* | *B* | |
| I | 4 | 1 | 16 |
| II | 2 | 2 | 22 |
| III | 6 | 3 | 36 |

Відомо, що ціна одиниці продукції може змінюватися для виробу $A$ від 2 до 12 грн., а для виробу $B$ – від 13 до 3 грн., причому ці зміни визначаються співвідношеннями $C_1 = 2 + t$, $C_2 = 13 - t$, де $0 \le t \le 10$.

Для кожного з можливих значень ціни одиниці продукції кожного з видів знайти такий план їх виробництва, при якому загальна вартість продукції є максимальною.

**Рішення**

Припустимо, що підприємство виготовить $x_1$ одиниць продукції $A$ і $x_2$ одиниць продукції $B$. Тоді математична постановка задачі полягає у визначенні для кожного значення параметра $t$ $(0 \le t \le 10)$ максимального значення функції

$$F = (2 + t)x_1 + (13 - t)x_2 \to \max, \qquad (2.17)$$

за умов (системі обмежень):

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 \le 16, & \text{(I)} \\ 2x_1 + 2x_2 \le 22, & \text{(II)} \\ 6x_1 + 3x_2 \le 36 & \text{(III)} \end{cases} \qquad (2.18)$$

і умовах позитивності

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \qquad (2.19)$$

а) Щоб знайти рішення задачі (2.17)–(2.19) будуємо багатокутник рішень, який визначається системою лінійних нерівностей (2.18) і умовою позитивності змінних (2.19) (див. рис. 2.1). Після цього, вважаючи $t = 0$, будуємо пряму $2x_1 + 13x_2 = 26$ (*число 26 узято довільно*!) і вектор $\overline{C} = \{2,13\}$. Пересуваючи пряму у напрямі вектора $\overline{C}$, бачимо, що останньою загальною точкою її з багатокутником рішень *OABCD* є точка $A(0,11)$. Отже, задача, отримана із задачі (2.17)–(2.19) при $t = 0$, має оптимальний план $X_0^* = (0,11)$. Це означає, що якщо ціна одиниці продукції $A$ дорівнює 2+0=2грн., а ціна одиниці продукції $B$ дорівнює 13–0=13 грн., то оптимальним планом виробництва є план, згідно якому виготовляється 11 виробів $B$ і не виготовляються вироби $A$. При такому плані виробництва продукції її вартість максимальна і дорівнює $F_{\max} = 143$.

б) Покладемо тепер $t = 2$ і побудуємо пряму $(2+2)x_1 + (13-2)x_2 = 4x_1 + 11x_2 = 44$ (*число 44 узято довільно*!) і вектор $\overline{C}_1 = \{4,11\}$. Пересуваючи побудовану пряму у напрямі вектора $\overline{C}_1$, бачимо, що останньою її загальною точкою з багатокутником рішень є точка $A(0,11)$. Отже, задача, отримана із задачі (2.17)–(2.19) при $t = 2$, має оптимальний план $X_0^* = (0,11)$. Це означає, що якщо ціна одиниці продукції $A$ дорівнює 2+2=4 грн., а ціна одиниці продукції $B$ дорівнює 13–2=11 грн., то підприємству також найдоцільніше виготовлять 11 од. продукції виду $B$ і зовсім не виготовлять продукцію виду $A$. При такому плані виробництва продукції її загальна вартість є максимальною і складає

$$F = (2+2)\cdot 0 + (13-2)\cdot 11 = 121 \text{ грн.}$$

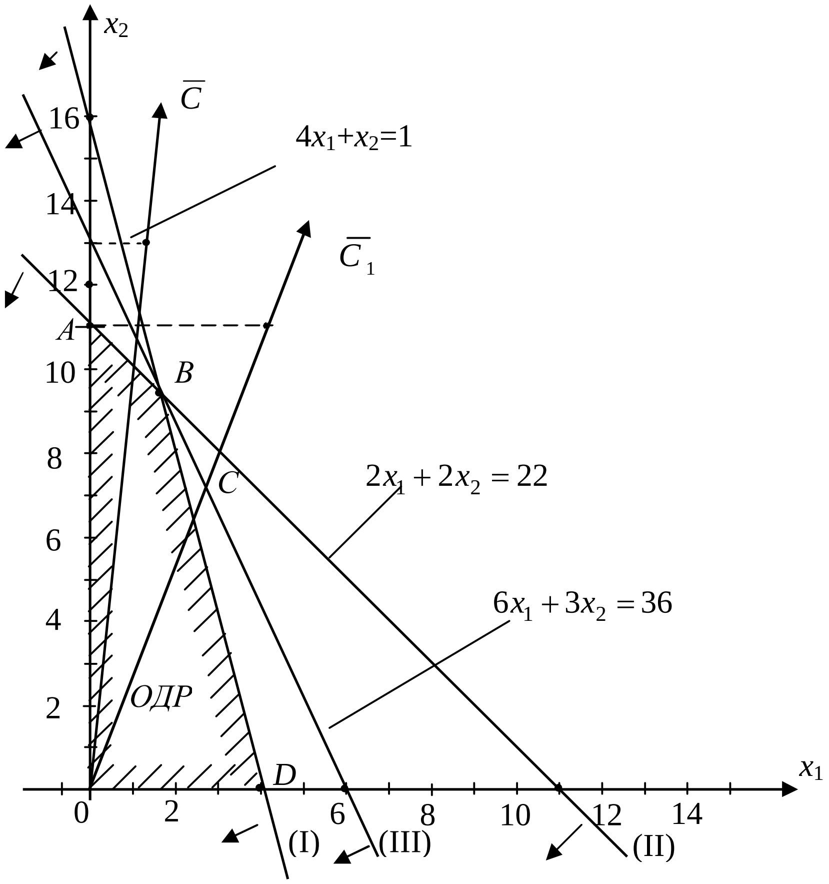



Рисунок 2.1. *ОДР* замкнута область

в) Як видно з рис. 2.1, даний план виробництва продукції залишатиметься оптимальним для всякого значення $t$, поки пряма $(2+t)x_1+(13-t)x_2=h$ не стане паралельна прямій $2x_1+2x_2=22$. Це відбудеться тоді, коли $\frac{2+t}{2}=\frac{13-t}{2}$, тобто при $t=5{,}5$.

При цьому значенні $t$ координати будь-якої точки відрізка $AB$ дають оптимальний план задачі (2.17)–(2.19).

Таким чином, для всякого $0\le t\le 5{,}5$ задача (2.17)–(2.19) має оптимальний план $X_0^*=\left(0{,}11\right)$, при якому значення цільової функції (2.17) є

$$F_{\max}=(2+t)\cdot 0+(13-t)\cdot 11=143-11t.$$

г) Візьмемо тепер яке-небудь значення параметра $t$, більше 5,5, наприклад

6. Вважаючи $t = 6$, знайдемо рішення відповідної задачі (2.17)–(2.19). Для цього побудуємо пряму $(2+6)\cdot x_1 + (13-6)\cdot x_2 = 8x_1 + 7x_2 = 56$ (*число 56 узято довільно*!) і вектор $\overline{C}_2 = \{8,7\}$. Пересуваючи побудовану пряму у напрямі вектора $\overline{C}_2$, бачимо, що останньою її загальною точкою з багатокутником рішень є точка $B(1,10)$. Отже, задача, отримана із задачі (2.17)–(2.19) при $t = 6$, має оптимальний план $X_1^* = (1,10)$. Це означає, що якщо ціна одиниці продукції $A$ дорівнює 2+6=8 грн., а ціна одиниці продукції $B$ дорівнює 13–6=7 грн., то оптимальним планом її виготовлення є план, згідно якому виготовляється один виріб виду $A$ і 10 виробів виду $B$. При цьому плані загальна вартість вироблюваної продукції максимальна

$$F_{\max} = 8\cdot 1 + 7\cdot 10 = 78 \text{ грн.}$$

Як видно з рис. 2.1, план $X_1^* = (1,10)$ є оптимальним планом задачі (2.17)–(2.19) для всякого $t > 5{,}5$ до тих пір, поки пряма $(2+t)\cdot x_1 + (13-t)\cdot x_2 = h$ не стане паралельна прямій $6x_1 + 3x_2 = 36$. Це відбудеться тоді, коли $\dfrac{2+t}{6} = \dfrac{13-t}{3}$, тобто при $t = 8$.

При цьому значенні $t$ координати будь-якої точки відрізка $BC$ дають оптимальний план задачі (2.17)–(2.19).

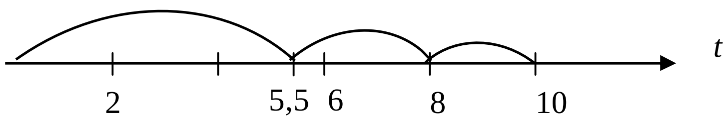
Таким чином, для всякого $5{,}5 \le t \le 8$ задача (2.17)–(2.19) має оптимальний план $X_1^* = (1,10)$, при якому значення лінійної функції (2.17) складає

$$F_{\max} = (2+t)\cdot 1 + (13-t)\cdot 10 = 132 - 9t .$$

д) Використовуючи рис. 2.1 і проводячи аналогічні міркування, отримаємо, що для всякого $8 \le t \le 10$ оптимальним планом задачі (2.17)–(2.19) є $X_2^* = (2,8)$. Це означає, що якщо ціна одиниці продукції виду $A$ знаходиться між (або дорівнює) 10 і 12 грн., а одиниця продукції $B$ – між (або дорівнює) 3 і 5 грн., то оптимальним планом її виробництва є такий план, згідно якому виготовляється 2 одиниці продукції виду $A$ і 12 одиниць продукції виду $B$.

При цьому плані виробництва продукції її загальна вартість для кожного значення параметра $8 \le t \le 10$ складає $F_{\max} = 108 - 6t$.

Таким чином, отримуємо наступне рішення задачі (2.17)–(2.19): якщо $0 \le t \le 5{,}5$, то оптимальним планом є $X_0^* = (0{,}11)$, причому $F_{\max} = 143 - 11t$, якщо $5{,}5 \le t \le 8$, то оптимальним планом є $X_1^* = (1{,}10)$, причому $F_{\max} = 132 - 9t$, нарешті, якщо $8 \le t \le 10$, то оптимальний план $X_2^* = (2{,}8)$, причому $F_{\max} = 108 - 6t$. Тобто




1) $0 \le t \le 5{,}5$; $\bar{X}_0^* = \{0{,}11\}$; $F_{\max} = 143 - 11t$;

2) $5{,}5 \le t \le 8$; $\bar{X}_1^* = \{1{,}10\}$; $F_{\max} = 132 - 9t$;

3) $8 \le t \le 10$; $\bar{X}_2^* = \{2{,}8\}$; $F_{\max} = 108 - 6t$.

Це аналітичний метод.

**Приклад 2.2.**

Для всіх значень параметра $t \in (-\infty, +\infty)$ знайти максимальне значення функції

$$F = 2x_1 + (3 + 4t)x_2 \to \max \tag{2.20}$$

за умов

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 12, \\ x_1 - x_2 + x_4 = 10, \\ -x_1 + x_2 + x_5 = 6; \end{cases} \qquad (2.21)$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0,\ x_4 \ge 0,\ x_5 \ge 0. \qquad (2.22)$$

**Рішення**

а) Враховуючи в цільовій функції початкової задачі значення параметра $t$, що дорівнює 0 (*число 0 узято довільно*!), знаходимо симплексним методом її оптимальний план: $\overline{X}_0^* = \{3,9,0,16,0\}$ (див. табл. 2.2).

Тобто

$$\overline{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ \overline{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \overline{A}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ \overline{A}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \overline{A}_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ \overline{A}_0 = \begin{pmatrix} 12 \\ 10 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

$$\overline{A}_1 x_1 + \overline{A}_2 x_2 + \overline{A}_3 x_3 + \overline{A}_4 x_4 + \overline{A}_5 x_5 = \overline{A}_0.$$

Таблиця 2.2. Симплекс–таблиця

| $i$ | Базис | $C_б$ | $\overline{A}_0$ | $c_1 = 2$ | $c_2 = 3+4t$ | $c_3 = 0$ | $c_4 = 0$ | $c_5 = 0$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | $\overline{A}_1$ | $\overline{A}_2$ | $\overline{A}_3$ | $\overline{A}_4$ | $\overline{A}_5$ | |
| 1 | $\overline{A}_3$ | 0 | 12 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | $\overline{X}_0 = \{0,0,12,10,6\}$ |
| 2 | $\overline{A}_4$ | 0 | 10 | 1 | -1 | 0 | 1 | 0 | |
| 3 | $\overline{A}_5$ | 0 | 6 | -1 | 1 | 0 | 0 | 1 | |
| $m+1$ | $F_j - C_j$ | | $F_0 = 0$ | –2 | $(C_б \cdot \overline{A}_2) - -c_2 = -3-4t$ | 0 | 0 | 0 | |

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $\overline{A}_3$ | 0 | 6 | 2 | 0 | 1 | 0 | -1 | $\overline{X}_1=\{0,6,6,16,0\}$ |
| 2 | $\overline{A}_4$ | 0 | 16 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | |
| 3 | $\overline{A}_2$ | $3+4t$ | 6 | -1 | 1 | 0 | 0 | 1 | |
| $m+1$ | $F_j-C_j$ | | $F_1=18+24t$ | $-5-4t$ | 0 | 0 | 0 | $3+4t$ | |
| 1 | $\overline{A}_1$ | 2 | 3 | 1 | 0 | 1/2 | 0 | –1/2 | $\overline{X}_2^*=\{3,9,0,16,0\}$ |
| 2 | $\overline{A}_4$ | 0 | 16 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | |
| 3 | $\overline{A}_2$ | $3+4t$ | 9 | 0 | 1 | 1/2 | 0 | 1/2 | |
| $m+1$ | $F_j-C_j$ | | $F_2=33+36t$ | 0 | 0 | $2,5+2t$ | 0 | $0,5+2t$ | |

Після цього визначаємо значення параметра *t*, для яких $\overline{X}_0^*=\{3,9,0,16,0\}$ залишається оптимальним планом. Очевидно, це буде тоді, коли серед елементів 4-го рядка останньої симплекс–таблиці (окрім елементу, що стоїть в стовпці вектора $\overline{A}_0$) не буде негативних, тобто при $2,5+2t\geq 0$ і $0,5+2t\geq 0$, звідки $t\geq -0,25$. Отже, якщо $t\in[-0,25;\infty)$, то задача (2.20) –(2.22) має оптимальний план $\overline{X}_0^*=\{3,9,0,16,0\}$, при якому $F_{\max}=33+36\cdot t$.

б) Візьмемо тепер деяке значення параметра *t*, менше ніж – 0,25. Тоді елемент, що стоїть в 4-му рядку стовпця вектора $\overline{A}_5$ останньої симплекс-таблиці (таблиця 2.2), стане негативним: $0,5-2=-1,5\leq 0$ (при $t=-1$).

Отже, при даному значенні параметра *t* план $\overline{X}=\{3,9,0,16,0\}$ не є оптимальним. Тому переходимо до нового опорного плану, для чого виключимо з базису вектор $\overline{A}_4$ і введемо в нього вектор $\overline{A}_5$ (табл. 2.3).

Таблиця 2.3. Симплекс–таблиця

| $i$ | Б | $C_б$ | $\overline{A}_0$ | $c_1=2$ | $c_2=3+4t$ | $c_3=0$ | $c_4=0$ | $c_5=0$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | $\overline{A}_1$ | $\overline{A}_2$ | $\overline{A}_3$ | $\overline{A}_4$ | $\overline{A}_5$ | |
| 1 | $\overline{A}_1$ | 2 | 11 | 1 | 0 | 0,5 | 0,5 | 0 | $\overline{X}^*=\{11,1,$ $0,0,16\}$ |
| 2 | $\overline{A}_5$ | 0 | 16 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | |
| 3 | $\overline{A}_2$ | $3+4t$ | 1 | 0 | 1 | 0,5 | –0,5 | 0 | |
| $m+1$ | $F_j-C_j$ | | $F=25+4t$ | 0 | 0 | $2,5+2t$ | $-0,5-2t$ | 0 | |

Отриманий новий план $\overline{X}_1^*=\{11,1,0,0,16\}$ є оптимальним при і $-0,5-2t\geq 0$, тобто при $-1,25\leq t\leq -0,25$.

Таким чином, якщо $t\in[-1,25;-0,25]$, то задача (2.20)–(2.22) має оптимальний план $\overline{X}_1^*=\{11,1,0,0,16\}$, при якому $F_{\max}=25+4t$.

в) Знайдемо тепер рішення задачі при $t<-1,25$.

В цьому випадку елемент, що стоїть в 4-му рядку стовпця вектора $\overline{A}_3$ таблиці 2.3, негативний. Отже, записаний в таблиці опорний план не є оптимальним. Переходимо до нового опорного плану, для чого виключимо з базису вектор $\overline{A}_2$ і введемо в нього вектор $\overline{A}_3$ (див. табл. 2.4).

Таблиця 2.4. Симплекс–таблиця

| $i$ | Б | $C_б$ | $\overline{A}_0$ | $c_1=2$ | $c_2=3+4t$ | $c_3=0$ | $c_4=0$ | $c_5=0$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | $\overline{A}_1$ | $\overline{A}_2$ | $\overline{A}_3$ | $\overline{A}_4$ | $\overline{A}_5$ | |
| 1 | $\overline{A}_1$ | 2 | 10 | 1 | -1 | 0 | 1 | 0 | $\overline{X}^*=\{10,0,$ $2,0,16\}$ |
| 2 | $\overline{A}_5$ | 0 | 16 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | |
| 3 | $\overline{A}_3$ | 0 | 2 | 0 | 2 | 1 | -1 | 0 | |
| $m+1$ | $F_j-C_j$ | | $F=20$ | 0 | $-5+4t$ | 0 | 2 | 0 | |

Отриманий опорний план є оптимальним для будь-якого $t$ такого, що $-5-4t \geq 0$, тобто для $t \leq -1,25$.

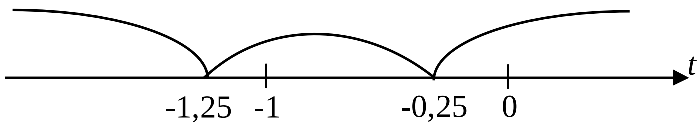
Отже, для $t \in (-\infty; -1,25]$ початкова задача має оптимальний план $\overline{X}_2^* = \{10, 0, 2, 0, 16\}$, при якому $F_{\max} = 20$.

Отже

а) якщо $t \in (-\infty; -1,25]$, то задача (2.20)–(2.22) має оптимальний план $\overline{X}_2^* = \{10, 0, 2, 0, 16\}$, а $F_{\max} = 20$;

б) якщо $t \in [-1,25; -0,25]$, то $\overline{X}_1^* = \{11, 1, 0, 0, 16\}$ – оптимальний план, а $F_{\max} = 25 + 4t$;

в) якщо $t \in [-0,25; +\infty)$, то $\overline{X}_0^* = \{3, 9, 0, 16.0\}$ – оптимальний план, а $F_{\max} = 33 + 36t$.




**Приклад 2.3.**

Підприємство для виготовлення різних виробів $A$, $B$ і $C$ використовує три види сировини. Норма витрати сировини кожного виду на виробництво одиниці продукції даного виду і вказана ціна виробу кожного виду приведені в таблиці 2.5.

Вироби $A$, $B$ і $C$ можуть виготовлятися в будь-яких співвідношеннях (збут забезпечений). Проте виробництво обмежене сировиною I виду, що є у розпорядженні підприємства, в кількості 360 кг, II виду – в кількості 192 кг і III виду – в кількості 180 кг Знайти план виробництва виробів, реалізація якого забезпечує максимальний випуск продукції у вартісному виразі. Одночасно з цим провести аналіз стійкості оптимального плану задачі за умов можливої зміни ціни одиниці кожного з виробів.

Таблиця 2.5. Умови задачі

| Вид сировини | Норми витрат сировини (кг) на одиницю продукції | | |
|---|---|---|---|
| | *A* | *B* | *C* |
| I | 18 | 15 | 12 |
| II | 6 | 4 | 8 |
| III | 5 | 3 | 3 |
| Ціна одиниці продукції (грн) | 9 | 10 | 16 |

**Рішення**

Складемо математичну модель задачі. Позначимо планований випуск виробів виду $A$ через $x_1$, виробів виду $B$ – через $x_2$ і виробів виду $C$ – через $x_3$. Тоді математична постановка задачі полягає у визначенні максимального значення цільової функції

$$F = 9x_1 + 10x_2 + 16x_3 \to \max, \tag{2.23}$$

задовольняючій системі обмежень

$$\begin{cases} 18x_1 + 15x_2 + 12x_3 \le 360, \\ 6x_1 + 4x_2 + 8x_3 \le 192, \\ 5x_1 + 3x_2 + 3x_3 \le 180 \end{cases} \tag{2.24}$$

і умовам позитивності

$$x_1 \ge 0, \;\; x_2 \ge 0, \;\; x_3 \ge 0. \tag{2.25}$$

Знайдемо рішення задачі (2.23) – (2.25) симплексним методом.

Остання частина симплексної таблиці, тобто оптимальний план задачі, приведена в таблиці 2.6.

Таблиця 2.6. Симплекс–таблиця

| $i$ | Б | $C_б$ | $\overline{A}_0$ | $c_1 = 9$ | $c_2 = 10$ | $c_3 = 16$ | $c_4 = 0$ | $c_5 = 0$ | $c_6 = 0$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | $\overline{A}_1$ | $\overline{A}_2$ | $\overline{A}_3$ | $\overline{A}_4$ | $\overline{A}_5$ | $\overline{A}_6$ | |
| 1 | $\overline{A}_2$ | 10 | 8 | 1 | 1 | 0 | 1/9 | -1/6 | 0 | $\overline{X}^* = \{0, 8, 20, 0, 0, 96\}$ |
| 2 | $\overline{A}_3$ | 16 | 20 | 1/4 | 0 | 1 | -1/18 | 5/24 | 0 | |
| 3 | $\overline{A}_6$ | 0 | 96 | 5/4 | 0 | 0 | -1/6 | -1/8 | 1 | |
| $m+1$ | $F_j - C_j$ | | $F = 400$ | 5 | 0 | 0 | 2/9 | 5/3 | 0 | |

З цієї таблиці видно, що оптимальним планом виробництва виробів $A$, $B$ і $C$ є план, згідно якому виготовляється 8 виробів виду $B$, 20 виробів виду $C$ і не виготовляються вироби виду $A$. При цьому плані загальна вартість продукції, що виготовляється, максимальна і дорівнює 400 грн.

а) Встановимо тепер можливі межі зміни цін кожного з виробів, усередині яких знайдений оптимальний план виробництва продукції не міняється. Почнемо з виробу виду $A$. Припустимо, що його ціна $c_1$ дорівнює не 9 грн., а $9 + t_1$ грн., де $t_1$ – деякий параметр (очевидно, можна вважати $9 < t_1 < +\infty$). Тоді потрібно знайти такі значення параметра $t_1$, при яких знайдений план $\overline{X}^* = \{0,8,20\}$ реалізує максимальне значення функції

$$F = (9 + t_1)x_1 + 10x_2 + 16x_3 \to \max$$

за умов (2.24) і (2.25). Щоб зробити це, вважатимемо $c_1 = 9 + t_1$ і з урахуванням цього складемо таблицю 2.7, в які перші три рядки візьмемо з таблиці 2.6, а 4–й рядок обчислимо за правилами, розглянутими раніше.

Таблиця 2.7. Симплекс–таблиця

| $i$ | Б | $C_б$ | $\overline{A}_0$ | $c_1 = 9 + t_1$ | $c_2 = 10$ | $c_3 = 16$ | $c_4 = 0$ | $c_5 = 0$ | $c_6 = 0$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | $\overline{A}_1$ | $\overline{A}_2$ | $\overline{A}_3$ | $\overline{A}_4$ | $\overline{A}_5$ | $\overline{A}_6$ | |
| 1 | $\overline{A}_2$ | 10 | 8 | 1 | 1 | 0 | 1/9 | -1/6 | 0 | $\overline{X}^* = \{0,8$ $20,0,0,96$ |
| 2 | $\overline{A}_3$ | 16 | 20 | 1/4 | 0 | 1 | -1/18 | 5/24 | 0 | |
| 3 | $\overline{A}_6$ | 0 | 96 | 5/4 | 0 | 0 | -1/6 | -1/8 | 1 | |
| $m+1$ | $F_j - C_j$ | | $F = 400$ | $5 - t_1$ | 0 | 0 | 2/9 | 5/3 | 0 | |

Як видно з таблиці 2.7, план $\overline{X}^* = \{0,8,20\}$ є оптимальним для побудованої задачі параметричного програмування при $5 - t_1 \geq 0$, тобто при $t_1 \leq 5$. Це означає, що якщо ціна $c_1$ одного виробу виду $A$ менше або дорівнює 14 грн., то задача (2.23)–(2.25) має оптимальний план $\overline{X}^* = \{0,8,20\}$, оскільки підприємству не доцільно включати в план виробництва продукції випуск виробів виду $A$ за умови, що ціна одного такого виробу не перевищує 14 грн. При цьому відмітимо, що, припускаючи можливим зміну ціни одного виробу $A$, ми вважаємо, що решта всіх даних задачі залишається незміною.

б) Аналогічно можна показати, що якщо ціна $c_2$ одного виробу виду $B$ змінюється від 8 до 20 грн., тобто якщо $8 \leq c_2 \leq 20$, то оптимальним планом виробництва продукції є план, згідно якому виготовляються 8 виробів виду $B$ і 20 виробів виду $C$. Відзначимо, що при зміні ціни одного виробу вигляду $B$ ми вважаємо постійними решту всіх початкових даних задачі. Одночасно з цим відмітимо, що хоча вказаний план і залишається оптимальним, значення цільової функції при різних значеннях $c_2$ неоднакові. Нарешті, аналогічно показується, що якщо ціна $c_3$ одного виробу вигляду $C$ змінюється від 8 до 20 грн., тобто $8 \leq c_3 \leq 20$, то оптимальним планом виробництва продукції також є план, згідно якому виготовляється 8 виробів виду $B$ і 20 виробів вигляду $C$.

**Приклад 2.4.**

Для кожного значення параметра $t \in (-\infty, +\infty)$ знайти максимальне значення функції

$$F = 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 - 4x_5 \to \max \tag{2.26}$$

при системі обмежень

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 12 + t, \\ 2x_1 - x_2 + x_4 = 8 + 4t, \\ -2x_1 + 2x_2 + x_5 = 10 - 6t \end{cases} \tag{2.27}$$

і умові позитивності

$$x_j \geq 0 \ \left( j = \overline{1,5} \right). \tag{2.28}$$

**Рішення**

Вважаючи значення параметра $t$ в системі рівнянь (2.27), що дорівнює 0, знаходимо рішення задачі (2.26)–(2.28) (див. табл. 2.8).

Таблиця 2.8. Симплекс–таблиця

| $i$ | Б | $C_б$ | $\overline{A}_0$ | $c_1 = 3$ | $c_2 = -2$ | $c_3 = 5$ | $c_4 = 0$ | $c_5 = -4$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | $\overline{A}_1$ | $\overline{A}_2$ | $\overline{A}_3$ | $\overline{A}_4$ | $\overline{A}_5$ | |
| 1 | $\overline{A}_3$ | 5 | $12 + t$ | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | $\overline{X}_0^* =$ {0,0,12+$t$, 8+4t, 10–6$t$} |
| 2 | $\overline{A}_4$ | 0 | $8 + 4t$ | 2 | –1 | 0 | 1 | 0 | |
| 3 | $\overline{A}_5$ | –4 | $10 - 6t$ | –2 | 2 | 0 | 0 | 1 | |
| $m+1$ | $F_j - C_j$ | | $F = 20 + 29t$ | 10 | –1 | 0 | 0 | 0 | |
| 1 | $\overline{A}_3$ | 5 | $7 + 4t$ | 2 | 0 | 1 | 0 | –1/2 | $\overline{X}_1^* =$ {0, 5–3$t$, 7+4$t$, 13+$t$, 0} |
| 2 | $\overline{A}_4$ | 0 | $13 + t$ | 1 | 0 | 0 | 1 | 1/2 | |
| 3 | $\overline{A}_2$ | –2 | $5 - 3t$ | –1 | 1 | 0 | 0 | 1/2 | |
| $m+1$ | $F_j - C_j$ | | $F = 25 + 26t$ | 9 | 0 | 0 | 0 | 1/2 | |

а) Як видно з таблиці 2.8 $\overline{X}_1^* = \{0; 5-3t; 7+4t; 13+t; 0\}$ при $t=0$ є оптимальний план задачі. Очевидно, $\overline{X}_1^*$ є оптимальним планом і тоді, коли серед його компонент не опиниться негативних чисел, тобто при $5-3t \geq 0$; $7+4t \geq 0$; $13+t \geq 0$ або $-\frac{7}{4} \leq t \leq \frac{5}{3}$.

Таким чином, якщо $t \in \left[-\frac{7}{4}; \frac{5}{4}\right]$, то $\overline{X}_1^* = \{0; 5-3t; \quad 7+4t; 13+t; 0\}$ оптимальний план задачі (2.26) – (2.28), при якому $F_{\max} = 25 + 26t$.

б) Досліджуємо тепер, чи має задача оптимальні плани при $t > \frac{5}{3}$. Якщо $t > \frac{5}{3}$, то $5-3t<0$ і, отже, $\overline{X}_1^* = \{0; 5-3t; 7+4t; 13+t; 0\}$ не є планом задачі. Тому при $t > \frac{5}{3}$ потрібно перейти до нового плану, який був би в теж час і оптимальним. Це можна зробити у тому випадку, коли в рядку вектора $\overline{A}_2$ є негативні числа $x'_{2j}$. В даному випадку ця умова виконується. Тому приходимо до нового опорного плану, для чого введемо в базис вектор $\overline{A}_1$ і виключимо з нього вектор $\overline{A}_2$ (див. табл. 2.9).

Таблиця 2.9. Симплекс–таблиця

| $i$ | Б | $C_б$ | $\overline{A}_0$ | $c_1=3$ | $c_2=-2$ | $c_3=5$ | $c_4=0$ | $c_5=-4$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | $\overline{A}_1$ | $\overline{A}_2$ | $\overline{A}_3$ | $\overline{A}_4$ | $\overline{A}_5$ |
| 1 | $\overline{A}_3$ | 5 | $17-2t$ | 0 | 2 | 1 | 0 | 1/2 |
| 2 | $\overline{A}_4$ | 0 | $18-2t$ | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 3 | $\overline{A}_1$ | 3 | $-5+3t$ | 1 | –1 | 0 | 0 | –1/2 |
| $m+1$ | $F_j - C_j$ | | $F=70-t$ | 0 | 9 | 0 | 0 | 5 |

Як видно з таблиці 2.9 $\overline{X}_1^* = \{-5+3t; 0; 17-2t; 18-2t; 0\}$ – оптимальний план задачі для всіх $t$, при яких $17-2t \geq 0$; $18-2t \geq 0$; $-5+3t \geq 0$, тобто при $\frac{5}{3} \leq t \leq \frac{17}{2}$. Отже, якщо $t \in \left[\frac{5}{3}; \frac{17}{2}\right]$, то $\overline{X}_1^* = \{-5+3t; 0; 17-2t; 18-2t; 0\}$ є оптимальним планом початкової задачі, причому $F_{\max} = 70 - t$.

в) Якщо $t > \frac{17}{2}$, то $X_1 = \{-5+3t; 0; 17-2t; 18-2t; 0\}$ не є планом задачі, оскільки третя компонента $17-2t$ є негативне число. Оскільки серед елементів першого рядка таблиці 2.9 немає негативних, при $t > \frac{17}{2}$ початкова задача не вирішувана.

г) Досліджуємо тепер вирішувану задачу при $t < -\frac{7}{4}$. В цьому випадку $X = \{0; 5-3t; 7+4t; 13+t; 0\}$ (див. табл. 2.8) не є планом задачі, оскільки третя компонента $7+4t$ є негативне число. Щоб при даному значенні параметра знайти оптимальний план (це можна зробити, оскільки в рядку вектора $\overline{A}_3$ стоїть негативне число $-\frac{1}{2}$), потрібно виключити з базису вектора $\overline{A}_3$ і ввести в базис вектор $\overline{A}_5$ (таблиця 2.10).

Таблиця 2.10. Симплекс–таблиця

| $i$ | Б | $C_б$ | $\overline{A}_0$ | $c_1 = 3$ | $c_2 = -2$ | $c_3 = 5$ | $c_4 = 0$ | $c_5 = -4$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | $\overline{A}_1$ | $\overline{A}_2$ | $\overline{A}_3$ | $\overline{A}_4$ | $\overline{A}_5$ |
| 1 | $\overline{A}_5$ | –4 | $-14-8t$ | –4 | 0 | –2 | 0 | 1 |
| 2 | $\overline{A}_4$ | 0 | $20+5t$ | 3 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 3 | $\overline{A}_2$ | –2 | $12+t$ | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| $m+1$ | $F_j - C_j$ | | $F = 32+30t$ | 11 | 0 | 1 | 0 | 0 |

Як видно з таблиці 2.10 $\overline{X}_2^* = \{0; 12+t; 0; 20+5t; -14-8t\}$ є оптимальним планом задачі для всіх значень параметра $t$, при яких $-14-8t \geq 0,\ 20+5t \geq 0, 12+t \geq 0$, тобто при $-4 \leq t \leq -\frac{7}{4}$. Таким чином, якщо $-4 \leq t \leq -\frac{7}{4}$, то задача (2.26)–(2.28) має оптимальний план $\overline{X}_2^* = \{0;12+t;0;20+5t;-14-8t\}$, при якому $F_{\max} = 32+30t$.

З таблиці 2.10 також видно, що при $t < -4$ задача нерозв'язна, оскільки в рядку вектора $\overline{A}_4$ немає негативних елементів.

Отже, якщо $t \in (-\infty, -4)$, то задача не має оптимального плану; якщо $t \in \left[-4; -\frac{7}{4}\right]$, то $\overline{X}_2^* = \{0;12+t;0;20+5t;-14-8t\}$ – оптимальний план, а $F_{\max} = 32+30t;$ якщо $t \in \left[-\frac{7}{4}, \frac{5}{3}\right]$, то $\overline{X}_0^* = \{0;5-3t;7+4t;13+t;0\}$ – оптимальний план, а $F_{\max} = 25+26t;$ якщо $t \in \left[\frac{5}{3}, \frac{17}{2}\right]$, то $\overline{X}_1^* = \{-5+3t;0;17-2t;18-2t;0\}$ – оптимальний план, а $F_{\max} = 70-t;$ якщо $t \in \left[\frac{17}{2}, \infty\right]$, то задача нерозв'язна.

**Приклад 2.5**

Для виробництва продукції трьох видів $A$, $B$ і $C$ необхідні три різні види сировини. Кожний з видів сировини може бути використаний в об'ємі, відповідно не більшому чим 180, 210 і 244 кг. Норми витрат кожного з видів сировини на одиницю продукції даного виду і ціни одиниці продукції даного виду приведені в таблиці 2.11.

Визначити план виробництва продукції, що забезпечує максимальний випуск її у вартісному виразі, і провести аналіз стійкості оптимального плану щодо можливих змін об'ємів кожного з використовуваних видів сировини.

Таблиця 2.11. Умови задачі

| Вид сировини | Норми витрат сировини (кг) на одиницю продукції | | |
|---|---|---|---|
| | виріб $A$ | виріб $B$ | виріб $C$ |
| I | 4 | 2 | 1 |
| II | 3 | 1 | 3 |
| III | 1 | 2 | 5 |
| Ціна одиниці продукції (грн.) | 10 | 14 | 12 |

**Рішення**

Припустимо, що виробів виду $A$ виготовляється $x_1$ одиниць, виробів виду $B$ – $x_2$ одиниць і виробів виду $C$ – $x_3$ одиниць. Тоді для визначення оптимального плану виробництва потрібно вирішити задачу, що полягає в максимізації цільової функції

$$F = 10x_1 + 14x_2 + 12x_3 \to \max \qquad (2.29)$$

при системі обмежень

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + x_3 \le 180, \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 \le 210, \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 \le 244 \end{cases} \qquad (2.30)$$

і умові позитивності

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0. \qquad (2.31)$$

Рішення задачі (2.29)–(2.31) симплексним методом приведено в таблиці 2.12 з якої видно, що при оптимальному плані виробництва виробів повинні бути виготовлені 82 вироби виду $B$ і 16 виробів виду $C$. При даному плані загальна вартість виробів дорівнює 1340 гривень.

Таблиця 2.12. Симплекс–таблиця

| $i$ | Б | $C_б$ | $\overline{A}_0$ | $c_1=10$ | $c_2=14$ | $c_3=12$ | $c_4=0$ | $c_5=0$ | $c_6=0$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | $\overline{A}_1$ | $\overline{A}_2$ | $\overline{A}_3$ | $\overline{A}_4$ | $\overline{A}_5$ | $\overline{A}_6$ |
| 1 | $\overline{A}_4$ | 0 | 180 | 4 | 2 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 2 | $\overline{A}_5$ | 0 | 210 | 3 | 1 | 3 | 0 | 1 | 0 |
| 3 | $\overline{A}_6$ | 0 | 244 | 1 | 2 | 5 | 0 | 0 | 1 |
| $m+1$ | $F_j-C_j$ | $F_0=0$ | | -10 | -14 | -12 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | $\overline{A}_2$ | 14 | 90 | 2 | 1 | 1/2 | 1/2 | 0 | 0 |
| 2 | $\overline{A}_5$ | 0 | 120 | 1 | 0 | 5/2 | -1/2 | 1 | 0 |
| 3 | $\overline{A}_6$ | 0 | 64 | -3 | 0 | 4 | -1 | 0 | 1 |
| $m+1$ | $F_j-C_j$ | $F_1=1260$ | | 18 | 0 | -5 | 7 | 0 | 0 |
| 1 | $\overline{A}_2$ | 14 | 82 | 19/8 | 1 | 0 | 5/8 | 0 | -1/8 |
| 2 | $\overline{A}_5$ | 0 | 80 | 23/8 | 0 | 0 | 1/8 | 1 | -5/8 |
| 3 | $\overline{A}_3$ | 12 | 16 | -3/4 | 0 | 1 | -1/4 | 0 | 1/4 |
| $m+1$ | $F_j-C_j$ | $F_2=1340$ | | 57/4 | 0 | 0 | 23/4 | 0 | 5/4 |

а) Проведемо тепер аналіз стійкості знайденого плану щодо можливих змін сировини кожного виду. Почнемо з сировини I виду. Припустимо, що виробництво виробів обмежене не 180 кг I виду, а $180+t_1$ кг, де $t_1$ – деякий параметр, який в загальному випадку може приймати як позитивні, так і негативні значення. Таким чином, слід знайти такі значення параметра $-\infty < t_1 < +\infty$, при яких задача, що полягає у визначенні максимального значення цільової функції

$$F = 10x_1 + 14x_2 + 12x_3 \to \max \qquad (2.32)$$

за умов

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + x_3 \le 180 + t_1, \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 \le 210, \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 \le 244; \end{cases} \tag{2.33}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, \tag{2.34}$$

має оптимальний план $\overline{X}^* = \{0,82,16\}$.

б) Знайдемо рішення задачі параметричного програмування (2.32)–(2.34). При кожному значенні параметра оптимальний план задачі (2.32)–(2.34) визначається з таблиці 2.13, що відрізняється від останньої симплекс–таблиці 2.12 лише елементами стовпця вектора $\overline{A}_0$, які позначимо через $b_2'$, $b_5'$ и $b_3'$. Вказані числа є компоненти розкладання вектора $\overline{A}_0$ по векторах, утворюючих останній базис, тобто по векторах $\overline{A}_2$, $\overline{A}_5$, $\overline{A}_3$. Отже:

$$\begin{pmatrix} b_2' \\ b_5' \\ \cdots \\ b_3' \end{pmatrix} = B^{-1} \cdot \overline{A}_0,$$

де $B^{-1}$ – матриця, зворотна матриці $B$, яка складена з первинних компонент векторів $\overline{A}_2$, $\overline{A}_5$ и $\overline{A}_3$. Вказана матриця $B^{-1}$ записана в симплекс–таблиці 2.13 в стовпцях векторів, утворюючих первинний одиничний базис, тобто в стовпцях векторів $\overline{A}_4$, $\overline{A}_5$, $\overline{A}_6$. Таким чином,

$$P_0' = \begin{pmatrix} b_2' \\ b_5' \\ b_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{8} & 0 & -\frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} & 1 & -\frac{5}{8} \\ -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 180 + t_1 \\ 210 \\ 244 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 82 + \frac{5}{8} t_1 \\ 80 + \frac{1}{8} t_1 \\ 16 - \frac{1}{4} t_1 \end{pmatrix}.$$

Знайдений вектор $P_0'$ визначає оптимальний план

$$\overline{X}=\left\{0;\,82+\frac{5}{8}t_1;\;16-\frac{1}{4}t_1\right\}$$

задачі (2.32)–(2.34) для будь-якого значення параметра, при якому значення $82+t_1$, $80+\frac{1}{8}t_1$ і $16-\frac{1}{4}t_1$ позитивні. Разом з тим $\overline{X}$ співпадатиме з оптимальним планом $\overline{X}^*=\{0,82,16\}$ задачі (2.29)–(2.31) лише при значенні $t_1=0$. Це означає, що всяка, хоч би сама незначна, зміна об'ємів сировини I виду приведе до зміни оптимального плану задачі (2.25)–(2.31). Наприклад, якщо об'єми сировини I виду, що є у розпорядженні підприємства, збільшити на 8 одиниць, то оптимальним планом виробництва буде план: $\overline{X}^*=\left\{0;\,82+\frac{5}{8}\cdot 8;\,16-\frac{1}{4}\cdot 8\right\}=\{0,\,87,\,14\}$ згідно якому виготовляється 87 виробів виду $B$ и 14 виробів виду $C$.

При даному плані виробництва продукції загальна вартість виготовлених деталей складе 1386 гривень, тобто зросте на 46 гривень.

Таблиця 2.13. Симплекс–таблиця

| $i$ | Б | $C_б$ | $\overline{A}_0$ | $c_1=10$ | $c_2=14$ | $c_3=12$ | $c_4=0$ | $c_5=0$ | $c_6=0$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | $\overline{A}_1$ | $\overline{A}_2$ | $\overline{A}_3$ | $\overline{A}_4$ | $\overline{A}_5$ | $\overline{A}_6$ |
| 1 | $\overline{A}_2$ | 14 | $b_2'$ | 19/8 | 1 | 0 | 5/8 | 0 | -1/8 |
| 2 | $\overline{A}_5$ | 0 | $b_5'$ | 23/8 | 0 | 0 | 1/8 | 1 | -5/8 |
| 3 | $\overline{A}_3$ | 12 | $b_3'$ | -3/4 | 0 | 1 | -1/4 | 0 | 1/4 |
| $m+1$ | $F_j-C_j$ | | $F_0'$ | 57/4 | 0 | 0 | 23/4 | 0 | 5/4 |

в) Провівши аналогічні міркування, можна показати, що якщо об'єми сировини II виду, виділені підприємству, зменшити не більше ніж на 80 кг, то оптимальним планом виробництва продукції залишиться план, згідно якому слід виготовити 82 вироби виду $B$ і 16 виробів виду $C$. Таким образом, оптимальний план задачі (2.29)–(2.31) виявляється стійким щодо змін у вказаних вище об'ємах сировини II виду.

г) Нарешті, аналогічно можна показати, що оптимальний план $\overline{X}^* = \{0, 82, 16\}$ задачі (2.25)–(2.31) нестійкий по відношенню до змін об'ємів сировини III виду.

Використовуючи описані вище алгоритми рішення задачі параметричного програмування можна знайти рішення задачі, в якій від параметра $t$ лінійно залежать як коефіцієнти цільової функції, так і вільні члени системи рівнянь.

**Приклад 2.6.**

Знайти максимальне значення функції

$$F = (8-5t)x_1 + (9-3t)x_2 + (-3+5t)x_3 - (2+4t)x_4 \to \max$$

за умов

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 24 - 12t, \\ -x_1 + 2x_2 + x_4 = -18 + 10t, \\ x_1,\ x_2 \ge 0, \quad t \in (-\infty; +\infty). \end{cases}$$

**Рішення**

Вважаючи значення параметра $t$, що дорівнює числу 2 (число 2 узято довільно), знаходимо симплексним методом рішення отриманої задачі лінійного програмування (див. таблицю 2.14).

Таблиця 2.14. Симплекс–таблиця

| $i$ | Б | $C_б$ | $\overline{A}_0$ | $c_1 = 8-5t$ | $c_2 = 9-3t$ | $c_3 = -3+5t$ | $c_4 = -2-4t$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | $\overline{A}_1$ | $\overline{A}_2$ | $\overline{A}_3$ | $\overline{A}_4$ |
| 1 | $\overline{A}_3$ | $-3+5t$ | $24-12t$ | 1 | -1 | 1 | 0 |
| 2 | $\overline{A}_4$ | $-2-4t$ | $-18+10t$ | -1 | 2 | 0 | 1 |
| $m+1$ | $F_j - C_j$ | | $F_0 = -36 + 208\,t - 100\,t^2$ | $14t-9$ | $-10t-10$ | 0 | 0 |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $\overline{A}_3$ | $-3+5t$ | $15-7t$ | 1/2 | 0 | 1 | 1/2 |
| 2 | $\overline{A}_2$ | $9-3t$ | $-9+5t$ | -1/2 | 1 | 0 | 1/2 |
| $m+1$ | $F_j - C_j$ | | $F_1 = -126 + +168t - 50t^2$ | $9t-14$ | 0 | 0 | $5t+5$ |

З таблиці 2.14 видно, що якщо $t=2$, то $\overline{X}_0^* = \{0; -9+5t; 15-7t; 0\}$ – оптимальний план задачі. Таким він є і для тих значень параметра $t$, при яких $9t-14 \geq 0$ і $5t+5 \geq 0$, а серед компонент вектора $\overline{X}_0^*$ немає негативних чисел. Ці нерівності виконуються при $t \geq \dfrac{14}{9}$. Спочатку такі значення параметра $t$ і розглянемо.

а) Знайдений вектор $\overline{X}_0^*$ є негативним планом задачі при $15-7t \geq 0,\ -9+5t \geq 0$, тобто $\dfrac{9}{5} \leq t \leq \dfrac{15}{7}$. Отже, якщо $t \in [9/5; 15/7]$, то $\overline{X}^* = \{0; 15-7t; -9+5t; 0\}$ – оптимальний план задачі, при якому $F_{\max} = 126 + 168\,t - 50\,t^2$.

б) Якщо $t < \dfrac{9}{5}$, то $-9+5t<0$ і вектор $\overline{X} = \{0; 15-7t; -9+5t; 0\}$ не є планом задачі. Тому при $t < \dfrac{9}{5}$ слід перейти до нової симплекс–таблиці, що можна зробити, оскільки в рядку вектора $\overline{A}_2$ є негативне число –1/2. Розглядаючи це число, як вирішуючий елемент, переходимо до нової симплекс–таблиці, для чого виключимо з базису вектор $\overline{A}_2$ і введемо замість нього вектор $\overline{A}_1$.

Таблиця 2.15. Симплекс–таблиця

| $i$ | Б | $C_б$ | $\overline{A}_0$ | $c_1 = 8-5t$ | $c_2 = 9-3t$ | $c_3 = -3+5t$ | $c_4 = -2-4t$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | $\overline{A}_1$ | $\overline{A}_2$ | $\overline{A}_3$ | $\overline{A}_4$ |
| 1 | $\overline{A}_3$ | $-3+5t$ | $6-2t$ | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | $\overline{A}_1$ | $8-5t$ | $18-10t$ | 1 | –2 | 0 | –1 |
| $m+1$ | $F_j - C_j$ | | $F = 126 - 134t + 40t^2$ | 0 | $-28+18t$ | 0 | $14t-9$ |

З таблиці 2.15 видно, що вектор $\overline{X}_1^* = \{18-10t;\ 0;\ 6-2t;\ 0\}$ є оптимальний план задачі для всіх значень параметра $t$ (як зазначено вище, ми розглядаємо значення $t \ge \frac{14}{9}$), при яких $6-2t \ge 0$ і $18-10t \ge 0$, тобто $t \le 9/5$. Отже, якщо $t \in \left[\frac{14}{9}; \frac{9}{5}\right]$, то $\overline{X}_1^* = \{18-10t;\ 0;\ 6-2t;\ 0\}$ є оптимальним планом задачі, при якому $F_{\max} = 126 - 134t + 40t^2$.

в) Розглянемо тепер значення параметра $t > \frac{15}{7}$. При цих значеннях вектор $\overline{X} = \{0;\ -9+5t;\ 15-7t;\ 0\}$ вже не є оптимальним планом задачі, оскільки $15-7t < 0$. Оскільки в рядку вектора $\overline{A}_3$ (див. табл. 2.15) немає негативних чисел, то при $t > \frac{15}{7}$ задача нерозв'язна.

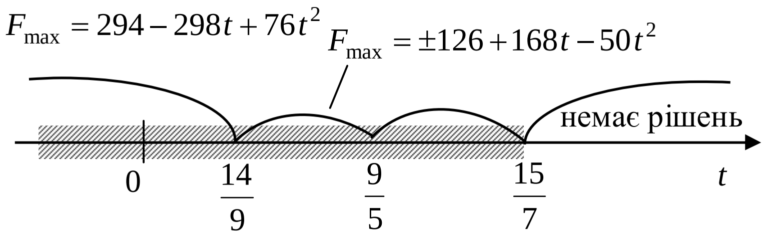
г) Ми знайшли рішення задачі при зміні параметра $t$ від 14/9 до $+\infty$. Розглянемо тепер значення параметра від $-\infty$ до 14/9. Якщо $t < 14/9$, то в останньому рядку таблиці 2.15 є негативне число $18t - 28$. Тому слід перейти до нового опорного плану, ввівши в базис вектор $\overline{A}_2$ і виключивши з нього вектор $\overline{A}_3$ (див. табл. 2.16).

Таблиця 2.16. Симплекс–таблиця

| $i$ | Б | $C_б$ | $\overline{A}_0$ | $c_1 = 8-5t$ | $c_2 = 9-3t$ | $c_3 = -3+5t$ | $c_4 = -2-4t$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | $\overline{A}_1$ | $\overline{A}_2$ | $\overline{A}_3$ | $\overline{A}_4$ |
| 1 | $\overline{A}_2$ | $9-3t$ | $6-2t$ | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | $\overline{A}_1$ | $8-5t$ | $30-14t$ | 1 | 0 | 2 | 1 |
| $m+1$ | $F_j - C_j$ | | $F = 294 - $ $-298t + 76t^2$ | 0 | 0 | $28-18t$ | $19-4t$ |

З таблиці 2.16 видно, що якщо $-\infty < t \le 14/9$, то $\overline{X}_2^* = \{30-14t;\ 6-2t;\ 0;\ 0\}$ є оптимальним планом задачі, причому $F_{\max} = 294 - 298t + 76t^2$.

Отже, при $t \in (-\infty;\ 14/9)$, задача має оптимальний план $\overline{X}_2^* = \{30-14t;\ 6-2t;\ 0;\ 0\}$; при $t \in [14/9; 9/5]$, задача має оптимальний план $\overline{X}_1^* = \{18-10t;\ 0;\ 6-2t;\ 0\}$; при $t \in [9/5; 15/7]$, задача має оптимальний план $\overline{X}_0^* = \{0; -9+5t; 15-7t; 0\}$; при $t > \dfrac{15}{7}$ задача не вирішувана.



## Задачі до модуля №1

**Задача 1.** Знайти мінімальне значення функції

$$F = \frac{2x_1 - 3x_2 + 1}{x_1 + x_2 + 3} \to \min$$

за умов

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 20, \\ 3x_1 - x_2 - x_4 = 10, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_5 = 11, \\ 2x_1 + 5x_2 + x_6 = 35; \end{cases}$$

$$x_j \ge 0 \quad \left(\overline{1,6}\right).$$

**Задача 2.** Знайти мінімальне значення функції

$$F = \frac{x_1 - 2x_2}{3x_1 + x_2 + 2} \to \min$$

за умов

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \ge 7, \\ -x_1 + 4x_2 \le 5, \\ 4x_1 - 3x_2 \le 17; \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$$

**Задача 3.** Знайти максимальне значення функції

$$F = \frac{2x_1 - x_2 - 3}{x_1 + 2} \to \max$$

за умов

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 5, \\ 2x_1 - x_2 \geq 1, \\ x_1 - 3x_2 \leq 1; \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

**Задача 4.** Знайти максимальне значення функції

$$F = \frac{2x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 - x_5 + 8x_6}{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6} \to \max$$

за умов

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 - 3x_3 - 4x_4 + 2x_5 + x_6 = 120, \\ 2x_1 + 9x_2 - 5x_3 - 7x_4 + 4x_5 + 2x_6 = 320; \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \quad \left(\overline{1,6}\right).$$

**Задача 5.** Вважаючи, що $-\infty < t < +\infty$, знайти максимальне значення функції

$$F = 6x_1 + (4+t)x_3 + (12-t)x_2 \to \max$$

за умов

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 28, \\ -x_1 + 3x_2 + x_4 = 20, \\ -(1/2)x_1 + 2x_2 + x_5 = 24; \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \ \left(j = \overline{1,5}\right).$$

**Задача 6.** Вважаючи, що $-\infty < t < +\infty$, знайти максимальне значення функції

$$F = 5x_1 - (3+t)x_2 + (4+t)x_4 \to \max$$

за умов

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 12, \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 10, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_5 = 24; \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \ \left(j = \overline{1,5}\right).$$

**Задача 7.** Вважаючи, що $-\infty < t < +\infty$, знайти максимальне значення функції

$$F = 6x_1 - (4+t)x_3 + (12-t)x_4 \to \max$$

за умов

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 28, \\ -x_1 + 3x_2 + x_4 = 20, \\ -(1/2)x_1 + 2x_2 + x_5 = 24; \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \ \left(j = \overline{1,5}\right).$$

**Задача 8.** Вважаючи, що $-\infty < t < +\infty$, знайти максимальне значення функції

$$F = 2x_1 + 5x_2 \to \max$$

за умов

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 4 + 2t, \\ -2x_1 + x_2 + x_4 = 6 + t, \\ 3x_1 - x_2 + x_5 = 8 - 3t; \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \ \left( j = \overline{1,5} \right).$$

**Задача 9.** Вважаючи, що $-\infty < t < +\infty$, знайти максимальне значення функції

$$F = -2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 \to \max$$

за умов

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 - 2t, \\ 2x_1 - x_2 + x_4 = 2 + t, \\ 3x_1 + x_5 = 3 - t; \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \ \left( j = \overline{1,5} \right).$$

**Задача 10.** Вважаючи, що $-\infty < t < +\infty$, знайти максимальне значення функції

$$F = 6x_1 + 15x_2 \to \max$$

за умов

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 4 + 2t, \\ -2x_1 + x_2 + x_4 = 6 + t, \\ 3x_1 - x_2 + x_5 = 8 - 3t; \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \ \left( j = \overline{1,5} \right).$$

**Задача 11.** Вважаючи, що $-\infty < t < +\infty$, знайти максимальне значення функції

$$F = (2-3t)x_1 - 4tx_2 + (2+6t)x_4 \to \max$$

за умов

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 12, \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 6 + 8t, \\ -x_1 - 2x_2 + x_5 = -10 + 12t; \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \ \left(j = \overline{1,5}\right).$$

**Задача 12.** Вважаючи, що $-\infty < t < +\infty$, знайти максимальне значення функції

$$F = (2+t)x_1 - (3-t)x_2 + 3(2+4t)x_5 \to \max$$

за умов

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 + 6t, \\ -x_1 + 3x_2 + x_4 = 9 - 12t, \\ x_1 - x_2 + x_5 = 8 + 9t; \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \ \left(j = \overline{1,5}\right).$$

**Задача 13.** Вважаючи, що $-\infty < t < +\infty$, знайти максимальне значення функції

$$F = (2-3t)x_1 - 4tx_2 + (2+6t)x_4 \to \max$$

за умов

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 12, \\ x_1 + \dfrac{1}{2}x_2 + \dfrac{1}{2}x_4 = 3 + 4t, \\ -x_1 - 2x_2 + x_5 = -10 + 12t; \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \ \left( j = \overline{1,5} \right).$$

**МОДУЛЬ №2**

# ТЕМА 3. НЕЛІНІЙНЕ ПРОГРАМУВАННЯ

## 3.1. Постановка задачі нелінійного програмування. Основні поняття і визначення

Велике число практичних економічних ситуацій або взагалі не може бути зведене до лінійних задач, або (навіть коли така лінеаризація на якомусь етапі проводиться) спроба детальнішого розгляду все ж таки приводить до нелінійності.

Нелінійне програмування займається рішенням таких економічних задач, в яких результати (ефективність) зростають або убувають непропорційно зміні масштабів використання ресурсів (або масштабів виробництва).

**Нелінійне програмування** – це розділ математичного програмування, що вивчає задачі, де потрібно визначити значення деяких параметрів, при яких задані функції не перевершують фіксованих величин, а цільова функція досягає глобального екстремуму.

У загальному вигляді задача нелінійного програмування ставиться так.

Знайти екстремум цільової функції

$$F = f\left(x_1, x_2, \ldots x_n\right) \to extr \tag{3.1}$$

за умови, що її змінні задовольняють співвідношенням

$$\begin{cases} g_i\left(x_1, x_2, \ldots x_n\right) \le b_i & \left(i = \overline{1, k}\right), \\ g_i\left(x_1, x_2, \ldots x_n\right) = b_i & \left(i = \overline{k = 1, m}\right), \end{cases} \tag{3.2}$$

де $f$ і $g_i$ – деякі відомі функції $n$ змінних, а $b_i$ – задані числа.

Система обмежень включає умови позитивності змінних, якщо такі умови є, але вони можуть бути задані і безпосередньо.

Тут є на увазі, що в результаті рішення задачі буде визначена точка $X^* = \left(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*\right)$, координати якої задовольняють співвідношенням (3.2) і така, що для всякої іншої точки $X=\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$, тієї, що задовольняє умовам (3.2), виконується нерівність:

$$f\left(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*\right) \geq f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$$

або

$$f\left(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*\right) \leq f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right).$$

Якщо $f$ і $g_i$ – лінійні функції, то задача (3.1)–(3.2) є задачею лінійного програмування.

Нагадаємо, що під глобальним екстремумом розуміється її найбільше і найменше значення в замкнутій області.

А задача визначення умовного екстремуму (коли стаціонарні точки належать рівнянням зв'язку) співпадає із задачею нелінійного програмування (3.1) – (3.2).

Система обмежень (3.2) визначає *ОДР* задачі. На відміну від задачі лінійного програмування вона не завжди є опуклою.

Процес знаходження рішення задачі нелінійного програмування (3.1)–(3.2) з використанням її геометричної інтерпретації включає наступні етапи.

1) Знаходять *ОДР* рішень задачі, яка визначається співвідношеннями (3.2) (якщо вона порожня, то задача не має рішення).

2) Будують гіперповерхню $f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)=h$.

3) Визначають гіперповерхню найвищого (найнизшого) рівня або встановлюють нерозв'язність задачі із-за необмеженості цільової функції (3.1) зверху (знизу) на безлічі допустимих рішень.

4) Знаходять точку області допустимих рішень, через яку проходить гіперповерхня найвищого (найнизшого) рівня, і визначають в ній значення цільової функції (3.1).

### 3.2. Метод множників Лагранжа

Інший спосіб визначення умовного екстремуму починається з побудови допоміжної функції Лагранжа, яка в ОДР досягає максимуму для тих же значень змінних $x_1, x_2, ..., x_n$, що і цільова функція $F$.

Розглянемо окремий випадок загальної задачі нелінійного програмування (3.1)–(3.2), припускаючи, що система обмежень (3.2) містить тільки рівняння, відсутні умови позитивності змінних, де $f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$ і $g_i\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$ – функції, безперервні разом з своїми частковими похідними.

Знайти екстремум цільової функції

$$F = f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right) \to extr \tag{3.3}$$

при системі обмежень:

$$g_i\left(x_1, x_2, ..., x_n\right) = b_i \quad \left(i = \overline{1, m}\right). \tag{3.4}$$

Задача (3.3)–(3.4) називається задачею на умовний екстремум або класичною задачею оптимізації.

Щоб знайти рішення задачі, вводять набір змінних $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$, які називаються **множниками Лагранжа** і складають **функцію Лагранжа**

$$F\left(x_1, x_2, ..., x_n, \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m\right) = f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \left[b_i - g_i\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)\right]. \tag{3.5}$$

Знаходять часткові похідні $\dfrac{\partial F}{\partial x_j}$ $\left(j = \overline{1, n}\right)$ і $\dfrac{\partial F}{\partial \lambda_i}$ $\left(i = \overline{1, m}\right)$ прирівнюють їх до нуля і розглядають систему $n + m$ рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x_j} = \dfrac{\partial f}{\partial x_j} - \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i \dfrac{\partial g_i}{\partial x_j} = 0 \quad \left(j = \overline{1, n}\right), \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda_i} = b_i - g_i(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \quad \left(i = \overline{1, m}\right) \end{cases} \tag{3.6}$$

з $n + m$ невідомими: $x_1, x_2, ..., x_n, \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$. Всяке рішення системи рівнянь (3.6) визначає точку $X = \left(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0\right)$, в якій може мати місце екстремум функції

$f = (x_1, x_2, ..., x_n)$. Отже, вирішивши систему (3.6), отримують всі точки, в яких функція (3.3) може мати екстремальні значення. Подальше дослідження знайдених точок проводять так само, як і у разі безумовного екстремуму.

Таким чином, визначення екстремальних точок задачі (3.3)–(3.4) методом множників Лагранжа включає наступні етапи.

1) Складають функцію Лагранжа.

2) Знаходять часткові похідні від функції Лагранжа по змінним $x_j$ і $\lambda_i$ і прирівнюють їх до нуля.

3) Вирішивши систему рівнянь (3.6), знаходять точки, в яких цільова функція задачі може мати екстремум.

4) Серед точок, підозрілих на екстремум знаходять такі, в яких досягається екстремум, і обчислюють значення функції (3.3) в цих точках.

При цьому відмітимо, що для функції двох змінних $Z = f(x, y)$, яка двічі диференціюється, необхідною умовою є рівність нулю її перших похідних, тобто

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 0, \ \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

Точки, в яких виконується ця умова, називаються стаціонарними або критичними. Оскільки не кожна стаціонарна точка доставляє функції екстремум, то потрібно мати критерій, по якому можна було б судити про наявність екстремуму функції.

Достатні умови екстремуму функції двох змінних полягають в наступному. Вибравши серед всіх стаціонарних точок даної функції тільки ті, які лежать в заданій області, складають вираз $B^2 - AC$, де

$$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \ B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \ C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2},$$

у кожній стаціонарній крапці. При цьому:

а) якщо $B^2 - AC < 0$, то функція $Z$ має екстремум: максимум при $A < 0 \ (C < 0)$; мінімум при $A > 0 \ (C > 0)$;

б) якщо $B^2 - AC > 0$, то функція $Z$ екстремуму не має;

в) якщо $B^2 - AC = 0$, то маємо невизначений випадок, що вимагає подальшого дослідження.

Для обчислення самого екстремуму потрібно у функцію $Z = f(x, y)$ підставити координати точок екстремуму.

*Приклади розв'язання задач*

**Приклад 3.1.**

Знайти максимальне значення функції

$$F = x_2 - x_1^2 + 6x_1 \to \max \tag{3.7}$$

за умов

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 24, \\ x_1 + 2x_2 \le 15, \\ 3x_1 + 2x_2 \le 24; \end{cases} \tag{3.8}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_2 \le 4. \tag{3.9}$$

**Рішення**

Оскільки цільова функція (3.7) нелінійна, то задача (3.7)–(3.9) є задачею нелінійного програмування. Областю допустимих рішень задачі є багатокутник $OABC$ (див. рис. 3.1).

Отже, для знаходження її рішення потрібно визначити таку точку багатокутника $OABC$, в якій функція (3.7) приймає максимальне значення. Побудуємо лінію рівня

$$F = x_2 - x_1^2 + 6x_1 = h,$$

де $h$ – деяка постійна, і досліджуємо її поведінку при різних значеннях $h$. При кожному значенні $h$ отримуємо параболу, яка тим вище віддалена від осі $0x_1$, чим більше значення $h$. Значить, функція $F$ приймає максимальне значення в точці дотику однієї з парабол з межею багатокутника $OABC$. В даному випадку це точка $D$ (рис. 3.1), в якій лінія рівня $F = x_2 - x_1^2 + 6x_1 = 13$ торкається сторони $AB$ багатокутника $OABC$. Координати точки $D$ можна знайти з системи рівнянь

$$\begin{cases} x_2 - x_1^2 + 6x_1 = 13, \\ x_2 = 4. \end{cases} \tag{3.10}$$

Вирішуючи цю систему, отримаємо $x_1^* = 3; x_2^* = 4$. Отже, $F_{\max} = 13$, при $\overline{X}^* = \{3, 4\}$.

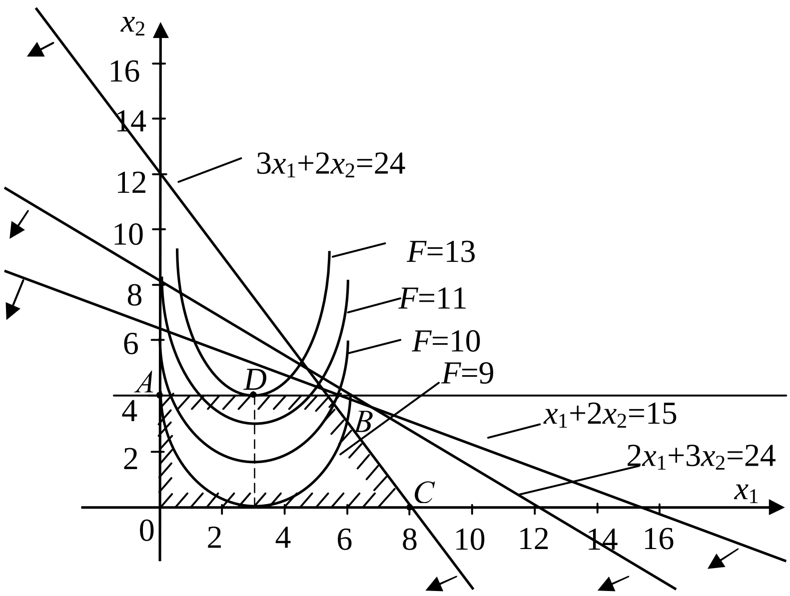



Рисунок 3.1. *ОДР* замкнута область

Як видимо, в задачі (3.7)–(3.9) точка максимального значення цільової функції не є вершиной багатокутника рішень. Тому процедура перебору вершин, яка використовувалася при рішенні задач ЛП, непридатна для даної задачі.

**Приклад 3.2.**

Знайти максимальне і мінімальне значення функції

$$F = \left(x_1 - 3\right)^2 + \left(x_2 - 4\right)^2 \to extr \tag{3.11}$$

за умов

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \ge 7, \\ 10x_1 - x_2 \le 8, \\ -18x_1 + 4x_2 \le 12; \end{cases} \tag{3.12}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \tag{3.13}$$

**Рішення**

*ОДР* задачі (3.11)–(3.13) є $\Delta ABC$ (рис. 3.2).

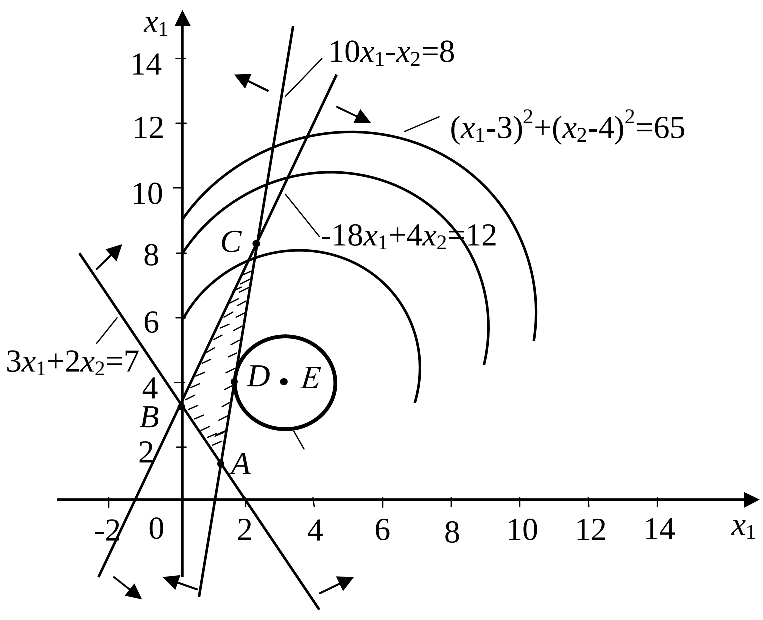



Рисунок 3.2. *ОДР* замкнута область

Вважаючи значення цільової функції (3.11), що дорівнює деякому числу $h$, отримуємо лінії рівня, а саме кола $(x_1-3)^2+(x_2-4)^2=h$ з центром в т. $E(3,4)$ і радіусом $\sqrt{h}$. Із збільшенням (зменшенням) числа $h$ значення функції $F$ відповідно збільшується (зменшується).

Проводячи з точки $E$ кола різних радіусів, бачимо, що мінімальне значення функція приймає в точці $D$, в якій коло торкається області рішень. Для визначення координат цієї точки скористаємося рівністю кутових коефіцієнтів прямої $10x_1-x_2=8$ і дотичної до кола в точці $D$. З рівняння прямої $x_2=10x_1-8$ бачимо, що її кутовий коефіцієнт в точці $D$ дорівнює 10. Кутовий же коефіцієнт дотичної до кола в точці $D$ визначимо як значення похідної функції $x_2$ від змінній $x_1$ в цій точці .

Розглядаючи $x_2$ як неявну функцію змінної $x_1$ і диференціюючи рівняння кола, отримаємо

$$2(x_1-3)+2(x_2-4)\cdot x_2'=0,$$

звідки

$$x_2'=-(x_1-3)/(x_2-4).$$

Прирівнюючи знайдений вираз числу 10, отримуємо одне з рівнянь для визначення координат точки $E$. Приєднуючи до нього рівняння прямої, на якій лежить точка $E$, маємо систему

$$\begin{cases} x_1+10x_2=43, \\ 10x_1-x_2=8; \end{cases}$$

звідки $x_1^*=123/101;$ $x_2^*=422/101.$ Таким чином

$$F_{\min}=(123/101-3)^2+(422/101-4)^2=324/101.$$

Як видно з рис. 3.2, цільова функція приймає максимальне значення в точці $C(2,12)$. Її координати визначені шляхом рішення системи рівняння прямих, на перетині яких знаходиться точка $C$. Таким чином, максимальне значення функції $F_{\max}=65$.

**Приклад 3.3.**

Знайти максимальне і мінімальне значення функції

$$F = (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 3)^2 \to extr \tag{3.14}$$

за умов

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \geq 6, \\ 3x_1 - 2x_2 \leq 18, \\ -x_1 + 2x_2 \leq 8; \end{cases} \tag{3.15}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0. \tag{3.16}$$

**Рішення**

*ОДР* початкової задачі є багатокутник $ABCDE$ (рис. 3.3), а лініями рівня – кола $(x_1 - 4)^2 + (x_2 - 3)^2 = h$ з центром $F(4,3)$ і радіусом $R = \sqrt{h}$. З рис. 3.3 видно, що цільова функція приймає мінімальне значення в точці $F(4,3)$, а максимальне – в точці $C(13;10,5)$. Отже, $F_{\min} = 0$ і $F_{\max} = 137,25$.

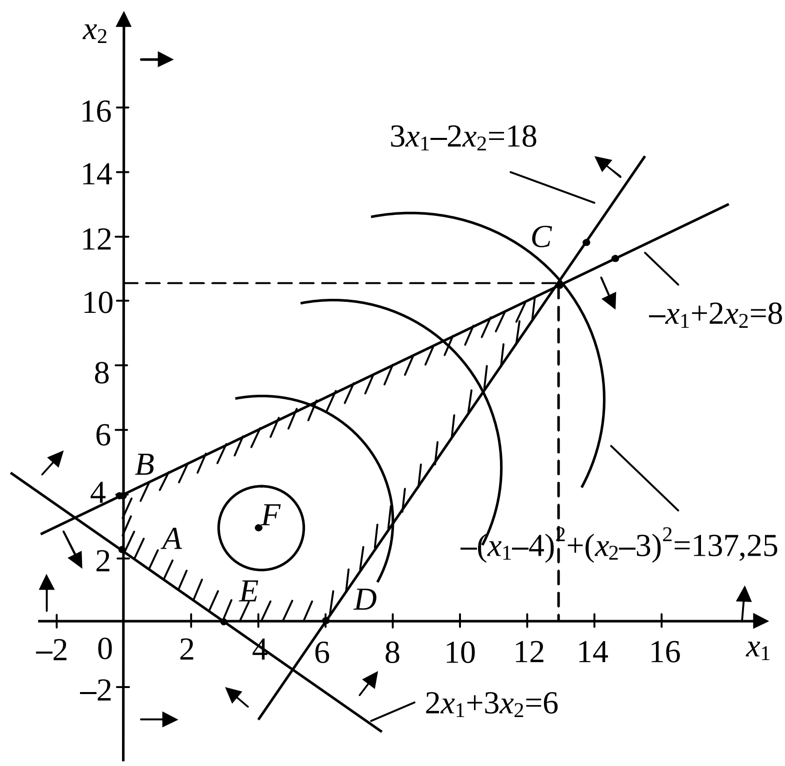



Рисунок 3.3. *ОДР* замкнута область

**Приклад 3.4.**

Знайти максимальне значення функції

$$F = 3x_1 + 4x_2 \to \max \tag{3.17}$$

за умов

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 \le 25, \\ x_1 \cdot x_2 \ge 4; \end{cases} \tag{3.18}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \tag{3.19}$$

**Рішення**

*ОДР* задачі (3.17)–(3.19) зображена на рис. 3.4. На цьому рисунку побудовано дві лінії рівня, що є прямими. З рис. 3.4 видно, що максимальне значення цільова функція задачі приймає в точці $E$, в якій пряма торкається кола $x_1^2 + x_2^2 = 25$. Для визначення координат точки $E$ скористатися рівністю кутових коефіцієнтів прямої $3x_1 + 4x_2 = h$ (де $h$ – деяка постійна) і дотичної до кола в точці $E$. Розглядаючи $x_2$ як неявну функцію змінної $x_1$, почленно диференціюємо рівняння кола $x_1^2 + x_2^2 = 25$ і отримаємо $2x_1 + 2x_2 \cdot x_2' = 0$, або $x_2' = -x_1 / x_2$. Прирівнюючи знайдений вираз до числа $k = -3/4$, отримуємо одне з рівнянь для визначення координат точки $E$. В якості другого рівняння візьмемо рівняння кола.

Таким чином, для визначення координат точки $E$ маємо систему

$$\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 = 0, \\ x_1^2 + x_2^2 = 25; \end{cases}$$

звідки $x_1^* = 4$; $x_2^* = 3$. Означає $F_{\max} = 3^2 + 4^2 = 25$.

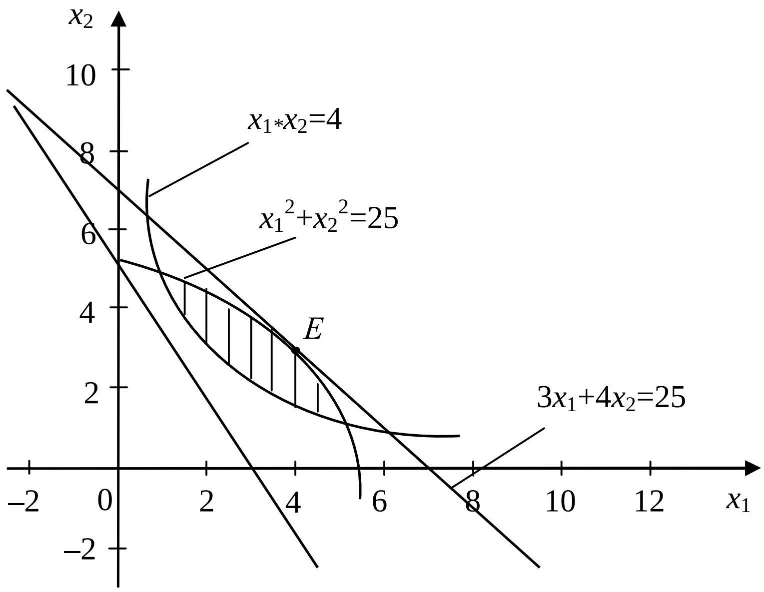



Рисунок 3.4. *ОДР* замкнута область

**Приклад 3.5.**

За планом виробництва продукції підприємству необхідно виготувати 180 виробів. Ці вироби можуть бути виготовлені двома технологічними способами. При виробництві $x_1$ виробів I способом витрати дорівнюють $4x_1 + x_1^2$ грн., а при виготовленні $x_2$ виробів II способом вони складають $8x_2 + x_2^2$ грн. Визначити, скільки виробів кожним із способів слід виготовити, так щоб загальні витрати на виробництво продукції були мінімальними.

**Рішення**

Математична постановка задачі полягає у визначенні мінімального значення функції

$$f = 4x_1 + x_1^2 + 8x_2 + x_2^2 \to \min \tag{3.20}$$

за умов

$$x_1 + x_2 = 180, \tag{3.21}$$

$$x_1 \ge 0,\ \ x_2 \ge 0. \qquad (3.22)$$

Спочатку знайдемо рішення задачі, використовуючи її геометричну інтерпретацію. *ОДР* початкової задачі є відрізок прямої $AB$ (див. рис. 3.5), а лініями рівня – кола з центром в точці $E\left(-2,-4\right)$.

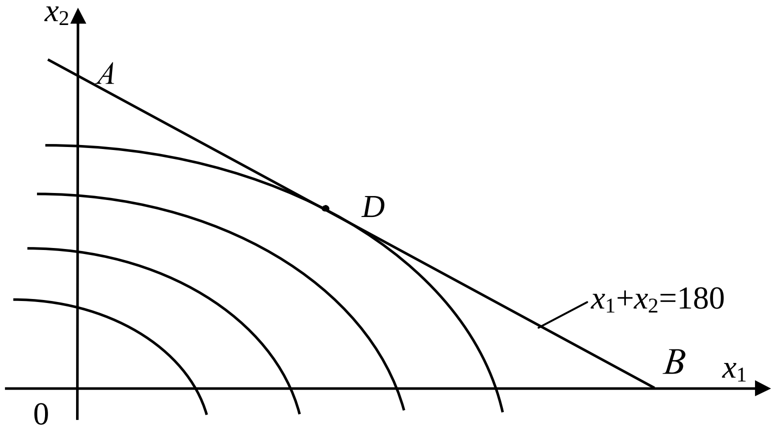



Рисунок 3.5. *ОДР* відрізок прямої $AB$

Проводячи з точки $E$ кола різних радіусів, бачимо, що мінімальне значення цільова функція приймає в точці $D$. Щоб знайти координати цієї точки, скористаємося тим, що кутовий коефіцієнт $k$ кола $4x_1 + x_1^2 + 8x_2 + x_2^2 = c$ в точці $D$ співпадає з кутовим коефіцієнтом прямої $x_1 + x_2 = 180$ і дорівнює –1. Розглядаючи $x_2$ як неявну функцію від $x_1$ і диференціюючи рівняння кола, маємо

$$4 + 2x_1 + 8x_2' + 2x_2 \cdot x_2' = 0 \ \text{або}\ x_2' = -\frac{2 + x_1}{4 + x_2}.$$

Прирівнюючи отриманий вираз числу –1, отримуємо одне з рівнянь для визначення координат точки $D$. Приєднуючи до нього рівняння прямої, на якій лежить точка $D$, маємо систему

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 2, \\ x_1 + x_2 = 180; \end{cases}$$

звідки $x_1^* = 91;\ x_2^* = 89$. Це означає, що якщо підприємство виготовить 91 виріб I технологічним способом і 89 виробів II способом, то загальні витрати будуть мінімальними і складуть 17278 грн.

Вирішимо тепер задачу, використовуючи метод множників Лагранжа. Знайдемо мінімальне значення функції (3.20) за умови (3.21), тобто без урахування вимоги позитивності змінних. Для цього складемо функцію Лагранжа

$$F\left(x_1, x_2, \lambda\right) = 4x_1 + x_1^2 + 8x_2 + x_2^2 + \lambda\left(180 - x_1 - x_2\right),$$

обчислимо її часткові похідні по $x_1$, $x_2$, $\lambda$ і прирівнюємо їх до нуля:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x_1} = 4 + 2x_1 - \lambda = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial x_2} = 8 + 2x_2 - \lambda = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda} = 180 - x_1 - x_2 = 0. \end{cases}$$

Переносячи в праві частини перших двох рівнянь $\lambda$ і прирівнюючи їх ліві частини, отримаємо

$$4 + 2x_1 = 8 + 2x_2 \text{ або } x_1 - x_2 = 2.$$

Вирішуючи останнє рівняння сумісно з рівнянням $x_1 + x_2 = 180$, знаходимо $x_1^* = 91$ і $x_2^* = 89$, тобто отримали координати точки $D$, що задовольняє умовам (3.22). Ця точка є підозрілою на екстремум. Використовуючи другі часткові похідні, можна показати, що в точці $D$ функція $f$ має умовний мінімум. Цей результат і був отриманий вище.

Слід зазначити, що такий же результат ми отримаємо і в тому випадку, якщо дослідження на умовний екстремум функції $f$ зведемо до дослідження на безумовний екстремум функції $f_1$, отриманої з $f$ в результаті її перетворень. А саме, якщо з рівняння зв'язку (3.21) знайдемо $x_2 = 180 - x_1$ і підставимо цей вираз в (3.20), то отримаємо функцію однієї змінної $x_1$:

$$f_1 = 4x_1 + x_1^2 + 8\left(180 - x_1\right) + \left(180 - x_1\right)^2.$$

Знайдемо стаціонарну точку цієї функції з рівняння

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = 4 + 2x_1 - 8 - 2\left(180 - x_1\right) = 0 \text{ або } 4x_1 - 364 = 0,$$

звідки $x_1^* = 91$; $x_2^* = 89$. Як і вище, встановлюємо, що в заданій точці функція $f$ має мінімальне значення.

**Приклад 3.6.**

Знайти точки екстремуму функції $f = x_1^2 + x_2^2$ за умови $x_1 + x_2 = 5$.

**Рішення**

Складемо функцію Лагранжа

$$F\left(x_1, x_2, \lambda\right) = x_1^2 + x_2^2 + \lambda \cdot \left(5 - x_1 - x_2\right).$$

Знайдемо її часткові похідні по $x_1$, $x_2$, $\lambda$ і прирівняємо їх нулю. Отримаємо систему рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial X_1} = 2x_1 - \lambda = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial X_2} = 2x_2 - \lambda = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda} = x_1 + x_2 - 5 = 0. \end{cases} \tag{3.23}$$

З першого і другого рівнянь маємо $x_1 - x_2 = 0$. Вирішуючи це рівняння сумісно з третім рівнянням системи (3.23), знаходимо $x_1 = \dfrac{5}{2}$, $x_2 = \dfrac{5}{2}$. Таким чином в точці $\left(\dfrac{5}{2}, \dfrac{5}{2}\right)$ дана функція може мати умовний екстремум. Для його визначення потрібно провести додаткові дослідження. Зокрема, використовуючи другі часткові похідні, можна показати, що в цій точці функція має умовний мінімум $F_{\min} = \frac{25}{2}$.

Метод множників Лагранжа можна застосовувати і у тому випадку, коли умови зв'язку є нерівності. Так, якщо потрібно знайти екстремум функції $Z = f(x)$ за умови $g(x) \le b$, то спочатку слід знайти точки безумовного екстремуму функції $Z = f(x)$ з рівняння $\frac{\partial f}{\partial x_k} = 0$ $\left(k = \overline{1,n}\right)$, потім серед цих точок відібрати ті, координати яких задовольняють умові зв'язку $g(x) < b$, і визначити точки, що задовольняють системі рівнянь

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x_k} - \lambda \frac{\partial g}{\partial x_k} = 0, & \left(k = \overline{1,n}\right), \\ g(x) = b. \end{cases}$$

Точки, знайдені в результаті рішення цієї системи, разом з точками, які визначені на першому етапі і задовольняють умові $g(x) \le b$, підлягають подальшому дослідженню, як і при знаходженні безумовного екстремуму.

# ТЕМА 4. ОПУКЛЕ ПРОГРАМУВАННЯ

## 4.1. Опуклі функції. Постановка задачі опуклого програмування

**Опукле програмування** – це розділ нелінійного програмування, в якому вивчаються екстремальні задачі опуклих функцій на опуклій множині, яка задається системою нерівностей.

Опуклим цей вид математичного програмування називається тому, що маємо справу з опуклими цільовими функціями і опуклими системами обмежень.

Область або множина $X$ в системі координат $XOY$ називається опуклою, якщо пряма, що з'єднує будь-які дві точки цієї області, лежить повністю усередині цієї області. Опуклі функції не мають локальних екстремумів (дуга між двома точками на кривій завжди лежить нижче за пряму, що з'єднує ці точки). При опуклому програмуванні локальні і глобальний екстремум співпадають. Задача зводиться до відшукання мінімуму опуклої (вниз) функції.

Розглянемо задачу нелінійного програмування: знайти максимальне значення цільової функції

$$F = f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right) \to \max \tag{4.1}$$

при системі обмежень

$$g_i\left(x_1, x_2, ..., x_n\right) \le b_i \quad \left(i = \overline{1,m}\right) \tag{4.2}$$

і умові позитивності

$$x_j \ge 0 \ \left(j = \overline{1,n}\right), \tag{4.3}$$

де $f$ і $g_i$ – деякі функції $n$ змінних $x_1, x_2, ..., x_n$.

Для вирішення сформульованої задачі в такій загальній постановці не існує універсальних методів. Проте для окремих класів задач, в яких зроблені додаткові обмеження щодо властивостей функцій $f$ і $g_i$, розроблені ефективні методи їх рішення. Зокрема, ряд таких методів є для вирішення задач нелінійного програмування (4.1)–(4.3) за умови, що $f$ – вгнута (опукла) функція і ОДР, визначувана обмеженнями (4.2)–(4.3) опукла.

Функція $f(x_1, x_2, ..., x_n)$, задана на опуклій множині $X$, називається **опуклою**, якщо для будь-яких двох точок $x_1$ і $x_2$ з $X$ і будь-якого $0 \le \lambda \le 1$ виконується співвідношення

$$f\left[\lambda x_2 + (1-\lambda)x_1\right] \le \lambda f(x_2) + (1-\lambda) f(x_1). \qquad (4.4)$$

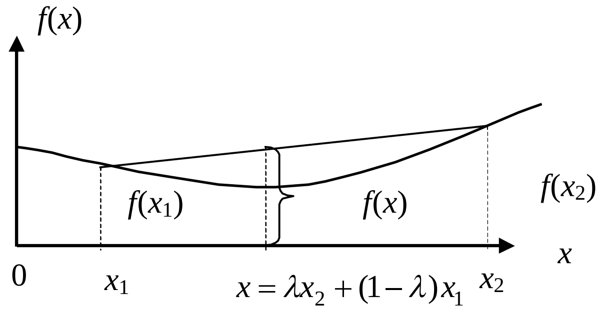



Рисунок 4.1. Опукла функція

Говорять, що безліч рішень задачі (4.1)–(4.3) задовольняє умові регулярності, якщо існує принаймні одна точка $x_i$, що належить *ОДР* така, що $g_i(x_i) < b_i \ \left(i = \overline{1,m}\right)$.

Задача (4.1)–(4.3) називається **задачею опуклого програмування,** якщо функція $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ є вгнутою(опуклою), а функції $g_i(x) \ \left(i = \overline{1,m}\right)$ – опуклими.

**Теорема 1.** Будь-який локальний екстремум задачі опуклого програмування є глобальним екстремумом.

Функцією Лагранжа задачі опуклого програмування (4.1)–(4.3) називається функція

$$L(x_1, x_2, ..., x_n, y_1, y_2, ..., y_m) = f(x_1, x_2, ..., x_n) + \sum_{i=1}^{m} y_i \left[b_i - g_i(x_1, x_2, ..., x_n)\right], \quad (4.6)$$

де $y_1, y_2, ..., y_m$ – множники Лагранжа.

Точка $(x_0, y_0) = \left(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0, y_1^0, y_2^0, ..., y_m^0\right)$ називається **сідловою точкою** функції Лагранжа, якщо $L\left(x_1, x_2, ..., x_n, y_1^0, y_2^0, ..., y_m^0\right) \le L\left(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0, y_1^0, y_2^0, ..., y_m^0\right) \le$

$\leq L\left(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0, y_1, y_2, ..., y_m\right)$ для всіх $x_j \geq 0 \ \left(j=\overline{1,n}\right)$ і $y_i \geq 0 \ \left(i=\overline{1,m}\right)$.

### 4.2. Теорема Куна–Таккера

Для задачі опуклого програмування (4.1)–(4.3), безліч допустимих рішень якої володіє властивістю регулярності, $\overline{x}_0 = \left\{x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0\right\}$ є оптимальним планом тоді і тільки тоді, коли існує такий вектор $\overline{y_0} = \left(y_1^0, y_2^0, ..., y_m^0\right)$, $y_i^0 \geq 0 \ \left(i=\overline{1,m}\right)$, що $\left(x_0, y_0\right)$ – є сідлова точка функції Лагранжа.

Ця теорема є узагальненням класичного методу множників Лагранжа для визначення екстремуму за наявності обмежуючих умов на випадок, коли останні містять не тільки рівність, але і нерівності.

Якщо припустити, що цільова функція $f$ і функції $g_i$, які безперервно диференціюються, то теорема Куна–Таккера може бути доповнена аналітичними виразами, що визначають необхідні і достатні умови того, щоб точка $\left(x_0, y_0\right)$ була сідловою точкою функції Лагранжа, тобто була рішенням задачі опуклого програмування. Ці вирази мають наступний вигляд

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L_0}{\partial x_j} \leq 0 \ \left(j=\overline{1,n}\right), & (4.7) \\ x_j^0 \dfrac{\partial L_0}{\partial x_j} = 0 \ \left(j=\overline{1,n}\right), & (4.8) \\ x_j^0 \geq 0 \ \left(j=\overline{1,n}\right), & (4.9) \\ \dfrac{\partial L_0}{\partial y_i} \geq 0 \ \left(i=\overline{1,m}\right), & (4.10) \\ y_i^0 \dfrac{\partial L_0}{\partial y_i} = 0 \ \left(i=\overline{1,m}\right), & (4.11) \\ y_i^0 \geq 0 \ \left(i=\overline{1,m}\right); & (4.12) \end{cases}$$

де $\frac{\partial L_0}{\partial x_j}$ і $\frac{\partial L_0}{\partial y_i}$ – значення відповідних часткових похідних функції Лагранжа, обчислених в сідловой точці.

*Приклади розв'язання задач*

**Приклад 4.1.**

Знайти максимальне значення функції

$$f = 2x_1 + 4x_2 - x_1^2 - 2x_2^2 \to \max \qquad (4.13)$$

за умов

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 8, \\ 2x_1 - x_2 \le 12; \end{cases} \qquad (4.14)$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0. \qquad (4.15)$$

**Рішення**

Функція $f$ є вгнутою, оскільки є сумою лінійної функції $f_1 = 2x_1 + 4x_2$ (яку можна розглядати як вгнуту) і квадратичної форми $f_2 = -x_1^2 - 2x_2^2$, яка є негативно–визначеною і також вгнутою. Система обмежень задачі включає тільки лінійні нерівності. Отже, можна користуватися теоремою Куна–Таккера. Складемо функцію Лагранжа

$$L = 2x_1 + 4x_2 - x_1^2 - 2x_2^2 + y_1\left(8 - x_1 - 2x_2\right) + y_2\left(12 - 2x_1 + x_2\right)$$

і запишемо необхідні і достатні умови існування сідлової точки побудованої функції

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial L}{\partial x_1} = 2 - 2x_1 - y_1 - 2y_2 \le 0, \\
\dfrac{\partial L}{\partial x_2} = 4 - 4x_2 - 2y_1 + y_2 \le 0, \\
\dfrac{\partial L}{\partial y_1} = 8 - x_1 - 2x_2 \ge 0, \\
\dfrac{\partial L}{\partial y_2} = 12 - 2x_1 + x_2 \ge 0;
\end{cases}
\tag{4.16}
$$

$$
\begin{cases}
x_1 \dfrac{\partial L}{\partial x_1} = x_1\left(2 - 2x_1 - y_1 - 2y_2\right) = 0, \\
x_2 \dfrac{\partial L}{\partial x_2} = x_2\left(4 - 4x_2 - 2y_1 + y_2\right) = 0, \\
y_1 \dfrac{\partial L}{\partial y_1} = y_1\left(8 - x_1 - 2x_2\right) = 0, \\
y_2 \dfrac{\partial L}{\partial y_2} = y_2\left(12 - 2x_1 + x_2\right) = 0;
\end{cases}
\tag{4.17}
$$

$$
x_1, x_2, y_1, y_2 \ge 0. \tag{4.18}
$$

Систему лінійних нерівностей (4.16) перепишемо так:

$$
\begin{cases}
2x_1 + y_1 + 2y_2 \ge 2, \\
4x_2 + 2y_1 - y_2 \ge 4, \\
x_1 + 2x_2 \le 8, \\
2x_1 - x_2 \le 12.
\end{cases}
\tag{4.19}
$$

Вводячи тепер додаткові ненегативні змінні $v_1, v_2, w_1, w_2$, що обертають нерівності (4.16) в рівність, отримаємо

$$
\begin{cases}
2x_1 + y_1 + 2y_2 - v_1 = 2, \\
4x_2 + 2y_1 - y_2 - v_2 = 4, \\
x_1 + 2x_2 + w_1 = 8, \\
2x_1 - x_2 + w_2 = 12.
\end{cases}
\tag{4.20}
$$

$$
x_1, x_2, y_1, y_2, v_1, v_2, w_1, w_2 \ge 0. \tag{4.21}
$$

Враховуючи рівність(4.20), можна записати:

$$v_1x_1 = 0,\ v_2x_2 = 0,\ w_1y_1 = 0,\ w_2y_2 = 0\,. \qquad (4.22)$$

Якщо тепер знайти базисне рішення системи лінійних рівнянь (4.20) з урахуванням виконання рівності (4.22), то буде отримана сідлова точка функції Лагранжа для початкової задачі, тобто визначено оптимальне рішення.

Для знаходження базисного рішення системи лінійних рівнянь (4.20) скористаємося методом штучного базису. У перше і друге рівняння системи (4.20) відповідно додамо додаткову ненегативну змінну $Z_1$ і $Z_2$ і розглянемо ОЗЛП, що полягає у визначенні максимального значення функції

$$\overline{F} = -Mz_1 - Mz_2 \to \max \qquad (4.23)$$

за умов

$$\begin{cases} 2x_1 + y_1 + 2y_2 - v_1 + z_1 = 2, \\ 4x_2 + 2y_1 - y_2 - v_2 + z_2 = 4, \\ x_1 + 2x_2 + w_1 = 8, \\ 2x_1 - x_2 + w_2 = 12. \end{cases} \qquad (4.24)$$

$$x_1, x_2, y_1, y_2, v_1, v_2, w_1, w_2, z_1, z_2 \geq 0. \qquad (4.25)$$

В результаті рішення задачі (4.23)–(4.25) з урахуванням умови (4.22) знаходимо допустиме базисне рішення системи лінійних рівнянь (4.24) (див. табл. 4.1).

$$x_1^0 = 1;\ x_2^0 = 1;\ w_1 = 5;\ w_2 = 11;\ y_1^0 = y_2^0 = v_1 = v_2 = 0.$$

Оскільки $x_1^0 v_1 = 0;\ x_2^0 v_2 = 0;\ y_1^0 w_1 = 0;\ y_2^0 w_2 = 0,$ то $\left(x_0, y_0\right) = \left(1,1,0,0\right)$ є сідловою точкою функції Лагранжа для початкової задачі. Отже, $\overline{x}^* = \{1,1\}$ – оптимальний план початкової задачі і $f_{\max} = 3$.

Таблиця 4.1. Симплекс–таблиця

| $i$ | Б | $C_b$ | $\overline{A}_0$ | $c_1=0$ | $c_2=0$ | $c_3=0$ | $c_4=0$ | $c_5=0$ | $c_6=0$ | $c_7=0$ | $c_8=0$ | $c_9=-M$ | $c_{10}=-M$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | $\overline{A}_{x_1}$ | $\overline{A}_{x_2}$ | $\overline{A}_{\lambda_1}$ | $\overline{A}_{\lambda_2}$ | $\overline{A}_{v_1}$ | $\overline{A}_{v_2}$ | $\overline{A}_{w_1}$ | $\overline{A}_{w_2}$ | $\overline{A}_{y_1}$ | $\overline{A}_{y_2}$ |
| 1 | $\overline{A}_{y_1}$ | $-M$ | 2 | 2 | 0 | 1 | 2 | -1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 2 | $\overline{A}_{y_2}$ | $-M$ | 4 | 0 | 4 | 2 | -1 | 0 | -1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 3 | $\overline{A}_{w_1}$ | 0 | 8 | 1 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 4 | $\overline{A}_{w_2}$ | 0 | 12 | 2 | -1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| $m+1$ | | | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $m+2$ | | | -6 | -2 | -4 | -3 | -1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | $\overline{A}_{y_1}$ | $-M$ | 2 | 2 | 0 | 1 | 2 | -1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 2 | $\overline{A}_{x_1}$ | 0 | 1 | 0 | 1 | 1/2 | -1/4 | 0 | -1/4 | 0 | 0 | 0 | 1/4 |
| 3 | $\overline{A}_{w_1}$ | 0 | 6 | 1 | 0 | -1 | 1/2 | 0 | 1/2 | 1 | 0 | 0 | -1/2 |
| 4 | $\overline{A}_{w_2}$ | 0 | 13 | 2 | 0 | 1/2 | -1/4 | 0 | -1/4 | 0 | 1 | 0 | 1/4 |
| $m+1$ | | | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $m+2$ | | | -2 | -2 | 0 | -1 | -2 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | $\overline{A}_{x_1}$ | 0 | 1 | 1 | 0 | 1/2 | 1 | -1/2 | 0 | 0 | 0 | 1/2 | 0 |
| 2 | $\overline{A}_{x_2}$ | 0 | 1 | 0 | 1 | | | | | 0 | 0 | | |
| 3 | $\overline{A}_{w_1}$ | 0 | 5 | 0 | 0 | | | | | 1 | 0 | | |
| 4 | $\overline{A}_{w_2}$ | 0 | 11 | 0 | 0 | | | | | 0 | 1 | | |
| $m+1$ | $F_J - C_J$ | | 0 | 0 | 0 | | | | | 0 | 0 | | |

**Приклад 4.2.**

Показати, що наступні функції є опуклими:

а) $F = 2x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 + 5x_1 - 6x_2 + 8$;

б) $G = -\sqrt{x_1x_2}$.

**Рішення**

а) Знаходимо часткові похідні

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = 4x_1 - x_2 + 5; \quad \frac{\partial F}{\partial x_2} = 2x_2 - x_1 - 6;$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} = 4; \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2} = 2; \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} = -1.$$

Складемо матрицю других похідних

$$A = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_2^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad |A| = 7 > 0,$$

$|\Delta_1| = |4| = 4 > 0$ – це головний мінор матриці A.

Отже, $F$ є строго опуклою функцією при всіх значеннях $x$.

б)

$$\frac{\partial G}{\partial x_1} = -\frac{x_2}{2\sqrt{x_1x_2}}; \quad \frac{\partial G}{\partial x_2} = -\frac{x_1}{2\sqrt{x_1x_2}}; \quad \frac{\partial^2 G}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{1}{4\sqrt{x_1x_2}};$$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x_1^2} = \frac{1}{4x_1}\sqrt{\frac{x_2}{x_1}}; \quad \frac{\partial^2 G}{\partial x_2^2} = \frac{1}{4x_2}\sqrt{\frac{x_1}{x_2}}.$$

Матриця других часткових похідних

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{4x_1}\sqrt{\frac{x_2}{x_1}} & \frac{1}{4\sqrt{x_1 x_2}} \\ \frac{1}{4\sqrt{x_1 x_2}} & \frac{1}{4x_2}\sqrt{\frac{x_1}{x_2}} \end{pmatrix}; \quad \Delta_1 = \frac{1}{4x_1}\sqrt{\frac{x_2}{x_1}};$$

$$\Delta_2 = |A| = \frac{1}{16x_1 x_2} - \frac{1}{16x_1 x_2} = 0.$$

Отже, $G$ є опуклою, але не строго опуклою функцією при $x_1 > 0$, $x_2 > 0$.

# ТЕМА 5. КВАДРАТИЧНЕ ПРОГРАМУВАННЯ

## 5.1. Основні поняття і постановка задачі квадратичного програмування

**Квадратичне програмування** – це розділ нелінійного програмування, що вивчає задачі, де потрібно знайти глобальний максимум квадратичної функції на багатогранній множині.

Або **квадратичне програмування** – це розділ опуклого програмування, при якому цільова функція є багаточленом другого ступеня, а обмеження лінійні.

У зв'язку з цими визначеннями познайомимося спочатку з так званою квадратичною формою. Нам часто доводилося розглядати однорідний багаточлен першого ступеня $n$ змінних

$$F = a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n,$$

який називається лінійною формою цих змінних. Безпосереднім узагальненням лінійної форми є так звана квадратична форма.

Квадратичною формою змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n$ називається однорідний багаточлен другого ступеня щодо цих змінних, тобто

$$M\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{kj}\, x_k\, x_j,$$

де $c_{kj} = c_{jk}$.

Наприклад, квадратична форма при $n = 2$ має вигляд

$$M\left(x_1, x_2\right) = \sum_{k=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} c_{kj}x_kx_j = c_{11}x_1^2 + c_{12}x_1x_2 + c_{21}x_2x_1 + c_{22}x_2^2,$$

що можна записати ще так

$$M(x_1, x_2) = x_1\left(c_{11}x_1 + c_{12}x_2\right) + x_2\left(c_{21}x_1 + c_{22}x_2\right).$$

Якщо ввести матриці

$$A = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

то квадратичну форму в матричному вигляді можна записати так

$$M\left(x_1, x_2\right) = X'AX,$$

тоді відома симетрична матриця $A$ називається матрицею квадратичної форми.

Розглянемо квадратичну форму відносно змінних $x_1, x_2, ..., x_n$ як числову функцію від цих змінних

$$Z = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{kj} x_k x_j.$$

Квадратична форма $Z$ називається позитивно–визначеною, якщо $Z\left(x\right) > 0$, і негативно–визначеною, якщо $Z\left(x\right) < 0$ для всіх значень змінних $X = \left(x_1,\, x_2,\, ...,\, x_n\right)$, окрім $X = 0$.

Квадратична форма $Z$ називається позитивно–напіввизначеною, якщо $Z\left(x\right) \geq 0$, і негативно–напіввизначеною, якщо $Z\left(x\right) \leq 0$ для будь-якого набору значень змінних $X = \left(x_1,\, x_2,\, ...,\, x_n\right)$, крім того, існує такий набір змінних $X' = \left(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n\right)$, де не всі значення змінних одночасно дорівнюють нулю, що $Z(X') = 0.$

**Теорема**. Квадратична форма є опуклою функцією, якщо вона позитивно–напіввизначена, і вгнутою, якщо вона негативно–напіввизначена.

Постановка задачі квадратичного програмування полягає в наступному.

Знайти екстремум цільової функції

$$f\left(x\right) = \sum_{j=1}^{n} d_j x_j + \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{kj} x_k x_j \rightarrow extr \tag{5.1}$$

при системі обмежень

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \quad \left(i = \overline{1,m}\right) \tag{5.2}$$

і умові позитивності

$$x_j \geq 0 \quad \left( j = \overline{1, n} \right), \tag{5.3}$$

де $\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{kj} x_k x_j$ – негативно або позитивно–напіввизначена квадратична форма.

Для сформульованої задачі квадратичного програмування функція Лагранжа запишеться у вигляді

$$L = \sum_{j=1}^{n} d_j x_j + \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{kj} x_k x_j + y_i \left( b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right).$$

Якщо функція $L$ має сідлову точку

$$\left( X_0, Y_0 \right) = \left( x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0, y_1^0, y_2^0, \ldots, y_m^0 \right),$$

то в цій точці виконуються співвідношення задачі квадратичного програмування і, вводячи додаткові змінні $V_j$ $\left( j = \overline{1, n} \right)$ і $W_i$ $\left( i = \overline{1, m} \right)$, створюючи нерівності системи обмежень в рівності, перепишемо вирази необхідних і достатніх умов екстремуму, записаних для задачі квадратичного програмування, таким чином

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L_0}{\partial x_j} + V_j = 0 \quad \left( j = \overline{1, n} \right), & (5.4) \\ \dfrac{\partial L_0}{\partial y_i} - W_i = 0 \quad \left( i = \overline{1, m} \right), & (5.5) \\ x_j^0 V_j = 0 \qquad \left( j = \overline{1, n} \right), & (5.6) \\ y_i^0 W_i = 0 \qquad \left( i = \overline{1, m} \right); & (5.7) \end{cases}$$

$$x_j^0 \geq 0,\ V_j \geq 0,\ y_i^0 \geq 0,\ W_i \geq 0 \ \left( j = \overline{1, n};\ i = \overline{1, m} \right). \tag{5.8}$$

Так, щоб знайти рішення задачі квадратичного програмування (5.1)–(5.3), потрібно визначити ненегативне рішення систем лінійних рівнянь (5.4) і (5.5), що задовольняє умовам (5.6) і (5.7).

Це рішення можна знайти за допомогою методу штучного базису, застосованого для знаходження максимального значення функції $F = -\sum_{i=1}^{m} M \cdot y_i$ за умов (5.4), (5.5), (5.8) з урахуванням умов (5.6) і (5.7). Тут $y_i$ – штучні змінні, введені в рівняння (5.4) і (5.5).

Використовуючи метод штучного базису і додатково враховуючи умови (5.6) і (5.7), після кінцевого числа кроків або встановимо нерозв'язність задачі, або отримаємо оптимальний план початкової задачі.

Отже, процес знаходження рішення задачі квадратичного програмування (5.1)–(5.3) включає наступні етапи.

1) Складають функцію Лагранжа.

2) Записують у вигляді виразів (5.4)–(5.8) необхідні і достатні умови існування сідлової точки для функції Лагранжа.

3) Використовуючи метод штучного базису або встановлюють відсутність сідлової точки для функції Лагранжа, або знаходять її координати.

4) Записують оптимальне рішення початкової задачі і знаходять значення цільової функції.

Нарешті відмітимо, що при використанні симплексного методу необхідно враховувати умови

$$x_j^0 V_j = 0 \qquad \left( j = \overline{1,n} \right), \tag{5.6}$$

$$y_i^0 W_i = 0 \qquad \left( i = \overline{1,m} \right), \tag{5.7}$$

що забороняють одночасне знаходження в базисі змінних $x$ і $V$, $y$ і $W$ з однаковими індексами. Ці умови (5.6) і (5.7) ще називають умовами доповнюючої нежорсткості, які накладають додаткові обмеження на змінні $x$, $y$, $V$ і $W$ а саме, якщо $x_j^0 > 0$, то $V_j = 0$ і, навпаки, якщо $x_j^0 = 0$, то $V_j > 0$; якщо $y_i > 0$, то $W_i = 0$ і навпаки.

# ТЕМА 6. ДИНАМІЧНЕ ПРОГРАМУВАННЯ

## 6.1. Загальна характеристика задач динамічного програмування і їх геометрична і економічна інтерпретації

У задачах лінійного програмування ми знаходили рішення як би в один етап або за один крок. Такі задачі називаються одноетапними або однокроковими.

Задачі ДП є багатоетапними або багатокроковими: на кожному кроці визначається рішення деякої часткової задачі, обумовленої результатної.

### Загальна задача динамічного програмування

Припускаємо, що дана фізична система $S$ знаходиться в деякому початковому стані, $S_0 \in \overline{S}_0$ і є керованою. Таким чином, завдяки здійсненню деякого управління $U$ вказана система переходить з початкового стану $S_0$ в кінцевий стан $S_{кін} \in S_R$. При цьому якість кожного з управлінь $U$, що реалізовуються, характеризується відповідним значенням функції $W(U)$. Задача полягає в тому, щоб з безлічі можливих управлінь $U$ знайти таке $U^*$, при якому функція $W(U)$ приймає екстремальне значення (максимальне або мінімальне) $W(U^*)$.

### Геометрична інтерпретація цієї задачі

Припустимо, що стан системи характеризується деякою точкою $S$ на площині $X_1OX_2$ (див. рис. 6.1) і ця точка завдяки здійснюваному управлінню її рухом переміщається уздовж лінії, що зображена на рисунку 6.1, з області можливих початкових станів $\overline{S}_0$ до області допустимих кінцевих станів $\overline{S}_R$.

Кожному управлінню $U$ рухом точки, тобто кожній траєкторії руху точки, поставимо у відповідність значення деякої функції $W(U)$ (наприклад, довжину шляху, пройденого точкою під впливом даного управління).

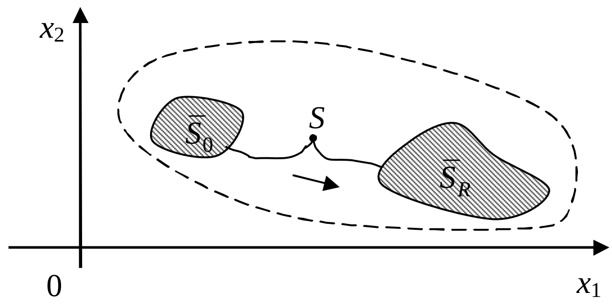



Рисунок 6.1. Переміщення точки $S$

Тоді задача полягає в тому, щоб зі всіх допустимих траєкторій руху точки $S$ знайти таку, яка виходить в результаті реалізації управління $U^*$, що забезпечує екстремальне значення функції $W\left(U^*\right)$.

Економічну інтерпретацію загальної задачі динамічного програмування розглянемо на такому прикладі (задачі).

Для збільшення об'ємів випуску продукції, що виготовляється підприємствами, виділені капіталовкладення в об'ємі $S$ тис. грн. Використання $i$ – підприємством $x_i$ тис. грн з вказаних засобів забезпечує приріст випуску продукції, визначуваний значенням нелінійної функції $f_i\left(x_i\right)$.

Знайти розподіл капіталовкладень між підприємствами, що забезпечує максимальне збільшення випуску продукції.

Математична постановка задачі полягає у визначенні найбільшого значення функції

$$F=\sum_{i=1}^{n} f_i\left(x_i\right) \tag{6.1}$$

за умов

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = S\,, \tag{6.2}$$

$$x_i \geq 0 \;\left(i=\overline{1,n}\right). \tag{6.3}$$

Сформована задача є задачею нелінійного програмування. У тому випадку, коли $f_i(x_i)$ – опуклі (або вгнуті) функції, її рішення можна знайти, наприклад, методом множників Лагранжа. Якщо ж функції $f_i(x_i)$ не є такими, то відомі методи знаходження рішення задач нелінійного програмування не дозволяють визначити глобальний максимум функції (6.1). Тоді рішення задачі (6.1)–(6.3) можна знайти за допомогою динамічного програмування. Для цього початкову задачу потрібно розглянути як багатоетапну або багатокрокову. Замість того щоб розглянути допустимі варіанти розподілу капіталовкладень між $n$ підприємствами і оцінювати їх ефективність, досліджуватимемо ефективність вкладення засобів на одному підприємстві, на двох підприємствах і т.д., нарешті, на $n$ підприємствах. Таким чином, отримаємо $n$ етапів, на кожному з яких стан системи (в якості яких виступають підприємства) описується об'ємом засобів, що підлягають освоєнню $k$ підприємствами $\left(k=\overline{1,n}\right)$. Рішення про об'єми капіталовкладень, що виділяються $k$–му підприємству і є управліннями. Задача полягає у виборі таких управлінь, при яких функція (6.1) приймає найбільше значення.

## 6.2. Знаходження рішення задачі методом динамічного програмування

Розглянемо в загальному вигляді рішення загальної задачі ДП. Вважатимемо, що відстань даної системи $S$ на $k$–му кроці $\left(k=\overline{1,n}\right)$ визначається сукупністю чисел $X^{(k)}=\left(x_1^{(k)},x_2^{(k)},\ldots,x_n^{(k)}\right)$, які отримані в результаті управління $u_k$, що забезпечило перехід системи $S$ із стану $X^{(k-1)}$ в стан $X^{(k)}$. При цьому припускатимемо, що стан $X^{(k)}$, в який перейшла система $S$, залежить від даного стану $X^{(k-1)}$ і вибраного управління $u_k$ і не залежить від того, яким чином система $S$ прийшла в стан $X^{(k-1)}$.

Далі, вважатимемо, що якщо в результаті реалізації $k$–го кроку забезпечене певний дохід або виграш, також залежний від початкового стану системи $X^{(k-1)}$ і вибраного управління $u_k$ і який дорівнює $W_k\left(X^{(k-1)}, u_k\right)$, то загальний дохід або виграш за $n$ кроків складає

$$F = \sum_{k=1}^{n} W_k\left(X^{(k-1)}, u_k\right). \tag{6.4}$$

Таким чином, ми сформулювали дві умови, яким повинна задовольняти дана задача ДП. Першу умову зазвичай називають **умовою відсутності наслідку, а другу – умовою адитивності цільової функції задачі.**

Виконання для задачі ДП першої умови дозволяє сформулювати для неї принцип оптимальності Беллмана. Але спочатку задамо визначення оптимальної стратегії управління. Під такою стратегією розумітимемо сукупність управлінь, в результаті реалізації яких система $S$ за $n$ кроків переходить з початкового стану $X^{(0)}$ в кінцеве $X^{(k)}$ і при цьому функція (6.4) приймає найбільше значення.

**Принцип оптимальності Беллмана**

Яким би не був стан системи перед черговим кроком, треба вибрати управління на цьому кроці так, щоб виграш на даному кроці плюс оптимальний виграш на всіх подальших кроках був максимальним.

Звідси витікає, що оптимальну стратегію управління можна отримати, якщо спочатку знайти оптимальну стратегію управління на $n$–му кроці, потім на двох останніх кроках, потім на трьох останніх кроках і т.д., аж до першого кроку. Таким чином, рішення даної задачі ДП доцільно починати з визначення оптимального рішення на останньому $n$–му кроці. Для того, щоб знайти це рішення, потрібно зробити різні припущення про те, як міг закінчитися передостанній крок, і з урахуванням цього вибрати управління $u_n^0$, що забезпечує максимальне значення функції $W_n\left(X^{(n-1)}, u_n\right)$. Таке управління $u_n^0$, вибране при певних припущеннях о том, як закінчився попередній крок, називається умовно оптимальним управлінням. Отже, принцип оптимальності вимагає знаходити на кожному кроці умовне оптимальне управління для будь-якого з можливих результатів попереднього кроку. Дамо математичне формулювання принципу оптимальності. Для цього позначимо через $F_n\left(X^0\right)$ максимальний дохід, що отримується за $n$ кроків під час переходу системи $S$ з початкового стану $X^{(0)}$ в кінцевий стан $X^{(n)}$ при реалізації оптимальної стратегії управління $U=\left(u_1,u_2,\ldots,u_n\right)$, а через $F_{(n-k)}(X^{(k)})$ – максимальний дохід, що отримується при переході з будь-якого стану $X^{(k)}$ в кінцевий стан $X^{(n)}$ при оптимальній стратегії управління на $n-k$ кроках, що залишилися. Тоді

$$F_n\left(X^0\right)=\max_{u_{k+j}}\left[W_1\left(X^{(0)},u_1\right)+\cdots+W_n\left(X^{(n-1)},u_n\right)\right], \tag{6.5}$$

$$F_{(n-k)}\left(X^{(k)}\right)=\max_{u_{k+1}}\left[W_{k+1}\left(X^{(k)},u_{k+1}\right)+\cdots+F_{n-k-1}\left(X^{(k+1)}\right)\right]\ \left(k=\overline{0,n-1}\right). \tag{6.6}$$

Останній вираз є математичним записом принципу оптимальності і носить назву **основного функціонального рівняння Беллмана** або рекурентного співвідношення. Використовуючи дане рівняння, знаходимо рішення задачі ДП. Розглянемо це докладно.

Вважаючи $k=n-1$ в (6.6), отримаємо наступне функціональне рівняння

$$F_1\left(X^{(n-1)}\right)=\max_{u_n}\left[W_n\left(X^{(n-1)},u_n\right)+F_0\left(X^{(n)}\right)\right]. \tag{6.7}$$

У цьому рівнянні $F_0\left(X^{(n)}\right)$ вважатимемо відомими. Використовуючи рівняння (6.7) і розглядаємо всілякі допустимі перебування системи $S$ на $(n-1)$ кроці $X_1^{(n-1)},\ X_2^{(n-1)},\ldots,\ X_m^{(n-1)},\ldots,$ знаходимо умовні оптимальні рішення

$$u_n^0\left(X_1^{(n-1)}\right),u_n^0\left(X_2^{(n-1)}\right),\ldots,u_n^0\left(X_m^{(n-1)}\right),\ldots$$

і відповідні значення функції (6.7)

$$F_1^0\left(X_1^{(n-1)}\right),F_1^0\left(X_2^{(n-1)}\right),\ldots,F_1^0\left(X_m^{(n-1)}\right),\ldots.$$

Таким чином, на $n$–му кроці знаходимо умовно оптимальне управління при будь-якому допустимому стані системи $S$ після $(n-1)$–го кроку. Іншими словами, в якому б стані система не виявлялася після $(n-1)$–го кроку, нам вже відомо, яке слід прийняти рішення на $n$–му кроці. Відомо також і відповідне значення функції (6.7).

Переходимо тепер до розгляду функціонального рівняння при $k = n-2$

$$F_2\left(X^{(n-1)}\right) = \max_{u_{n-1}}\left[W_{n-1}(X^{(n-2)}, u_{n-1}) + F_1\left(X^{n-1}\right)\right]. \tag{6.8}$$

Для того, щоб знайти значення $F_2$ для всіх допустимих значень $X^{(n-2)}$, очевидно, необхідно знати $W_{n-1}\left(X^{(n-2)}, u_{n-1}\right)$ і $F_1\left(X^{(n-1)}\right)$. Що стосується значень $F_1\left(X^{(n-1)}\right)$, то ми їх вже визначили. Тому потрібно провести обчислення $W_{n-1}\left(X^{(n-2)}, u_{n-1}\right)$ при деякому наборі допустимих значень $X^{(n-2)}$ і відповідних рівнянь $u_{n-1}$. Ці обчислення дозволять визначити умовно оптимальне управління $u_{n-1}^0$ для кожного $X^{(n-2)}$. Кожне з таких управлінь сумісно з вже вибраним управлінням на останньому кроці, забезпечує максимальне значення доходу на двох останніх кроках.

Послідовно здійснюючи описаний вище ітераційний процес дійдемо до першого кроку. На цьому кроці нам відомо, в якому стані може знаходитися система. Тому вже не потрібно робити припущень про допустимі стани системи, а залишається тільки вибрати управління, яке є якнайкращим з урахуванням умовних оптимальних управлінь, вже прийнятих на всіх подальших кроках.

Таким чином, в результаті послідовного проходження на всіх етапах від кінця до початку визначаємо максимальне значення виграшу за $n$ кроків і для кожного з них знаходимо умовно оптимальне управління.

Щоб знайти оптимальну стратегію управління, тобто визначити шукане рішення задачі, потрібно тепер пройти всю послідовність кроків, тільки цього разу від початку до кінця. А саме: на першому кроці в якості оптимального управління $u_1^*$ візьмемо знайдемо умовно оптимальне управління $u_1^*$. На другому кроці знайдемо стан $X_1^*$, в який переводить систему управління $u_1^*$. Цей стан визначає знайдене умовне оптимальне управління $u_2^*$, яке тепер вважатимемо оптимальним. Знаючи $u_2^*$, знаходимо $X_2^*$, а значить, визначуваний $u_3^*$ і т.д. В результаті цього знаходимо рішення, тобто максимально можливий дохід і оптимальну стратегію управління $U^*$, що включає оптимальне управління на окремих кроках $U^* = \left(u_1^*, u_2^*, \ldots, u_n^*\right)$.

### 6.3. Види вирішуваних задач методом ДП. Задача розподілу ресурсів

ДП застосовується в основному для вирішення задач двох класів: 1) планування діяльності економічної системи (підприємства, об'єднання) з урахуванням зміни продукції, що випускається, в часі відповідно до потреби, що змінюється, і 2) розподіл ресурсів по різних напрямах в часі.

Найдоцільніше ДП застосовувати для вирішення задач, в яких пошук оптимального рішення вимагає поетапного підходу це:

– визначення часу заміни устаткування з урахуванням витрат на експлуатацію устаткування, на придбання нового, первинній вартості даного устаткування, вартості отримуваної на нім продукції;

– пошук несправностей;

– планування поповнення складу деталями широкого застосування;

– пошук найкоротшого шляху в графі і т.д.

Розглянемо одну з таких задач, а саме: задачу про розподіл ресурсів.

Будь-яке підприємство на випуск своєї продукції витрачає матеріальні ресурси, до яких відносяться: устаткування, електроенергія, паливо, праця працівників, капіталовкладення і т.д. Багато з ресурсів є дефіцитними.

Унаслідок різної продуктивності праці, пов'язаної з конкретними умовами, використовуваною технологією, організацією і управлінням, ефект від використання ресурсів різний для конкретних підприємств. Тому виникає задача оптимального розподілу ресурсів між окремими підприємствами, при якому досягається максимальний сумарний ефект від їх використання. Ця задача актуальна на всіх рівнях.

Поставимо задачу в загальному вигляді.

Нехай деякий ресурс є в кількості $S_0$ одиниць на початку планованого періоду. Нехай період планування складає $m$ етапів (років, п'ятирічок). Наявна кількість ресурсів на кожному етапі розподіляється між $n$ підприємствами. Позначимо через $x_{ij}$ – кількість ресурсу, виділене $j$–му підприємству на початку $i$–го етапу $\left(i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,n}\right)$. Ефект від використання на $j$–м підприємстві $x$ одиниць ресурсу протягом $i$–го етапу виразимо функцією $g_{ij}\left(x\right)$. В результаті використання на потреби виробництва в кінці $i$–го етапу кількість ресурсу зменшується (наприклад, відбувається амортизація устаткування). Виразимо функцією $g_{ij}\left(x\right)$ залишок ресурсу в кінці $i$–го етапу на $j$–м підприємстві за умови, що на початку етапу було виділено підприємству $x$ одиниць ресурсу. На кожному етапі залишок ресурсу перерозподіляється між підприємствами.

Потрібно так спланувати розподіл ресурсів між підприємствами по етапах, щоб за весь планований період отримати максимально можливий ефект.

Позначимо через $S_i$ – кількість ресурсу, що залишилась в кінці $i$–го етапу, і виділимо фазові координати, управління і критерій ефективності. В даному випадку перебування процесу на $i$–му етапі визначається кількістю ресурсу $S_i$, тому $S_i$–фазова координата. Управління $u_i$ – це сукупність чисел $x_{i1}, x_{i2}, ..., x_{in}$, що представляють розподіл ресурсу на $i$–му етапі між підприємствами. Якість управління оцінюється сумарним ефектом $H$ використання ресурсу на підприємствах, визначуваним функціями $g_{ij}\left(x_{ij}\right)$.

Математичну модель задачі запишемо так.

Максимізувати функцію

$$H=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}g_{ij}\left(x_{ij}\right)\to\max \tag{6.9}$$

при обмеженнях

$$S_i=\sum_{j=1}^{n}\varphi_{ij}\left(x_{ij}\right)\quad\left(i=\overline{1,m}\right), \tag{6.10}$$

$$\sum_{j=1}^{n}x_{ij}=S_{i-1}\quad\left(i=\overline{1,m}\right), \tag{6.11}$$

$$x_{ij}\ge 0\quad\left(i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,n}\right). \tag{6.12}$$

Функція (6.9) виражає сумарний ефект від розподілу ресурсу по підприємствах за всі етапи; вираз (6.10) визначає залишок ресурсу в кінці $i$ –го етапу, а рівність (6.11) показує, що на початку $i$ –го етапу розподіляється між підприємствами та кількість ресурсу, яка залишилася від попереднього етапу. Нерівностями (6.12) відображене те, що підприємству не можна виділяти негативну кількість ресурсу.

З обмеження (6.11) видно, що незалежних параметрів управління на кожному етапі на одиницю менше, ніж число підприємств, оскільки одному з них виділяється кількість ресурсу, що залишається, після його розподілу між іншими. Виразимо, наприклад, $x_{in}$ з обмеження (6.11)

$$x_{in}=S_{i-1}-\sum_{j=1}^{n-1}x_{ij}\quad\left(i=\overline{1,m}\right), \tag{6.13}$$

і підставимо з метою зменшення розмірності задачі $x_{in}$ в обмеження (6.10)

$$S_i=\sum_{j=1}^{n-1}\varphi_{ij}\left(x_{ij}\right)+\varphi_{in}\left(S_{i-1}-\sum_{j=1}^{n-1}x_{ij}\right)\quad\left(i=\overline{1,m}\right). \tag{6.14}$$

Це рівняння і є управління переходу в новий стан, який в загальному випадку, – крокового дискретного процесу записано у вигляді рівності. Як і в загальному випадку, в даній задачі новий стан визначається попереднім станом процесу і прийнятим управлінням. Таким чином, виконано друге припущення методу ДП.

Залишилося перевірити перше припущення, тобто адитивність критерію ефективності.

Підставимо $x_{in}$ з рівності (6.13) у вираз (6.9):

$$H = \sum_{i=1}^{m} \left( \sum_{j=1}^{n-1} g_{ij}\left(x_{ij}\right) + g_{in}\left( S_{i-1} - \sum_{j=1}^{n-1} x_{ij} \right) \right) . \qquad (6.15)$$

Позначимо через

$$h_i\left(S_{i-1}, u_i\right) = \sum_{j=1}^{n-1} g_{ij}\left(x_{ij}\right) + g_{in}\left( S_{i-1} - \sum_{j=1}^{n-1} x_{ij} \right), \qquad (6.16)$$

де $u_i$ – це вектор управління на $i$ –му етапі, тобто

$$u_i = \left(x_{i1}, x_{i2}, ..., x_{i,n-1}\right) \quad \left(i = \overline{1,m}\right). \qquad (6.17)$$

Функція $h_i\left(S_{i-1}, u_i\right)$ виражає ефект управління на $i$ –му кроці. Якщо використовувати позначення (6.16), то вираз (6.15) для критерію ефективності прийме вигляд

$$H = \sum_{i=1}^{m} h_i\left(S_{i-1}, u_i\right), \qquad (6.18)$$

що співпадає із загальним записом критерію ефективності в моделі задачі ДП.

Таким чином, аддитивність критерію ефективності встановлена, перевірені передумови методу ДП, і подальший розгляд задачі в загальному вигляді приводить лише до повторення загальної схеми ДП.

Розглянемо два числові приклади з умовними даними, в яких ілюструється схема рішення для випадку аналітичного завдання функцій. Порівняння цих прикладів покаже, що трудність обчислень пов'язана не тільки із збільшенням розмірності задачі, але і з виглядом функцій.

**Приклад 6.1.**

Період планування охоплює 3 роки. Додаткове устаткування розподіляється між двома підприємствами з метою збільшення їх виробничої потужності. Виділення устаткування вартістю $x$ одиниць забезпечує за рік додатковий прибуток підприємствам в розмірі $x^2$ і $2x^2$ відповідно (вид функцій вибраний таким в цілях простоти розрахунку). За рік експлуатації вартість устаткування зменшується унаслідок амортизації і складає $0{,}8x$ і $0{,}3x$ одиниць. Наступного року устаткування знов перерозподіляється. Вартість устаткування на початку планового періоду дорівнює $A_0$. Потрібно спланувати таким чином розподіл устаткування в кожному році, щоб сумарний прибуток підприємств був максимальним.

**Рішення**

Порівнюючи умови цього прикладу із загальною постановкою задачі розподілу ресурсів, легко відмітити, що в даному випадку

$$m = 3,\ n = 2,\ S_0 = A_0;$$

$$q_{i1}(x) = x^2,\ q_{i2}(x) = 2x^2 \quad \left(i = \overline{1,3}\right);$$

$$\varphi_{i1}(x) = 0{,}8x,\ \varphi_{i2}(x) = 0{,}3x \quad \left(i = \overline{1,3}\right).$$

Вид функцій $\varphi_{ij}$ і $q_{ij}$ показує, що більший прибуток приносить використання устаткування на другому підприємстві, але там він більше амортизується.

На перший погляд може здатися, що найбільш вигідне управління – це виділення устаткування другому підприємству, на якому від його використання виходить прибуток в 2 рази більше, ніж на першому.

Управління за цим принципом назвемо короткозорим $(A)$, і розглянемо до чого воно приводить. Результати управління $(A)$ представлені в таблиці 6.1, аналіз даних якої показує, що унаслідок високої амортизації на другому підприємстві прибуток з часом різко зменшується.

Таблиця 6.1. Умови задачі

| Номер року | Вартість виділеного устаткування по підприємствам | | Залишкова вартість устаткування в кінці року | Прибуток за рік |
|---|---|---|---|---|
| | перше | друге | | |
| 1 | 0 | $A_0$ | 0,3 $A_0$ | 2 |
| 2 | 0 | 0,3 | 0,09 $A_0$ | 0,18 |
| 3 | 0 | 0,09 $A_0$ | 0,027 | 0,02 |
| Разом за 3 роки | | | | 2,20 |

Тому може показатися принадним друге управління, суть якого полягає в передачі устаткування першому підприємству, на якому воно менше амортизується, що дозволить запобігти такому різкому падінню прибутку по роках, як в першому випадку. Результат такого обережного управління $(B)$ представлений в таблиці 6.2.

Таблиця 6.2. Умови задачі

| Номер року | Вартість виділеного устаткування по підприємствам | | Залишкова вартість устаткування в кінці року | Прибуток за рік |
|---|---|---|---|---|
| | перше | друге | | |
| 1 | $A_0$ | 0 | 0,8 | $A_0^2$ |
| 2 | 0,8 | 0 | 0,64 $A_0$ | 0,64 |
| 3 | 0,64 | 0 | 0,512 | 0,41 |
| Разом за 3 роки | | | | 2,05 |

В даному випадку короткозоре управління виявилося кращим, ніж обережне. Це не означає, що воно є оптимальним в даних умовах. Крім того, як легко перевірити, при тривалішому періоді планування в тих же умовах воно виявиться гіршим, ніж обережне управління.

Оптимальне управління знайдемо методом ДП. В даному випадку фазовою координатою є змінна $A$ – вартість устаткування, що розподіляється, управлінням – змінна $x$, що позначає вартість устаткування, яка виділяється першому підприємству (для другого визначається автоматично як $A-x$), критерієм ефективності – прибуток $P$, що отримується за весь період.

Індексом $i$ позначатимемо порядковий номер року (кроку). Запишемо рівняння переходу в новий стан

$$A_i = 0{,}8x_i + 0{,}3\left(A_{i-1} - x_i\right) \quad \left(i = \overline{1,3}\right),$$

і величину прибутку $p_i$ на $i$–м кроці.

$$p_i = x_i^2 + 2\left(A_{i-1} - x_i\right)^2 \quad \left(i = \overline{1,3}\right).$$

Нехай $n$ позначає зворотний рахунок кроків, тобто $i = 4 - n$. Складемо функціональне рівняння

$$p_n\left(A\right) = \max_{0 \le x \le A}\left\{x^2 + 2\left(A - x\right)^2 + p_{n-1}\left[0{,}8x + 0{,}3\left(A - x\right)\right]\right\} \quad \left(n = \overline{1,3}\right). \qquad (6.19)$$

Тут $p_n\left(A\right)$ – максимальний прибуток на останніх $n$ кроках за умови, що вартість розподілюваного устаткування на початку цього періоду дорівнює $A$. Умовимося через $u_n\left(A\right)$ позначати умовно-оптимальне управління на тому кроці, коли до кінця залишається $n$ кроків і розподіляється устаткування вартістю $A$ одиниць.

Покладемо $p_0\left(A\right) = 0$ і знайдемо $p_1\left(A\right)$, використовуючи рекурентне співвідношення при $n = 1$, що відповідає останньому року

$$p_1\left(A\right) = \max_{0 \le x \le A}[x^2 + 2\left(A - x\right)^2].$$

Задача зводиться до знаходження найбільшого значення функції

$y = x^2 + 2(A-x)^2$ на відрізку $[0, A]$.

Обчислимо похідну $y' = 2x + 2\cdot 2(A-x)(-1) = 6x - 4A$. Корінь похідної $x = \frac{2}{3}A \in [0, A]$, тому слід цю точку прийняти до уваги. Обчислимо другу похідну: $y'' = 6$ яка позитивна при всіх $x$ Тому при $x = \frac{2}{3}A$ досягається мінімум функції, який нас не цікавить. Залишилося дослідити функцію на кінцях відрізка $[0, A]$. При $x = 0$ маємо $y = 2A^2$, а при $x = A$ отримаємо $y = A^2$. Максимальне значення функції досягається при $x = 0$ і дорівнює $2A^2$. Таким чином, $p_1(A) = 2A^2$, причому $u_1(A) = 0$ – умовно-оптимальне управління на останньому кроці.

Розглянемо тепер передостанній крок і для визначення $p_2(A)$ застосуємо рекурентне співвідношення при $n = 2$

$$p_2(A) = \max_{0\le x\le A}\left\{x^2 + 2(A-x)^2 + 2\left[0{,}8x + 0{,}3(A-x)\right]^2\right\}.$$

Тут враховано, що $p_1(A) = 2A^2$, і тому третій доданок у фігурних дужках є $p_1\left[0{,}8x + 0{,}3(A-x)\right]$. Тепер на відрізку $[0, A]$ потрібно знайти максимальне значення функції $y = x^2 + 2(A-x)^2 + 2\left[0{,}8x + 0{,}3(A-x)\right]^2$. Поступаючи аналогічно, знайдемо, що максимальне значення $y = 2{,}28A^2$ досягається в точці $x = A$. Тому $p_2(A) = 2{,}28A^2$, причому $u_2(A) = A$ – умовно-оптимальне управління на передостанньому (в даному випадку другому) кроці. Нехай тепер $n = 3$, тобто розглядаємо третій від кінця і перший від початку $(i = 1)$ крок.

Застосуємо рекурентне співвідношення при $n = 3$

$$p_3(A) = \max_{0\le x\le A}\left\{x^2 + 2(A-x)^2 + 2{,}28\left[0{,}8x + 0{,}3(A-x)\right]^2\right\}.$$

Тут також слід пояснити, що третій доданок у фігурних дужках є $p_2\left[0{,}8x + 0{,}3(A-x)\right]$. Поступаючи аналогічно попереднім крокам, отримуємо $p_3(A) = 2{,}46A^2$, причому $u_3(A) = A$ – умовно-оптимальне управління на першому кроці.

Розглядаючи тепер процес від першого кроку до останнього, знаходимо послідовно:

а) оптимальне управління на першому кроці $x_1^* = u_3\left(A_0\right) = A_0$, тобто в перший рік все устаткування виділяється першому підприємству; стан процесу в кінці першого року $A_1^* = 0,8A_0 + 0,3\left(A_0 - A_0\right) = 0,8A_0$ (вартість устаткування після його експлуатації протягом року на першому підприємстві);

б) оптимальне управління на другому кроці $x_2^* = u_2\left(A_1^*\right) = 0,8A_0$, тобто на другий рік все устаткування залишається на першому підприємстві; стан процесу в кінці другого року $A_2^* = 0,8\left(0,8A_0\right) + 0,3\left(A_1^* - 0,8A_0\right) = 0,64A_0$ (вартість устаткування після його експлуатації протягом другого року на першому підприємстві);

в) оптимальне управління на третьому кроці $x_3 = u_1\left(A_2^*\right) = 0$, тобто на третій рік все устаткування передається другому підприємству.

Отриманий таким чином розподіл устаткування забезпечує максимальний прибуток за три роки, який дорівнює $p_3\left(A_0\right) = 2,46A_0^2$. Знайдене рішення задачі представлене в таблиці 6.3 (оптимальне управління).

Таблиця 6.3. Рішення задачі

| Номер року | Вартість виділеного устаткування по підприємствам | | Залишкова вартість устаткування в кінці року | Прибуток за рік |
|---|---|---|---|---|
| | перше | друге | | |
| 1 | $A_0$ | 0 | 0,8 | $A_0^2$ |
| 2 | 0,8 | 0 | 0,64 $A_0$ | 0,64 |
| 3 | 0 | 0,64 $A_0$ | 0,192 $A_0$ | 0,82 $A_0^2$ |
| Разом за 3 роки | | | | 2,46 $A_0^2$ |

Видно, що оптимальне управління, знайдене методом ДП, дає кращий результат, чим розглянуті раніше управління (короткозоре і обережне).

Отже, одним з основних методів ДП є метод рекурентних співвідношень, який базується на використанні принципу оптимальності (Беллмана).

**Приклад 6.2.**

У розпорядження міністерства, в підпорядкуванні якого знаходиться $k$ підприємств, виділені кошти у розмірі $K$ тис. грн. для використання їх на розвиток підприємств протягом $m$ років. Ці засоби на початку кожного господарського року $(тобто в моменти $t_1, t_2, ..., t_m$)$ розподіляються між підприємствами. Одночасно з цим між підприємствами розподіляється отриманий ними за минулий рік прибуток. Таким чином, на початку кожного $i-$го року даного періоду $j$–е підприємство отримує в своє розпорядження $x_i^{(j)}$ тис. грн. Задача полягає у визначенні таких значень $x_i^{(j)}$, тобто в знаходженні таких розподілів виділених коштів між підприємствами і отримуваним ними прибутком, при яких за $m$ років забезпечується отримання максимального прибутку всіма підприємствами. Сформулювати поставлену задачу в термінах загальної задачі динамічного програмування.

**Рішення**

Припускаючи, що $j$–у підприємству на $i$–й рік виділяється $x_i^{(j)}$ тис. грн., розглядатимемо даний розподіл засобів як реалізацію деякого управління $u_i$. Таким чином, управління $u_i$ полягає в тому, що на $i$–му кроці першому підприємству виділяється $x_i^{(1)}$ тис. грн., другому $x_i^{(2)}$ тис. грн. і т.д. Сукупність чисел $x_i^{(1)},\ x_i^{(2)}, ...,\ x_i^{(k)}$ визначає всю сукупність управлінь $u_1,\ u_2, ...,\ u_m$ на $m$ кроках розподілу засобів як $m$ точок в $k$–мірному просторі.

В якості критерію оцінки якості вибраного розподілу засобів, тобто управлінь, що реалізовуються, узятий сумарний прибуток за $m$ років, який залежить від всієї сукупності управлінь $W = W(u_1, u_2, ..., u_m)$. Отже, задача полягає у виборі таких управлінь $u_i^*$, тобто в такому розподілі засобів, при якому функція $W$ приймає максимальне значення.

Докладні задачі є багатоетапними.

**Приклад 6.3.**

До початку поточної п'ятирічки на підприємстві встановлено нове устаткування. Залежність продуктивності цього устаткування від часу його використання підприємством, а також залежність витрат на зміст і ремонт устаткування при різному часі його використання приведені в таблиці 6.4.

Таблиця 6.4. Умови задачі

| | Час $\tau$, протягом якого використовується устаткування (років) | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| Річний випуск продукції $R(\tau)$ у вартісному виразі (тис. грн.) | 80 | 75 | 65 | 60 | 60 | 55 |
| Щорічні витрати $Z(\tau)$, пов'язані із змістом і ремонтом устаткування (тис. грн.) | 20 | 25 | 30 | 35 | 45 | 55 |

Знаючи, що витрати, пов'язані з придбанням і установкою нового устаткування, ідентично зі встановленим, складають 40 тис. грн., а замінюване устаткування списується, скласти такий план заміни устаткування протягом 5 років, при якому загальний прибуток за даний період часу максимальний.

**Рішення**

Цю задачу можна розглядати як задачу динамічного програмування (ДП), в якому в якості системи $S$ виступає устаткування. Стани цієї системи визначаються фактичним часом використання устаткування (його віком) $\tau$, тобто описуються єдиним параметром $\tau$. В якості управління виступають рішення про заміну і збереження устаткування, що приймаються на початку кожного року. Позначимо через $u_1$ – рішення про збереження устаткування, а через $u_2$ – рішення про заміну устаткування. Тоді задача полягає в знаходженні такої стратегії управління, визначуваної рішеннями, що приймаються до початку кожного року, при якій загальний прибуток підприємства за п'ятирічку є максимальним. Таким чином, ми сформулювали початкову задачу в термінах задачі ДП. Ця задача володіє властивостями адитивності і відсутності наслідку. Отже, її рішення можна знайти за допомогою алгоритму рішення задачі ДП, що реалізовується в два етапи. На першому етапі при русі від початку 5-го року п'ятирічки до початку 1-го року для кожного допустимого стану устаткування знайдемо умовне оптимальне управління (рішення), а на другому етапі при русі від початку 1-го року п'ятирічки до початку 5-го року. З умовних оптимальних рішень для кожного року складемо оптимальний план заміни устаткування на п'ятирічку.

Для визначення умовних оптимальних рішень спочатку необхідно скласти функціональне рівняння Беллмана.

Оскільки ми припустили, що до початку $k$–го року $\left(k=\overline{1,5}\right)$ може прийматися тільки одне з двох рішень – замінювати або не замінювати устаткування, то прибуток підприємства за $k$–й рік складе

$$F_k\left(\tau^{(k)},U_k\right)_k=\begin{cases}R\left(\tau^{(k)}\right)-Z\left(\tau^{(k)}\right) & \text{при} \quad u_1,\\ R\left(\tau^{(k)}=0\right)-Z\left(\tau^{(k)}=0\right)-C_n & \text{при} \quad u_2,\end{cases}$$

де $\tau^{(k)}$ – вік устаткування до початку $k$–го року $\left(k=\overline{1,5}\right)$; $u_k$ – управління, що реалізовується до початку $k$–го року; $C_n$ – вартість нового устаткування.

Таким чином, в даному випадку рівняння Беллмана має вигляд

$$F_k\left(\tau^{(k)}\right)=\max_{\tau}\begin{cases}R\left(\tau^{(k)}\right)-Z\left(\tau^{(k)}\right)+F_{k+1}\left(\tau^{(k+1)}\right),\\ R\left(\tau^{(k)}=0\right)-Z\left(\tau^{(k)}=0\right)-C_n+F_{k+1}\left(\tau^{(k)}=1\right).\end{cases} \quad (6.20)$$

Використовуючи тепер рівняння (6.20), приступаємо до знаходження рішення початкової задачі. Це рішення починаємо з визначення умовно оптимального управління (рішення) для останнього (5–го) року п'ятирічки, у зв'язку з чим знаходимо безліч допустимих станів устаткування до початку даного року п'ятирічки. Оскільки до початку п'ятирічки є нове устаткування $\left(\tau^{(1)}=0\right)$, то вік устаткування до початку 5-го року може складати 1, 2, 3 і 4 роки. Тому допустимі стани системи на даний період часу такі: $\tau_1^{(5)}=1,\ \tau_2^{(5)}=2,\ \tau_3^{(5)}=3,\ \tau_4^{(5)}=4$. Для кожного з цих станів знайдемо умовно оптимальне рішення і відповідне значення функції $F_5\left(\tau^{(5)}\right)$. Використовуючи рівняння (6.20) і співвідношення $F_6\left(\tau^{(k+1)}\right)=0$, (так як розглядається останній рік розрахункового періоду), отримаємо

$$F_5\left(\tau^{(5)}\right)=\max\begin{cases}R\left(\tau^{(5)}\right)-Z\left(\tau^{(5)}\right),\\ R\left(\tau^{(5)}=0\right)-Z\left(\tau^{(5)}=0\right)-C_n.\end{cases} \quad (6.21)$$

Підставляючи тепер у формулу (6.21) замість $\tau^{(5)}$ його значення, яке дорівнює 1, і враховуючи дані таблиці 6.4, знаходимо:

$$F_5\left(\tau_1^{(5)}\right)=\max\begin{cases}R\left(\tau^{(5)}=1\right)-Z\left(\tau^{(5)}=1\right)\\ R\left(\tau^{(5)}=0\right)-Z\left(\tau^{(5)}=0\right)-C_n\end{cases}=$$

$$=\max\begin{Bmatrix}75-25\\ 80-20-40\end{Bmatrix}=50,\quad u^0=u_1.$$

Значить, умовне оптимальне рішення в даному випадку є $u_1$.

Проведемо аналогічні обчислення для інших допустимих станів устаткування до початку 5–го року п'ятирічки

$$F_5\left(\tau_2{}^{(5)}\right) = \max = \begin{Bmatrix} 65-30 \\ 80-20-40 \end{Bmatrix} = 35,\ \ u^0 = u_1;$$

$$F_5\left(\tau_3{}^{(5)}\right) = \max = \begin{Bmatrix} 60-35 \\ 80-20-40 \end{Bmatrix} = 25,\ \ u^0 = u_1;$$

$$F_5\left(\tau_4{}^{(5)}\right) = \max = \begin{Bmatrix} 60-45 \\ 80-20-40 \end{Bmatrix} = 20,\ \ u^0 = u_2.$$

Отримані результати зводимо в таблицю 6.5.

Таблиця 6.5. Результати обчислень

| Вік устаткування $\tau^{(5)}$ (років) | Значення функції $F_5\left(\tau^{(5)}\right)$ (тис. грн.) | Умовне оптимальне рішення $u^0$ |
|---|---|---|
| 1 | 50 | $u_1$ |
| 2 | 35 | $u_1$ |
| 3 | 25 | $u_1$ |
| 4 | 20 | $u_2$ |

Розглянемо тепер можливі стани устаткування до початку 4–року п'ятирічки. Очевидно, допустимими станами є $\tau_1^{(4)} = 1,\ \tau_2^{(4)} = 2,\ \tau_3^{(4)} = 3$. Для кожного з них визначаємо умовно оптимальне рішення і відповідне значення функції $F_4\left(\tau^{(4)}\right)$. Для цього використовуємо рівняння (6.20) і дані таблиці 6.4 і таблиці 6.5.

Так, зокрема, для $\tau_1^{(4)} = 1$ маємо:

$$F_4\left(\tau_1{}^{(4)}\right) = \max \begin{Bmatrix} R\left(\tau^{(4)}=1\right) - Z\left(\tau^{(4)}=1\right) + F_5\left(\tau^{(5)}=2\right) \\ R\left(\tau^{(4)}=0\right) - Z\left(\tau^{(4)}=0\right) - C_n + F_5\left(\tau^{(5)}=1\right) \end{Bmatrix} =$$

$$= \max \begin{Bmatrix} 75 - 25 + 35 \\ 80 - 20 - 40 + 50 \end{Bmatrix} = 85, \quad u^0 = u_1.$$

Аналогічно знаходимо

$$F_4\left(\tau_2^{(4)}\right) = \max \begin{Bmatrix} 65 - 30 + 25 \\ 80 - 20 - 40 + 50 \end{Bmatrix} = 70, \quad u^0 = u_2,$$

$$F_4\left(\tau_3^{(4)}\right) = \max \begin{Bmatrix} 60 - 35 + 20 \\ 80 - 20 - 40 + 50 \end{Bmatrix} = 70, \quad u^0 = u_2.$$

Отримані результати запишемо в таблицю 6.6.

Таблиця 6.6. Результати обчислень

| Вік устаткування $\tau^{(4)}$ (років) | Значення функції $F_4\left(\tau^{(4)}\right)$ (тис. грн.) | Умовне оптимальне рішення $u^0$ |
|---|---|---|
| 1 | 85 | $u_1$ |
| 2 | 70 | $u_2$ |
| 3 | 70 | $u_2$ |

Визначимо тепер умовно оптимальне рішення для кожного з допустимих станів устаткування до початку третього року п'ятирічки. Очевидно, такими станами є $\tau_1^{(3)} = 1,\ \tau_2^{(3)} = 2$. Відповідно до рівняння (6.20) маємо:

$$F_3\left(\tau_1{}^{(3)}\right) = \max \begin{Bmatrix} R\left(\tau^{(3)} = 1\right) - Z\left(\tau^{(3)} = 1\right) + F_4\left(\tau^{(4)} = 2\right) \\ R\left(\tau^{(3)} = 0\right) - Z\left(\tau^{(3)} = 0\right) - C_n + F_4\left(\tau^{(4)} = 1\right) \end{Bmatrix},$$

$$F_3\left(\tau_2{}^{(3)}\right) = \max \begin{Bmatrix} R\left(\tau^{(3)} = 2\right) - Z\left(\tau^{(3)} = 2\right) + F_4\left(\tau^{(4)} = 3\right) \\ R\left(\tau^{(3)} = 0\right) - Z\left(\tau^{(3)} = 0\right) - C_n + F_4\left(\tau^{(4)} = 1\right) \end{Bmatrix}.$$

Використовуючи дані таблиці 6.4 і таблиці 6.6, отримаємо:

$$F_3\left(\tau_2^{(3)}\right) = \max\left\{\begin{matrix} 75-25+70 \\ 80-20-40+85 \end{matrix}\right\} = 120, \quad u^0 = u_1,$$

$$F_3\left(\tau_2^{(3)}\right) = \max\left\{\begin{matrix} 65-30+70 \\ 80-20-40+85 \end{matrix}\right\} = 105, \quad u^0 = u_2.$$

З останнього виразу видно, що якщо до початку 3–го року п'ятирічки вік устаткування складає 2 роки, то незалежно від того, чи буде ухвалено рішення $u_1$ або $u_2$, величина прибутку виявиться однією і тією ж. Це означає, що в якості умовно оптимального рішення можна узяти будь-яке, наприклад $u_{2.}$ Набутих значень для $F_3\left(\tau^{(3)}\right)$ і відповідні умовно оптимальні рішення записуємо в таблицю 7.7.

Таблиця 6.7. Результати обчислень

| Вік устаткування $\tau^{(3)}$ (років) | Значення функції $F_3\left(\tau^{(3)}\right)$ (тис. грн.) | Умовне оптимальне рішення $u^0$ |
|---|---|---|
| 1 | 120 | $u_1$ |
| 2 | 105 | $u_2$ |

Нарешті, розглянемо допустимі стани устаткування до початку 2–го року п'ятирічки. Очевидно, на даний момент часу вік устаткування може дорівнювати тільки одному року.

Тому належить порівняти лише два можливі рішення: зберегти устаткування або провести заміну. Аналіз такого порівняння характеризується даними таблиці 6.8.

Таблиця 6.8. Порівняння результатів обчислень

| Вік устаткування $\tau^{(2)}$ (років) | Значення функції $F_2\left(\tau^{(2)}\right)$ (тис. грн.) | Умовне оптимальне рішення $u^0$ |
|---|---|---|
| 1 | 155 | $u_1$ |

Згідно умові, до початку п'ятирічки встановлено нове устаткування $\left(\tau^{(1)}\right)=0$. Тому проблеми вибору між збереженням і заміною устаткування не існує: устаткування слід зберегти. Значить, умовно оптимальним рішенням є $u_1$, а значення функції

$$F_1\left(\tau_1^{(1)}\right)=R\left(\tau_2^{(1)}=0\right)-Z\left(\tau_1^{(1)}=0\right)+F_2\left(\tau^{(1)}=1\right)=$$

$$=80-20+155=215.$$

Таким чином, максимальний прибуток підприємства може дорівнювати 215 тис. грн. Він відповідає оптимальному плану заміни устаткування, який виходить на основі даних таблиць 6.8, 6.7, 6.6, 6.5, тобто в результаті реалізації другого етапу обчислювального процесу, що полягає в проходженні всіх розглянутих кроків з початку 1–го до початку 5–го року п'ятирічки. Для 1–го року п'ятирічки рішення єдине – слід зберегти устаткування. Значить, вік устаткування до початку 2–го року п'ятирічки дорівнює одному року. Тоді відповідно до даних таблиці 6.8 оптимальним рішенням для 2–го року п'ятирічки є рішення про збереження устаткування. Реалізація такого рішення призводить до того, що вік устаткування до початку 3–го року п'ятирічки дорівнює двом рокам. При такому віці (див. таблицю 6.7) устаткування в 3–му році п'ятирічки слід замінити. Після заміни устаткування, його вік до початку 4–го року п'ятирічки складе один рік. Як видно з таблиці 6.6, при такому віці устаткування його міняти не слід. Тому вік устаткування до початку 5–го року п'ятирічки складе 2 роки, тобто міняти устаткування недоцільно (таблиця 6.5).

Отже, виходить наступний оптимальний план заміни устаткування (див. таблицю 6.9):

Таблиця 6.9. Оптимальний план заміни устаткування

| | Роки п'ятирічки | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| Оптимальні рішення | Зберегти устат-кування | Зберегти устат-кування | Провес-ти заміну устатку-вання | Зберегти устат-кування | Зберегти устат-кування |

**Приклад 6.4.**

Для збільшення об'ємів випуску продукції, що виготовляється підприємствами, виділені капіталовкладення в об'ємі $S$ =700 тис. грн. Використання $i$ – підприємством $x_i$ тис. грн.. з вказаних засобів забезпечує приріст випуску продукції, який визначається значенням нелінійної функції $f_i(x_i)$.

Знайти розподіл капіталовкладень між підприємствами, що забезпечує максимальне збільшення випуску продукції, якщо $n$ =3, а значення $x_i$ і $f_i(x_i)$ приведені в таблиці 6.10.

**Рішення**

Для вирішення даної задачі ДП слід скласти рекурентне співвідношення Беллмана. У даному випадку це співвідношення приводить до наступних функціональних рівнянь

$$
\begin{aligned}
&\varphi_1(x) = \max_{0 \le x_1 \le x} \left\{ f_1(x_1) \right\}; \\
&\varphi_2(x) = \max_{0 \le x_2 \le x} \left\{ f_2(x_2) + \varphi_1(x - x_2) \right\}; \\
&. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\
&\varphi_{n-1}(x) = \max_{0 \le x_{n-1} \le x} \left\{ f_{n-1}(x_{n-1}) + \varphi_{n-2}(x - x_{n-1}) \right\}.
\end{aligned}
\qquad (6.22)
$$

Таблиця 6.10. Умови задачі

| Об'єм капіталов-кладень $x_i$ (тис. грн.) | Приріст випуску продукції $f_i(x_i)$ залежно від об'єму капіталовкладень (тис. грн.) | | |
|---|---|---|---|
| | Підприємство 1 | Підприємство 2 | Підприємство 3 |
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 100 | 30 | 50 | 40 |
| 200 | 50 | 80 | 50 |
| 300 | 90 | 90 | 110 |
| 400 | 110 | 150 | 120 |
| 500 | 170 | 190 | 180 |
| 600 | 180 | 210 | 220 |
| 700 | 210 | 220 | 240 |

Тут функції $\varphi_i(x)$ $\left(i = \overline{1, n-1}\right)$ визначають максимальний приріст продукції при відповідних розподілах $X$ тис. грн. капіталовкладень між $i$ підприємствами. Тому значення функції $\varphi_n(x)$ обчислюється лише для одного значення $X = S$, так як об’єм капіталовкладень, які виділяються для всіх $n$ підприємств, дорівнює $S$ тис. грн.

Використовуючи тепер рекурентні співвідношення (6.22) і початкові дані таблиці 6.10, приступаємо до знаходження рішення задачі, тобто до визначення спочатку умовно оптимальних, а потім і оптимальних розподілів капіталовкладень між підприємствами. Починаємо з визначення умовно оптимальних капіталовкладень, що виділяються для розвитку першого підприємства. Для цього знаходимо значення $\varphi_1(x)$ для кожного $x$, що приймає значення: 0, 100, 200, 300, 400, 500, 600, 700.

Нехай $x=0$ тоді $\varphi_1(0)=0.$ Візьмемо тепер $x=100$. Тоді, використовуючи таблицю 6.10, отримуємо

$$\varphi_1(100)=\max\begin{Bmatrix}0\\30\end{Bmatrix}=30,\quad x_1^0=100.$$

Тут перша строчка відповідає рішенню $x_1=0,$ а друга строчка – рішенню $x_1=100.$ Оскільки при першому рішенні приріст випуску продукції не забезпечується, а при другому дорівнює 30 тис. грн., то умовно оптимальним рішенням є $x_1^0=100.$ Аналогічно знаходимо умовно оптимальні рішення для інших значень $x$.

$$\varphi_1(200)=\max\begin{Bmatrix}0\\30\\\underline{50}\end{Bmatrix}=50,\quad x_1^0=200;$$

$$\varphi_1(300)=\max\begin{Bmatrix}0\\30\\50\\\underline{90}\end{Bmatrix}=90,\quad x_1^0=300;$$

$$\varphi_1(400)=\max\begin{Bmatrix}0\\30\\50\\90\\\underline{110}\end{Bmatrix}=110,\quad x_1^0=400;$$

$$\varphi_1(500) = \max \left\{ \begin{matrix} 0 \\ 30 \\ 50 \\ 90 \\ 110 \\ \underline{170} \end{matrix} \right\} = 170, \quad x_1^0 = 500;$$

$$\varphi_1(600) = \max \left\{ \begin{matrix} 0 \\ 30 \\ 50 \\ 90 \\ 110 \\ 170 \\ \underline{180} \end{matrix} \right\} = 180, \quad x_1^0 = 600;$$

$$\varphi_1(700) = \max \left\{ \begin{matrix} 0 \\ 30 \\ 50 \\ 90 \\ 110 \\ 170 \\ 180 \\ \underline{210} \end{matrix} \right\} = 210, \quad x_1^0 = 700.$$

Результати обчислень і отримані відповідні умовно-оптимальні рішення записуємо в таблицю 6.11.

Таблиця 6.11. Результати обчислень

| Об'єм капіталовкладень, що виділяються першому підприємству (тис. грн.) | Максимальний приріст $\varphi_i(x)$ випуску продукції (тис. грн.) | Умовно-оптимальний об'єм капіталовкладень $x_1^0$, що виділяються першому підприємству (тис. грн.) |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 100 | 30 | 100 |
| 200 | 50 | 200 |
| 300 | 90 | 300 |
| 400 | 110 | 400 |
| 500 | 170 | 500 |
| 600 | 180 | 600 |
| 700 | 210 | 700 |

Використовуючи тепер дані таблиць 6.11 і 6.10, визначимо умовно оптимальні об'єми капіталовкладень, що виділяються другому підприємству. Знайдемо

$$\varphi_2(x) = \max_{0 \le x_2 \le x} \left\{ f_2(x_2) + \varphi_1(x - x_2) \right\},$$

для кожного з допустимих значень $x$, які дорівнюють 0, 100, 200, 300, 400, 500, 600 і 700:

$$\varphi_2(0) = 0, \quad x_2^0 = 0;$$

$$\varphi_2(100) = \max \begin{Bmatrix} 0 + 30 \\ \underline{50 + 0} \end{Bmatrix} = 50, \quad x_2^0 = 100;$$

$$\varphi_2(200) = \max \begin{Bmatrix} 0 + 50 \\ \underline{50 + 30} \\ 80 + 0 \end{Bmatrix} = 80, \quad x_2^0 = 100;$$

$$\varphi_2(300)=\max\left\{\begin{matrix}0+90\\50+50\\\underline{80+30}\\90+0\end{matrix}\right\}=110,\quad x_2^0=200;$$

$$\varphi_2(400)=\max\left\{\begin{matrix}0+110\\50+90\\80+50\\90+30\\\underline{150+0}\end{matrix}\right\}=150,\quad x_2^0=400;$$

$$\varphi_2(500)=\max\left\{\begin{matrix}0+170\\50+110\\80+90\\90+50\\150+30\\\underline{190+0}\end{matrix}\right\}=190,\quad x_2^0=500;$$

$$\varphi_2(600)=\max\left\{\begin{matrix}0+180\\\underline{50+170}\\80+110\\90+90\\150+50\\190+30\\210+0\end{matrix}\right\}=220,\quad x_2^0=100;$$

$$\varphi_2(700)=\max\left\{\begin{matrix}0+210\\50+180\\\underline{80+170}\\90+110\\150+90\\190+50\\210+30\\220+0\end{matrix}\right\}=250,\quad x_2^0=200.$$

Отримані результати і знайдені умовно оптимальні об'єми капіталовкладень, що виділяються другому підприємству, запишемо в таблицю 6.12.

Таблиця 6.12. Результати обчислень

| Об'єм капіталовкладень $x$, що виділяються двом підприємствам (тис. грн.) | Максимальний приріст $\varphi_2(x)$ випуску продукції (тис. грн.) | Умовно оптимальний об'єм капітало-вкладень $x_2^0$, що виділяються другому підприємству (тис. грн.) |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 100 | 50 | 100 |
| 200 | 80 | 100 |
| 300 | 110 | 200 |
| 400 | 150 | 400 |
| 500 | 190 | 500 |
| 600 | 220 | 100 |
| 700 | 250 | 200 |

Переходимо тепер до знаходження значень

$$\varphi_3(x) = \max_{0 \le x_3 \le x} \left\{ f_3(x_3) + \varphi_3(x - x_3) \right\},$$

використовуючи для цього відповідні дані таблиць 6.12 і 6.10. Оскільки в даному випадку число підприємств дорівнює 3, то проводимо обчислення лише для одного значення $x = 700$:

$$\varphi_3(300) = \max\left\{\begin{matrix} 0+250 \\ 40+220 \\ 50+190 \\ 110+150 \\ 120+110 \\ 180+80 \\ \underline{220+50} \\ 240+0 \end{matrix}\right\} = 270, \quad x_3^0 = 600.$$

Отже, максимальний приріст випуску продукції складає 270 тис. грн. Це має місце тоді, коли третьому підприємству виділяється 600 тис. грн., а першому і другому підприємствам – 100 тис. грн. Тоді, як видно з таблиці 6.12, другому підприємству слід виділити 100 тис. грн.

Отже, ми отримали оптимальний план розподілу капіталовкладень між підприємствами, згідно якому забезпечується максимальний приріст випуску продукції.

## Задачі до модуля №2

**Задача 1.** Знайти максимальне значення функції

$$F = x_1 \cdot x_2 \to \max$$

за умов

$$\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 \geq 12, \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 24, \\ -3x_1 + 4x_2 \leq 12; \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0.$$

**Задача 2.** Знайти мінімальне значення функції

$$F = 9\left(x_1 - 5\right)^2 + 4\left(x_2 - 6\right)^2 \to \min$$

за умов

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \geq 12, \\ x_1 - x_2 \leq 6, \\ x_2 \leq 4; \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 .$$

**Задача 3.** Знайти максимальне значення функції

$$F = 4x_1 + 3x_2 \to \max$$

за умов

$$\begin{cases} x_1^2 + 2x_1 + x_2^2 - 2x_2 - 34 \leq 0, \\ x_1 \geq 1, \\ x_2 \geq 1. \end{cases}$$

**Задача 4.** Знайти максимальне значення функції

$$F = x_1 \cdot x_2 \to \max$$

за умов

$$\begin{cases} x_1^2 + 2x_1 + x_2^2 - 2x_2 - 14 \geq 0, \\ 2x_1 + x_2 \leq 10; \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

**Задача 5.** Знайти умовні екстремуми функції

$$f = x_1^2 + x_2^2 + x_3$$

за умов

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ 2x_1 - 3x_2 = 12. \end{cases}$$

**Задача 6.** Знайти умовні екстремуми функції

$$F = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$$

за умов

$$\begin{cases} 2x_1 \cdot x_2 + x_2 \cdot x_3 = 12, \\ 2x_1 - x_2 = 8. \end{cases}$$

**Задача 7.** Знайти умовні екстремуми функції

$$F = x_1 \cdot x_2 + x_2 \cdot x_3$$

за умов

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 4, \\ x_2 + x_3 = 4. \end{cases}$$

**Задача 8.** Знайти максимальне значення функції

$$F = x_1 + 4x_2 + x_1x_2 - 2x_1^2 - 2x_2^2 \to \max$$

за умов

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 12, \\ 3x_1 + x_2 \le 15; \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

**Задача 9.** Знайти максимальне значення функції

$$F = -x_1^2 - x_2^2 + x_1 + 8x_2 \to \max$$

за умов

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 7, \\ x_2 \leq 5; \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

**Задача 10.** Знайти максимальне значення функції

$$F = -2x_1 + 8x_2 - x_1^2 - x_2^2 \to \max$$

за умов

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 12, \\ -x_1 + x_2 \geq -8; \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

**Задача 11.** Знайти максимальне значення функції

$$F = -x_1^2 - x_2^2 - 2x_3^2 + 2x_2 + 3x_3 \to \max$$

за умов

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \leq 18, \\ x_2 \leq 12, \\ x_1 + 2x_3 \leq 14; \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0.$$

**Задача 12.** Максимізувати функцію

$$F = 32x_1 + 120x_2 - 4x_1^2 - 15x_2^2 \to \max$$

за умов

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + x_3 = 20, \\ 2x_1 - x_2 + x_4 = 8, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \quad \left(j = \overline{1,4}\right).$$

**Задача 13.** Мінімізувати функцію

$$F = -x_1 - 2x_2 + x_3^2 \to \min$$

за умов

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \leq 6, \\ x_1 + 2x_2 \leq 4, \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

**Задача 14.** Мінімізувати функцію

$$F = x_1^2 + x_2^2 - 8x_1 - 10x_2 \to \min$$

за умов

$$3x_1 + 2x_2 + x_3 = 6,$$
$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0.$$

**Задача 15.** Мінімізувати функцію

$$F = 2x_1 - 3x_2 - x_1^2 - 3x_2^2 \to \max$$

за умов

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 16, \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 4, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0 \quad \left( j = \overline{1,4} \right).$$

**Задача 16.** Мінімізувати функцію

$$F = 2x_1 x_2 - x_1^2 - x_2^2 \to \max$$

за умов

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 \le 6, \\ x_1 + 2x_2 \le 10, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$$

**Задача 17.** Знайти мінімальне значення функції

$$F = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_1 + x_2 \to \min$$

за умов

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 \le 6, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 \le 12, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, \ x_2 \ge 0, \ x_3 \ge 0.$$

**Задача 18.** Знайти максимальне значення функції

$$F = x_1 - x_2^2 - 2x_1x_3 \to \max$$

за умов

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 8, \\ x_2 + x_3 = 4, \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0.$$

**Задача 19.** Знайти мінімальне значення функції

$$F = \left(x_1 + x_2 + x_3\right)^2 \to \min$$

за умов

$$\begin{cases} 0 \leq x_1 \leq 2, \\ 0 \leq x_2 \leq 4, \\ 0 \leq x_3 \leq 6. \end{cases}$$

**Задача 20.** Знайти максимальне значення функції

$$F = x_1 - x_1^2 + 2x_2 - x_3^2 \to \max$$

за умов

$$x_1 + 2x_2 - x_3 = 6;$$

$$x_j \geq 0 \ \left(j = \overline{1,3}\right).$$

**Задача 21.** У п'ятикутнику з вершинами $O(0,0)$, $A(0,6)$, $B(5,8)$, $D(10,4)$ і $E(8,0)$ знайти екстремум наступних функцій:

1) $F = x_1^2 + x_2^2 - 6x_1 - 4x_2 \to \min$;

2) $F = 18x_1 + 16x_2 - 3x_1^2 - x_1x_2 - 5x_2^2 \to \max$;

3) $F = 20x_1 + 16x_2 - x_1^2 - x_2^2 \to \max$;

4) $F = x_1x_2 \to \max$;

5) $F = 2x_1^2 - 3x_2^2 - 40x_1 - 48x_2 \to \min$;

6) $F = 2x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 \to \min$.

**Задача 22.** Знайти мінімальне значення функції

$$F = -x_1 - 2x_2 + x_2^2 \to \min$$

за умов

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \le 6, \\ x_1 + 2x_2 \le 4, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

**Задача 23.** Скласти оптимальний план заміни устаткування в умовах задачі 6.3 при початкових даних про продуктивність устаткування і щорічні витрати на його зміст, які приведені в таблиці. Крім того, відомо, що до початку даного періоду встановлено нове устаткування, використане устаткування списується, а вартість нового устаткування дорівнює 10 тис. грн.

| | Вік устаткування $\tau$ років | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| Річний випуск продукції $R(\tau)$ на устаткування віку $\tau$ років (тис. грн.)$\tau$ | 25 | 24 | 24 | 23 | 23 | 23 | 22 | 22 | 21 | 20 |

| Щорічні витрати на зміст і ремонт устаткування $Z(\tau)$ (тис. грн.) | 15 | 15 | 16 | 16 | 17 | 17 | 18 | 18 | 19 | 20 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|

**Задача 24.** Скласти оптимальний план розподілу капіталовкладень між чотирма підприємствами в умовах задачі 6.4 при початкових даних відносно $x_i$ і $f_i(x_i)$, приведених в таблиці, а також з урахуванням того, що S=100 тис. грн.

| Об'єм капітало-вкладень $x_i$ (тис. грн.) | Приріст випуску продукції $f_i(x_i)$ залежно від об'єму капіталовкладень (тис. грн.) | | | |
|---|---|---|---|---|
| | Підприємство 1 | Підприємство 2 | Підприємство 3 | Підприємство 4 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 20 | 12 | 14 | 13 | 18 |
| 40 | 33 | 28 | 38 | 39 |
| 60 | 44 | 38 | 47 | 48 |
| 80 | 64 | 56 | 62 | 65 |
| 100 | 78 | 80 | 79 | 82 |

## СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ


1. Абрамов Л.М. Математическое программирование/ Л.М. Абрамов, В.Ф. Капустин. – Л.: ЛГУ, 1976. – 184 с.
2. Абчук В.А. Справочник по исследованию операций/ В.А. Абчук, Ф.А. Матвейчук, Л.П. Томашевский. – М.: Воениздат, 1979. – 368 с.
3. Акулич И.Л. Математическое программирование в примерах и задачах/ И.Л. Акулич. – М.: Высшая школа, 1986. – 319с.
4. Багриновский К.А. Экономико-математические методы и модели. Микроэкономика/ К.А. Багриновский, В.М. Матюшок. – М.: РУДН, 1999. – 183 с.
5. Берж К.Общая теория игр нескольких лиц/ К. Берж. . – М.: Иностранная литература, 1961. – 126 с.
6. Вентцель Е.С. Исследование операций/ Е.С. Вентцель. – М.: Советское радио, 1972. – 52 с.
7. Вентцель Е.С. Исследование операций. Задачи, принципы, методология/ Е.С. Вентцель. – М.: Наука, 1988. – 208 с.
8. Гермейер Ю.Б. Задачи по исследованию операций/ Ю.Б. Гермейер, В.В. Морозов, А.Г. Сухарев. – М.: МГУ, 1979. – 167 с.
9. Глухов В.В. Математические методы и модели для менеджмента/ В.В. Глухов, М.Д. Медников, С.Б. Коробко. – СПб, Лань, 2000. – 480 с.
10. Гонтарева И.И. Математики и кибернетика в экономике. Справочник-словарь/ И.И. Гонтарева, М.Б. Немчинова, А.А. Попова. – М.: Экономика, 1975.–700 с.
11. Ермаков В.И. Справочник по математике для экономистов/ В.И. Ермаков. – М.: Высшая школа, 1987. – 336 с.
12. Зайченко Ю.П. Исследование операций. Сборник задач/ Ю.П. Зайченко, С.А. Шумилова. – Киев: Вища школа, 1984. – 224 с.
13. Замков О.О. Математические методы в экономике/ О.О. Замков, А.В. Толстопятенко, Ю.Н. Черемных. – М.: Дело и сервис, 2001. – 368 с.
14. Зуховицкий С.И. Линейное и выпуклое программирование/ С.И. Зуховицкий, Л.И. Авдеева. – М.: Наука, 1964. – 348 с.
15. Иносов В.Л. Вычислительная техника в инженерных и экономических расчетах/ В.Л. Иносов. – Киев: Вища школа, 1978. – 279 с.
16. Калихман И.Л. Сборник задач по математическому программированию/ И.Л. Калихман. – М.: Высшая школа, 1975. – 270 с.
17. Капустин В.Ф. Практические занятия по курсу математического программирования/ В.Ф. Капустин. – Л.: ЛГУ, 1976. – 192 с.
18. Карманов В.Г. Математическое программирование/ В.Г. Карманов.– М.:

Наука, 1975. – 272 с.
19. Кремер Н.Ш. Исследование операций в экономике/ Н.Ш. Кремер. – М.: Банки и биржи, ЮНИТИ, 1997. – 407 с.
20. Кузнецов А.В. Экономико-математические методы и модели/ А.В. Кузнецов. – Мн.: БГЭУ, 2000. – 412 с.
21. Кюнци Г.П. Нелинейное программирование/ Г.П. Кюнци, В. Крелле. – М.: Советское радио, 1965. – 303 с.
22. Ларионов А.И. Экономико-математические методы в планировании/ А.И. Ларионов, Т.И. Юрченко. – М.: Высшая школа, 1984. – 224 с.
23. Лисицын Б.М. Решение инженерных и экономических задач на ЭВМ/ Б.М. Лисицын, В.М. Антоненко. – Киев: Вища школа, 1984. – 247 с.
24. Лопатников Л.И. Популярный экономико-математический словарь/ Л.И. Лопатников. – М.: Знание, 1979. – 159 с.
25. Лысенко Ю.Г. Модели и методы стратегического управления/ Ю.Г. Лысенко. – Донецк: ДонНУ, 2001. – 130 с.
26. Протосеня А.Г. Математические методы и модели в планировании и управлении горным производством/ А.Г. Протосеня, С.А. Кулиш, Е.И. Азбель. – М.: Недра, 1985. – 287 с.
27. Фомин Г.П. Математические методы и модели в коммерческой деятельности/ Г.П. Фомин. – М.: Финансы и статистика, 2001. – 544 с.
28. Щедрин Н.И. Математические методы программирования в экономике/ Н.И. Щедрин, А.Н. Кархов. – М.: Статистика, 1974. – 143 с.
29. Эрроу К. Дж. Исследования по линейному и нелинейному программированию/ К. Дж. Эрроу, Л. Гурвиц, Х. Удзава. – М.: Иностранная литература, 1962. – 333 с.
30. Ястремский А.И. Стохастические модели математической экономики/ А.И. Ястремский. – Киев, Вища школа, 1983. – 127 с.

Навчальне видання

**ІЄ Ольга Миколаївна**

# ДОСЛІДЖЕННЯ ОПЕРАЦІЙ

*Навчальний посібник для студентів*
*вищих навчальних закладів*


| | |
|---|---|
| Редактор | – Іє О. М. |
| Комп'ютерний макет | – Іє О. М. |
| Коректор | – Кубатіна Ю. А. |
| Макет обкладинки | – Іє О. М. |

Здано до складання 18.02.2011 р. Підписано до друку 09.02.2011 р.
Формат $60 \times 84/16$. Папір офсетний. Гарнітура Times New Roman.
Друк офсетний. Ум. друк. арк. 8,0. Наклад 30 прим.

**Видавництво Державного закладу**
**«Луганський національний університет**
**імені Тараса Шевченка»**
вул. Оборонна 2, м. Луганськ, 91011. Тел./факс: (0642)58-03-20