Ю. Г. Козуб, О. В. Калайдо

Теоретична механіка

Частина ІІ.

Динаміка

Міністерство освіти і науки, молоді та спорту України
Державний заклад
«Луганський національний університет
імені Тараса Шевченка»

Ю. Г. Козуб,
О. В. Калайдо

Теоретична механіка

Частина II.
Динаміка

Навчальний посібник з варіантами завдань
до розрахунково-графічної роботи
для студентів спеціальності «Професійна освіта»
напряму підготовки «Транспорт» усіх форм навчання

Луганськ
ДЗ «ЛНУ імені Тараса Шевченка»
2012

УДК 531(075.8)
ББК 22.21 я73
К59

Р е ц е н з е н т и :

***Меняйленко О. С.* –** доктор технічних наук, професор, проректор з науково-педагогічної роботи Луганського національного університету імені Тараса Шевченка.

***Лєві Л. І.* –** доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри фізико-математичних дисциплін Луганського національного аграрного університету.

***Завгородній Є. Є.* –** кандидат технічних наук, доцент кафедри інженерно-педагогічних дисциплін Луганського національного університету імені Тараса Шевченка.

Козуб Ю. Г.
К59 Теоретична механіка. Частина ІІ. Динаміка : навч. посіб. з варіантами завдань до розрахунково-графічної роботи для студ. спец. «Професійна освіта» напряму підготовки «Транспорт» усіх форм навчання / Ю. Г. Козуб, О. В. Калайдо ; Держ. закл. «Луган. нац. ун-т імені Тараса Шевченка». – Луганськ : Вид-во ДЗ «ЛНУ імені Тараса Шевченка», 2012. – 145 с.

У навчальному посібнику в повному обсязі викладено лекційний матеріал другої частини курсу; наведено методику вирішення задач і розглянуто велику кількість прикладів їх розв’язання до усіх тем, що можуть бути залучені до розрахунково-графічної роботи; подано завдання до РГР з 12 глав дисципліни.

Посібник призначений для студентів 1 – 3 курсів денної та заочної форм навчання, які навчаються за технічними та технологічними напрямами.

УДК 531(075.8)
ББК 22. 21 я73

Рекомендовано до друку навчально-методичною радою
Луганського національного університету імені Тараса Шевченка
(протокол № 7 від 15 лютого 2012 р.)

Зміст

ПЕРЕДМОВА

Навчальний посібник «Теоретична механіка. Частина II. Динаміка» присвячений другій і найбільш важливій частині курсу – динаміці. Дане видання **має дві мети**: по-перше – надати студентам лекційний матеріал у повному обсязі, зорієнтувати на найбільш важливі питання курсу, допомогти в підготовці до модульних чи екзаменаційних робіт; по-друге – сприяти опануванню студентами не менш важливої практичної частини курсу, підготувати їх до самостійного виконання розрахунково-графічної роботи (РГР), та надати всю необхідну інформацію в процесі її виконання. *Особливістю* даного навчального посібника є саме поєднання в рамках одного видання класичного підручника і посібника до розв'язання задач з варіантами завдань до РГР.

Даний навчальний посібник призначений для студентів спеціальностей, на яких теоретична механіка вивчається за повною програмою з виконанням двох розрахунково-графічних робіт, проте може бути використане також студентами спеціальностей, що навчаються за скороченою програмою.

Посібник орієнтовано насамперед на студентів денної та заочної форм навчання напряму підготовки «Транспорт», тому місцями свідомо опущений глибокий аналіз теорії та виводи формул, а також деякі питання, що не мають відношення до транспортної сфери або дуже рідко постають перед інженером широкого профілю. Це тим більш оправдано наявністю великої кількості підручників з широким висвітленням теорії і детальним виводом формул, на які автори посилаються в кінці посібника.

При розв'язанні задач динаміки часто виникають труднощі, пов'язані з підбором відповідних теорем і рівнянь, причому ці труднощі можна здолати лише за наявності достатніх навичок у розв'язанні задач. Але для отримання таких навичок мало практики в розв'язанні задач, необхідно вміти аналізувати і обирати найбільш раціональні з наявних методів. В даному посібнику детально розкриті основні методи та проведене їх порівняння.

Усі задачі динаміки можна умовно розділити на три типи: задачі динаміки матеріальної точки, механічної системи і твердого тіла. При цьому, задачі усіх трьох типів діляться на прямі та зворотні. При відносній простоті прямих задач розв'язання обернених часто пов'язане із значними труднощами.

Найбільш поширеним методом розв'язання задач ***динаміки матеріальної точки*** є використання диференціальних рівнянь руху в проекціях на осі різних систем координат, при цьому ефективність розв'язання залежить саме від вдалого вибору такої системи. Такі рівняння досить легко розв'язуються лише у випадку, коли сила постійна, або залежить від часу координати або швидкості. Іноді використання загальних теорем динаміки дозволяє отримати перші інтеграли диференціальних рівнянь, спростивши тим самим розв'язання. Теорему про зміну кількості руху точки слід застосовувати у випадку, коли сили постійні, або є відомими функціями часу; теорема про зміну моменту кількості руху точки здебільшого застосовується при русі під дією центральної сили; теорему про зміну кінетичної енергії точки зручно застосовувати у випадку, коли сили постійні, або є функціями її положення.

Досить універсальним методом розв'язання задач ***динаміки механічної системи*** є складання диференціальних рівнянь руху за допомогою загального рівняння динаміки або рівняння Лагранжа II роду. В деяких випадках для розв'язання задач зручно використовувати загальні теореми динаміки. Так, теорема про рух центра мас дозволяє окрім розв'язання оберненої задачі також визначати невідомі реакції в'язей безпосередньо з рівнянь руху; теорему про зміну головного вектору кількостей руху механічної системи слід використовувати у випадку, коли зовнішні сили сталі, або залежать від часу; теорему про зміну головного моменту кількостей руху механічної системи доцільно використовувати у випадку обертального руху твердого тіла навколо нерухомої осі; теорему про зміну кінетичної енергії системи застосовують за умови постійних сил, або сил, що залежать від положення системи; якщо механічна система є суцільним середовищем, то слід скористатись теоремою Ейлера.

При розв'язанні задач ***динаміки твердого тіла*** застосовують ті ж самі методи, що й у випадку механічної системи, хоча вони й мають певні особливості. Так, при обертанні твердого тіла навколо нерухомої осі зручно використовувати диференціальне рівняння обертального руху твердого тіла. При плоскопаралельному русі твердого тіла найбільш загальним методом є складання диференціальних рівнянь плоского руху, якщо ж треба визначити лише закон плоского руху тіла – слід використовувати загальне рівняння динаміки або рівняння Лагранжа II роду, причому в даному випадку загальне рівняння є менш зручним і притому, формальним методом розв'язання задач з використанням сил інерції. В той же час, вдалий вибір узагальнених координат при використанні рівняння Лагранжа забезпечує простоту розв'язання даної задачі.

Даний посібник складений у повній відповідності до діючої програми курсу «Теоретична механіка» спеціальностей професійної освіти і є результатом викладацької діяльності авторів в Луганському національному університеті імені Тараса Шевченка. Перехід до університетської інженерної освіти призвів до необхідності розширення змісту курсу, більш повного фізичного трактування деяких питань, ускладнення математичного апарату, що знайшло відображення в даному посібнику. Матеріал в посібнику розподілений між авторами наступним чином: Передмова, глави 5, 7 – 12 написані Козубом Ю.Г., ним же складені завдання до РГР приклади і методика розв'язання задач з даних глав. Глави 1 – 4 і 6, а також методичні рекомендації і завдання до РГР з них складені Калайдо О. В.

Автори будуть вдячні читачам, які пришлють відгуки і побажання за адресою: м. Луганськ, вул. Оборонна 2а, видавництво ДЗ «Луганський національний університет імені Тараса Шевченка», або на адресу кафедри: м. Луганськ, вул. Оборонна 2а, кафедра інженерно-педагогічних дисциплін, завідувачу кафедри Козубу Ю.Г.

РОЗДІЛ III. ДИНАМІКА

Глава 13. Закони і задачі динаміки

13.1. Основні закони динаміки

Динаміка - розділ теоретичної механіки, в якому вивчається рух матеріальної точки, системи матеріальних точок і абсолютно твердого тіла під дією сил, прикладених до них. У динаміці узагальнюються поняття, розглянуті в статиці та кінематиці. В основі динаміки лежать три закони Ньютона, які є законами природи, встановленими на основі тривалих спостережень.

Системи координат, в яких ці закони справедливі, називаються *інерційними*. При розв'язанні багатьох задач механіки з достатньою мірою точності можна вважати інерціальною систему, яка покоїться або рухається поступально, прямолінійно і рівномірно відносно Землі. Лише при розв'язанні задач небесної механіки доводиться враховувати обертання Землі, тому в цьому випадку за інерціальну приймають систему з початком координат в центрі Сонця і осями, направленими до трьох нерухомих зірок.

Перший закон Ньютона (закон інерції): ізольована матеріальна точка зберігає стан спокою або рівномірного і прямолінійного руху до тих пір, поки прикладені сили не змінять її стану. Ізольованою вважають точку, для якої можна знехтувати взаємодією з іншими тілами.

Інертність - здатність ізольованої матеріальної точки зберігати свій стан рівномірного руху за відсутності діючих сил. Якщо на точку починає діяти сила, то її стан змінюється не миттєво і тим повільніше, чим більше інертність. Мірою інертності точки є її маса.

Другий закон Ньютона (основний закон динаміки): прискорення точки, що знаходиться під дією сили $\boldsymbol{F}$, пропорційне величині сили і має однаковий з нею напрям

$$m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}. \tag{13.1}$$

Коефіцієнтом пропорційності в даному законі є маса точки. Тож маса є мірою інертності тіла, але лише при поступальному русі, коли всі його точки мають однакові прискорення.

Маса – фізична величина, яка є мірою інертних або гравітаційних властивостей точки (тіла). Сучасною наукою встановлено еквівалентність інертної і гравітаційної мас. Прийнявши Землю за інерційну систему відліку, можна визначити масу тіла через його вагу

$$P = mg \Rightarrow m = \frac{P}{g}.$$

Оскільки всі тіла в одному місці Землі падають з однаковим прискоренням $\boldsymbol{g}$, то виходить, що вага тіла пропорційна масі і не залежить від його форми. Але також відомо, що на екваторі і на полюсі тіла падають з різними прискореннями при незмінній масі. Крім того, космонавт в ракеті далеко від Землі майже повністю втрачає свою вагу, хоча його маса не змінюється. Тому поняття маси і ваги не еквівалентні, різниця між ними витікає з закону всесвітнього тяготіння.

Третій закон Ньютона (закон дії і протидії): дві матеріальні точки або тіла взаємодіють з силами, рівними за величиною і спрямованими в протилежні сторони уздовж їх спільної лінії дії

$$F_{12} = -F_{21}. \qquad (13.2)$$

Цей закон справедливий в будь-якій системі відліку, оскільки він не містить кінематичних характеристик об'єктів.

Принцип суперпозиції: якщо на точку одночасно діє декілька сил, то кожна з сил надає таке прискорення, як у випадку, коли б вона діяла одна. Прискорення матеріальної точки при одночасній дії сил дорівнює геометричній сумі прискорень від кожної з сил окремо.

Принцип суперпозиції не може використовуватись у випадку, коли діючі сили залежать від прискорення точки. Такі сили у природі зустрічаються дуже рідко, прикладом є електромагнітна сила тяжіння точки до нерухомого центра.

13.2 Класифікація сил в динаміці

Сили, які діють на вільну точку, тіло або систему точок по характеру дії зручно розділити на зовнішні та внутрішні.

1. *Зовнішні* – сили, які діють на точки даної системи збоку інших механічних об'єктів, які до даної системи не входять. Позначаються $\boldsymbol{F}^e$ від латинського слова *exterior* – зовнішній.

2. *Внутрішні* – сили взаємодії між точками даної механічної системи. Позначаються $\boldsymbol{F}^i$ від латинського слова *interior* – внутрішній.

Одна й та ж сила може бути як зовнішньою, так і внутрішньою, в залежності від вибору механічної системи. Наприклад, тиск продуктів згоряння паливної суміші на поршень ДВЗ є зовнішньою силою по відношенні до поршня і внутрішньою по відношенні до всього двигуна.

Сили, що діють на невільну точку, тіло або систему точок, прийнято поділяти на активні та реакції в'язей.

1. *Реакції в'язей* – сили, які діють на точки даної системи збоку в'язей. Інколи їх називають пасивними силами, оскільки виникають вони лише під дією активних сил. Позначаються такі сили $\boldsymbol{F}^r$.

2. *Активні* – сили, які своєю дією спричиняють прискорення точок системи або реакції в'язей. Позначаються $\boldsymbol{F}^a$.

Сила є активною чи реакцією в'язі по своїй природі і не залежить від вибору матеріальної системи. Наприклад, тиск ноги велосипедиста на педаль велосипеда є активною силою незалежно від того, яку механічну систему ми розглядаємо – велосипед чи велосипед з велосипедистом.

Сили в динаміці також класифікують в залежності від їхньої природи.

1. *Сила тяжіння* – постійна для даного місця сила, яка діє на все тіла поблизу поверхні Землі. Її модуль дорівнює вазі тіла

$$F_{тяж} = P = mg, \qquad (13.3)$$

де g – прискорення вільного падіння, яке залежить від географічної широти місцевості і висоти над рівнем моря ($g \approx 9{,}815$ м/с^2).

Із закону всесвітнього тяжіння можна дати інше визначення даної сили – це сила, з якою притягуються одне до одного два тіла з масами m_1 і m_2

$$F_{тяж} = -g\,\frac{m_1 m_2}{r^2}, \quad (13.4)$$

де γ = 6,67·10^{-11} м^3/кг·с^2 – гравітаційна стала, r – відстань між центрами мас тіл.

2. *Сила тертя ковзання* – сила, яка діє при взаємному русі або спробі руху двох стичних поверхонь, її модуль дорівнює

$$F_{ков} = fN, \quad (13.5)$$

де f – коефіцієнт тертя, який характеризує стан тертьових поверхонь; N – нормальна реакція, що залежить від сили, з якою притискаються тертьові поверхні одна до одної.

3. *Сила пружності* – сила, яка пропорційна деформації твердого тіла. Визначається дана сила із закону Гука

$$F = -cx, \quad (13.6)$$

де c – коефіцієнт жорсткості твердого тіла, x – абсолютна деформація тіла. Знак мінус вказує на те, що дана сила завжди протидіє деформації. Закон Гука є справедливим доти, доки в тілі не спостерігається залишкових деформацій.

4. *Сил аеродинамічного опору* – сила, яка діє на тіло при його повільному русі в дуже в'язкому середовищі, вона є функцією від швидкості тіла

$$R = -\alpha \upsilon, \quad (13.7)$$

де α – коефіцієнт опору. Знак мінус вказує на те, що дана сила напрямлена в бік, протилежний до вектору швидкості.

5. *Сила в'язкого тертя* – сила, яка діє на тіло при його русі в не дуже в'язкому середовищі (вода, повітря), вона є функцією квадрату швидкості тіла

$$R = -0{,}5c\rho S\upsilon^2, \quad (13.8)$$

де c – безрозмірний коефіцієнт опору, ρ – густина середовища, S – площа проекції тіла на площину, перпендикулярну до напрямку руху.

13.3. Диференціальні рівняння руху вільної матеріальної точки

Нехай рух матеріальної точки M маси m задано у **векторній формі** за допомогою радіус-вектора $\boldsymbol{r}$, тоді основне рівняння динаміки матиме вигляд

$$m\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = \boldsymbol{F}\left(t, \boldsymbol{r}, \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right). \quad (13.9)$$

В загальному випадку сила може залежати від часу, координат і швидкості руху. Від часу залежить більшість сил, які мають місце при роботі машин і механізмів. Від координат залежать сили пружності (13.6), а також сили електричної, магнітної та ядерної взаємодії. Від швидкості руху залежать розглянуті вище сили в'язкого тертя (13.7) і аеродинамічного опору (13.8). Рівняння (13.9) носить назву *рівняння руху точки у векторній формі*.

Нехай рух матеріальної точки M маси m задано у **координатній формі**, тоді замість рівняння (13.9) отримаємо три рівняння

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F_x\left(t, x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right), \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = F_y\left(t, x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right),$$
$$m\frac{d^2z}{dt^2} = F_z\left(t, x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right). \quad (13.10)$$

Рівняння (13.10) називаються *динамічними рівняннями руху матеріальної точки в координатній формі*. Кожне з диференціальних рівнянь є рівнянням другого порядку, тому система в цілому має шостий порядок.

Якщо спроектувати обидві частини основного рівняння динаміки (13.1) на **натуральні осі**, то *динамічні рівняння руху в натуральній формі* матимуть вигляд

$$m\frac{dv_\tau}{dt} = F_\tau\left(t, s, \frac{ds}{dt}\right); \quad m\frac{v^2}{\rho} = F_n\left(t, s, \frac{ds}{dt}\right). \tag{13.11}$$

Якщо спроектувати основне рівняння динаміки (13.1) на радіальний і трансверсальний напрямки **полярної системи** координат, то можна отримати *динамічні рівняння руху матеріальної точки в полярній системі координат*

$$m\left(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2\right) = F_r\left(t, r, \varphi, \dot{r}, \dot{\varphi}\right); \quad \frac{m}{r}\frac{d\left(r^2\dot{\varphi}\right)}{dt} = F_\varphi\left(t, r, \varphi, \dot{r}, \dot{\varphi}\right). \tag{13.12}$$

Якщо спроектувати основне рівняння динаміки (13.1) на осі **циліндричної системи** координат, то можна отримати *динамічні рівняння руху матеріальної точки в циліндричній системі координат*

$$\begin{gathered} m\left(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2\right) = F_r\left(t, r, \varphi, z, \dot{r}, \dot{\varphi}, \dot{z}\right), \\ \frac{m}{r}\frac{d\left(r^2\dot{\varphi}\right)}{dt} = F_\varphi\left(t, r, \varphi, z, \dot{r}, \dot{\varphi}, \dot{z}\right), \quad m\ddot{z} = F_z\left(t, r, \varphi, z, \dot{r}, \dot{\varphi}, \dot{z}\right). \end{gathered} \tag{13.13}$$

Якщо спроектувати основне рівняння динаміки (13.1) на осі **сферичної системи** координат, то можна отримати *динамічні рівняння руху матеріальної точки в сферичній системі координат*

$$\begin{gathered} m\left(\ddot{r} - r\dot{\psi}^2\cos^2\theta - r\dot{\theta}^2\right) = F_r\left(t, r, \psi, \theta, \dot{r}, \dot{\psi}, \dot{\theta}\right), \\ \frac{m}{r\cos\theta}\frac{d\left(r^2\dot{\psi}\cos^2\theta\right)}{dt} = F_\psi\left(t, r, \psi, \theta, \dot{r}, \dot{\psi}, \dot{\theta}\right), \\ \frac{m}{r}\left[\frac{d\left(r^2\dot{\theta}\right)}{dt} + r^2\dot{\psi}^2\cos\theta\sin\theta\right] = F_\theta\left(t, r, \psi, \theta, \dot{r}, \dot{\psi}, \dot{\theta}\right). \end{gathered} \tag{13.14}$$

13.4. Дві основні задачі динаміки

Задачі динаміки у випадку *вільної* матеріальної точки (тіла або системи):

1. **Пряма задача** – знаючи закон руху точки (тіла, системи), визначити рівнодійну сил, які діють на даний механічний об’єкт. Ця задача розв’язується через визначення проекцій результуючої сили на координатні осі

$$X = m\frac{d^2x}{dt^2}, \quad Y = m\frac{d^2y}{dt^2}, \quad Z = m\frac{d^2z}{dt^2}, \tag{13.15}$$

після чого знаходиться модуль результуючої сили і її напрям

$$F = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}, \quad \cos\left(\boldsymbol{F}\,^\wedge Ox\right) = \frac{X}{F}, \quad \cos\left(\boldsymbol{F}\,^\wedge Oy\right) = \frac{Y}{F}, \quad \cos\left(\boldsymbol{F}\,^\wedge Oz\right) = \frac{Z}{F}. \tag{13.16}$$

Подібним чином розв’язується пряма задача і в інших системах координат. Слід зазначити, що пряма задача динаміки може бути розв’язана для будь-якого закону руху механічного об’єкта.

2. **Обернена задача** – знаючи сили, які діють на матеріальну точку (тіло, систему), її початкове положення і швидкість, визначити закон руху даного механічного об’єкта.

Оскільки сили, які діють на точку, найчастіше є змінними величинами, то праві части диференціальних рівнянь руху точки в декартових координатах можуть бути функціями t, x, y, z, υ_x, υ_y, υ_z. При інтегруванні кожного з рівнянь з’являються дві константи, тому при інтегруванні всієї системи отримуємо шість сталих інтегрування, які мають бути визначені з початкових умов

$$t = t_0,\ x = x_0,\ y = y_0,\ z = z_0,\ \upsilon_x = \upsilon_{x0},\ \upsilon_y = \upsilon_{y0},\ \upsilon_z = \upsilon_{z0}.$$

Ці значення підставляються в загальні рішення відповідних диференціальних рівнянь, після чого шуканий закон руху має вигляд

$$x = f_1(t, x_0, y_0, z_0, \upsilon_{x0}, \upsilon_{y0}, \upsilon_{z0}),$$
$$y = f_2(t, x_0, y_0, z_0, \upsilon_{x0}, \upsilon_{y0}, \upsilon_{z0}),$$
$$z = f_3(t, x_0, y_0, z_0, \upsilon_{x0}, \upsilon_{y0}, \upsilon_{z0}).$$

Під дією однієї і тієї ж сили точка може здійснювати цілий клас рухів, визначуваних початковими умовами. Так, під дією сили тяжіння тіло може рухатися по вертикалі або по сімейству парабол, залежно від напряму початкової швидкості.

При складанні диференціальних рівнянь за початковий момент зручно прийняти момент початку руху, для якого відомі швидкість і положення точки. Початкова швидкість характеризує сили, що діяли на точку до початкового моменту. Диференціальні рівняння описують рух точки до тих пір, поки на неї діють сили, що увійшли до правої частини. Якщо дія сил змінюється або припиняється, то необхідно складати нові рівняння.

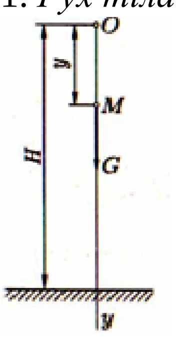
Задачі динаміки у випадку *невільної* матеріальної точки (тіла, системи):

1. **Пряма задача** – знаючи закон руху і активні сили, визначити реакції в’язей.
2. **Обернена задача** – знаючи діючі сили, визначити закон руху точки і реакції накладених в’язей.

13.5. Часткові випадки визначення законів руху

На відміну від прямої задачі, обернена задача не може бути розв’язана в загальному вигляді. Лише у випадках, коли сила $\boldsymbol{F}$ має досить простий вигляд, можуть бути отримані шукані рівняння руху. Нижче розглянуті деякі подібні випадки.

1. *Рух тіла під дією постійної сили*



Прикладом такого руху є вільне падіння тіла без урахування опору повітря. Нехай точка M падає на поверхню Землі (рис. 13.1) під дією сили тяжіння $\boldsymbol{G}$ без початкової швидкості. Виберемо за початок відліку O точку, звідки починає свій рух точка M. В такому випадку початкові умови мають вигляд

$$t_0 = 0\ \text{с},\ \ y_0 = 0\ \text{м},\ \ \upsilon_0 = 0\ \text{м/с}.$$

Рис. 13.1. Рух тіла під дією постійної сили.

Оскільки рух носить прямолінійний характер, то диференціальне рівняння має вигляд

$$m\ddot{y} = \sum Y_i = G = mg \Rightarrow \ddot{y} = g.$$

Зінтегрувавши дане рівняння, отримаємо закон зміни швидкості

$$\ddot{y} = \frac{du_y}{dt} = g \Rightarrow \int_0^{u_y} du_y = g\int_0^t dt \Rightarrow u_y = gt.$$

Для знаходження рівняння руху ще раз зінтегруємо отримане рівняння

$$u_y = \frac{dy}{dt} = gt \Rightarrow \int_0^y dy = g\int_0^t tdt \Rightarrow y = \frac{gt^2}{2}.$$

2. *Рух тіла під дією сили, яка залежить від швидкості*

Прикладом такого руху є вільне падіння тіла з урахуванням сил опору повітря. Нехай точка *M* падає без початкової швидкості на поверхню Землі (рис. 13.2) під дією сили тяжіння ***G*** і сили опору повітря ***R***, яка визначається по формулі (13.7) і направлена проти руху точки. Початкові умови мають вигляд

$$t_0 = 0 \text{ с},\ y_0 = 0 \text{ м},\ \upsilon_{y0} = 0 \text{ м/с}.$$

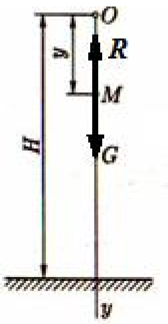


Рис. 13.2. Вільне падіння з урахуванням сил опору.

Диференціальне рівняння в даному випадку має вигляд

$$m\ddot{y} = G - R = mg - au \Rightarrow \ddot{y} = g - \frac{a}{m}u = g - ku.$$

Для спрощення запису введено змінну $k = \alpha/m$. Аби отримати закон зміни швидкості, необхідно зінтегрувати дане рівняння з початковими умовами

$$\frac{du_y}{dt} = g - ku_y \Rightarrow \int_0^{u_y} \frac{du_y}{g - ku_y} = \int_0^t dt \Rightarrow -\frac{1}{k}\ln\left|g - ku_y\right| = t.$$

$$\ln\left|g - ku_y\right| = -kt \Rightarrow g - ku_y = e^{-kt} \Rightarrow u_y = \frac{g - e^{-kt}}{k}.$$

При $t \to \infty$ швидкість падіння досягає граничного значення

$$u_{гр} = \frac{g}{k} = \frac{gm}{a},$$

тобто через деякий проміжок часу сила опору зрівнюється з вагою тіла і рух стає рівномірним. Після другого інтегрування отримуємо рівняння вільного падіння тіла з урахуванням опору середовища:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{g - e^{-kt}}{k} \Rightarrow \int_0^y dy = \int_0^t \frac{g - e^{-kt}}{k}dt;\ y = \frac{gt}{k} + \frac{e^{-kt}}{k^2} = \frac{kgt + e^{-kt}}{k^2}.$$

3. *Рух тіла під дією сили, яка залежної від координати точки*

Прикладом такого руху є коливальний рух під дією сили пружності, який детально розглянуто в наступному параграфі. Нехай точка *M* відштовхується від деякого центру *O* з силою, модуль якої пропорційний відстані до даного центру *x*

$$|F| = ax,$$

де a – довільний коефіцієнт пропорційності, а початкові умови мають вигляд

$$t = 0,\ x(0) = x_0,\ \upsilon(0) = \upsilon_0.$$

Диференціальне рівняння цього руху має вигляд

$$m\ddot{x} = ax \Rightarrow m\frac{du}{dt} = ax.$$

Для інтегрування цього рівняння необхідно виключити час t

$$\frac{du}{dt} = \frac{du}{dx}\frac{dx}{dt} = u\frac{du}{dx}.$$

Отримане диференціальне рівняння легко інтегрується

$$mu\frac{du}{dx} = ax \Rightarrow \int_{u_0}^{u} udu = \frac{a}{m}\int_{x_0}^{x} xdx \Rightarrow \frac{(u-u_0)^2}{2} = \frac{a(x-x_0)^2}{2m} \Rightarrow u - u_0 = \sqrt{\frac{a}{m}}(x-x_0).$$

Для отримання рівняння руху диференціюємо ще раз за часом

$$\frac{dx}{dt} = u_0 + \sqrt{\frac{a}{m}}(x-x_0) \Rightarrow \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{u_0 + \sqrt{\frac{a}{m}}(x-x_0)} = \sqrt{\frac{m}{a}}\int_{x_0}^{x} \frac{d\left(u_0 + \sqrt{\frac{a}{m}}(x-x_0)\right)}{u_0 + \sqrt{\frac{a}{m}}(x-x_0)} = \int_0^t dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t = \sqrt{\frac{m}{a}}\ln\left|u_0 + \sqrt{\frac{a}{m}}(x-x_0)\right|_{x_0}^{x} = \sqrt{\frac{m}{a}}\ln\left|\frac{u_0 + \sqrt{\frac{a}{m}}(x-x_0)}{u_0}\right|.$$

4. *Рух тіла під дією центральної сили*

Центральна – сила, лінія дії якої весь час проходить через нерухому точку (центр сили). Така сила є функцією радіусу, тому рівняння руху матеріальної точки

$$m\frac{d\boldsymbol{\upsilon}}{dt} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}).$$

Траєкторія точки, що рухається під дією центральної сили, є плоскою кривою, а її диференціальне рівняння

$$F_r = -\frac{mC^2}{r^2}\left[\frac{d^2(1/r)}{dj^2} + \frac{1}{r}\right], \tag{13.17}$$

де C – константа, яка визначається з початкових умов. Формула (13.17) є *другою формулою Біне*. Вона дозволяє визначити центральну силу по траєкторії в полярних координатах, або траєкторію точки, якщо відома центральна сила.

Швидкість точки при русі по заданій траєкторії визначається з *першої формули Біне*

$$u^2 = C^2\left[\left(\frac{d(1/r)}{dj}\right)^2 + \left(\frac{1}{r}\right)^2\right]. \tag{13.18}$$

Формули (13.17) і (13.18) широко використовуються при розв'язанні задач небесної механіки.

Питання для самоконтролю

1. Які закони лежать в основі динаміки?
2. Чи є різниця між гравітаційною і інерціальною масами?
3. У чому суть прямої та оберненої задач динаміки?
4. Як записуються рівняння руху вільної точки в полярних координатах?
5. Яку силу називають центральною, наведіть приклади таких сил?

Завдання № 13. «Закони і задачі динаміки»

Рекомендації до розв'язання задач

А) Розв'язання прямої задачі динаміки

1. Нанести на рисунок матеріальну точку разом з прикладеними до неї силами.
2. Скориставшись принципом звільнення від в'язей, показати на рисунку відповідні реакції в'язей.
3. Обрати систему відліку, якщо вона не задана умовами задачі.
4. По заданому закону руху визначити проекції швидкості точки на осі системи координат.
5. Визначити проекції прискорення точки на осі системи координат, після чого знайти абсолютне прискорення.
6. Скласти диференціальні рівняння руху і з них віднайти шукані величини.

Б) Розв'язання оберненої задачі динаміки

1. Обрати систему координат і записати для неї початкові умови руху точки.
2. Показати на рисунку активні сили і сили реакцій, прикладені до даної точки.
3. Скласти диференціальні рівняння руху матеріальної точки.
4. Зінтегрувати систему диференціальних рівнянь і визначити за допомогою початкових умов сталі інтегрування.
5. Скориставшись рівняннями руху, визначити шукані величини.

Приклад розв'язання задачі (пряма задача динаміки)

Задача 1. Рівняння руху матеріальної точки маси m = 2 кг в декартових координатах мають наступний вигляд

$$x = 2t^2 + 3 \text{ м}, \quad y = t^3 - 2t \text{ м}, \quad z = t + 2 \text{ м}.$$

Визначити величину і напрям сили, яка діє на матеріальну точку в момент часу t = 1 с.

Розв'язання.

Знаходимо проекції швидкості матеріальної точки на осі декартової системи координат

$$u_x = \frac{dx}{dt} = \frac{d\left(2t^2 + 3\right)}{dt} = 4t \text{ м/с}, \quad u_y = \frac{dy}{dt} = \frac{d\left(t^3 - 2t\right)}{dt} = 3t^2 - 2 \text{ м/с},$$

$$u_z = \frac{dz}{dt} = \frac{d(t + 2)}{dt} = 1 \text{ м/с}.$$

Знаходимо проекції прискорення матеріальної точки на осі декартової системи координат в момент часу t = 1 с

$$a_x = \frac{du_x}{dt} = \frac{d(4t)}{dt} = 4\ м/с^2, \quad a_y = \frac{du_y}{dt} = \frac{d(3t^2 - 2)}{dt} = 6t = 6\ м/с^2,$$

$$a_z = \frac{du_z}{dt} = \frac{d(1)}{dt} = 0\ м/с^2.$$

Знаходимо проекції сили на осі декартової системи координат згідно (13.15)

$$X = ma_x = 2 \cdot 4 = 8\ H, \quad Y = ma_y = 2 \cdot 6 = 12\ H, \quad Z = ma_z = 2 \cdot 0 = 0\ H.$$

Модуль сили і напрямні косинуси знаходимо по формулі (13.16)

$$F = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} = \sqrt{8^2 + 12^2 + 0} = 14{,}4 H.$$

$$\cos a = \frac{X}{F} = \frac{8}{14{,}4} = 0{,}556 \Rightarrow a = \arccos 0{,}556 = 56{,}2°;$$

$$\cos b = \frac{Y}{F} = \frac{12}{14{,}4} = 0{,}556 \Rightarrow a = \arccos 0{,}833 = 39{,}8°;$$

$$\cos g = \frac{Z}{F} = \frac{0}{14{,}4} = 0 \Rightarrow a = \arccos 0 = 90°.$$

Задачу розв'язано.

<u>Приклад розв'язання задачі (обернена задача динаміки)</u>

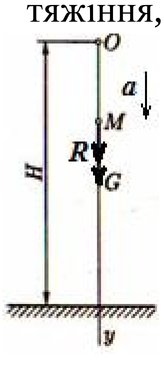
Задача 2. На тіло маси m = 2 кг, яке кинули угору зі швидкістю υ_0 = 20 м/с, діє сила опору, величина якої залежить від швидкості

$$R = 0{,}4u.$$

Знайти, через який час тіло досягне свого найвищого положення.

Розв'язання.

Нанесемо на рисунку сили, які діють на дане тіло. На нього діє сила тяжіння, яка завжди спрямована до центру Землі, і сила опору з боку повітря, яка напрямлена протилежно швидкості тіла (рис. 13.3). Рух каменю буде сповільненим, його прискорення буде спрямовано у бік, протилежний швидкості, тобто вниз. Складаємо диференціальне рівняння руху



$$m\ddot{y} = -mg - R = -mg - 0{,}4u \Rightarrow \ddot{y} = -\left(g + \frac{0{,}4}{m}u\right) = -(9{,}81 + 0{,}2u).$$

Рис. 13.3. До задачі 2.

Інтегруючи дане диференціальне рівняння отримаємо закон зміни швидкості

$$\frac{du}{dt} = -(9{,}81 + 0{,}2u) \Rightarrow -\int_{u_0}^{u} \frac{du}{9{,}81 + 0{,}2u} = \int_0^t dt \Rightarrow -\frac{1}{0{,}2}\left[\ln|9{,}81 + 0{,}2u| - \ln|9{,}81 + 0{,}2u_0|\right] = t.$$

Швидкість тіла в його найвищій точці буде дорівнювати нулю, тому час підйому тіла

$$t = -5\ln\frac{|9{,}81 + 0{,}2 \cdot 0|}{9{,}81 + 0{,}2 \cdot 20} = 1{,}71(c).$$

Задачу розв'язано.

Завдання №13 до РГР

13.1. Матеріальна точка маси m = 1 кг рухається згідно рівнянням

$$x = 3\cos 4t \ \textit{м}, \quad y = 3\sin 4t \ \textit{м}.$$

Визначити силу F, яка діє на матеріальну точку.
Відповідь: F = 48 Н.

13.2. Сила, яка діє на автомобіль масою m одразу після початку ним руху, описується рівнянням

$$F = a - bu,$$

де a і b – довільні константи. Визначити дану силу, як функцію від часу.

Відповідь: $F = ae^{-\frac{bt}{m}}$.

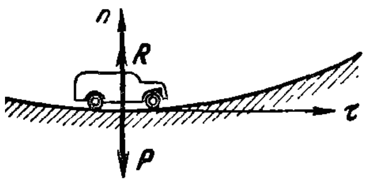
13.3. Автомобіль маси m рухається по горизонтальній дорозі під дією сили тяги двигуна Q і сумарної сили опору руху

$$R = ku^2 \ H.$$

Визначити швидкість автомобіля в момент, коли пройдений шлях дорівнює s, якщо його початкова швидкість υ_0.

Відповідь: $u = \sqrt{\frac{1}{k}\left[Q - \left(Q - ku_0^2\right)e^{-\frac{2ks}{m}}\right]}$.

13.4. Автомобіль маси m = 1 200 кг рухається по дну яру з постійною по модулю швидкістю υ = 36 км/год. Визначити силу тиску автомобіля на дно яру в самій нижчий точці, якщо радіус кривини в ній ρ = 50 м. Автомобіль вважати матеріальною точкою, силами опору руху знехтувати.
Відповідь: R = 14 172 Н.



До задачі 13.4.

13.5. З поверхні Землі кинуте догори тіло масою m = 0,5 кг з початковою швидкість υ_0 = 10 м/с. Визначити, з якою швидкістю υ_1 тіло впаде назад на Землю, якщо на нього діє сила опору з боку повітря

$$R = 0{,}05u \ H.$$

Відповідь: υ_1 = 9,35 м/с.

13.6. Матеріальна точка маси m рухається під дією центральної сили по спіралі, рівняння якої має вигляд

$$r = ae^{-l j},$$

де a і λ – сталі величини. Визначити закон зміни центральної сили.

Відповідь: $F = -\frac{4mC^2\left(1 + l^2\right)}{r^3}$.

13.7. Камінь маси m = 1 кг кинутий угору з початковою швидкістю υ_0 = 6 м/с. Визначити, на якій висоті H над Землею його швидкість зменшиться вдвічі, якщо сила опору руху каменя

$$R = 0{,}01u^2\,(H).$$

Відповідь: H = 1,345 м.

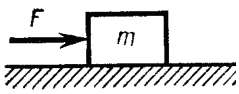
13.8. Куля пробиває дошку товщиною h = 30 мм і при цьому її швидкість змінюється від υ_0 = 100 м/с до υ_1 = 10 м/с. Вважаючи силу опору пропорційною квадрату швидкості, визначити час руху кулі крізь дошку.
Відповідь: t = 0,0012 с.

13.9. Парашутист маси m = 90 кг опускається на землю без початкової швидкості. Визначити граничну (максимальну) швидкість його руху, якщо сила опору збоку повітря

$$R = 35{,}3u^2\ H.$$

Відповідь: υ = 5 м/с.

13.10. Горизонтальна сила F = 30 Н приводить до руху із стану спокою брусок маси m = 0,2 кг, який знаходиться на шорсткій горизонтальній поверхні. Знайти прискорення бруска, якщо коефіцієнт тертя між ним і поверхнею дорівнює f = 0,3 і не залежить від швидкості.
Відповідь: a = 3,06 м/с^2.



До задачі 13.10.

13.11. Автомобіль з вантажем вагою G = 54 000 Н рухається по випуклому мосту зі швидкістю υ = 10 м/с. Визначити силу тиску автомобіля на міст в момент проходження через його середину, якщо радіус кривини в середині моста ρ = 50 м.
Відповідь: N = 42 991 Н.

13.12. Тіло починає ковзати по похилій площині з кутом нахилу α = 30° без початкової швидкості, причому сила опору руху визначається по формулі

$$R_{on} = 0{,}5Pe^{-0{,}5t}.$$

Визначити рівняння руху даного тіла, якщо в момент початку руху воно мало нульову початкову координату.

Відповідь: $x = 4{,}9\left(\dfrac{t^2}{2} - 4e^{-0{,}5t}\right)$ м.

13.13. Літак починає пікірувати без початкової вертикальної швидкості, причому сила опору повітря руху літака пропорційна квадрату його відносної швидкості. Визначити вертикальну швидкість літака і пройдений ним шлях як функцію від його максимальної можливої швидкості.

Відповідь: $s = -\frac{u_{max}^2}{2g}\ln\left|1 - \frac{u^2}{u_{max}^2}\right|$; $u = u_{max}\sqrt{1 - e^{-\frac{2gs}{u_{max}^2}}}$.

13.14. Матеріальна точка маси m = 1 кг рухається вздовж осі Ox під дією сили

$$F = 1 + u\ H.$$

Вважаючи початкові умови руху точки нульовими, визначити координату x точки в момент часу t = 1 с.

Відповідь: x = 1,72 м.

13.15. Сила тяги гвинтів гелікоптера маси m = 800 кг при вертикальному підйомі складає 1,5 його ваги, а опір повітря виражається формулою

$$R = 980u,$$

Визначити максимальну можливу швидкість підйому гелікоптера.

Відповідь: υ = 4 м/с.

13.16. Матеріальна точка маси m = 3 кг рухається під дією направленої вздовж осі Ox періодичної сили

$$F = 3\sin t\ H.$$

Вважаючи початкові умови руху точки нульовими, визначити закон руху даної матеріальної точки.

Відповідь: $x = t - \sin t$ м.

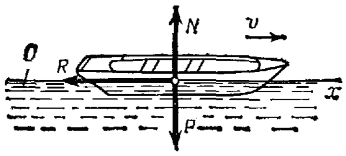
13.17. Визначити закон руху шматка антрациту при його ковзанні по сталевим решіткам вздовж очисної лави, якщо кут падіння пласта α = 30°, а коефіцієнт тертя тіла о площину f = 0,3. Рух антрациту починається із стану спокою.

Відповідь: $x = 0{,}98t^2$ м.

13.18. Човен масою m = 40 кг штовхають, надавши їй початкову швидкість υ_0 = 0,5 м/с. Визначити, через який час швидкість човна зменшиться вдвічі і який шлях при цьому він пройде, якщо сила опору води

$$R_{on} = 9{,}1u\ \text{Н}.$$

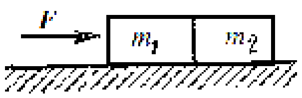
Відповідь: t = 3 с, s = 1,1 м.



До задачі 13.18.

13.19. Два бруска масами m_1 = 6 кг і m_2 = 4 кг, які знаходяться в контакті на шорсткій горизонтальній площині, приводяться до руху силою F = 25 Н. Визначити прискорення брусків a і силу S взаємодії між ними, якщо коефіцієнт тертя ковзання f = 0,2.

Відповідь: a = 0,54 м/с^2, S = 10 Н.



До задачі 13.19.

13.20. В разі аварійної ситуації на атомному реакторі стержень масою m = 25 кг і довжиною l = 250 см падає в канал під дією власної ваги і додаткової сили Q =

245 Н, яка діє на початковій ділянці падіння l_1 = 30 см. Падінню перешкоджає постійна сила тертя $F_{тер}$ = 49 Н. Знайти час повного входу стержня в канал, довжина якого дорівнює довжині стержня, якщо стержень починає рухатися без початкової швидкості, а нижній кінець стержня знаходиться у входу в канал в момент початку руху. Знайти також швидкість стержня в момент, коли він досягає дна.
Відповідь: t = 0,622 с, υ = 6,7 м/с.

13.21. Автомобіль вагою 9 810 Н рухається під ухил 30° до горизонту з вимкненим зчепленням, знаходячись під дією сили опору руху

$$R = 0{,}15u^2 \text{ Н.}$$

Нехтуючи силами тертя, визначити максимальну швидкість, яку може розвинути даний автомобіль.
Відповідь: υ_{max} = 180 м/с.

13.22. Визначити силу тиску збоку людини вагою G = 850 Н на підлогу швидкісного ліфту на початку підйому і перед зупинкою, якщо його прискорення і гальмування однакові за величиною і дорівнюють 0,4g.
Відповідь: T_1 = 1 190 Н, T_2 = 510 Н.

13.23. Дрезина рухається по горизонтальній прямолінійній ділянці дороги зі швидкістю 90 км/год. В деякий момент часу двигун дрезини вимикають. Вважаючи опір руху постійним і таким, що складає 20% від ваги дрезини, визначити час і шлях, який пройде дрезина з моменту вимкнення двигуна до повної зупинки.
Відповідь: t = 12,7 с, s = 159 м.

13.24. На вал діаметром d = 20 см намотана мотузка, до вільного кінця якої підвішений вантаж вагою G = 800 Н. Кутова швидкість обертання валу змінюється по закону $w = 30t$ рад/с. Визначити натяг мотузки в момент підняття вантажу.
Відповідь: T = 1 045 Н.

13.25. Потяг рухався по горизонтальній прямолінійній ділянці дороги зі швидкістю 126 км/год. Побачивши нерухомий трактор на рейках машиніст почав гальмування із силою, рівною 0,05 ваги потягу. На якій відстані машиніст ввімкнув гальмування, якщо потяг зупинився за 5 м до трактора?
Відповідь: s = 1255 м.

13.26. На вал діаметром d = 20 см намотана мотузка, до вільного кінця якої підвішений вантаж вагою G = 800 Н. Кутова швидкість обертання валу змінюється по закону ω = t рад/с. Визначити натяг мотузки в момент, коли вантаж опускається.
Відповідь: T = 555 Н.

Глава 14. Прямолінійні коливання матеріальної точки

14.1. Загальні визначення коливального руху

Коливання являють собою один з найбільш розповсюджених видів руху, тому вивчення їх властивостей необхідно для розуміння багатьох фізичних і механічних явищ. Рух транспортних засобів, робота приладів і механізмів завжди супроводжуються коливаннями (вібраціями), збільшення амплітуди яких вище допустимої норми (наприклад, при резонансі) може призвести до аварії. Наряду з цим, коливання широко використовуються в різноманітних вібромашинах, а явище резонансу знайшло застосування майже у всіх сферах науки і техніки.

Коливальний рух відбувається у випадку, коли на точку, відхилену від положення рівноваги, діє відновлююча сила, яка прагне повернути її в початкове положення. Розрізняють чотири типи коливань:

1. Вільні коливання.
2. Згасаючі коливання.
3. Змушені коливання без урахування сил опору.
4. Змушені коливання з урахуванням сил опору.

Основні характеристики коливального руху:

1. *Амплітуда коливань A*, м – найбільше відхилення точки *M* від положення статичної рівноваги *O*, яке визначається по формулі

$$A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{u_0}{k}\right)^2}. \qquad (14.1)$$

З (14.1) видно, що амплітуда не залежить від параметрів коливальної системи, а визначається лише початковими умовами.

2. *Фаза коливань kt + α*, рад – величина, яка визначає положення точки *M* в даний момент і напрям її подальшого руху. Фаза збільшується з часом.

3. *Початкова фаза коливань α*, рад – величина фази коливань в момент початку руху. Як і амплітуда, вона залежить від початкових умов

$$a = arctg\frac{kx_0}{u_0}. \qquad (14.2)$$

4. *Період коливань T*, с – проміжок часу, за який відбувається одне повне коливання (рис. 14.1)

$$T = \frac{2p}{k} = 2p\sqrt{\frac{m}{c}}. \qquad (14.3)$$

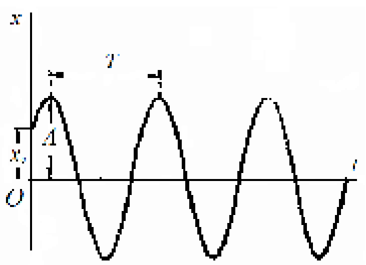


Рис. 14.1. Графік гармонічних коливань.

5. *Кругова частота k*, рад/с – величина, яка визначає кількість коливань матеріальної точки за 2π секунд

$$k = \frac{2p}{T} = \sqrt{\frac{c}{m}}. \qquad (14.4)$$

6. *Циклічна частота ν*, Гц – величина, яка визначає кількість коливань за одиницю часу

$$n = \frac{1}{T} = \frac{k}{2p} = \frac{1}{2p}\sqrt{\frac{c}{m}}. \qquad (14.5)$$

З (14.3) – (14.5) видно, що кругова частота *k*, циклічна частота ν і період *T* не залежать від початкових умов і визначаються лише параметрами коливальної системи.

Гармонічний прямолінійний рух є *таутохронним* (період не залежить від початкових умов) та *ізохронним* (період не залежить від амплітуди).

14.2. Вільні коливання матеріальної точки

Вільні коливання – коливання, що відбуваються під дією відновлюючої сили. Прикладом такої сили є сила пружності.

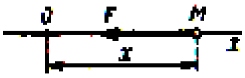


Рис. 14.2. Відновлюючи сила.

Нехай точка *M* рухається прямолінійно під дією сили пружності ***F*** (рис. 14.2), спрямованої до центру *O* і пропорційної відстані від нього

$$F = -cx,$$

де *c* – коефіцієнт жорсткості, який дорівнює силі, необхідній для деформації ненавантаженої пружини на одиницю довжини. Диференціальне рівняння руху точки має вигляд

$$m\ddot{x} = -cx \Rightarrow \ddot{x} + \frac{c}{m}x = 0. \qquad (14.6)$$

Введемо позначення $c/m = k^2$, після чого остаточно отримаємо

$$\ddot{x} + k^2 x = 0 \qquad (14.7)$$

диференціальне рівняння вільних коливань за відсутності опору.

Складаємо і розв'язуємо характеристичне рівняння

$$l^2 + k^2 = 0 \Rightarrow l^2 = -k^2 \Rightarrow l = \pm\sqrt{-k^2} = \pm ki. \qquad (14.8)$$

Корні такого рівняння завжди комплексні, тому загальне розв'язання даного диференціального рівняння має вигляд

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt, \qquad (14.9)$$

де C_1 і C_2 – сталі інтегрування, що визначаються з початкових (крайових) умов руху. Можна замість C_1 и C_2 використати інші сталі *A* и α, тоді закон руху

$$x = A\sin(kt+\alpha). \qquad (14.10)$$

З (14.10) видно, що точка під дією відновлюючої сили буде здійснювати простий *гармонічний рух* по закону синуса або косинуса. В даному випадку сталі інтегрування визначаються по формулах

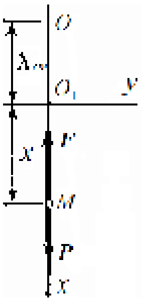
$$A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2},\ a = arctg\frac{C_1}{C_2}. \qquad (14.11)$$

На практиці часто зустрічаються коливання, в яких крім відновлюючої сили ***F*** діє ще й постійна сила ***P*** (рис. 14.3). Прикладом таких коливань є рух тіла на пружині. Тоді положенням рівноваги для точки *M* буде точка O_1, в якій зрівноважуються сили ***F*** і ***P***

$$F = P \Rightarrow c\,l_{cm} = P \Rightarrow l_{cm} = \frac{P}{c} = \frac{mg}{c}. \qquad (14.12)$$

Величина λ_{cm} є статичним подовженням пружини. Оберемо за початок відліку статичне положення рівноваги і запишемо диференціальне рівняння точки M

$$m\ddot{x} = -c(x + \lambda_{cm}) + P = -cx - c\lambda_{cm} + P = -cx \Rightarrow \ddot{x} + \frac{c}{m}x = 0. \qquad (14.13)$$



Формула (14.13) співпадає з (14.6), тому можна зробити висновок, що постійна сила не змінює характеру коливань, а лише зміщує їх центр на величину λ_{cm} в напрямку дії сили.

Період коливань можна виразити через статичне подовження

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m\lambda_{cm}}{P}} = 2\pi\sqrt{\frac{\lambda_{cm}}{g}}. \qquad (14.14)$$

Рис. 14.3. Вплив постійної сили на вільні коливання.

<u>14.3. Згасаючі коливання матеріальної точки</u>

Згасаючі коливання – вільні коливання, які відбуваються під дією відновлюючої сили і сили опору руху. Сила опору виникає при русі точки в повітрі або рідині і при невеликих швидкостях точки може вважатись пропорційною першому ступеню її швидкості.

Нехай точка M рухається прямолінійно під дією сили в'язкого тертя $\boldsymbol{R}$ і відновлюючої сили $\boldsymbol{F}$ (рис. 14.4).

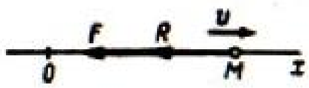


Рис. 14.4. Згасаючі вільні коливання точки.

Диференціальне рівняння руху точки

$$m\ddot{x} = -F - R \Rightarrow m\ddot{x} = -cx - \alpha\dot{x} \Rightarrow \ddot{x} + \frac{\alpha}{m}\dot{x} + \frac{c}{m}x = 0.$$

Провівши наступні заміни $c/m = k^2$ і $\alpha/m = 2b$, отримаємо

$$\ddot{x} + 2b\dot{x} + k^2 x = 0 \qquad (14.15)$$

диференціальне рівняння вільних згасаючих коливань.

Характеристичне рівняння $\lambda^2 + 2b\lambda + k^2 = 0$ має корні

$$\lambda_{1,2} = \frac{-2b \pm \sqrt{(2b)^2 - 4\cdot 1\cdot k^2}}{2\cdot 1} = -b \pm \sqrt{b^2 - k^2}, \qquad (14.16)$$

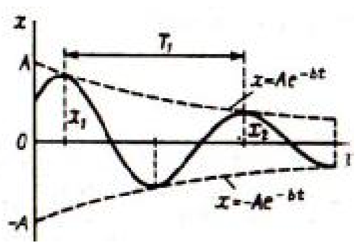
тому можливі три випадки загального рішення (14.15):

1. **Випадок малого опору** $k > b$ – корні характеристичного рівняння комплексні, тому загальне рішення диференціального рівняння має вигляд

$$x = e^{-bt}(C_1\cos\sqrt{k^2 - b^2}t + C_2\sin\sqrt{k^2 - b^2}t), \qquad (14.17)$$

де C_1 і C_2 – сталі інтегрування, які визначаються з початкових (граничних) умов руху. Аналогічно (14.10) можна ввести сталі A і α, які визначаються після формул (14.11), тоді рішення диференціального рівняння матиме вид

$$x = Ae^{-bt}\sin(\sqrt{k^2 - b^2}t + \alpha). \qquad (14.18)$$



З (14.18) видно, що ці коливання матеріальної точки є згасаючими неперіодичними (рис. 14.5), оскільки експонента з часом асимптотично наближується до нуля.

Рис. 14.5. Графік згасаючих вільних коливань точки.

Період згасаючих коливань – проміжок часу між послідовними максимальними відхиленнями матеріальної точки центру коливань

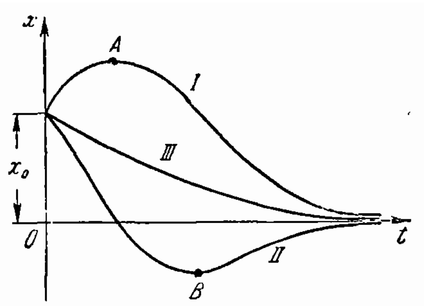
$$T_1 = \frac{2p}{\sqrt{k^2 - b^2}} = \frac{2p}{k\sqrt{1 - b^2/k^2}} = \frac{T}{\sqrt{1 - b^2/k^2}}. \qquad (14.19)$$

З (14.19) видно, що за наявності сил опору період дещо збільшується в порівнянні з періодом вільних коливань.

Декремент коливань e^{-bT_1} – величина, яка характеризує швидкість згасання коливань. Модуль її логарифма bT_1 зветься *логарифмічним декрементом коливань*.

2. **Випадок великого опору** $k < b$ – корні (14.16) характеристичного рівняння дійсні, тому його загальне розв'язання має вигляд

$$x = C_1 e^{\left(-b-\sqrt{b^2-k^2}\right)t} + C_2 e^{\left(-b+\sqrt{b^2-k^2}\right)t}, \qquad (14.20)$$



де C_1 і C_2 – сталі інтегрування, які визначаються з початкових (граничних) умов руху. З (14.20) видно, що під дією сили опору і відновлюючої сили точка *M* здійснює *аперіодичний згасаючий рух* (рис. 14.6).

Рис. 14.6. Коливання за значного опору середовища.

Характер аперіодичного руху залежатиме від початкових умов:

а) Якщо $x_0 > 0$ і $\upsilon_0 > 0$, точка буде рухатись згідно кривої *I*, спочатку досягши точки *A* максимального відхилення, а далі асимптотично наближаючись до положення рівноваги, але не проходячи через нього (рис. 14.6);

б) Якщо $x_0 > 0$ і $\upsilon_0 < 0$, причому швидкість достатня для проходження положення рівноваги

$$u_0 \geq x_0\left(b + \sqrt{b^2 - k^2}\right),$$

то точка буде рухатись згідно кривої *II*, досягши спочатку максимального відхилення за положенням рівноваги *B*, а потім асимптотично наближаючись до центру коливань (рис. 14.6);

в) Якщо $x_0 > 0$ і $\upsilon_0 < 0$, причому швидкість недостатня для проходження положення рівноваги

$$u_0 \leq x_0\left(b + \sqrt{b^2 - k^2}\right),$$

то точка буде рухатись згідно кривої *III*, асимптотично наближаючись до положення рівноваги (рис. 14.6).

3. **Граничний випадок опору** $k = b$ – корні характеристичного рівняння дійсні кратні

$$l_{1,2} = -b,$$

тому загальне рішення (14.15) має вигляд

$$x = e^{-bt}(C_1 + C_2 t),$$

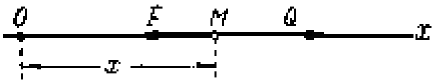
де C_1 і C_2 – сталі інтегрування, які визначаються з початкових (граничних) умов руху. Рух і в цьому випадку не буде коливальним, графіки аналогічні рис. 14.6, тобто залежать від початкових умов.

14.4. Змушені коливання без урахування сил опору

Змушені коливання – коливання, за яких на матеріальну точку окрім відновлюючої діє ще й збурена сила, що змінюється з часом.

Нехай точка M рухається прямолінійно під дією відновлюючої сили $\boldsymbol{F}$, спрямованої до центру O, і гармонічної збуреної сили $\boldsymbol{Q}$ з частотою p (рис. 14.7)

$$Q_x = Q_0 \sin pt,$$



оскільки саме така збурена сила становить найбільший практичний інтерес.

Рис. 14.7. Змушені коливання.

Диференціальне рівняння руху точки

$$m\ddot{x} = Q - F \Rightarrow m\ddot{x} = -cx + Q_0 \sin pt \Rightarrow \ddot{x} + \frac{c}{m}x = \frac{Q_0}{m}\sin pt.$$

Ввівши позначення $c/m = k^2$ и $Q_0/m = P_0$, отримуємо

$$\ddot{x} + k^2 x = P_0 \sin pt \qquad (14.21)$$

диференціальне рівняння змушених коливань за відсутності опору.

Як відомо з курсу вищої математики, рішення даного рівняння складається з двох частин

$$x = \bar{x} + x^*, \qquad (14.22)$$

де перший доданок – це загальне рішення однорідного рівняння (14.21) без правої частини, а другий доданок – це яке-небудь часткове рішення рівняння (14.21) з правою частиною.

Загальне розв'язання однорідного рівняння може бути представлено у вигляді (14.9) або (14.10). Використаємо другий варіант

$$\bar{x} = A\sin(kt + a).$$

Вважаючи, що частоти власних і вимушених коливань не співпадають ($p \neq k$), часткове розв'язання будемо шукати у вигляді

$$x^* = B\sin pt. \qquad (14.23)$$

Для визначення константи B знаходимо другу похідну від часткового розв'язання і підставляємо в диференційне рівняння (14.21)

$$\ddot{x}^* = -Bp^2 \sin pt. \qquad \ddot{x}^* + k^2 x^* = P_0 \sin pt \Rightarrow$$

$$-Bp^2 \sin pt + k^2 B \sin pt = P_0 \sin pt. \qquad B\left(k^2 - p^2\right) = P_0 \Rightarrow B = \frac{P_0}{k^2 - p^2}.$$

Остаточно розв'язання (14.20) має вигляд

$$x = \bar{x} + x^* = A\sin(kt + a) + \frac{P_0 \sin pt}{k^2 - p^2}, \qquad (14.24)$$

З (14.24) видно, що точка під дією відновлюючої і збуреної сил буде здійснювати складний коливальний рух, який є суперпозицією вільних і змушених коливань. Крім того, другий доданок (14.24) не містить сталих інтегрування, а це означає, що змушені коливання не залежать від початкових умов руху точки.

Змушені коливання, частота яких менша за частоту вільних коливань ($p < k$), називаються *змушеними коливаннями малої частоти*. Змушені коливання, частота яких більша за частоту вільних коливань ($p > k$), називаються *змушеними коливаннями великої частоти*.

14.5. Змушені коливання з урахуванням сил опору

Нехай точка M рухається прямолінійно під дією відновлюючої сили $\boldsymbol{F}$, спрямованої до центру O, сили опору середовища $\boldsymbol{R}$ і гармонічної збуреної сили $\boldsymbol{Q}$ з частотою p. Тоді *диференціальне рівняння вимушених коливань за наявності сил опору* має вигляд

$$\ddot{x} + 2b\dot{x} + k^2 x = P_0 \sin pt\,. \qquad (14.25)$$

Рішення рівняння в цьому випадку має вигляд (14.22), причому загальне розв’язання рівняння без правої частини має вигляд (14.18)

$$\bar{x} = Ae^{-bt}\sin(\sqrt{k^2 - b^2}\,t + a\,)\,,$$

а часткове розв’язання шукаємо у вигляді (14.23)

$$x^* = B\sin(pt + d).$$

Для визначення константи B знаходимо похідні від часткового розв’язання

$$\dot{x}^* = Bp\cos(pt + d). \qquad \ddot{x}^* = -Bp^2\sin(pt + d).$$

і підставивши в диференційне рівняння (14.23), остаточно отримуємо

$$x = Ae^{-bt}\sin(\sqrt{k^2 - b^2}\,t + a\,) + \frac{P_0\sin(pt - d\,)}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4b^2p^2}}\,, \qquad (14.26)$$

де A и α – сталі інтегрування, які визначаються з початкових умов.

Перший доданок в (14.26) характеризує вільні коливання. Оскільки він з часом спадає по експоненті, то такі коливання будуть швидко згасати і ними можна знехтувати. Другий доданок в (14.26) характеризує змушені коливання, які відбуваються з частотою збуреної сили, а опір не впливає на період змушених коливань. Амплітуда не залежить від початкових умов і часу, а тому є сталою. Сумарний рух є суперпозицією вільних і змушених коливань (рис. 14.8), але його графік суттєво відрізняється від графіку змушених коливань лише в початкові моменти руху.

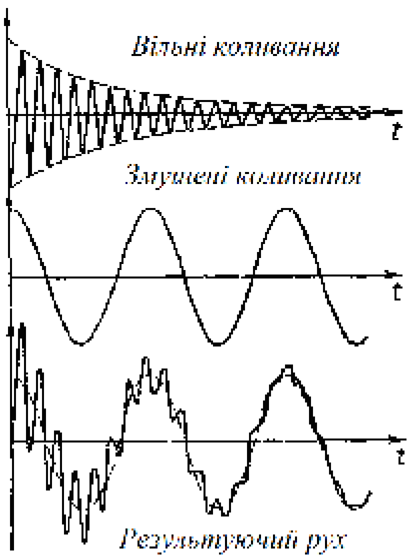


Рис. 14.8. Графік змушених коливань з урахуванням опору.

Для характеристики змушених коливань використовуються такі величини:

1. *Коефіцієнт розстроєння* – відношення частоти змушених коливань до частоти власних коливань

$$z = \frac{p}{k}. \qquad (14.27)$$

2. *Безрозмірний коефіцієнт в’язкості* – відношення параметру b до частоти власних коливань

$$h = \frac{b}{k}. \qquad (14.28)$$

3. *Коефіцієнт динамічності* – характеризує динамічний ефект, викликаний дією збуреної сили

$$h = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - z^2\right)^2 + 4h^2 z^2}}. \qquad (14.29)$$

У випадку *змушених коливань малої частоти* ($p < k$) фаза результуючого руху співпадає з фазою збуреної сили $pt + \delta$, а амплітуда знаходиться по формулі

$$A = \frac{P_0}{m\left(k^2 - p^2\right)}. \qquad (14.30)$$

У випадку *змушених коливань великої частоти* ($p > k$) фаза сумарного руху протилежна фазі збуреної сили $pt + \delta$, тобто відстоїть від неї на величину π. Амплітуда в такому випадку знаходиться по формулі

$$A = \frac{P_0}{m\left(p^2 - k^2\right)}. \qquad (14.31)$$

Як видно з формул (14.30) – (14.31), амплітуда змушених коливань визначається величинами частот власних коливань і збуреної сили, тому її амплітуду зручно визначати з графіку залежності коефіцієнта динамічності від коефіцієнта розстроєння (рис. 14.9), який носить назву резонансних кривих.

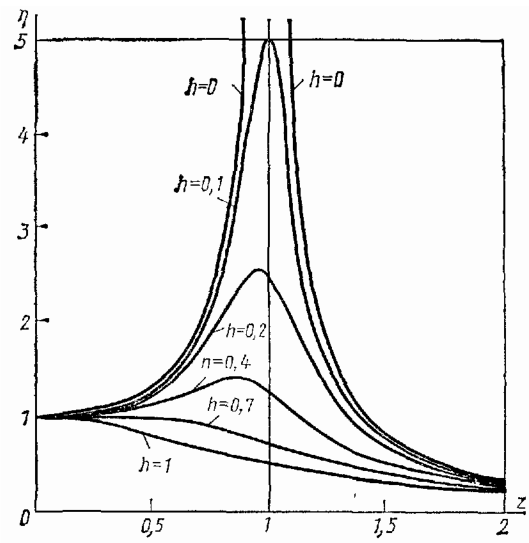


Рис. 14.9. Резонансні криві.

14.6. Резонанс і биття

При рівності частоти вільних коливань і частоти збуреної сили ($p = k$) має місце явище ***резонансу***.

Рух матеріальної точки при резонансі є результатом накладення вільних коливань (14.9) і змушених коливань, які описуються другим доданком в (14.26), розкритим за правилом Лопіталя.

Рішення цього диференціального рівняння записується у вигляді

$$x = x_1 + x_2 = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt + \frac{P_0 t}{2mk} \sin(kt - \frac{p}{2}). \qquad (14.32)$$

З (14.32) видно, що при резонансі рух точки складається з трьох коливальних рухів, але третій доданок є неперіодичним членом в який входить час, тому амплітуда лінійно зростатиме (рис. 14.10). Частота і період при резонансі дорівнюють частоті і періоду вільних коливань точки, а фаза відстає від фази збуреної сили на $\pi/2$.

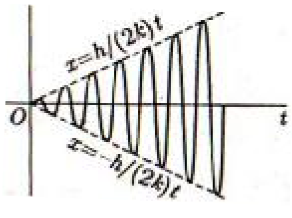


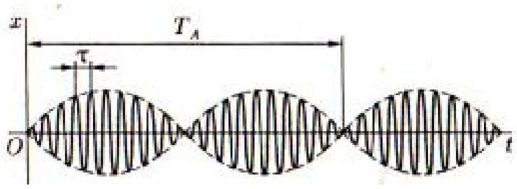
Рис. 14.10. Зростання амплітуди при резонансі.

Явище резонансу може бути причиною руйнування конструкції або створювати в ній небезпечні напруження. Тому важливою задачею є створення умов, за яких резонанс неможливий. Для цього частоти збурених сил мають бути по можливості далекі від частот власних коливань.

При частоті збуреної сили, близькій до частоти вільних коливань ($p \approx k$), настає явище ***биття***. Рівняння руху в цьому випадку

$$x = \frac{2P_0}{k^2 - p^2} \sin(\frac{p-k}{2} t) \cos pt \qquad (14.33)$$

Такий рух можна розглядати як коливання частоти p и періоду $\tau = 2\pi/p$, амплітуда яких є періодичною функцією, причому період зміни амплітуди T_A



$$T_A = \frac{2p}{(p-k)/2} = 4p\,(p-k)$$

такого умовного коливання значно більший від періоду τ дійсної зміни амплітуди (рис. 14.11).

Рис. 14.11. Графік биття.

Питання для самоконтролю

1. Під дією якої сили мають місце вільні коливання?
2. Який вигляд має загальний розв'язок рівняння вільних коливань?
3. В якому положенні найдоцільніше розміщувати початок відліку?
4. Які коливання є згасаючими і чим вони відрізняються від вільних?
5. Що таке змушені коливання і які їх види існують?
6. В чому полягає відмінність між явищами биття і резонансу?
7. Що називають декрементом і логарифмічним декрементом коливань?

Завдання № 14. «Коливальний рух матеріальної точки»

Рекомендації до розв'язання задач

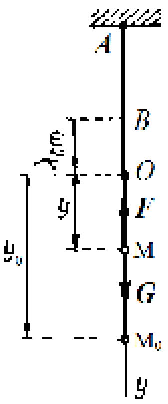
1. Обрати систему відліку, прийнявши за початок положення статичної рівноваги матеріальної точки.
2. Записати початкові умови руху матеріальної точки.
3. Зобразити на рисунку задані сили, які прикладені до матеріальної точки.
4. Застосувавши принцип звільнення від в'язей, нанести на рисунок реакції в'язей.
5. Скласти диференціальні рівняння в проекції на відповідну вісь.
6. Зінтегрувати отримані рівняння, для визначення сталих інтегрування використати початкові умови.

Приклад розв'язання задачі (вільні коливання)

Задача 1. Вантаж вагою G = 20 Н підвішений на пружині *AB*, кінець *A* якої закріплений нерухомо. Коли вантаж знаходиться в спокої, статичне подовження пружини складає λ_{cm} = 5 см. В початковий момент часу вантаж був зміщений із положення спокою вниз на y_0 = 10 см і відпущений з початковою швидкістю υ_0 = 6 м/с. Визначити рівняння руху вантажу, нехтуючи вагою пружини.

Розв’язання.

Вважаємо вантаж матеріальною точкою, а за початок відліку беремо точку O положення статичної рівноваги, тоді початкове положення вантажу буде знаходитись в точці M_0.



Диференціальне рівняння для коливання вантажу на пружині має вигляд (14.10)

$$\ddot{y} + \frac{c}{m} y = 0.$$

Виразивши жорсткість пружини через статичне подовження по (14.10), отримаємо

$$c = \frac{mg}{l_{cm}} \Rightarrow \ddot{y} + \frac{g}{l_{cm}} y = 0.$$

Рис. 14.12. До задачі 1.

Із загального виду рівняння гармонічних коливань знайдемо кругову частоту коливань

$$\ddot{y} + k^2 y = 0 \Rightarrow k = \sqrt{\frac{g}{l_{cm}}} = \sqrt{\frac{9{,}81}{0{,}05}} = 14\left(\frac{pad}{c}\right).$$

Загальне розв’язання даного диференціального рівняння може бути отримане у вигляді (14.9) або (14.10). Скористаємося другим випадком

$$y = A\sin(kt+\alpha).$$

Амплітуду і початкову фазу коливань визначаємо по формулам (14.1) і (14.2)

$$A = \sqrt{0{,}1^2 + \left(\frac{6}{14}\right)^2} = \sqrt{0{,}19} = 0{,}44\,м, \quad \alpha = \frac{14\cdot 0{,}1}{6} = 0{,}23\,рад.$$

Шукане рівняння коливань вантажу має вигляд

$$y = 0{,}44\sin(14t+0{,}23)\ м.$$

Задачу розв’язано.

<u>Приклад розв’язання задачі (змушені коливання)</u>

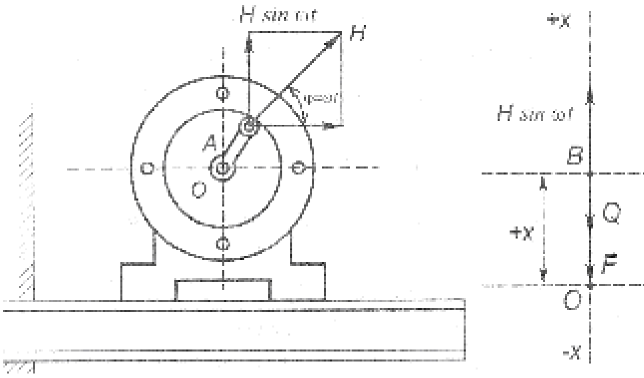
Задача 2. Електричний двигун маси m = 50 кг встановлений на балці, жорсткість якої c = 180 кН/м. На вал двигуна насаджений вантаж вагою m_1 = 0,2 кг на відстані r = 2 см від осі вала. Кутова швидкість двигуна ω = 65 рад/с. Знайти рівняння змушених коливань двигуна, нехтуючи вагою балки і опором руху вала.

Розв’язання.

В даній задачі мають місце вимушені коливання двигуна без урахування сил опору. Будемо розглядати рух точки O двигуна, вважаючи, що в ній зосереджена уся його маса. Початок координат візьмемо в положенні статичної рівноваги центра ваги двигуна O, а вісь x спрямуємо вертикально угору.

Вважаємо, що в момент пуску двигуна точка O знаходиться в положенні статичної рівноваги і не має початкової швидкості, тому початкові умови

$$x(0) = l_{cm}, \quad u(0) = 0.$$



На точку O діє сила власної ваги двигуна mg, сила пружності балки F і відцентрова сила інерції вантажу H, спрямована по радіусу OA. Статичною вагою вантажу m_1 можна знехтувати, оскільки вона дуже мала у порівнянні з вагою двигуна.

Рис. 14.13. До задачі 2.

Складаємо диференціальне рівняння руху точки O в проекції на вісь x

$$m\ddot{x} = -mg - F - H\sin wt = -mg - c\left(x - l_{cm}\right) + m_1 r w^2 \sin wt.$$

$$m\ddot{x} = -cx - m_1 r w^2 \sin wt \Rightarrow \ddot{x} + \frac{c}{m}x = \frac{m_1 r w^2}{m}\sin wt.$$

Проведемо заміну $c/m = k^2$ и визначимо кругову частоту

$$k = \sqrt{\frac{c}{m}} = \sqrt{\frac{180000}{50}} = 60\left(\frac{рад}{c}\right).$$

Частота вільних коливань менша за частоту збуреної сили, тому маємо змушені коливання високої частоти, при яких резонанс неможливий. Підставимо числові значення і остаточно отримаємо диференціальне рівняння руху

$$\ddot{x} + 3600x = \frac{0{,}2 \cdot 0{,}02 \cdot 65^2}{50}\sin wt \Rightarrow \ddot{x} + 3600x = 0{,}34\sin wt.$$

Розв’язання даного рівняння складатиметься із загального і часткового розв’язань, тобто матиме вигляд (14.22)

$$x = \bar{x} + x^*.$$

Загальне розв’язання однорідного рівняння шукаємо у вигляді

$$\bar{x} = A\sin 60t.$$

Для визначення амплітуди використаємо формулу (14.1) і початкові умови

$$A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{u_0}{k}\right)^2} = l_{cm} = \frac{g}{k^2} = \frac{9{,}81}{3600} = 0{,}003(м) \Rightarrow \bar{x} = 0{,}3\sin 60t\,(см).$$

Часткове розв’язання будемо шукати у вигляді

$$x^* = B\sin 65t.$$

Амплітуда змушених коливань за відсутності опору і резонансу визначається по формулі

$$B = \frac{m_1 r w^2}{m\left(k^2 - w^2\right)} = \frac{0{,}34}{\left(60^2 - 65^2\right)} = 0{,}0005(м) \Rightarrow x^* = 0{,}05\sin 65t\,(см).$$

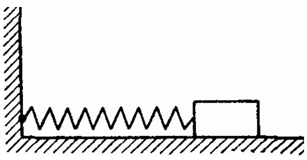
Закон руху матеріальної точки О під дією заданих сил остаточно матиме вигляд

$$x = 0{,}3\sin 60t + 0{,}05\sin 65t\,(см).$$

Задачу розв’язано.

Завдання №14 до РГР

14.1. Тіло вагою P = 25 Н, яке прикріплене до кінця недеформованої пружини і лежить на гладкій горизонтальній площині, відхиляють вправо на 6 см, після чого надають йому початкову швидкість υ_0 = 30 см/с, направлену вліво. Нехтуючи масою пружини, визначити закон руху даного тіла, якщо відомо, що для подовження пружини на 1 см необхідно прикласти силу 3 Н.



Відповідь: $x = 0{,}066\sin(10{,}8t - 1{,}14\pi)$ м.

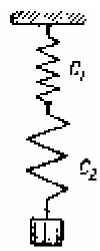
До задачі 14.1.

14.2. Яким має бути статичний прогин ресор залізничних вагонів аби при середній швидкості υ = 60 км/год і довжині рейки l = 12 м вагон не попадав у резонанс із поштовхами на стиках рейок.
Відповідь: λ_{cm} > 13 см.

14.3. До однієї й тієї ж пружини підвісили спочатку вантаж вагою 100 Н, а потім вантаж вагою 300 Н. Знайти рівняння руху кожного з вантажів, якщо вони підвішувались до недеформованої пружини і відпускалися без початкової швидкості. Жорсткість пружини c = 3 кН.
Відповідь: $x_1 = -\,0{,}03\cos 17{,}2t$ м, $x_2 = -\,0{,}10\cos 9{,}9t$ м.

14.4. Електричний двигун маси m = 30 кг встановлений на балці, жорсткість якої c = 3 Н/м. На вал двигуна насаджений вантаж вагою m_1 = 200 г на відстані r = 1,3 см від осі вала (рис. 14.13). Кутова швидкість двигуна ω = 90 рад/с. Визначити критичну кількість обертів двигуна за хвилину, при якій настає резонанс.
Відповідь: n = 950 об/хв.

14.5. Вантаж вагою G = 20 Н підвішений на двох пружинах з жорсткостями c_1 = 200 Н/м і c_2 = 100 Н/м, з'єднаних послідовно. Визначити період коливань і рівняння руху вантажу, якщо в початковий момент часу він був зміщений із положення спокою вниз на y_0 = 5 см і відпущений з початковою швидкістю υ_0 = 2 м/с, спрямованою уверх.



Відповідь: T = 1,1 с; $y = 0{,}05\cos 5{,}7t - 0{,}35\sin 5{,}7t$ м.

До задачі 14.5.

14.6. Вантаж масою m = 20 кг підвішений до пружини з жорсткістю c = 400 Н/м і здійснює вертикальні прямолінійні коливання. Визначити, на якій відстані від положення статичної рівноваги знаходиться центр тяжіння вантажу в момент, коли його прискорення дорівнює 3 м/с^2.
Відповідь: x = 0,15 м.

14.7. Диференціальне рівняння коливального руху матеріальної точки має вигляд

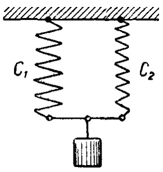
$$\ddot{x} + 4\dot{x} + 20x = 0.$$

Найти логарифмічний декремент коливань, розглядаючи максимальні відхилення після півперіоду коливань.
Відповідь: bT = 3,14.

14.8. Матеріальна точка маси 1 кг здійснює вільні згасаючі коливання в середовищі, яке створює силу опору в 1 Н при швидкості руху точки в 1 м/с. З яким періодом коливається дана точка, якщо за два повних коливання амплітуда зменшилась у e разів?
Відповідь: T = 1 с.

14.9. Тіло масою m = 5 кг здійснює прямолінійні коливання на пружині з жорсткістю c = 2 кН/м, причому опір середовища пропорційний швидкості. Після чотирьох коливань амплітуда зменшилась у 12 разів. Визначити період і логарифмічний декремент коливань.
Відповідь: T = 0,314 с, bT = 0,625.

14.10. Вантаж вагою G = 20 Н підвішений на двох пружинах з жорсткостями c_1 = 100 Н/м і c_2 = 200 Н/м, з'єднаних паралельно. Визначити період коливань і рівняння руху вантажу, якщо в початковий момент часу він був зміщений із положення спокою вниз на y_0 = 5 см і відпущений з початковою швидкістю υ_0 = 2 м/с, спрямованою уверх. Вантаж розташований таким чином, що подовження пружин однакове.
Відповідь: T = 0,52 с; $y = -0{,}05\cos 12{,}1t + 0{,}166\sin 12{,}1t$ м.



До задачі 14.10.

14.11. Диференціальне рівняння коливального руху матеріальної точки має вигляд

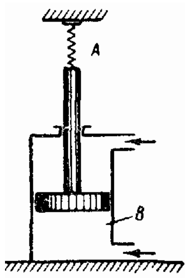
$$\ddot{x} + 36x = 50\sin(5t + 0{,}8).$$

Визначити коефіцієнт динамічності.
Відповідь: η = 3,27.

14.12. Пружина A з'єднана із штоком поршня, який знаходиться в камері B. До камери почергово зверху і знизу поступає стисле повітря, внаслідок чого сила, яка діє на поршень, змінюється по закону

$$F = 2{,}3\sin 8pt \text{ Н.}$$

Визначити закон руху поршня, якщо його маса m = 0,5 кг, а жорсткість пружини c = 200 Н/м.
Відповідь: $x = 0{,}024\cos 20t - 0{,}02\sin 8\pi t$ м.



До задачі 14.12.

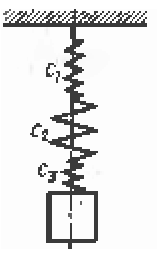
14.13. Вантаж на пружині рухається вздовж вертикалі під дією збуреної сили

$$Q = 10\sin(20t + 1) \text{ Н.}$$

Нехтуючи опором руху, визначити величину коефіцієнта динамічності η, якщо статична деформація пружини дорівнює 9,8 см.
Відповідь: η = 0,33.

14.14. Визначити кутову частоту вільних вертикальних коливань вантажу вагою m = 5 кг, підвішеного на трьох пружинах з однаковими коефіцієнтами жорсткості $c_1 = c_2 = c_3$ = 490 Н/м.

Відповідь: k = 5,72 рад/с.



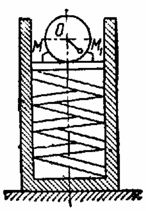
До задачі 14.14.

14.15. Вантаж вагою m = 98 г був підвішений до кінця пружини, яка знаходилась в початковий момент часу в недеформованому стані, і відпущений без початкової швидкості. Знайти рівняння коливань вантажу, якщо відомо, що для деформації даної пружини на 1 см необхідно прикласти силу 0,14 Н.

Відповідь: $x = 0{,}068\sin(12t - \pi/2)$ м.

14.16. Електричний двигун встановлений на платформі M, яка утримується пружиною. Загальна вага двигуна і платформи 325 Н, зменшення довжини пружини на 1 см відбувається при статичному навантаженні силою у 300 Н. На валу двигуна, який обертається з кутовою швидкістю ω = 30 рад/с, знаходиться вантаж M_1 ваги 2 Н на відстані 1,3 см від осі вала. Визначити рівняння змушених коливань платформи, якщо в початковий момент вона знаходилась в стані спокою.

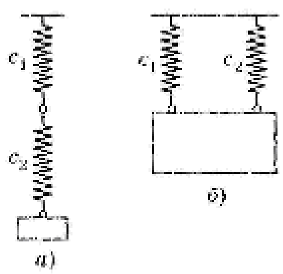
Відповідь: $x = 0{,}12t\sin 30t$ см.



До задачі 14.16.

14.17. Визначити відношення періодів коливань вантажу на двох однакових пружинах жорсткістю c_1 = 1 кН/м і c_2 = 4 кН/м при їх послідовному (рис. а) і паралельному (рис. б) з’єднаннях.

Відповідь: T_1/T_2 = 2,5.



До задачі 14.17.

14.18. Диференціальне рівняння коливального руху матеріальної точки має вигляд

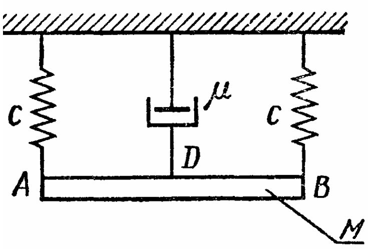
$$\ddot{x} + 6\dot{x} + 30x = 4\sin 2t.$$

Визначити амплітуду коливань матеріальної точки.

Відповідь: A = 0,035 м.

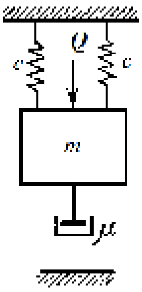
14.19. Горизонтальний брус AB маси m = 10 кг закріплений на підвісці, яка складається з двох паралельно з’єднаних пружин однакової жорсткості c = 25 кН/м і гідравлічного демпфера з коефіцієнтом опору μ = 0,2 кН·с/м. Визначити закон вертикального руху бруса після надання йому в положенні рівноваги початкової швидкості v_0 = 1,4 м/с, спрямованої вниз. $AD = DB$.

Відповідь: $x = 2e^{-10t}\sin 70t$ см.



До задачі 14.19.

14.20. Вантаж маси m = 2 кг закріплений на пружно-в'язкій підвісці, яка складається з двох паралельно з'єднаних пружин однакової жорсткості c = 144 Н/м і гідравлічного демпфера з коефіцієнтом опору μ = 20 Н·с/м і знаходиться під дією гармонічної вертикальної сили Q. Визначити частоту p коливань вантажу, якщо їх фаза відстає від фази збуреної сили на 45°.



Відповідь: p = 8 рад/с.

До задачі 14.20.

14.21. Двигун маси m, встановлений на пружному фундаменті, здійснює n обертів за хвилину. Наявність не зрівноважених деталей двигуна призводить до того, що фундамент здійснює коливання з амплітудою a. Визначити найбільше значення збуреної сили H, якщо статичний осад фундаменту f. Силами опору руху знехтувати.

Відповідь: $H = ma\left(\dfrac{g}{f} - \dfrac{p^2 n^2}{900}\right)$.

14.22. Статична деформація вертикальної пружини під дією вантажу, підвішеного до нижнього кінця, дорівнює $\lambda_{ст}$ = 10 см. Вантаж відтягли з положення статичної рівноваги донизу на відстань x_0 = 15 см і надали йому вертикальну швидкість υ_0 = 1 м/с, спрямовану вниз. Визначити рівняння руху вантажу, якщо вісь x проведена із положення статичної рівноваги вниз.
Відповідь: x = 15cos 9,9t + 10sin 9,9t см.

14.23. Статичне подовження пружини під дією вантажу маси m = 3 кг дорівнює λ_{cm} = 2 см. На вантаж в процесі руху діє сила опору

$$R = -bu \text{ Н.}$$

Визначити найменше значення коефіцієнту b, для якого при швидкості υ = 1 м/с процес руху буде аперіодичним.
Відповідь: b = 132,9 кг/с.

14.24. До тіла M маси m = 500 г прикріплені кінці трьох горизонтальних пружин з коефіцієнтами c_1 = 100 Н/м і c_2 = 150 Н/м. Нехтуючи тертям, визначити період коливань даного вантажу.

Відповідь: T = 0,22 с.

До задачі 14.24.

14.25. У скільки разів період згасаючих коливань більше періоду відповідних вільних коливань без урахування сил опору, якщо логарифмічний декремент затухання дорівнює 1,31?
Відповідь: у 1,08 рази.

Глава 15. «Невільний і відносний рух матеріальної точки»

15.1. Невільна матеріальна точка

Коли на рух матеріальної точки в просторі не накладено жодних обмежень, то вона є вільною. Її закон руху в такому випадку визначається лише характером прикладених сил та початковими умовами. Однак частіше рух точки супроводжується безпосереднім контактом з іншими тілами. В такому випадку точку вважають невільною.

Невільна – матеріальна точка, на рух якої накладені в’язі. При дії на неї різних сил невільна точка буде здійснювати рух по чітко визначеній траєкторії або знаходитись в чітко визначеній області, тобто характер руху визначається накладеними в’язями. Рівняння цих траєкторій або областей звуться рівняннями в’язей. Так, рівняння в’язі

$$f(x, y, z) = 0 \qquad (15.1)$$

вказує на те, що точка рухається по деякій незмінній поверхні (час не входить в рівняння) і не може залишити її в жодну з сторін.

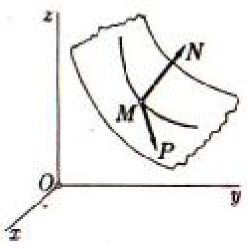
При вивченні законів руху невільної матеріальної точки використовують **принцип звільнення від в'язей**: невільний рух матеріальної точки можна розглядати як вільний, якщо дію в’язей замінити силами реакцій. Із даного принципу витікає, що невільна матеріальна точка знаходиться під дією двох типів сил:

1. *Активних* (сил, що задаються) – сил, які виражають дію на точку з боку зовнішніх тіл, прагнучих викликати її рух.
2. *Пасивних* (реакцій в'язей) – сил, які залежать від активних сил, фізичних властивостей в’язі і руху точки. У відсутності активних сил не існують.

15.2. Диференціальні рівняння руху невільної матеріальної точки

Нехай матеріальна точка *M* рухається під дією сили $\boldsymbol{P}$ (рис. 15.1) по нерухомій абсолютно гладкій поверхні, рівняння якої

$$f(x, y, z) = 0, \qquad (15.2)$$



яка є в’яззю для точки *M*. Запишемо основне рівняння динаміки невільної матеріальної точки

$$m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{P} + \boldsymbol{N}, \qquad (15.3)$$

де $\boldsymbol{N}$ – реакція в’язі.

Рис. 15.1. Рух невільної матеріальної точки.

В проекції на координатні осі диференціальне рівняння (15.5)

$$m\ddot{x} = X + N_x,\ m\ddot{y} = Y + N_y,\ m\ddot{z} = Z + N_z.$$

Проекції реакції в’язі на координатні осі можна представити у виді

$$N_x = N\cos(\boldsymbol{N},\boldsymbol{i}) = N\frac{\partial f/\partial x}{\Delta f},\ N_y = N\cos(\boldsymbol{N},\boldsymbol{j}) = N\frac{\partial f/\partial y}{\Delta f},\ N_z = N\cos(\boldsymbol{N},\boldsymbol{k}) = N\frac{\partial f/\partial z}{\Delta f}.$$

Тоді рівняння руху набувають вигляду

$$m\ddot{x} = X + \frac{N}{\Delta f}\frac{\partial f}{\partial x},\ m\ddot{y} = Y + \frac{N}{\Delta f}\frac{\partial f}{\partial y},\ m\ddot{z} = Z + \frac{N}{\Delta f}\frac{\partial f}{\partial z}.$$

Введемо множник Лагранжа $\lambda = N/\Delta f$ и остаточно отримаємо

$$m\ddot{x} = X + l\,\frac{\partial f}{\partial x},\; m\ddot{y} = Y + l\,\frac{\partial f}{\partial y},\; m\ddot{z} = Z + l\,\frac{\partial f}{\partial z} \qquad (15.4)$$

диференціальні рівняння руху невільної матеріальної точки у формі Лагранжа (рівняння Лагранжа 1 роду).

Три диференціальні рівняння (15.4) і рівняння в’язі (15.2) містять чотири невідомих, тобто розв’язання можливе. Однак в декартовій системі координат розв’язання може бути отримане лише для найпростіших в’язей першого порядку. У ряді випадків більш ефективним є інший підхід, розглянутий далі.

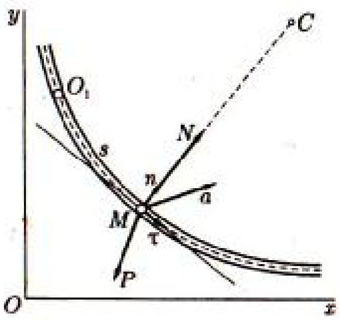
Нехай точка M рухається під дією сили $\boldsymbol{P}$ (рис. 15.2) з нерухомої абсолютно гладкої лінії, рівняння якої

$$f(x, y) = 0$$

є для точки M в'яззю і лежить в одній площині з силою $\boldsymbol{P}$.
Знову запишемо основне рівняння динаміки невільної матеріальної точки

$$m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{P} + \boldsymbol{N}.$$

При русі точки по плоскій лінії зручно проектувати його на натуральні координатні осі, тобто на напрями дотичної і нормалі до траєкторії, які теж лежать в цій площині. Тоді



$$ma\cos(a, \tau) = P_\tau, \quad ma\cos(a, n) = P_n + N. \qquad (15.5)$$

Підставивши значення прискорень в рівняння (15.5), остаточно отримуємо

$$m\frac{d^2s}{dt^2} = P_t\,,\; m\frac{u^2}{r} = P_n + N \qquad (15.6)$$

диференціальні рівняння плоского руху невільної матеріальної точки у формі Ейлера.

Рис. 15.2. Плоский рух невільної матеріальної точки.

Рівняння Ейлера можна використовувати і при просторовому русі точки, у цьому випадку до (15.6) додається проекція на бінормаль, тобто

$$m\frac{d^2s}{dt^2} = P_t\,,\; m\frac{u^2}{r} = P_n + N,\; 0 = F_b + N_b. \qquad (15.7)$$

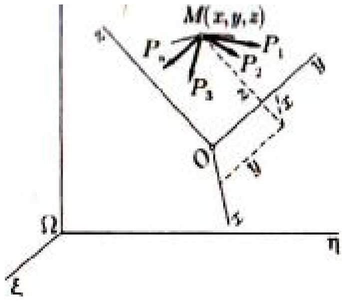
Рівняння (15.7) мають назву **диференціальних рівнянь руху невільної матеріальної точки у формі Ейлера.**

<u>15.3. Відносний рух матеріальної точки</u>

Другий закон динаміки та отримані з нього диференціальні рівняння справедливі лише при русі відносно інерційних систем координат. Для описання руху матеріальної точки відносно неінерційних систем необхідно внести в рівняння певні поправки. В такому випадку рух точки розглядається по відношенню до двох систем, тобто являється складним.

Розглянемо рух матеріальної точки M по відношенню до двох система відліку: $\Omega\xi\eta\zeta$ – інерційна нерухома система, а не пов’язана з нею $Oxyz$ – неінерційна рухома система (рис. 15.3). В цьому випадку мають місце три рухи:

1. *Переносний* – рух неінерційної системи *Oxyz* по відношенню до інерційної системи *Ωξηζ*. Він є заданим і не залежить від руху матеріальної точки *M*.



2. *Абсолютний* – рух точки *M* по відношенню до інерційної системи координат *Ωξηζ*. Його прискорення визначається за допомогою другого рівняння динаміки.

3. *Відносний* – рух точки *M* по відношенню до неінерційної системи координат *Oxyz*. Саме він і є предметом вивчення в даному розділі.

Рис. 15.3. Відносний рух матеріальної точки.

З кінематики відомо, що абсолютне прискорення дорівнює геометричній сумі трьох прискорень: відносного, переносного и коріолісова

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_{від} + \boldsymbol{a}_{пер} + \boldsymbol{a}_{кор}. \qquad (15.8)$$

Підставивши (15.8) в другий закон динаміки отримуємо

$$m(\boldsymbol{a}_{від} + \boldsymbol{a}_{пер} + \boldsymbol{a}_{кор}) = \sum \boldsymbol{P}_i.$$

Введемо поняття переносної и коріолісової сил інерції

$$\boldsymbol{\Phi}_{пер} = -m\boldsymbol{a}_{пер}; \quad \boldsymbol{\Phi}_{кор} = -m\boldsymbol{a}_{кор}.$$

Перенісши їх у праву частину остаточно отримаємо

$$M\boldsymbol{a}_{від} = \sum \boldsymbol{P}_i + \boldsymbol{\Phi}_{кор} + \boldsymbol{\Phi}_{пер} \qquad (15.9)$$

основне рівняння динаміки відносного руху: у разі непоступального переносного руху відносний рух матеріальної точки можна представити як абсолютний, якщо до діючих сил додати переносну і коріолісову сили інерції.

Слід зазначити, що в інерційній системі відліку прискорення точки може бути тільки результатом дії на неї сил, тоді як в неінерційній системі – ще і результатом руху самої системи. В проекції на координатні осі основне рівняння динаміки відносного руху матеріальної точки має вигляд

$$m\ddot{x} = \sum X + \Phi_x^{пер} + \Phi_x^{кор}, \; m\ddot{y} = \sum Y + \Phi_y^{пер} + \Phi_y^{кор}, \; m\ddot{z} = \sum Z + \Phi_z^{пер} + \Phi_z^{кор}.$$

<u>15.4. Часткові випадки переносного руху точки</u>

1. Переносний рух є нерівномірним обертанням тіла навколо нерухомої осі. Переносне прискорення в цьому випадку можна розкласти на дотичну і доцентрову складові

$$\boldsymbol{a}_{пер} = \boldsymbol{a}_{пер}^t + \boldsymbol{a}_{пер}^n \; \Rightarrow \; \boldsymbol{\Phi}_{пер} = \boldsymbol{\Phi}_{пер}^t + \boldsymbol{\Phi}_{пер}^n.$$

Тоді рівняння динаміки відносного руху набуває вигляду

$$m\boldsymbol{a}_{від} = \sum \boldsymbol{P}_i + \boldsymbol{\Phi}_{кор} + \boldsymbol{\Phi}_{пер}^t + \boldsymbol{\Phi}_{пер}^n. \qquad (15.10)$$

2. Переносний рух є рівномірним обертанням тіла навколо нерухомої осі. В цьому випадку кутове прискорення, а значить і дотична складова переносної сили інерції дорівнюють нулю

$$\boldsymbol{\varepsilon} = 0 \; \Rightarrow \boldsymbol{\Phi}_{пер}^t = 0,$$

а рівняння динаміки відносного руху має вигляд

$$m\boldsymbol{a}_{від} = \sum \boldsymbol{P}_i + \boldsymbol{\Phi}_{кор} + \boldsymbol{\Phi}_{пер}^n.$$

3. Переносний рух є поступальним нерівномірним непрямолінійним рухом. Тоді кутова швидкість тіла та його коріолісове прискорення дорівнюють нулю

$$\boldsymbol{\omega}_{пер} = 0,\ \boldsymbol{\Phi}_{кор} = 0.$$

Тоді рівняння переносного руху набуває вигляду

$$m\boldsymbol{a}_{від} = \sum \boldsymbol{P_i} + \boldsymbol{\Phi}_{пер}.$$

Модуль переносної сили інерції є векторною сумою нормальної та дотичної складових

$$\boldsymbol{\Phi}_{пер} = \boldsymbol{\Phi}^t_{пер} + \boldsymbol{\Phi}^n_{пер} \Rightarrow m\boldsymbol{a}_{від} = \sum \boldsymbol{P_i} + \boldsymbol{\Phi}^t_{пер} + \boldsymbol{\Phi}^n_{пер}.$$

де модулі дотичної і нормальної сил інерції

$$\Phi^t_{пер} = m\frac{du}{dt} \text{ і } \Phi^n_{пер} = m\frac{u^2}{r}.$$

4. Переносний рух є поступальним рівномірним непрямолінійним рухом. В цьому випадку кутова швидкість тіла і його коріолісове прискорення дорівнюють нулю

$$\boldsymbol{\omega}_{пер} = 0,\ \boldsymbol{\Phi}_{кор} = 0.$$

Тоді рівняння переносного руху набуває вигляду

$$m\boldsymbol{a}_{від} = \sum \boldsymbol{P_i} + \boldsymbol{\Phi}_{пер}.$$

Модуль переносної сили інерції є геометричною сумою нормальної та дотичної складових, але в даному випадку дотичне прискорення дорівнює нулю, тому

$$\boldsymbol{a} = 0 \Rightarrow \boldsymbol{\Phi}^t_{пер} = 0;\quad \boldsymbol{\Phi}_{пер} = \boldsymbol{\Phi}^n_{пер} \Rightarrow m\boldsymbol{a}_{від} = \sum \boldsymbol{P_i} + \boldsymbol{\Phi}^n_{пер}.$$

5. Переносний рух є рівномірним прямолінійним рухом. В цьому випадку переносне і коріолісове прискорення дорівнюють нулю

$$\boldsymbol{a}_{пер} = 0 \Rightarrow \boldsymbol{\Phi}_{пер} = 0,\ \boldsymbol{\Phi}_{кор} = 0.$$

Тоді рівняння динаміки відносного руху має вигляд

$$m\boldsymbol{a}_{від} = \sum \boldsymbol{P_i}.$$

При рівномірному і прямолінійному русі відносне прискорення матеріальної точки співпадає з абсолютним прискоренням в основному рівнянні динаміки. Тоді відносний рух матеріальної точки по відношенню до рухомої системи відліку відбувається так само, як і по відношенню до нерухомої.

Принцип відносності класичної механіки (Галілея): жодним механічним експериментом неможливо визначити, знаходиться дана система відліку в стані спокою чи здійснює поступальний, рівномірний і прямолінійний рух.

15.5. Вплив обертання Землі на рух тіл

При розв’язанні більшості задач теоретичної механіки систему координат, пов’язану із Землею, вважають інерційною, не враховуючи добового обертання Землі. При складанні рівнянь динаміки осі даної системи вважають нерухомими, тим самим нехтуючи впливом сили інерції Коріоліса, модуль якої

$$\Phi_{кор} = 2mwu\sin a.$$

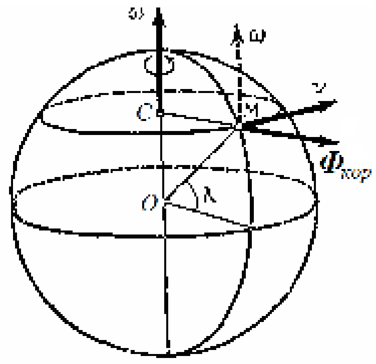
Причиною тому є дуже незначна кутова швидкість обертання Землі

$$w = \frac{j}{t} = \frac{2p}{t} = \frac{2 \cdot 3{,}14}{24 \cdot 60 \cdot 60} = 0{,}000073\ (\text{рад/с}). \qquad (15.11)$$

За такої кутової швидкості сила інерції Коріоліса значно менша за силу тяжіння. Так при швидкості υ = 700 м/с (швидкість артилерійського снаряду) і куті α = 90° сила інерції Коріоліса складає 1% сили тяжіння, тому допущення про інерційність системи відліку, пов’язаної із Землею, є справедливим.

Добове обертання Землі необхідно враховувати у випадку дуже великих швидкостей (політ балістичних ракет) або у випадку рухів, які тривають дуже довгий час (річки, повітряні та морські течії).

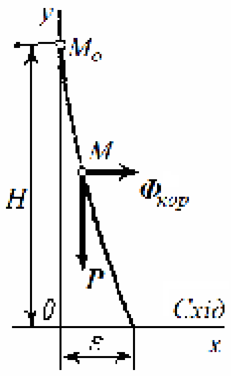
Нехай точка *M* рухається по паралелі на схід, тоді прискорення Коріоліса спрямоване по радіусу *CM*, а сила інерції Коріоліса – в протилежний бік. Вертикальна складова цієї сили викличе незначне зменшення ваги точки, а горизонтальна складова, спрямована на південь, викличе відхилення точки вправо. Аналогічний результат матиме місце і при русі точки на захід.



Висновок: у північній півкулі тіло, яке рухається по поверхні в будь-якому напрямку, буде відхилятися вправо під впливом обертання Землі. У південній півкулі тіло буде відхилятися вліво. Цим пояснюється те, що річки північної півкулі сильніше підмивають правий берег, мають місце відхилення пасатів і морських течій, виникає циркуляційний рух повітряних мас навколо центра циклона.

Рис. 15.4. Рух точки по поверхні Землі.

Обертання Землі також впливає і на вільне падіння тіл. Нехай точка *M* падає у північній півкулі з висоти *H*, значно меншої від радіусу Землі. Вважаємо силу тяжіння постійною увесь час падіння і нехтуємо силою опору повітря. Дана точка буде рухатись під дією двох сил: сили тяжіння і сили інерції Коріоліса. Її рух буде криволінійним і точка *M* відхилиться на схід на відстань ε



$$e = \frac{2w}{3} \cos l \sqrt{\frac{2H^3}{g}}\ , \qquad (15.12)$$

де λ – географічна широта місця падіння. Отримання формули (15.12) розглянуто у прикладі розв’язання задачі 2.

Рис. 15.5. Відхилення точки при падінні на поверхню Землі.

Питання для самоконтролю

1. Які особливості мають диференціальні рівняння руху невільної матеріальної точки?
2. Коли при русі невільної точки слід враховувати силу тертя?
3. Як записується основне рівняння відносного руху матеріальної точки?
4. Сформулюйте принцип відносності класичної механіки.
5. Як і для чого записуються рівняння Лагранжа першого роду?
6. Який фізичний зміст мають сили інерції, який напрям вони мають?

Завдання № 15. «Невільний і відносний рух матеріальної точки»

<u>Рекомендації до розв'язання задач</u>

А. Рух невільної матеріальної точки.

1. Зобразити точку в даний момент часу, визначити усі діючі активні сили.
2. Застосувати принцип звільнення, замінивши в'язі їх реакціями.
3. Записати початкові умови руху матеріальної точки.
4. Скласти диференціальні рівняння руху точки в формі Лагранжа (15.4) або Ейлера (15.7) в залежності від типу руху, то зінтегрувати їх.
5. З початкових умов руху визначити сталі інтегрування і підставити їх в результат інтегрування, отримавши таким чином закон руху точки.

Б. Відносний рух матеріальної точки.

1. Зобразити точку в даний момент часу разом з активними силами, що діють на неї і скласти початкові умови руху.
2. Застосувати принцип звільнення, замінивши в'язі їх реакціями.
3. Нанести на рисунок переносну і коріолісова сили інерції.
4. Скласти і зінтегрувати диференціальні рівняння точки в її відносному русі.
5. З початкових умов руху визначити сталі інтегрування.
6. Сталі інтегрування підставити в результат інтегрування і отримати закон руху точки.

<u>Приклад розв'язання задачі (невільна матеріальна точка)</u>

Задача 1. Матеріальна точка *M* маси *m* починає рух із точки *A* сферичного куполу радіуса ***r***. Нехтуючи тертям визначити, на якій висоті від площини основи зникне контакт між точкою і поверхнею купола.

<u>Розв'язання</u>

Визначимо діючі на точку *M* сили і нанесемо їх на рисунок. Матеріальна точка знаходиться під дією однієї активної сили – сили тяжіння точки ***P***, модуль якої

$$P = mg,$$

і реакції в'язі ***N***, спрямованої по нормалі до в'язі. Дану задачу доречно розв'язувати у проекціях на натуральні осі координат, для чого складаємо диференціальні рівняння плоского руху точки *M* у формі Ейлера

$$m\frac{du}{dt} = mg\sin j, \quad m\frac{u^2}{r} = mg\cos j - N.$$

Аби виключити із рівнянь час, виконаємо заміну незалежної змінної

$$\frac{du}{dt} = \frac{du}{dj}\frac{dj}{dt} = w\frac{du}{dj} = \frac{u}{r}\frac{du}{dj},$$

після чого підставимо до першого рівняння

$$\frac{mu}{r}\frac{du}{dj} = mg\sin j \Rightarrow \int_0^u u\,du = gr\int_0^j \sin j\,dj.$$

$$\frac{u^2}{2} = -gr(\cos j - \cos 0) \Rightarrow \frac{u^2}{r} = 2g(1-\cos j).$$

Дане рівняння визначає залежність швидкості точки від кута повороту лише при русі точки по поверхні купола. Із другого рівняння виразимо нормальну реакцію і підставимо в нього отриману швидкість

$$N == mg\cos j - m\frac{u^2}{r} = mg\cos j - 2mg(1-\cos j) =$$
$$= mg(\cos j - 2 + 2\cos j) = mg(3\cos j - 2).$$

В момент зникнення контакту між точкою і поверхнею нормальна реакція стане рівною нулю

$$N = mg(3\cos j - 2) = 0 \Rightarrow 3\cos j - 2 = 0; \quad \cos j = \frac{2}{3}.$$

Висоту точки відриву знаходимо по формулі

$$h = r\cos j = \frac{2r}{3}.$$

Задачу розв'язано.

<u>Приклад розв'язання задачі (відносний рух точки)</u>

Задача 2. Знайти відхилення від вертикалі матеріальної точки *M*, яка падає без початкової швидкості з висоти *H* = 100 м (рис. 15.5) на широті Москви (λ = 56°, g = 816 м/с^2). Опір повітря до уваги не брати.

<u>Розв'язання</u>

Складаємо диференціальні рівняння руху точки

$$m\ddot{x} = \Phi_{кор} = 2mwu\sin a \Rightarrow \ddot{x} = 2wu_y\sin(90° - l);$$
$$m\ddot{y} = -mg \Rightarrow \ddot{y} = -g. \qquad (15.13)$$

При складанні першого з рівнянь (15.13) нехтували горизонтальною складовою швидкості точки, оскільки сила інерції Коріоліса дуже мала порівняно з силою тяжіння. Тому можна вважати, що точка рухається по вертикалі. Початкові умови руху точки мають вигляд

$$x(0) = 0, \quad y(0) = H, \quad u_x(0) = u_y(0) = 0.$$

Для отримання вертикальної швидкості інтегруємо друге рівняння (15.13)

$$\frac{du_y}{dt} = -g \Rightarrow \int_0^{u_y} du_y = -\int_0^t g dt; \quad u_y = -gt. \qquad (15.14)$$

З останнього рівняння інтегруванням визначимо закон руху відносно осі *y*

$$\frac{dy}{dt} = -gt \Rightarrow \int_H^y dy = -g\int_0^t t dt; \quad y - H = -\frac{gt^2}{2} \Rightarrow y = H - \frac{gt^2}{2}. \qquad (15.15)$$

Значення вертикальної швидкості з (15.14) підставляємо у перше рівняння (15.13), після чого двічі інтегруємо його

$$\frac{du_x}{dt} = 2wgt\sin(90° - l) = 2wgt\cos l; \quad \int_0^{u_x} du_x = 2wg\cos l\int_0^t dt \Rightarrow$$
$$u_x = \frac{2wgt^2\cos l}{2}; \quad \frac{dx}{dt} = wgt^2\cos l \Rightarrow \int_0^x dx = wg\cos l\int_0^t t^2 dt \Rightarrow x = \frac{wgt^3\cos l}{3}. \qquad (15.16)$$

Виразимо час з рівнянь (15.15) і (15.16)

$$\frac{gt^2}{2} = H - y \Rightarrow t^2 = \frac{2}{g}(H - y) \Rightarrow t^6 = \frac{8}{g^3}(H - y)^3;$$

$$x = \frac{wgt^3 \cos l}{3} \Rightarrow t^3 = \frac{3x}{gw \cos l} \Rightarrow t^6 = \frac{9x^2}{g^2 w^2 \cos^2 l}.$$

Прирівнюючи праві частини, отримаємо траєкторію точки

$$\frac{8}{g^3}(H - y)^3 = \frac{9x^2}{g^2 w^2 \cos^2 l} \Rightarrow x^2 = \frac{8g^2 w^2 \cos^2 l}{9g^3}(H - y)^3 = \frac{8w^2 \cos^2 l}{9g}(H - y)^3.$$

Відхилення точки ε на схід при падінні на поверхню Землі можна знайти, поклавши $y = 0$, а кутову швидкість обертання Землі підставляємо з (15.11)

$$x(0) = e^2 = \frac{8w^2 \cos^2 l}{9g} = H^3 \Rightarrow$$

$$e = \frac{2w \cos l}{3}\sqrt{\frac{2H^3}{g}} = \frac{2 \cdot 0{,}000073 \cdot \cos 56°}{3}\sqrt{\frac{2 \cdot 100^3}{9{,}816}} = 0{,}012(\text{м}).$$

Задачу розв'язано.

<u>Завдання №15 до РГР</u>

15.1. Ділянка для розгону лижного трампліну виконана у вигляді дуги кола радіуса r = 50 м. Лижник маси m = 80 кг починає рух із точки A, розташованої на висоті $h = r/2$ над точкою відриву B. В процесі руху на нього діє сила опору середовища

$$R = 0{,}16u^2$$

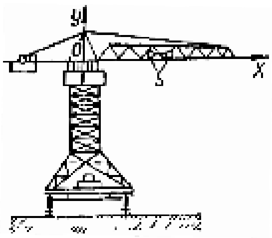
і сила тертя ковзання, причому коефіцієнт тертя ковзання лиж об сніг f = 0,1. Прийнявши лижника за матеріальну точку, визначити його швидкість в кінці ділянки розгону.

Відповідь: υ = 17,4 м/с.

15.2. Візок мостового крану рухається в горизонтальному напрямку з прискоренням a = 2,5 м/с^2. Визначити кут φ відхилення тросу від вертикалі в положенні відносної рівноваги вантажу.

Відповідь: φ = 14,3°.

15.3. Стріла крану повертається навколо власної вертикальної осі з кутовою



швидкістю ω = 1 рад/с. Візок вагою P = 20 кН рухається вздовж стріли зі швидкістю υ = 2,45 м/с. Визначити силу бічного тиску візка на рейки.

Відповідь: N = 10 кН.

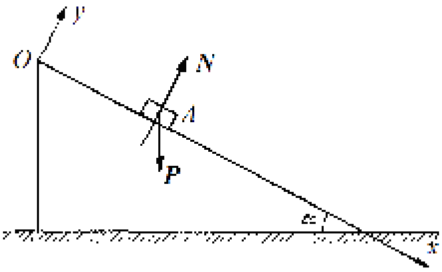
Рис. до задач 15.3.

15.4. Циліндрична посудина радіуса r = 8 см і висоти h = 20 см, яка наполовину заповнена рідиною, обертається навколо власної горизонтальної осі. Визначити, за якої кутової швидкості рідина підніметься до країв посудини.

Відповідь: ω = 24,8 рад/с.

15.5. Вантаж вагою P = 40 Н, підвішений на нитці довжини l , відхиляють від положення рівноваги на кут α = 30° без початкової швидкості. Визначити натяг нитки у момент проходження найнижчого положення M_1.
Відповідь: T = 50,7 Н.

15.6. Вантаж A рухається вниз по похилій площині з кутом нахилу до горизонту α = 45°. При цьому сама похила площина рухається прямолінійно з прискоренням a = 2 м/с^2. Визначити прискорення вантажу по відношенню до площини, якщо коефіцієнт тертя між тілами f = 0,25.



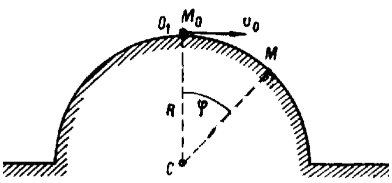
Відповідь: $a_{від}$ = 3,43 м/с^2.
Рис. до задач 15.6 і 15.7.

15.7. Вантаж вагою P = 60 Н рухається вниз по похилій площині з кутом нахилу до горизонту α = 45°. При цьому сама похила площина рухається прямолінійно з прискоренням a = 2 м/с^2. Визначити силу тиску вантажу на бічну поверхню похилої площини.
Відповідь: N = 33,8 Н.

15.8. Потяг вагою 36 000 кН рухається зі швидкістю 145 км/год з півночі на південь. Визначити бічну силу тиску потягу на рейки в той момент, коли він перетинає північну широту φ = 50°.
Відповідь: N = 16,7 кН на праву рейку.

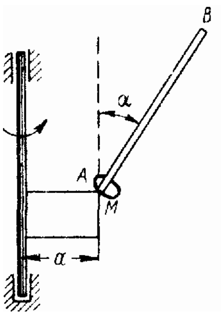
15.9. На шорстку горизонтальну площину, яка обертається навколо власної вертикальної осі з кутовою швидкістю ω = 8 рад/с поклали важку матеріальну точку. Визначити область, в якій може знаходитись дана точка у стані відносного спокою, якщо коефіцієнт тертя між нею і площиною f = 0,4.
Відповідь: коло радіуса r = 6,1 см з центром на осі обертання.

15.10. Матеріальна точка маси M знаходиться на вершині гладкої півкулі радіуса R = 20 см. В початковому положенні M_0 їй надають горизонтальну швидкість υ_0 = 1 м/с. Визначити кут, при якому точка залишить поверхню півкулі і почне рухатись вільно.



Відповідь: φ = 33°.
Рис. до задачі 15.10.

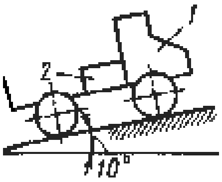
15.11. Гладкий стержень AB рівномірно обертається навколо вертикальної осі, утворюючи з нею незмінний кут α = 30°. Визначити найбільшу величину кутової швидкості стержня ω, за якої кільце M, надіте на стержень, буде знаходитись в стані відносного спокою в нижньому положенні. Відстань до осі обертання a = 10 см.



Відповідь: ω = 13 рад/с.
Рис. до задачі 15.11.

15.12. Залізничний потяг маси m = 2 000 т рухається з півночі на південь по меридіану зі швидкістю υ = 15 м/с. Визначити бічний тиск поїзда на рейки.
Відповідь: N = 3 733 Н на праву рейку.

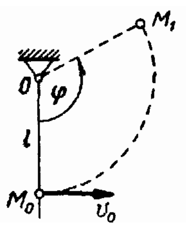
15.13. Вантажний автомобіль 1 рухається на підйом з постійним прискоренням



a = - 2 м/с^2. Визначити силу тиску вантажу 2 маси m = 200 кг на передню стінку кузову автомобіля, якщо кут підйому 10°.
Відповідь: N = 59,3 Н
Рис. до задачі 15.13.

15.14. Артилерійський снаряд рухається по горизонтальній траєкторії зі швидкістю υ = 900 м/с в північній півкулі на широті λ = 60°. Снаряд має влучити в ціль на відстані 18 км. Визначити, наскільки відхилиться від цілі снаряд внаслідок добового обертання Землі.
Відповідь: ε = 22,6 м.

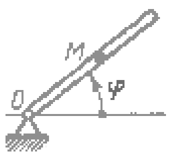
15.15. Вантажу, підвішеному на нитці довжини l = 0,5 м, надають початкову



швидкість υ_0 = 3 м/с в його нижньому положення. Визначити положення точки M_1, в якому нитка перестане утримувати вантаж і той почне рухатися як вільне тіло.
Відповідь: φ = 87°.
Рис. до задачі 15.15.

15.16. Трубка обертається навколо осі О по закону

$$j = t^2,$$

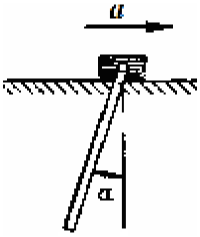


а всередині трубки рухається кулька М маси m = 100 г по закону

$$OM = 0{,}2t^3.$$

Визначити модуль сили інерції Коріоліса в момент часу t = 1 с.
Відповідь: $\Phi_{кор}$ = 0,24 Н.
Рис. до задачі 15.16.

15.17. Під час розгону поїзда на горизонтальній прямолінійній ділянці шляху тягар M вагою P = 20 Н, підвішений на нитці до стелі вагона, відхилився на кут α = 45°. Визначити прискорення вагона під час розгону.
Відповідь: a = 9,81 м/с^2.



15.18. Точка підвісу маятника, який являє собою стержень довжини l = 25 см, рухається поступально рівномірно і прямолінійно з прискоренням a = 4,9 м/с^2. Визначити кут φ відхилення маятника від вертикального положення в стані відносного спокою.
Відповідь: φ = 26,6°.
Рис. до задачі 15.18.

15.19. Вантажу, підвішеному на нитці довжини l = 0,5 м, надають початкову горизонтальну швидкість в його нижньому положення (рис. до задачі 15.15). Визначити мінімальне значення швидкості, за якої вантаж зможе описати повне коло.
Відповідь: υ = 4,95 м/с.

15.20. Відцентровий регулятор Вата обертається з кутовою швидкістю ω = 10 рад/с, а довжина стержню AB = 25 см. Нехтуючи вагою обертових ланок регулятора у порівнянні з вагою куль B і D, визначити кут α відносної рівноваги стержня AB.
Відповідь: α = 66,7°.

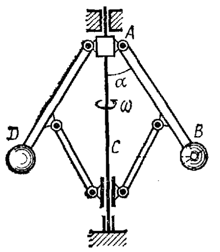


Рис. до задачі 15.20.

15.21. Під час розгону поїзда на горизонтальній прямолінійній ділянці шляху вантаж M вагою P = 20 Н, підвішений на нитці до стелі вагона, відхилився на кут α = 45°. Визначити натяг нитки у вказаному положенні.
Відповідь: T = 2,8 Н.

15.22. Похила площина, що складає кут α = 30° з горизонтом, рухається вправо вздовж осі Ox з постійним прискоренням a = 1,7 м/с^2. По цій площині спускається тіло M вагою P = 20 Н. Нехтуючи тертям, визначити його силу тиску на площину AB.
Відповідь: N = 1,9 Н.

15.23. В скільки раз мала б збільшитися кутова швидкість обертання Землі навколо власної осі, аби важка матеріальна точка, яка знаходиться на поверхні Землі на екваторі не мала б ваги? Радіус Землі R = 6 370 км.
Відповідь: у 17 разів.

15.24. Точка M маси m = 0,4 кг ковзає вздовж гладкого півкола AMB вертикальної пластини $ABCD$, яка рухається прямолінійно вздовж осі x з прискоренням a = 4 м/с^2. Визначити силу тиску на пластинку точки M коли вона займає найнижче положення, якщо в положенні A відносна швидкість точки M дорівнювала нулю.
Відповідь: N = 8,6 Н.

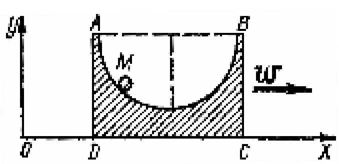


Рис. до задачі 15.24.

15.25. Похила площина, що складає кут α = 30° з горизонтом, рухається вправо вздовж осі Ox з постійним прискоренням a = 1,7 м/с^2. По цій площині спускається тіло M вагою P = 20 Н. Нехтуючи тертям, визначити відносне прискорення тіла M.
Відповідь: $a_{від}$ = 3,4 м/с^2.

Глава 16. «Динаміка механічної системи»

16.1. Загальні визначення про механічну систему

Механічна система – система матеріальних точок (тіл), рух або рівновага якої розглядається. За наявності сил взаємодії рух кожної точки (тіла) системи залежить від руху усіх інших точок (тіл). Усі сили, діючі на систему, можна розділити на два типи:

1. *Зовнішні* $\boldsymbol{F}^e$ – сили, що діють на систему з боку точок чи тіл, які не входять до складу даної системи.
2. *Внутрішні* $\boldsymbol{F}^i$ – сили, з якими тіла або точки даної системи взаємодіють між собою.

Такий розподіл є умовним, оскільки тип сили залежить від того, яка система розглядається. Наприклад, сила тяжіння Землі до Сонця буде внутрішньою силою, якщо розглядається рух Сонячної системи, але ця ж сила буде зовнішньою у випадку системи Земля – Місяць.

Теорема: головний вектор і головний момент відносно довільного центра (осі) внутрішніх сил механічної системи дорівнює нулю за будь-якого стану механічної системи, тобто в стані спокою чи руху

$$\sum_{k=1}^{n}\boldsymbol{F}_k^i=0,\quad \sum_{k=1}^{n}\boldsymbol{M}_0(\boldsymbol{F}_k^i)=0,\quad \sum_{k=1}^{n}\boldsymbol{M}_x(\boldsymbol{F}_k^i)=0. \qquad (16.1)$$

З (16.1) проте не витікає, що внутрішні сили взаємно зрівноважуються і ніяким чином не впливають на рух системи. Прикладені до різних матеріальних точок або тіл, вони можуть викликати їх взаємні переміщення. Зрівноваженою уся сукупність сил буде лише для твердого тіла.

Тверде тіло – система матеріальних точок, відстані між якими залишаються незмінними. Рух системи або твердого тіла залежить не лише від прикладених сил, а й від величини маси системи (тіла) та її розподілу.

Маса системи – арифметична сума мас усіх точок або тіл, які утворюють систему

$$M=\sum_{k=1}^{n}m_k. \qquad (16.2)$$

16.2. Центр мас і моменти інерції

При розв’язанні задач динаміки необов’язково знати всі маси точок системи та їх координати, достатньо визначити лише їх наступні сумарні характеристики: координати центру мас, осьові то відцентрові моменти інерції.

1. *Центр мас* (*інерції*) – геометрична точка C, координати якої визначаються по формулам

$$x_c=\frac{\sum_{k=1}^{n}m_kx_k}{M},\ y_c=\frac{\sum_{k=1}^{n}m_ky_k}{M},\ z_c=\frac{\sum_{k=1}^{n}m_kz_k}{M}. \qquad (16.3)$$

Положення центра мас характеризує розподіл мас в системі. Часто в механіці застосовується еквівалентне поняття центру ваги. Для твердого тіла в однорідному полі тяжіння положення центрів мас і тяжіння співпадають, проте поняття центру мас значно ширше, оскільки воно зберігає сенс для тіла у будь-якому силовому полі. Крім того, поняття центру мас може бути застосоване для довільної механічної системи, а не тільки для абсолютно твердого тіла, як поняття центра тяжіння.

Положення центра мас можна задати за допомогою радіус-вектора

$$\boldsymbol{r}_c = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} m_k \boldsymbol{r_k}}{M}. \tag{16.4}$$

2. *Момент інерції тіла відносно осі Oz* – скалярна величина, що дорівнює сумі добутків мас усіх точок тіла на квадрати їх відстаней до даної осі

$$I_z = \sum_{k=1}^{n} m_k r_k^2. \tag{16.5}$$

Момент інерції тіла відносно осі є мірою інертності тіла при обертальному русі.

Іноді момент інерції тіла відносно осі визначають через *радіус інерції*

$$I_z = M r_z^2. \tag{16.6}$$

Радіус інерції геометрично дорівнює відстані від осі *Oz* до точки, в якій необхідно зосередити масу всього тіла, аби момент інерції даної точки дорівнював моменту інерції усього тіла.

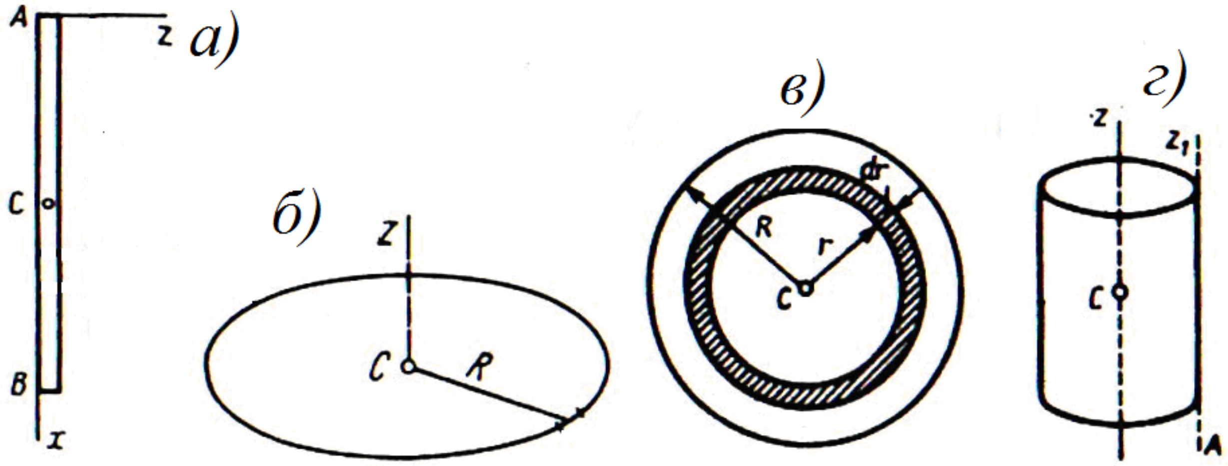


Рис. 16.1. Моменти інерції деяких однорідних тіл.

Нижче без виводу наведено моменти інерції деяких простих тіл. Так, момент інерції *тонкого однорідного стержня* маси *M* і довжини *l* відносно осі z, яка проходить через точку *A* (рис. 16.1, *а*)

$$I_A = \frac{Ml^2}{3}. \tag{16.7}$$

Якщо вісь проходить через центр мас *C* стержня, то момент інерції

$$I_C = \frac{Ml^2}{12}. \tag{16.8}$$

Момент інерції *тонкого круглого однорідного кільця* маси *M* і радіуса **R** відносно осі z, яка проходить через його центр мас *C* перпендикулярно до площини кільця (рис. 16.1, *б*)

$$I_C = MR^2. \tag{16.9}$$

Аналогічний результат також має місце для моментів інерції *матеріальної точки* і *полого циліндра* маси M і радіуса R, відносно осі, яка проходить через його центр.

Момент інерції *круглої однорідної пластини* або *суцільного циліндра* відносно осі z, яка проходить через центр C перпендикулярно площині тіла (рис. 16.1, *в* і *г*)

$$I_C = \frac{MR^2}{2}. \tag{16.10}$$

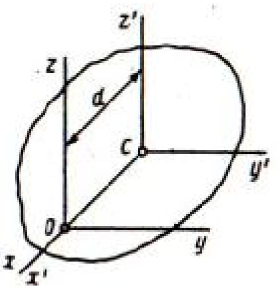
Момент інерції *прямокутної пластини* маси M із сторонами a і b (ось x спрямована вздовж сторони a)

$$I_x = \frac{Mb^2}{3},\ I_y = \frac{Ma^2}{3}. \tag{16.11}$$

Момент інерції *суцільної кулі* маси M и радіуса R відносно осі, яка проходить через його центр

$$I_z = \frac{2MR^2}{5}. \tag{16.12}$$

Знаючи момент інерції тіла відносно однієї осі, завжди можна знайти момент інерції даного тіла відносно будь-якої іншої паралельної осі по **теоремі Гюйгенса**: момент інерції тіла відносно даної осі дорівнює моменту інерції відносно паралельної осі, що проходить через центр мас тіла, складеному з добутком маси усього тіла на квадрат відстані між осями (рис. 16.2)



$$I_{Oz} = I_{Cz} + Md^2. \tag{16.13}$$

З теореми видно, що найменший момент інерції завжди відносно осі, що проходить через центр мас тіла.

Рис. 16.2. До теореми Гюйгенса.

3. *Полярний момент інерції* – скалярна величина, яка дорівнює сумі добутків маси усіх матеріальних точок на квадрат відстані від даної точки до полюса

$$I_O = \sum_{k=1}^{n} m_k r_k^2 = \sum_{k=1}^{n} m_k (x^2 + y^2 + z^2). \tag{16.14}$$

Даний момент інерції є сумою додатних величин, тому він не може бути від'ємним або дорівнювати нулю.

4. *Відцентрові моменти інерції* – скалярні величини, які визначаються за формулами

$$I_{xy} = \sum_{k=1}^{n} m_k x_k y_k,\ \ I_{yz} = \sum_{k=1}^{n} m_k x_k y_k,\ \ I_{zx} = \sum_{k=1}^{n} m_k x_k y_k. \tag{16.15}$$

Як видно з (16.13), відцентрові моменти інерції можуть бути як додатними, так і від'ємними, або дорівнювати нулю.

Головна вісь інерції відносно точки О – вісь Oz, для якої відцентрові моменти інерції I_{xz} і I_{yz} дорівнюють нулю. Головні осі мають наступні властивості:

а) якщо тіло має вісь симетрії, то вона є головною віссю інерції тіла для будь-якої своєї точки;
б) якщо тіло має площину симетрії, то будь-яка вісь, перпендикулярна даній площині, буде головною віссю інерції для точки *O*, в якій вісь перетинає площину.

Головні моменти інерції тіла – моменти інерції тіла відносно головних осей інерції.

Головні центральні осі інерції – головні осі інерції, побудовані для центра мас даного тіла. Якщо тіло має вісь симетрії, то ця вісь буде однією з головних центральних осей, оскільки проходить через центр мас.

Поняття про головні осі інерції відіграє дуже важливу роль в динаміці твердого тіла. Якщо спрямувати по цим осям координатні вісі, то відцентрові моменти обернуться в нуль, суттєво спростивши розрахунки.

16.3. Теорема про рух центра мас механічної системи

У ряді випадків для визначення характеру руху системи необхідно знати закон руху її центра мас. Основне рівняння динаміки для системи матеріальних точок має вигляд

$$\sum_{k=1}^{n} m_k \boldsymbol{a}_k = \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{F}_k^e + \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{F}_k^i.$$

Із (16.1) випливає, що другий доданок буде дорівнювати нулю. Виразивши прискорення точок системи через прискорення центра мас

$$\sum_{k=1}^{n} m_k \boldsymbol{a}_k = \sum_{k=1}^{n} m_k \frac{d^2 \boldsymbol{r}_C}{dt^2} = M\boldsymbol{a}_C \Rightarrow M\boldsymbol{a}_C = \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{F}_k^e \qquad (16.16)$$

Остаточно отримуємо **теорему про рух центра мас**: добуток маси системи на прискорення її центра мас дорівнює геометричній сумі усіх зовнішніх сил, що діють на систему.

Записавши (16.16) в проекціях на координатні осі

$$M\ddot{x}_c = \sum_{k=1}^{n} F_{kx}^e,\; M\ddot{y}_c = \sum_{k=1}^{n} F_{ky}^e,\; M\ddot{z}_c = \sum_{k=1}^{n} F_{kz}^e, \qquad (16.17)$$

отримуємо диференціальні рівняння руху центра мас в проекціях на координатні осі.

Висновок: тіло, що рухається поступально, завжди можна розглядати як матеріальну точку з масою, яка дорівнює масі тіла. В інших випадках це можливо лише тоді, коли по умовам завдання можна не брати до уваги обертальну частину руху тіла. Крім того, дана теорема дозволяє при рішенні завдань виключити з розгляду усі невідомі внутрішні сили.

Наслідки з теореми про рух центра мас:

1. Якщо сума усіх зовнішніх сил, що діють на систему, дорівнює нулю, то центр мас системи знаходиться у спокої або рухається рівномірно і прямолінійно

$$\sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{F}_k^e = 0 \Rightarrow \boldsymbol{a}_c = 0 \Rightarrow \boldsymbol{\upsilon}_c = const. \qquad (16.18)$$

2. Якщо сума проекцій на яку-небудь вісь усіх зовнішніх сил, що діють на систему, дорівнює нулю, то проекція швидкості центра мас системи на цю вісь є величина постійна

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx}^{e} = 0 \Rightarrow a_{cx} = 0 \Rightarrow u_{cx} = const. \tag{16.19}$$

З початкових умов визначається, буде центр мас знаходитись в стані спокою чи рухатись рівномірно і прямолінійно. Ці слідства мають назву **закону збереження руху центра мас системи**.

Питання для самоконтролю

1. Що називається центром мас і за якими формулами він обчислюється?
2. Які існують методи визначення центра мас?
3. В яких випадках застосовують експериментальні методи визначення центра мас?
4. Що називається моментом інерції тіла і який фізичний зміст цього визначення?
5. В яких випадках застосовують теорему Гюйгенса, як вона формулюється?

Завдання № 16. «Динаміка механічної системи»

Рекомендації до розв'язання задач

1. Визначити тіла, які входять до системи, рух якої розглядається.
2. Нанести на рисунок усі зовнішні сили системи і обрати систему координат.
3. Записати теорему про рух центра мас системи у вигляді (16.17).
4. Знайти суму проекцій зовнішніх сил на координатні осі.
5. З'ясувати початкові умови руху центра мас.
6. Розв'язати складені диференціальні рівняння, визначивши зовнішні сили при прямій задачі або шуканий закон руху центра мас при оберненій задачі.
7. Якщо в задачі центр мас рухається з постійною швидкістю або перебуває у стані спокою, то розв'язання знаходиться без складання диференціальних рівнянь за допомогою слідств з теореми про рух центра мас.

Приклад розв'язання задачі

Задача 1. При гальмуванні ведуче колесо автомобіля котиться з ковзанням по горизонтальному шосе за інерцією. Знайти закон руху центра мас *C* колеса, якщо коефіцієнт тертя f = 0,35. В початковий момент колесо рухалось зі швидкістю υ_0 = 20 м/с.

Розв'язання

В даній задачі розглядається система матеріальних точок, яка утворює колесо. Дана система знаходиться під дією крутного моменту *m*, сили тяжіння ***P***, реакції шосе ***N*** і сили тертя ковзання $\boldsymbol{F}_{тр}$. Початок системи координат оберемо в точці положення центра мас колеса в початковий момент часу (рис. 16.3). Тоді початкові умови руху для колеса мають вигляд

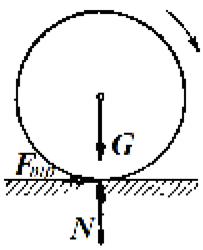


Рис. 16.3. До задачі 1.

$$x(0) = 0 \text{ м}, \quad u(0) = 20 \text{ м/с}.$$

Вертикальні сили являють собою зрівноважену систему, яка не впливає на характер руху. Рух тіла відбувається по осі *x*, тому записуємо теорему про рух центра мас в проекції на цю вісь

$$M\ddot{x}_C = fMg \Rightarrow \frac{du_C}{dt} = -fg = -0{,}35 \cdot 9{,}81 = -3{,}43.$$

$$\int_{20}^{u_C} du_C = -3{,}43\int_0^t dt \Rightarrow u_C - 20 = -3{,}43t.$$

Для знаходження закону руху центра колеса необхідно ще раз зінтегрувати отримане рівняння

$$\int_0^{x_C} dx_C = \int_0^t (20 - 3{,}43t)dt \Rightarrow x_C = 20t - \frac{3{,}43t^2}{2} = 20t - 1{,}715t^2.$$

Задачу розв'язано.

<u>Завдання №16 до РГР</u>

16.1. Вага тіла *A*, яке знаходиться на гладкій горизонтальній площині, P_A = 60 Н, а тіла *B*, яке може рухатись по вертикалі – P_B = 25 Н. Визначити прискорення центра мас системи, якщо тіло *A* рухається з прискоренням a_A = 1,2 м/с^2 і має кут нахилу до горизонту α = 30°.

Відповідь: a_C = 0,87 м/с^2.

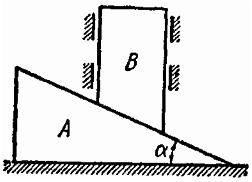


Рис. до задачі 16.1.

16.2. Визначити момент інерції суцільного циліндра маси *M* = 3 кг і радіуса ***R*** = 20 см відносно осі *z*, яка проходить через його твірну.

Відповідь: I_z = 0,18 кг·м^2.

16.3. Визначити переміщення *s* плавучого крану, який піднімає вантаж вагою P_1 = 20 кН при повороті стріли крана на 30° до вертикального положення. Вага крану P_2 = 200 кН, довжина стріли *OA* = 8 м. Опором води руху крана знехтувати, початок системи координат вибрати, як показано на рисунку.

Відповідь: *s* = – 0,36 м.

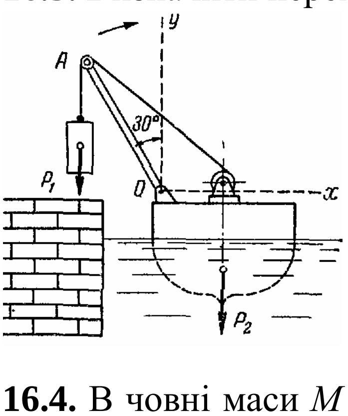
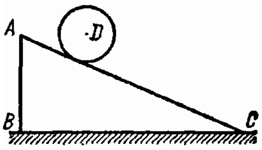


Рис. до задачі 16.3.

16.4. В човні маси *M* = 120 кг, який знаходився на спокійній воді, від лавки до корми перейшли два чоловіки масами m_1 = 70 кг і m_2 = 80 кг. Нехтуючи опором води, визначити переміщення човна, якщо відстані, на які перейшли чоловіки, дорівнюють l_1 = 3 м і l_2 = 2 м відповідно.

Відповідь: *s* = 1,37 м.

16.5. Циліндр *D* вагою G = 8 Н і радіусом r = 6,5 см котячись без ковзання по похилій площині *ABC* ваги P = 16 Н здійснив два оберти навколо власної осі. Визначити, в який бік і на яку відстань зміститься за цей час площина, якщо *AB* = 50 см, *BC* = 120 см. Тертям при русі площини і циліндру знехтувати.



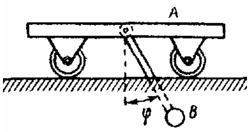
Відповідь: вліво на Δx = 25 см.

Рис. до задачі 16.5.

16.6. До візка *A* масою M = 70 кг, підвішений маятник *B* маси m = 8 кг, який коливається згідно закону

$$j = \frac{p}{12}\sin 6t \text{ (рад)}.$$

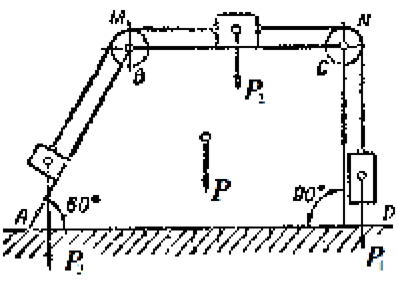
Визначити рівняння руху центра мас візка, якщо довжина маятника l = 0,8 м. Тертям і опором повітря знехтувати, візок у початковий момент часу знаходився в стані спокою.



Відповідь: $x = 0{,}144t - 0{,}09\sin\left(\frac{p}{12}\sin 6t\right)$.

Рис. до задачі 16.6.

16.7. Три вантажі вагою P_1 = 20 кг, P_2 = 15 кг і P_3 = 10 кг з'єднані невагомою нерозтяжною ниткою, перекинутою через нерухомі блоки *M* і *N*. Вантажі знаходяться на чотирикутній піраміді *ABCD* вагою *P* = 100 кг. Нехтуючи тертям між підлогою і пірамідою, визначити переміщення x останньої відносно підлоги при опусканні вантажу P_1.



Відповідь: x = 14 см.

Рис. до задачі 16.7.

16.8. Однорідний стержень *OA* масою m = 10 кг обертається рівномірно з кутовою швидкістю ω = 10 рад/с. Визначити модуль головного вектора зовнішніх сил, які діють на стержень, якщо його довжина *OA* = 1 м. *Відповідь*: $\boldsymbol{R}^e$ = 500 Н.

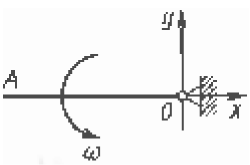
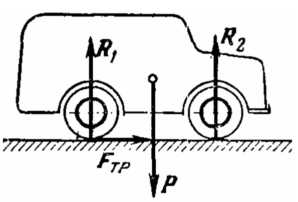


Рис. до задачі 16.10.

16.9. В човні вагою Q = 900 Н, який стояв на спокійній воді, від лавки до корми перейшли два чоловіки вагою P_1 = 800 Н і P_2 = 600 Н. Нехтуючи опором води, визначити, на яку відстань змістився човен, якщо відстані, на які перейшли чоловіки, дорівнюють l_1 = 1 м і l_2 = 1,5 м відповідно.

Відповідь: Δx = 0,71 м.



16.10. Визначити силу, що приводить до руху центр мас автомобілю, який рухається по горизонтальній шорсткій ділянці дороги.

Рис. до задачі 16.10.

16.11. На горизонтальній платформі маси M = 400 кг знаходиться похила площина AB з кутом нахилу до горизонту α = 45°. По похилій площині підіймається вантаж вагою m = 80 кг таким чином, що відстань AC змінюється по закону

$$s = 0{,}5t^2.$$

Визначити швидкість руху платформи, якщо в початковий момент часу вся система знаходилась в стані спокою.

Відповідь: υ = - 0,12t м/с.

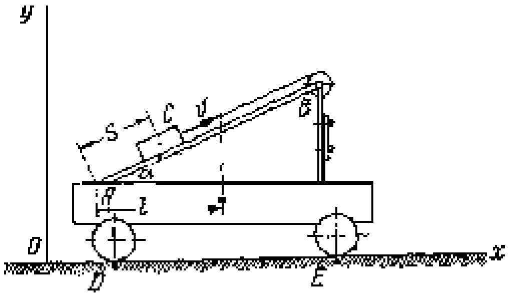


Рис. до задачі 16.11.

16.12. Вантаж A вагою P_A = 30 Н і вантаж B вагою P_B = 20 Н з'єднані між собою нерозтяжною ниткою, перекинутою через блок E. Вантаж B ковзає по бічній поверхні клину ваги P = 100 Н, який основою DK знаходиться на гладкій горизонтальній площині. Знайти переміщення x клину по горизонтальній площині при опусканні вантажу A на висоту h = 30 см, якщо кут α = 30°. В початковий момент часу система знаходилась в стані спокою.

Відповідь: x = 3,46 см.

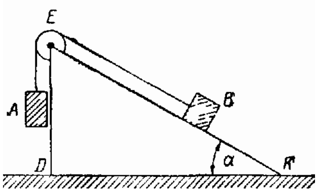


Рис. до задачі 16.12.

16.13. Центр мас валу двигуна зміщений на відстань AB = 20 см. Маса валу m_1 = 5 кг, маси інших деталей двигуна m_2 = 45 кг. Визначити закон руху двигуна, який вільно встановлений на гладкій горизонтальній площині, якщо вал обертається з кутовою швидкістю ω = 40 рад/с.

Відповідь: $x = -2\sin 40t$ см.

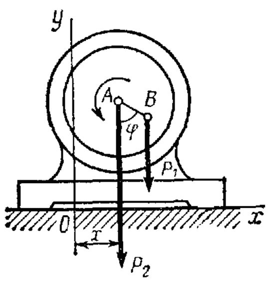


Рис. до задачі 16.13.

16.14. На гладкій горизонтальній площині лежить диск маси M = 50 кг і радіуса R = 3 м. По краю диска рухається хлопчик маси m = 25 кг. Визначити траєкторію руху центра мас диску.

Відповідь: $x^2 + y^2 = 1$ м.

16.15. Тіло 1 маси m_1 = 5 кг має паз O_1A = 0,8 м під кутом α = 45° до горизонту, по якому рухається точка 2 маси m_1 = 0,5 кг. Визначити швидкість тіла 1 в момент, коли точка 2 дійде до кінця пазу, якщо в початковий момент часу вона знаходилась у верхньому положенні у стані спокою. Тертям між тілом 1 і горизонтальною площиною знехтувати.

Відповідь: υ = 0,22 м/с.

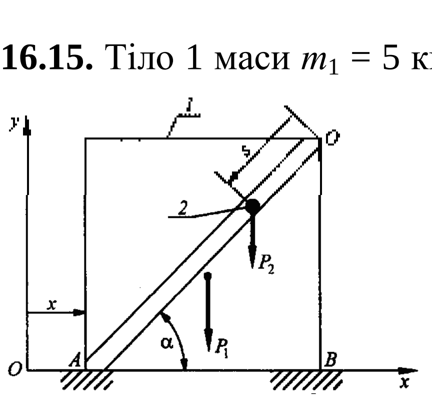
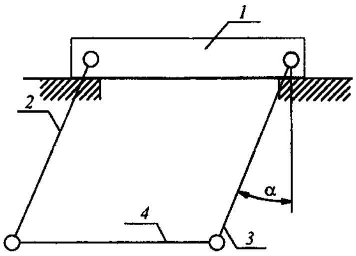


Рис. до задачі 16.15.

16.16. На гладкій площині знаходиться плита 1 маси m_1 = 4 кг, на якій закріплений механізм, що складається з трьох стержнів 2, 3 і 4. Стержні 2 і 3 мають однакову довжину $l_2 = l_3$ = 30 см і масу $m_2 = m_3$ = 0,2 кг; довжина стержня 4 l_4 = 40 см, а його маса m_4 = 0,4 кг. Стержні 2 і 3 відхилені від вертикалі на кут α = 15°. Визначити переміщення плити 1 в момент, коли стержні 2 і 3 займуть вертикальне положення, якщо в початковий момент часу система знаходилась в стані спокою.



Відповідь: υ = 0,22 м/с.

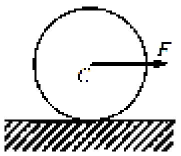
Рис. до задачі 16.16.

16.17. На однорідній призмі A, яка лежить на гладкій горизонтальній площині, знаходиться однорідна призма B втричі меншої ваги, причому поперечні перерізи призм є прямокутними трикутниками. Визначити відстань x, на яку переміститься призма А в момент, коли верхня призма дійде до горизонтальної площини. Висота призми A a = 80 см, призми B b = 20 см.

Відповідь: x = 15 см.

Рис. до задачі 16.17.

16.18. Колесо ваги P котиться з ковзанням по горизонтальній прямій під дією горизонтальної сили $F = P$, прикладеної до центра колеса. Визначити закон руху центра мас, якщо коефіцієнт тертя між колесом і горизонтальною поверхнею дорівнює f = 0,2.



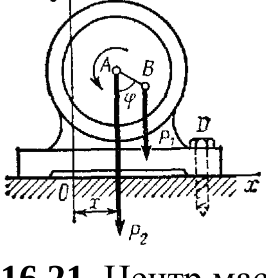
Відповідь: $x = 3{,}92t^2$ м.

Рис. до задачі 16.18.

16.19. Тіло 1 маси m_1 = 5 кг має паз O_1A = 0,8 м під кутом α = 45° до горизонту, по якому рухається точка 2 маси m_2 = 0,5 кг (рис. до задачі 16.15). Визначити силу, з якою тіло 1 діє на горизонтальну площину в момент, коли точка 2 дійде до кінця пазу, якщо в початковий момент часу вона знаходилась у верхньому положенні у стані спокою. Тертям між тілом 1 і горизонтальною площиною знехтувати.

Відповідь: N = 51,4 Н.

16.20. Центр мас валу двигуна зміщений на відстань AB = 20 см. Маса валу m_1 = 5 кг, маси інших деталей двигуна m_2 = 45 кг. Визначити максимальну силу, яка діє на болт D, якщо вал обертається з кутовою швидкістю ω = 40 рад/с.



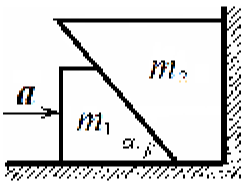
Відповідь: F_{max} = 1 600 Н.

Рис. до задачі 16.20.

16.21. Центр мас валу двигуна зміщений на відстань AB = 20 см. Маса валу m_1 = 5 кг, маси інших деталей двигуна m_2 = 45 кг (рис. до задачі 16.20). Визначити мінімальну силу затяжки болта D, за якої буде неможливим удар двигуна по

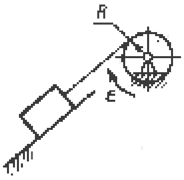
болту, якщо вал обертається з кутовою швидкістю ω = 40 рад/с. Коефіцієнт тертя між двигуном і площиною f = 0,5.
Відповідь: $F_{зат}$ = 800 Н.

16.22. Механічна система складається з двох призм масами m_1 = 3 кг і m_2 = 4 кг,



які спираються на гладкі перпендикулярні площини. Знайти прискорення центра мас системи, якщо нижня призма рухається з прискоренням a_1 = 0,21 м/с^2, а кут α = 45°.
Відповідь: a = 0,15 м/с^2.
Рис. до задачі 16.22.

16.23. Тіло масою m = 20 кг підіймається по похилій площині за допомогою



троса, що намотується на барабан радіуса R = 0,2 м. Визначити модуль головного вектора зовнішніх сил, що діють на дане тіло, якщо кутове прискорення барабану ε = 5 рад/с^2.
Відповідь: F = 20 Н.
Рис. до задачі 16.23.

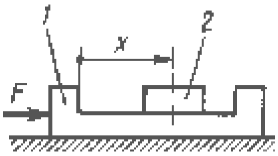
16.24. Центр мас колеса С масою m = 15 кг рухається по колу радіуса R = 1,3 м згідно рівняння

$$s = 4t\text{, м.}$$

Визначити модуль головного вектора зовнішніх сил, прикладених до даного колеса.
Відповідь: F = 185 Н.
Рис. до задачі 16.24.

16.25. На тіло 1 маси m_1 = 4 кг діє постійна сила F = 10 Н. Визначити прискорення даного тіла в момент часу t = 0,5 с, якщо відносно нього під дією внутрішніх сил системи рухається тіло 2 маси m_2 = 1 кг згідно рівняння

$$x = \cos pt\,.$$



Обидва тіла рухаються поступально.
Відповідь: a = 2 м/с^2.
Рис. до задачі 16.25.

16.26. Однорідний тонкий прямий стержень вагою P = 40 Н і довжиною l = 0,4 м рівномірно обертається з кутовою швидкістю ω = 5 рад/с в горизонтальній площині навколо свого нерухомого кінця A. Знайти зусилля F, яке виникає через обертання стержня в його поперечному перерізі, який знаходиться на відстані x = 0,2 м від осі обертання.
Відповідь: F = 15,3 Н.

Глава 17. «Кількість руху матеріальної точки і системи»

17.1. Кількість руху точки та імпульс сили

Кількість руху матеріальної точки – векторна величина, яка дорівнює добутку маси точки на швидкість її руху

$$\boldsymbol{q} = m\boldsymbol{v}. \tag{17.1}$$

Кількість руху є однією з двох мір механічного руху (інша – кінетична енергія). Вектор $\boldsymbol{q}$ спрямований за вектором швидкості, тобто по дотичній до траєкторії. Розмірність кількості руху – кг·м/с або Н·с.

Наряду з кількістю руху в механіці вводиться поняття імпульсу сили. *Елементарний імпульс сили* – векторна величина, яка дорівнює добутку сили на час її дії

$$d\boldsymbol{S} = \boldsymbol{F}dt. \tag{17.2}$$

Тоді повний імпульс постійної сили дорівнює добутку модуля сили на час її дії

$$\boldsymbol{S} = \int_0^S d\boldsymbol{S} = \int_0^t \boldsymbol{F}dt = \boldsymbol{F}t. \tag{17.3}$$

Одиниця виміру імпульсу сили та ж, що і у кількості руху. Проекції імпульсу сили на координатні осі визначаються за формулами

$$S_x = \int_0^t F_x dt = F_x t,\ S_y = \int_0^t F_y dt = F_y t,\ S_z = \int_0^t F_z dt = F_z t. \tag{17.4}$$

Знаючи проекції вектора імпульсу сили на осі декартової системи координат, завжди можна визначити його модуль і напрямок

$$S = \sqrt{S_x^2 + S_y^2 + S_z^2} \tag{17.5}$$

$$\cos(\boldsymbol{S}\wedge\boldsymbol{i}) = \frac{S_x}{S},\ \cos(\boldsymbol{S}\wedge\boldsymbol{j}) = \frac{S_y}{S},\ \cos(\boldsymbol{S}\wedge\boldsymbol{k}) = \frac{S_z}{S}. \tag{17.6}$$

17.2. Теореми про зміну кількості руху матеріальної точки

В основному рівнянні динаміки представимо прискорення як похідну від швидкості і розділимо змінні

$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a} = m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} \Rightarrow md\boldsymbol{v} = \boldsymbol{F}dt \Rightarrow d(m\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{F}dt. \tag{17.7}$$

Вираз (17.7) є ***теоремою про зміну кількості руху матеріальної точки в диференціальній формі***: диференціал від кількості руху матеріальної точки дорівнює елементарному імпульсу сили, що діє на дану точку.

Інтегруємо (17.7)

$$\int_{m\boldsymbol{v}_0}^{m\boldsymbol{v}} d(m\boldsymbol{v}) = \int_0^t \boldsymbol{F}dt \Rightarrow m(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_0) = \boldsymbol{F}t = \boldsymbol{S}. \tag{17.8}$$

Вираз (17.8) є ***теоремою про зміну кількості руху матеріальної точки в інтегральній формі***: зміна кількості руху матеріальної точки за час t дорівнює повному імпульсу сили за той же проміжок часу.

В проекції на координатні осі теорема (17.8) має вигляд

$$m(\upsilon_x - \upsilon_{0x}) = S_x,\ m(\upsilon_y - \upsilon_{0y}) = S_y,\ m(\upsilon_z - \upsilon_{0z}) = S_z. \tag{17.9}$$

17.3. Теореми про зміну кількості руху механічної системи

Кількість руху механічної системи – векторна величина, яка дорівнює геометричній сумі кількостей руху матеріальних точок, що становлять систему

$$\boldsymbol{Q} = \sum_{k=1}^{n}\boldsymbol{q}_k = \sum_{k=1}^{n} m_k \boldsymbol{\upsilon_k} = M\boldsymbol{\upsilon}_c\,, \qquad (17.10)$$

де M – повна маса системи, $\boldsymbol{\upsilon}_C$ - швидкість руху центру мас даної системи.

Проекції кількості руху системи на координатні осі

$$Q_x = M\upsilon_{cx}, \quad Q_y = M\upsilon_{cy}, \quad Q_z = M\upsilon_{cz}. \qquad (17.11)$$

Знаючи проекції вектора кількості руху механічної системи на осі декартової системи координат, завжди можна визначити його модуль і напрямок

$$Q = \sqrt{Q_x^2 + Q_y^2 + Q_z^2} \qquad \cos(\boldsymbol{Q}\wedge\boldsymbol{i}) = \frac{Q_x}{Q},\ \cos(\boldsymbol{Q}\wedge\boldsymbol{j}) = \frac{Q_y}{Q},\ \cos(\boldsymbol{Q}\wedge\boldsymbol{k}) = \frac{Q_z}{Q}.$$

Запишемо загальне рівняння динаміки для механічної системи

$$\sum_{k=1}^{n}\boldsymbol{F}_k = \sum_{k=1}^{n} m_k \boldsymbol{a}_k \ \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} m_k \frac{d\boldsymbol{\upsilon}_k}{dt} = \sum_{k=1}^{n}(\boldsymbol{F}_k^e + \boldsymbol{F}_k^i).$$

Однак відомо, що головний вектор внутрішніх сил дорівнює нулю, тому

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{d(m_k\boldsymbol{\upsilon}_k)}{dt} = \sum_{k=1}^{n}\boldsymbol{F}_k^e = \boldsymbol{R}^e \ \Rightarrow \frac{d\boldsymbol{Q}}{dt} = \boldsymbol{R}^e. \qquad (17.12)$$

Вираз (17.12) є **теоремою про зміну кількості руху механічної системи в диференціальній формі**: похідна за часом від кількості руху системи дорівнює головному вектору усіх зовнішніх сил, що діють на дану систему. У (17.12) розділяємо змінні і інтегруємо отримане диференціальне рівняння

$$d\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{R}^e dt = \sum_{k=1}^{n} d\boldsymbol{S}_k^e \Rightarrow \int_{\boldsymbol{Q}_0}^{\boldsymbol{Q}} d\boldsymbol{Q} = \sum_{k=1}^{n}\int_{0}^{\boldsymbol{S}_k^e} d\boldsymbol{S}_k^e \ \Rightarrow \boldsymbol{Q} - \boldsymbol{Q}_0 = \sum_{k=1}^{n}\boldsymbol{S}_k^e = \boldsymbol{S}^{\boldsymbol{e}}. \qquad (17.13)$$

Вираз (17.13) є **теоремою про зміну кількості руху механічної системи в інтегральній формі**: зміна кількості руху системи матеріальних точок за певний проміжок часу t дорівнює повному імпульсу головного вектора усіх зовнішніх сил, діючих на точки системи за той самий час.

В проекціях на координатні осі остання теорема має вигляд

$$Q_x - Q_{0x} = S_x^e,\ \ Q_y - Q_{0y} = S_y^e,\ \ Q_z - Q_{0z} = S_z^e. \qquad (17.14)$$

Наслідки теореми про зміну кількості руху механічної системи:

1. Одними внутрішніми силами неможливо змінити кількість руху системи.
2. Якщо головний вектор зовнішніх сил, що діють на систему, дорівнює нулю, то кількість руху системи залишається незмінною:

$$\boldsymbol{R}^e = 0 \ \Rightarrow \frac{d\boldsymbol{Q}}{dt} = 0 \ \Rightarrow \boldsymbol{Q} = const. \qquad (17.15)$$

3. Якщо проекція головного вектора зовнішніх сил на яку-небудь нерухому вісь інерціальної системи координат дорівнює нулю, то проекція кількість руху системи на цю вісь залишається незмінною:

$$\mathrm{R}_x^e = 0 \ \Rightarrow \frac{dQ_x}{dt} = 0 \ \Rightarrow Q_x = const. \qquad (17.16)$$

Розглянуті наслідки називаються ***законами збереження кількості руху механічної системи***.

17.4. Рух тіла змінної маси. Рівняння Мещерського**.**

В деяких випадках склад матеріальних точок, які утворюють механічну систему або тіло, може змінюватися, тому формули (17.10) – (17.16) не можуть описувати рух такої системи, оскільки вони були отримані для систем постійної маси. При розв'язанні подібних задач вводиться поняття тіла змінної маси.

Тіло змінної маси – будь-яке тіло, маса якого змінюється з часом. Якщо розмірами тіла можна знехтувати в порівнянні з пройденою відстанню, то в цьому випадку говорять про точку змінної маси

$$m = f(t). \tag{17.17}$$

Якщо вважати, що маса точки або тіла змінюється безперервно при від'єднанні або приєднанні часток малої маси dm, то можна вважати функцію (17.17) безперервною і диференційованою.

Нехай в деякий момент t_0 точка маси m рухається з абсолютною швидкістю υ, а точка маси dm – з абсолютною швидкістю $\boldsymbol{u}$. Тоді кількість руху системи в початковий момент

$$\boldsymbol{Q_0} = m\boldsymbol{\upsilon} + \boldsymbol{u}dm.$$

В момент часу t утворюється спільна точка маси $m + dm$, абсолютна швидкість якої $\boldsymbol{\upsilon} + d\boldsymbol{\upsilon}$. У випадку приєднання точки $dm > 0$, а при її від'єднанні $dm < 0$. Кількість руху спільної точки

$$\boldsymbol{Q} = (m + dm)(\boldsymbol{\upsilon} + d\boldsymbol{\upsilon}).$$

Зміна кількості руху за час dt

$$d\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{Q} - \boldsymbol{Q_0} = (m + dm)(\boldsymbol{\upsilon} + d\boldsymbol{\upsilon}) - (m\boldsymbol{\upsilon} + \boldsymbol{u}dm) = md\boldsymbol{\upsilon} + dm(\boldsymbol{\upsilon} - \boldsymbol{u}) + dm\cdot d\boldsymbol{\upsilon}.$$

Нехтуємо величиною більш високого порядку $dm\cdot d\boldsymbol{\upsilon} \to 0$, тоді

$$d\boldsymbol{Q} = md\boldsymbol{\upsilon} + dm(\boldsymbol{\upsilon} - \boldsymbol{u}). \tag{17.18}$$

Запишемо теорему про зміну кількості руху механічної системи в диференціальній формі і підставимо в неї (17.18)

$$\frac{d\boldsymbol{Q}}{dt} = \boldsymbol{R}^e \;\Rightarrow m\frac{d\boldsymbol{\upsilon}}{dt} + (\boldsymbol{\upsilon} - \boldsymbol{u})\frac{dm}{dt} = \boldsymbol{R}^e,$$

Далі введемо поняття відносної швидкості $u_{від}$, тоді теорема набуває вигляду

$$\boldsymbol{u} - \boldsymbol{\upsilon} = \boldsymbol{u}_{від} \;\Rightarrow m\frac{d\boldsymbol{\upsilon}}{dt} = \boldsymbol{R}^e + \boldsymbol{u}_{від}\frac{dm}{dt}.$$

Введемо поняття реактивної сили $\boldsymbol{R}$, яка дорівнює добутку відносної швидкості приєднаної маси на секундну зміну маси основної точки. Тепер теорема остаточно матиме вигляд

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{u}_{від}\frac{dm}{dt} \;\Rightarrow\; m\frac{d\boldsymbol{\upsilon}}{dt} = \boldsymbol{R}^e + \boldsymbol{R}. \tag{17.19}$$

Вираз (17.19) є **рівнянням Мещерського**: рівняння руху точки змінної маси має вигляд основного рівняння динаміки точки постійної маси, яка знаходиться під дією зовнішніх сил і реактивної сили.

17.5. Рух суцільного середовища. Теорема Ейлера.

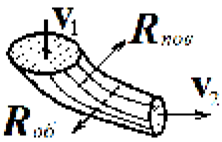
Теорема про зміну кількості руху механічної системи може бути використана при розгляді сталого руху суцільного середовища (рідини, газу).

Сталий рух – рух, при якому в будь-якому об’ємі швидкість, тиск і густина часток рідини (газу) не змінюються з часом. При вивченні сталого руху суцільного середовища замість маси використовують поняття секундної маси.

Секундна маса m_c – кількість маси рідини (газу), яка проходить через деякий переріз за одиницю часу. Одиниця виміру секундної маси – *кг/с*.

При сталому русі середовища через кожен переріз за одиницю часу проходить однакова кількість рідини (рис. 17.1), тобто секундна маса залишається сталою

$$m_c = \rho_1 s_1 \upsilon_1 = \rho_2 s_2 \upsilon_2, \qquad (17.20)$$



де ρ_1 і ρ_2 – густина рідини в початковому і кінцевому перерізах, s_1 і s_2 – площі перерізів, υ_1 і υ_2 – швидкості рідини в початковому і кінцевому перерізах.

Рис. 17.1. Теорема Ейлера.

Зміна кількості руху маси середовища за час dt

$$d\boldsymbol{Q} = m_c dt\boldsymbol{\upsilon}_2 - m_c dt\boldsymbol{\upsilon}_1 \Rightarrow \frac{d\boldsymbol{Q}}{dt} = m_c\boldsymbol{\upsilon}_2 - m_c\boldsymbol{\upsilon}_1 = m_c(\boldsymbol{\upsilon}_2 - \boldsymbol{\upsilon}_1).$$

З іншого боку, згідно теореми про зміну кількості руху механічної системи, зміна кількості руху дорівнює головному вектору зовнішніх сил

$$\frac{d\boldsymbol{Q}}{dt} = \sum_{k=1}^{n}\boldsymbol{F}_k^e = \boldsymbol{R}^e \Rightarrow m_c(\boldsymbol{\upsilon}_2 - \boldsymbol{\upsilon}_1) = \boldsymbol{R}^e. \qquad (17.21)$$

На суцільне середовище діють дві групи сил: об’ємні і поверхневі.

Об’ємні (масові) – сили, що діють на всі частинки всередині виділеного об’єму незалежно від їх положення (сили тяжіння, інерції).

Поверхневі – сили, що діють лише на частинки на зовнішній поверхні об’єму (сили тертя середовища і стінок). Розписавши зовнішні сили, остаточно отримуємо

$$m_c(\boldsymbol{\upsilon}_2 - \boldsymbol{\upsilon}_1) = \boldsymbol{R}_{об} + \boldsymbol{R}_{пов} \Rightarrow m_c\boldsymbol{\upsilon}_1 - m_c\boldsymbol{\upsilon}_2 + \boldsymbol{R}_{об} + \boldsymbol{R}_{пов} = 0 \qquad (17.22)$$

теорему Ейлера: сума головних векторів об’ємних, поверхневих сил і напрямлених всередину певного об’єму секундних кількостей рухів рідини, що протікає через два поперечні перерізи труби, дорівнює нулю.

В проекції на координатні осі

$$m_c u_{1x} - m_c u_{2x} + R_{об\,x} + R_{пов\,x} = 0,\ m_c u_{1y} - m_c u_{2y} + R_{об\,y} + R_{пов\,y} = 0,$$
$$m_c u_{1z} - m_c u_{2z} + R_{об\,z} + R_{пов\,z} = 0. \qquad (17.23)$$

Питання для самоконтролю

1. Що називається кількістю руху матеріальної точки?
2. Що називається елементарним імпульсом сили?
3. В якому випадку застосовується теорема про зміну кількості руху точки або системи в диференціальній формі?
4. В яких випадках застосовують теорему Ейлера?

Завдання № 17. «Кількість руху матеріальної точки і системи»

Рекомендації до розв’язання задач

А. Кількість руху матеріальної точки.

1. Зобразити матеріальну точку в даний момент, показати на рисунку всі сили, що діють на неї.
2. Якщо точка невільна, звільнити її від в’язей, замінивши їх дію реакціями.
3. Обрати систему координат і скласти в ній рівняння теореми про зміну кількості руху матеріальної точки.
4. Визначити із складених рівнянь шукані величини.

Б. Кількість руху механічної системи.

1. Визначити систему в даний момент часу і зобразити на рисунку всі активні сили.
2. Обрати нерухому систему координат, скласти початкові умови задачі.
3. Скласти рівняння теореми про зміну кількості руху в проекціях на осі координат.
4. Зінтегрувати отримані диференціальні рівняння.
5. Визначити сталі інтегрування з початкових умов.
6. Підставивши сталі інтегрування в отримані рівняння, визначити необхідні величини.

В. Рух суцільного середовища. Теорема Ейлера .

1. Показати на рисунку об’ємні та поверхневі сили.
2. Показати на рисунку вектори секундних кількостей руху рідини або газу, що проходять через два перерізи, які обмежують досліджуваний об’єм речовини. При цьому вектори секундних кількостей руху слід напрямляти всередину об’єму.
3. Обрати систему координат і записати теорему Ейлера в проекціях на координатні осі.
4. Визначити із складених рівнянь шукані величини.

Приклад розв’язання задачі (кількість руху матеріальної точки)

Задача 1. Вантаж спускається вниз по шорсткій похилій площині з кутом нахилу до горизонту α = 30°, причому коефіцієнт тертя між тілами f = 0,25. За який проміжок часу швидкість вантажу збільшиться вдвічі, якщо в початковий момент вантаж мав швидкість υ_0 = 0,5 м/с.

Розв’язання

Даний вантаж буде знаходитись під дією сили тяжіння $\boldsymbol{P}$, спрямованої вертикально вниз, нормальної реакції $\boldsymbol{N}$, яка перпендикулярна до похилої площини, і сили тертя ковзання $\boldsymbol{F}_{ков}$, спрямованої вздовж лінії контакту тіл у бік, протилежний напрямку руху (рис. 17.2).

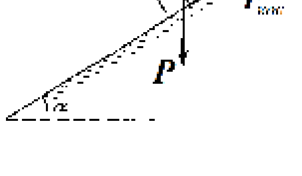


Рис. 17.2 . До задачі 1.

Направимо вісь x вздовж похилої площини вниз і запишемо теорему про зміну кількості руху матеріальної точки в інтегральній формі в проекції на дану вісь:

$$mu_{1x} - mu_{0x} = \sum_{k=1}^{n} F_{kx} t.$$

Запишемо проекції усіх активних сил на вісь x

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = P\sin a - F_{ков} = mg\sin a - fN = mg(\sin a - f\cos a).$$

З умов задачі відомо, що кінцева швидкість вдвічі більша за початкову

$$u_{1x} = 2u_{0x} \Rightarrow mu_{1x} - mu_{0x} = 2mu_{0x} - mu_{0x} = mu_{0x}.$$

Для знаходження часу підставимо два останні вирази в теорему про зміну кількості руху матеріальної точки в інтегральній формі

$$mu_{0x} = mg(\sin a - f\cos a)t \Rightarrow t = \frac{u_{0x}}{g(\sin a - f\cos a)} =$$

$$= \frac{2}{9{,}81(\sin 30° - 0{,}25\cos 30°)} = 0{,}72(c).$$

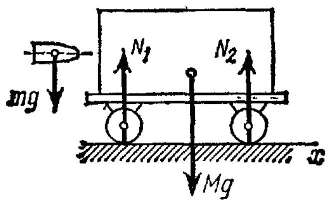
Задачу розв’язано.

Приклад розв’язання задачі (кількість руху механічної системи)

Задача 2. Снаряд маси m = 15 кг, який летів горизонтально зі швидкістю υ = 400 м/с, влучив у ящик з піском на платформі. З якою швидкістю u почне рухатись платформа після зіткнення, якщо її вага разом з ящиком M = 450 кг, а платформа до удару була нерухомою?

Розв’язання

Розглядаємо платформу з ящиком і снаряд як одну механічну систему. Це дозволяє не розглядати сили при ударі, оскільки вони є внутрішніми. Оскільки рух відбувається тільки вздовж осі x, саме в проекціях на неї і запишемо теорему про зміну кількості руху механічної системи



$$Q_x - Q_{0x} = \sum_{k=1}^{n} S_{kx}^{e} = \sum_{k=1}^{n} F_{kx}^{e} t.$$

Рис. 17.3. До задачі 2.

Як видно з рис. 17.3, сума прикладених до системи горизонтальних сил дорівнює нулю

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx}^{e} = 0 \Rightarrow Q_x - Q_{0x} = 0 \Rightarrow Q_x = Q_{0x},$$

тому кількість руху системи до зіткнення дорівнює кількості руху системи після зіткнення.

До зіткнення рухався тільки снаряд, тому кількість руху системи

$$Q_{0x} = mu = 15 \cdot 400 = 6000 \text{ (Н·с)}.$$

Після зіткнення система рухається як одне ціле, а її кількість руху

$$Q_x = (M + m)u = (15 + 450)u = 465u.$$

Підставивши в закон збереження кількості руху, визначаємо шукану швидкість після зіткнення

$$465u = 6000 \Rightarrow u = \frac{6000}{465} = 12{,}9 \text{ (м/с)}.$$

Задачу розв’язано.

<u>Приклад розв’язання задачі (теорема Ейлера)</u>

Задача 3. Визначити величину горизонтальної складової N сили динамічного тиску води на коліно труби (рис. 17.4) діаметром d = 0,5 м, якщо швидкість руху води по трубі постійна і дорівнює υ = 1,2 м/с. Густину води прийняти рівною ρ = 1 000 кг/м^3.

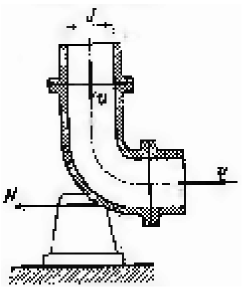


Рис. 17.4. До задачі 3.

<u>Розв’язання</u>

Оскільки в задачі визначається горизонтальна складова динамічної реакції, то запишемо теорему Ейлера у формі (17.21) в проекції на вісь x

$$m_c(\upsilon_{2x} - \upsilon_{1x}) = N.$$

Проекція початкової швидкості на дану вісь дорівнює нулю, тому теорема Ейлера набуває вигляду

$$N = m_c \upsilon_{2x} = m_c \upsilon.$$

Підставивши значення секундної маси з (17.20), остаточно отримуємо

$$N = m_c \upsilon = rSu \cdot u = rSu^2 = 1000 \cdot \frac{3{,}14 \cdot 0{,}5^2}{4} \cdot 1{,}2^2 = 282{,}6 \text{ (Н)}.$$

Задачу розв’язано.

<u>Завдання №17 до РГР</u>

17.1. Машиніст тепловоза вимикає двигун і починає гальмування в момент, коли тепловоз має швидкість υ_0 = 90 км/год. Вважаючи, що рух тепловоза відбувається по прямолінійній і горизонтальній ділянці, визначити через який час він зупиниться і яку відстань пройде, якщо сила гальмування постійна і складає 12% від ваги тепловозу.

Відповідь: t = 21,2 с, s = 265 м.

17.2. Визначити головний вектор кількості руху колеса вагою P = 52 Н, яке котиться по прямолінійній рейці, якщо центр мас колеса рухається по закону

$$x_C = 2{,}5t \text{ (м)}.$$

Відповідь: Q = 13,25 Н.

17.3. Визначити горизонтальну складову додаткової динамічної реакції стінок дифузора, якщо за 1 с витікає 0,5 м^3 води. Діаметр вхідного отвору D_1 = 250 мм, а вихідного – D_2 = 500 мм.

Відповідь: R = 3 825 Н.

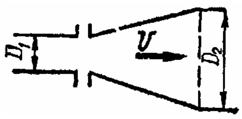


Рис. до задачі 17.3.

17.4. Снаряд протитанкової гармати, який має масу 6 кг, влучає в лобову броню танка масою M = 30 т під кутом 30° і рикошетить від нього. Найти, на скільки зміниться швидкість танку, якщо швидкість снаряда υ_1 = 500 м/с.
Відповідь: $\Delta\upsilon$ = 0,05 м/с.

17.5. Зрушивши з місця, автомобіль за 10 с розігнався до швидкості υ = 36 км/ч. Визначити силу тяги двигуна $F_{тяг}$, якщо маса автомобілю m = 1 500 кг, а всі його колеса ведучі. Опор руху автомобіля до уваги не брати.
Відповідь: $F_{тяг}$ = 1500 Н.

17.6. Незмінна механічна система складається з трьох матеріальних точок A, B і C однакової маси m = 1,5 кг, розташованих в вершинах рівнобічного трикутника і з'єднаних невагомими стержнями. Визначити модуль вектора кількості руху даної системи в положенні, вказаному на рисунку, якщо швидкості точок A і C дорівнюють $\upsilon_A = \upsilon_C$ = 1,5 м/с.
Відповідь: Q = 3,90 Н·с.

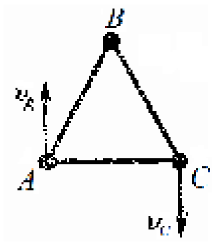


Рис. до задачі 17.6.

17.7. Два вагони масами m_1 = 20 т і m_2 = 30 т рухались зі швидкостями υ_1 = 3 м/с і υ_2 = 2,5 м/с назустріч один одному. Після зіткнення вагони зчіплюються і рухаються разом. Визначити швидкість вагонів після зчеплення.
Відповідь: u = 0,3 м/с.

17.8. Матеріальна точка маси m = 2,5 кг, отримавши початкову швидкість υ_0 = 24,5 м/с, почала рух угору по шорсткій горизонтальній площині, кут нахилу якої до горизонту дорівнює 30°. Визначити час підйому точки, якщо коефіцієнт тертя між нею і похилою площиною дорівнює f = 0,58.
Відповідь: t = 2,5 с.

17.9. Точка маси m = 2 кг рухається в площині xOy згідно рівнянь

$$x = 3\cos 5t \quad y = 4\sin 5t,$$

де x і y виражені в метрах. Визначити імпульс сили S за час, поки точка знаходиться в додатному квадранті.
Відповідь: S = 50 Н·с.

17.10. Визначити додаткову динамічну реакцію трубопроводу на ділянці раптового звуження діаметру з D_1 = 300 мм до D_2 = 200 мм, якщо швидкість води на першій ділянці υ_1 = 4 м/с.
Відповідь: R = 1 413 Н.

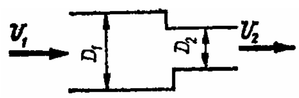


Рис. до задачі 17.10.

17.11. На вільну матеріальну точку маси m = 2 кг, яка рухається вздовж осі x, діє сила F = 10 Н в напрямку руху точки. Визначити швидкість точки через t = 6

с після з моменту початку дії сили, якщо початкова швидкість точки дорівнювала υ_0 = 2 м/с.
Відповідь: υ = 32 м/с.

17.12. Мисливець маси M = 70 кг стріляє з нерухомого човна масою m = 30 кг у горизонтальному напрямку. Нехтуючи опором води, визначити швидкість човна після вистрілу, якщо маса заряду m_1 = 40 г, а його початкова швидкість υ_1 = 300 м/с.
Відповідь: υ = 0,12 м/с.

17.13. Ствол гармати утворює кут α = 30° з горизонтом і має масу М = 11 000 кг, а маса снаряда m = 54 кг. Визначити швидкість вільного руху ствола гармати, якщо швидкість снаряда на виході з гармати υ_0 = 900 м/с.
Відповідь: υ = 3,82 м/с.

17.14. По похилій площині з кутом нахилу α = 30° до горизонту опускається без початкової швидкості вантаж. Визначити його швидкість через 3 с після початку спуску, якщо коефіцієнт тертя між вантажем і площиною f = 0,25.
Відповідь: υ = 7,36 м/с.

17.15. Автомобіль зупинився через 6 с після початку гальмування. Визначити його початкову швидкість υ_0, якщо коефіцієнт тертя ковзання між колесами і поверхнею дороги дорівнює f = 0,34.
Відповідь: υ_0 = 20 м/с.

17.16. Точка масою m = 2 кг рухається по колу з постійною швидкістю υ = 4 м/с. Визначити імпульс сили, яка діє на точку, за час, поки точка проходить чверть кола.
Відповідь: S = 11,3 Н·с.

17.17. Дві кулі A і B масами m_A = 5 кг і m_B = 3 кг відповідно, з'єднані з вертикальною віссю CD за допомогою стержня AB довжини 20 см і маси 10 кг. Точка O з'єднання стержня з віссю відстоїть на 5 см від кулі A. Вся система обертається навколо осі CD, роблячи 10 обертів за хвилину. Визначити кількість руху Q системи.
Відповідь: Q = 0,734 Н·с.

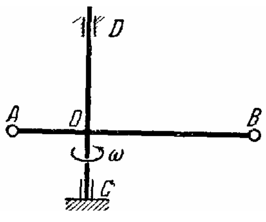


Рис. до задачі 17.17.

17.18. На нерухомому човні маси M = 80 кг знаходиться людина масою m = 60 кг. З якою швидкістю υ почне рухатись човен, якщо людина рушить по ній з відносною швидкістю u = 2 м/с?
Відповідь: υ = - 0,86 м/с.

17.19. З похилої площини, кут підйому якої α = 30°, рушило без початкової швидкості важке тіло. Визначити, яку швидкість буде мати тіло в момент, коли пройде 2 м, якщо коефіцієнт тертя між тілом і площиною f = 0,2.
Відповідь: υ = 3,58 м/с.

17.20. Визначити додаткову динамічну реакцію анкерної опори трубопроводу діаметром D = 2,5 м, якщо швидкість течії води в ньому υ = 8 м/с і кут α = 60°.
Відповідь: R = 314 159 Н.

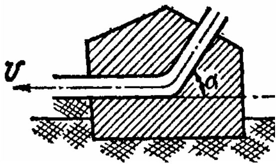


Рис. до задачі 17.20.

17.21. Колесо вагою P = 40 Н і радіусом R = 0,5 м котиться без ковзання по рейці, роблячи при цьому 20 обертів за хвилину. Визначити кількість руху колеса Q.
Відповідь: Q = 4,28 Н·с.

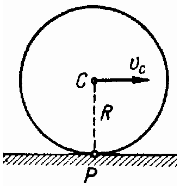


Рис. до задачі 17.21.

17.22. По горизонтальній платформі A, яка рухається за інерцією зі швидкістю υ_0 = 2 м/с, переміщується візок B з постійною відносною швидкістю u_0 = 1,2 м/с. В деякий момент часу візок був зупинений. Визначити швидкість платформи після зупинки візка, якщо маса платформи M = 500 кг, а маса візка m = 60 кг.
Відповідь: υ = 2,11 м/с.

Рис. до задачі 17.22.

17.23. Шків 1 радіуса R = 0,4 м обертається рівномірно з кутовою швидкістю ω = 2,5 м/с і підіймає вантаж маси m = 10 кг. Визначити модуль кількості руху вантажу.
Відповідь: Q = 10 Н·с.

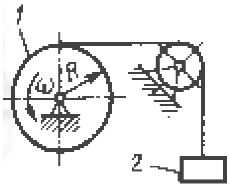


Рис. до задачі 17.23.

17.24. Диск радіуса R = 0,4 м обертається з кутовою швидкістю ω = 25 рад/с. По ободу диска рухається точка M маси m = 1 кг згідно закону

$$s = 2t^2 + 1.$$

Визначити модуль кількості руху цієї точки в момент часу t = 2 с.
Відповідь: Q = 18 Н·с.

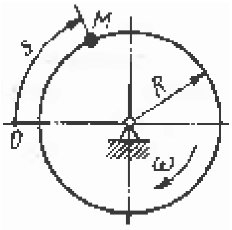


Рис. до задачі 17.24.

Глава Використання гіроскопів ***18. «Момент кількості руху матеріальної точки і системи»***

18.1. Момент кількості руху матеріальної точки

Якщо кількість руху є характеристикою поступального руху тіла, то при обертанні необхідно введення іншої міри механічного руху – моменту кількості руху матеріальної точки і системи.

Момент кількості руху матеріальної точки відносно центру О – векторна величина, яка дорівнює векторному добутку радіус-вектора точки на її кількість руху

$$\boldsymbol{k}_o = \boldsymbol{r}\times m\boldsymbol{v} \qquad (18.1)$$

Вектор $\boldsymbol{k}_o$ спрямований перпендикулярно площині, яка проходить через вектор $m\boldsymbol{v}$ і центр O, в ту сторону, звідки вектор $m\boldsymbol{v}$ видно таким, що обертає площину відносно центра O проти годинникової стрілки (рис. 18.1, а). Модуль вектора $\boldsymbol{k}_o$ дорівнює добутку кількості руху на плече відносно центра O

$$k_o = mvh. \qquad (18.2)$$

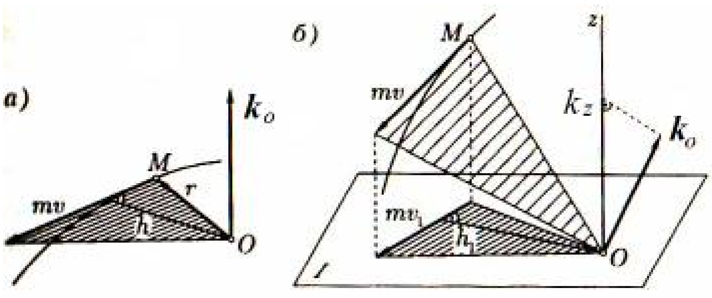


Рис. 18.1. Момент кількості руху відносно точки і осі.

Момент кількості руху матеріальної точки відносно осі z – скалярна величина, яка дорівнює узятому з відповідним знаком добутку проекції кількості руху на площину, перпендикулярну цій осі, на плече цієї проекції (рис. 18.1, б)

$$k_z = \pm\, mv_1\, h_1. \qquad (18.3)$$

Якщо дивлячись назустріч осі z, можна бачити проекцію $m\boldsymbol{v}$ такою, що обертає площину відносно центра O проти годинникової стрілки, то $k_z > 0$, інакше $k_z < 0$.

Проекції моментів кількості руху точки на координатні осі можна знайти із (18.1) наступним чином

$$\boldsymbol{k}_0 = \boldsymbol{r}\times m\boldsymbol{v} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ x & y & z \\ m\dot{x} & m\dot{y} & m\dot{z} \end{vmatrix} = \boldsymbol{i}\begin{vmatrix} y & z \\ m\dot{y} & m\dot{z} \end{vmatrix} - \boldsymbol{j}\begin{vmatrix} x & z \\ m\dot{x} & m\dot{z} \end{vmatrix} + k\begin{vmatrix} x & y \\ m\dot{x} & m\dot{y} \end{vmatrix} =$$

$$= \boldsymbol{i}\, m(y\dot{z} - z\dot{y}) - \boldsymbol{j}\, m(x\dot{z} - z\dot{x}) + \boldsymbol{k}\, m(x\dot{y} - y\dot{x}).$$

З іншого боку, момент кількості руху відносно центра можна виразити через проекції на осі декартової системи координат

$$\boldsymbol{k}_0 = \boldsymbol{i}\,k_x - \boldsymbol{j}\,k_y + \boldsymbol{k}\,k_z.$$

Прирівнюючи праві частини, отримуємо формули для визначення моментів кількостей руху відносно координатних осей

$$k_x = m(y\dot{z} - z\dot{y}); \quad k_y = m(x\dot{z} - z\dot{x}); \quad k_z = m(x\dot{y} - y\dot{x}). \qquad (18.4)$$

Розмірність моменту кількостей руху відносно центру і осі – кг·м^2/с або Н·м·с.

18.2. Теорема моментів відносно центра

Знаходимо похідні від обох частин (18.1)

$$\frac{d\boldsymbol{k}_0}{dt}=\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\times m\boldsymbol{v}+\boldsymbol{r}\times\frac{d(m\boldsymbol{v})}{dt}=\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\times m\boldsymbol{v}+\boldsymbol{r}\times m\frac{d(\boldsymbol{v})}{dt}.$$

$$\frac{d\boldsymbol{k}_0}{dt}=\boldsymbol{v}\times m\boldsymbol{v}+\boldsymbol{r}\times m\boldsymbol{a}.$$

Перший доданок дорівнює нулю за властивостями векторного добутку, тому

$$\frac{d\boldsymbol{k}_0}{dt}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}=\boldsymbol{M}_0(\boldsymbol{F}). \tag{18.5}$$

Теорема моментів відносно центру: похідна за часом від моменту кількості руху точки відносно будь-якого нерухомого центру дорівнює моменту діючої на точку сили відносно того ж центру.

В проекціях на координатні осі дана теорема має вигляд

$$\frac{dk_x}{dt}=M_x(\boldsymbol{F}),\ \frac{dk_y}{dt}=M_y(\boldsymbol{F}),\ \frac{dk_z}{dt}=M_z(\boldsymbol{F}). \tag{18.6}$$

Наслідки з теореми:

1. Якщо лінія дії сили $\boldsymbol{F}$ проходить через центр O, то її момент відносно цього центру дорівнює нулю і момент кількості руху залишається постійним

$$\boldsymbol{M}_0(\boldsymbol{F})=0\ \Rightarrow\frac{d\boldsymbol{k_o}}{dt}=0\ \Rightarrow\boldsymbol{k_o}=const. \tag{18.7}$$

2. Якщо момент сили $\boldsymbol{F}$ відносно якої-небудь осі дорівнює нулю, то момент кількості руху відносно цієї осі залишається постійним

$$M_x(\boldsymbol{F})=0\ \Rightarrow\frac{dk_{\boldsymbol{x}}}{dt}=0\ \Rightarrow k_{\boldsymbol{x}}=const. \tag{18.8}$$

Наслідок (18.7) зручно використовувати у випадку, коли лінія дії сили завжди проходить через нерухомий центр, що має місце при русі точки під дією центральної сили. В такому випадку момент даної сили відносно нерухомого центра буде дорівнювати нулю і момент кількості руху залишатиметься сталим.

Центральна – сила, лінія дії якої весь час проходить через нерухомий центр O. Прикладом є сили, з якими планети притягуються до Сонця.

Нехай матеріальна точка маси m рухається під дією центральної сили $\boldsymbol{F}$. Оскільки момент такої сили відносно нерухомого центру O дорівнює нулю, то згідно (18.7)

$$k_{\boldsymbol{O}}=const\Rightarrow r\times m\upsilon=const. \tag{18.9}$$

Введемо поняття секторної швидкості

$$\boldsymbol{v_s}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v}).$$

Тоді з (18.9) отримуємо

$$2m\boldsymbol{v}_s=const\Rightarrow\boldsymbol{v}_s=const. \tag{18.10}$$

Формула (18.10) зветься інтегралом площ, який широко застосовується при дослідженні руху планет навколо Сонця і штучних супутників навколо Землі. Секторна швидкість по визначенню

$$u_s=\frac{dS}{dt}=C\Rightarrow S=\int_0^t Cdt=Ct+C_1. \tag{18.11}$$

Останній вираз носить назву **теореми площ**: при русі матеріальної точки під дією центральної сили її радіус-вектор $\boldsymbol{r}$ описує площу, яка змінюється пропорційно часу.

З даної теореми витікає, що планети рухаються по своїй еліптичній орбіті нерівномірно. Чим ближче вони знаходяться до Сонця, тим швидше рухаються по орбітах. Проте площі, які описує радіус-вектор планети за однакові проміжки часу (рис. 18.2), залишаються однаковими, незалежно від того, знаходиться планета в перигелії P_1 (найближча до Сонця точка) чи в афелії P_2 (найвіддаленіша точка). Закон площ справедливий не тільки для руху планет, а й у інших випадках руху під дією центральної сили.

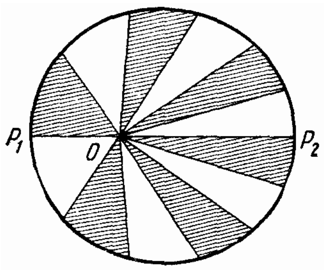


Рис. 18.2. Теорема площ.

18.3. Кінетичний (головний) момент механічної системи

Кінетичний момент механічної системи відносно центру O – векторна величина, яка дорівнює геометричній сумі моментів кількостей руху відносно даного центру усіх матеріальних точок системи

$$\boldsymbol{K}_o = \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{k}_{ko} = \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{r}_k \times m_k \boldsymbol{v}_k . \qquad (18.12)$$

Проектуючи (18.12) на координатні осі і враховуючи (18.4), отримуємо

$$K_x = \sum_{k=1}^{n} m_k (y_k \dot{z}_k - z_k \dot{y}_k), \; K_y = \sum_{k=1}^{n} m_k (z_k \dot{x}_k - x_k \dot{z}_k), \; K_z = \sum_{k=1}^{n} m_k (x_k \dot{y}_k - y_k \dot{x}_k).$$

Кінетичний момент тіла, яке обертається навколо нерухомої осі, можна представити у вигляду добутку моменту інерції тіла відносно цієї осі на кутову швидкість обертання тіла

$$K_z = I_z\, \omega. \qquad (18.13)$$

Якщо система складається з декількох тіл, що обертаються навколо однієї осі, то

$$\boldsymbol{K}_z = I_{1z}\omega_1 + I_{2z}\omega_2 + \ldots + I_{nz}\omega_n .$$

Тому кінетичний момент являється характеристикою обертового руху системи.

18.4 Теорема про зміну кінетичного моменту механічної системи.

Зміна моменту кількості руху для $\boldsymbol{k}$-ої точки механічної системи

$$\frac{d(\boldsymbol{r}_k \times m\boldsymbol{v}_k)}{dt} = \boldsymbol{M}(\boldsymbol{F}_k^e) + \boldsymbol{M}(\boldsymbol{F}_k^i).$$

Склавши такі рівняння для усіх точок і склавши їх, отримаємо

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{d(\boldsymbol{r}_k \times m\boldsymbol{v}_k)}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{M}_o(\boldsymbol{F}_k^e) + \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{M}_o(\boldsymbol{F}_k^i).$$

Проте з властивостей внутрішніх сил виходить, що друга сума в правій частині дорівнюватиме нулю, тому остаточно отримаємо

$$\frac{d\boldsymbol{K}_o}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{M}(\boldsymbol{F}_k^e) = \boldsymbol{M}_o^e \qquad (18.14)$$

теорему про зміну кінетичного моменту механічної системи: похідна за часом від кінетичного моменту системи відносно нерухомого центру O дорівнює головному моменту зовнішніх сил відносно того ж центру.

У проекціях на координатні осі дана теорема має вигляд

$$\frac{dK_{ox}}{dt}=M_{ox}^{e},\ \frac{dK_{oy}}{dt}=M_{oy}^{e},\ \frac{dK_{oz}}{dt}=M_{oz}^{e}. \qquad (18.15)$$

Наслідки з теореми:

1. Одними внутрішніми силами неможливо змінити кінетичний момент системи.
2. Якщо головний момент зовнішніх сил відносно деякої нерухомої точки дорівнює нулю, то кінетичний момент системи відносно того ж центру залишиться сталим за величиною і напрямом:

$$\sum_{k=1}^{n}\boldsymbol{M}_{o}^{e}=0\ \Rightarrow\frac{d\boldsymbol{K}_{o}}{dt}=0\ \Rightarrow\boldsymbol{K}_{o}=const. \qquad (18.16)$$

3. Якщо сума моментів усіх прикладених до системи зовнішніх сил відносно якої-небудь осі дорівнює нулю, то кінетичний момент кількостей руху системи відносно цієї осі буде величиною постійною:

$$\sum_{k=1}^{n}M_{oz}^{e}=0\ \Rightarrow\frac{dK_{oz}}{dt}=0\ \Rightarrow K_{oz}=const. \qquad (18.17)$$

Наслідки 2 і 3 називаються **законами збереження кінетичного моменту механічної системи**. Ними пояснюється здатність кішки при падінні з висоти перевертатися в повітрі та приземлятися на лапи. В цьому випадку зовнішня сила ваги кішки не створює моменту відносно її центра мас. Швидко обертаючи хвостом, кішка повертає своє тіло в протилежний бік, а кінетичний момент відносно центра ваги залишається таким, як і на початку падіння.

Підставимо в (18.15) значення кінетичного моменту системи відносно нерухомої осі у формі (18.13) і отримаємо

$$\frac{d\left(I_{z}w\right)}{dt}=M_{oz}^{e}\Rightarrow I_{z}e=I_{z}\frac{dw}{dt}=I_{z}\frac{d^{2}j}{dt^{2}}=M_{oz}^{e}. \qquad (18.18)$$

Рівняння (18.16) має назву **диференціального рівняння обертального руху твердого тіла** навколо нерухомої осі.

Якщо тіло рухається плоскопаралельно, то його рух можна представити як поступальний разом із полюсом і відносний обертальний навколо осі, що проходить через даний полюс перпендикулярно площині руху. При відносному русі необхідно враховувати коріолісові сили, проте якщо за полюс прийняти центр мас, момент цих сил дорівнюватиме нулю, а диференціальні рівняння плоского руху матимуть вигляд

$$M\ddot{x}_{C}=\sum_{k=1}^{n}F_{xk}^{e},\ M\ddot{y}_{C}=\sum_{k=1}^{n}F_{yk}^{e},\ J_{z}\ddot{j}=\sum_{k=1}^{n}M_{zk}^{e}. \qquad (18.19)$$

Питання для самоконтролю

1. Що називається моментом кількості руху матеріальної точки?
2. Сформулюйте теорему про зміну моменту кількості руху матеріальної точки?
3. Запишіть теорему про зміну кінетичного моменту механічної системи?
4. Яка сила називається центральною?
5. В якому випадку секторна швидкість є сталою величиною?

Завдання № 18. «Момент кількості руху матеріальної точки і системи»

Рекомендації до розв'язання задач

А) Момент кількості руху матеріальної точки відносно центра або осі

1. Вибрати систему умовно нерухомих осей.
2. Скласти схему сил, які діють на матеріальну точку.
3. Обчислити моменти сил відносно осей (або центру) і визначити, чи має місце якийсь із закони збереження моменту кількості руху точки.
4. Скласти необхідні рівняння та визначити шукані величини.

Б) Кінетичний момент механічної системи відносно центра чи осі

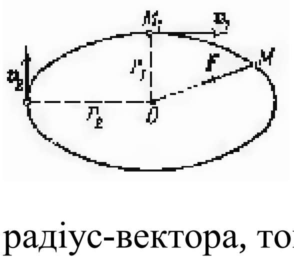
1. Визначити тіла чи точки, які утворюють систему.
2. Прикласти до системи зовнішні сили і показати реакції в'язей.
3. Вибрати систему координат або нерухомий центр.
4. Знайти головний момент зовнішніх сил відносно відповідної осі або центра.
5. Визначити кінетичний момент відносно осі або центра.
6. Проінтегрувати складене рівняння.
7. Якщо головний момент зовнішніх сил дорівнює нулю, застосувати відповідний закон збереження кінетичного моменту.

Приклад розв'язання задачі (момент кількості руху точки)

Задача 1. Точка M рухається навколо нерухомого центра під дією сили тяжіння до нього. Знайти її швидкість υ_1 в найбільш близькій до центра точці траєкторії, якщо в найбільш віддаленому від центра положенні точка мала швидкість υ_2 = 4 м/с. Відстань до найдальшого від центра положення $\boldsymbol{r}_2$ вчетверо більша за відстань $\boldsymbol{r}_1$.

Розв'язання

Дана точка рухається лише під дією центральної сили $\boldsymbol{F}$ (рис. 18.3). Оскільки ця сила завжди проходить через нерухомий центр O, то момент кількості руху точки M відносно даного центра залишається сталим. Як результат, при розв'язанні задачі слід застосовувати закон про збереження моменту кількості руху матеріальної точки (18.7)



$$\boldsymbol{M}_0(\boldsymbol{F}) = 0 \Rightarrow \frac{d\boldsymbol{k_o}}{dt} = 0 \Rightarrow \boldsymbol{k_o} = \boldsymbol{r} \times m\boldsymbol{\upsilon} = const.$$

Рис. 18.3. До задачі 1.

Швидкість в кожній точці траєкторії перпендикулярна до радіус-вектора, тому закон збереження можна записати в наступному вигляді

$$m u_1 r_1 = m u_2 r_2 \Rightarrow u_1 r_1 = u_2 r_2 .$$

Виразивши з останнього рівняння υ_1 і підставивши числові значення, отримаємо шукану величину

$$u_1 = \frac{u_2 r_2}{r_1} = \frac{4 \cdot 4 r_1}{r_1} = 16 \text{ (м/с)}.$$

Задачу розв'язано.

Приклад розв'язання задачі (кінетичний момент механічної системи)

Задача 2. Тверде тіло приводиться до обертання із стану спокою постійним за величиною моментом M = 20 Н·м. При цьому виникає момент сил опору, який визначається по формулі

$$M_{on} = 4w \text{ (Н·м)}.$$

Визначити закон зміни кутової швидкості твердого тіла, якщо його момент інерції відносно осі обертання I_z = 0,5 кг·м^2.

Розв'язання

Оскільки в даній задачі розглядається тверде тіло, яке обертається навколо нерухомої осі, то для її розв'язання застосуємо рівняння (18.18)

$$I_z \frac{dw}{dt} = \sum_{k=1}^{n} M_{kz}^e.$$

На тіло діють два моменти – постійний за величиною момент рушійних сил M і момент сил опору M_{on}, який залежить від кутової швидкості тіла. Підставивши в основне рівняння, отримуємо

$$I_z \frac{dw}{dt} = M - M_{on} = 20 - 4w \Rightarrow \frac{dw}{dt} = \frac{20-4w}{I_z} = 40 - 8w.$$

Отримане диференціальне рівняння є рівнянням зі змінними, що розділяються. Знайдемо його розв'язання, взявши до уваги нульові початкові умови

$$\frac{dw}{dt} = 40 - 8w \Rightarrow \int_0^w \frac{dw}{40-8w} = \int_0^t dt.$$

$$t = -\frac{1}{8}\int_0^w \frac{d(40-8w)}{40-8w} = -\frac{1}{8}\ln|40-8w|\Big|_0^w = \frac{1}{8}\left(\ln 40 - \ln|40-8w|\right).$$

Оскільки в задачі необхідно визначити закон зміни кутової швидкості, то спростимо праву частину, пропотенціюємо рівняння і виразимо з нього ω

$$t == \frac{1}{8}\ln\left|\frac{40}{40-8w}\right| \Rightarrow \ln\left|\frac{40}{40-8w}\right| = 8t;\ \ \frac{40}{40-8w} = e^{8t}.$$

$$\frac{40-8w}{40} = e^{-8t} \Rightarrow 1 - 0{,}2w = e^{-8t};\ 0{,}2w = 1 - e^{-8t}.$$

$$w = \frac{1-e^{-8t}}{0{,}2} = 5\left(1 - e^{-8t}\right).$$

Задачу розв'язано.

Завдання №18 до РГР

18.1. Шків радіуса R = 20 см і маси m = 3,2 кг приводиться до обертання за допомогою пасової передачі, причому сила натягу ведучого пасу вдвічі більша за силу натягу веденого, тобто $T_1 = 2T_2$. Визначити сили натягу пасів, якщо шків, маса якого зосереджена на ободі, обертається з кутовим прискоренням ε = 1,5 рад/с^2 і знаходиться під дією моменту опору M_{on} = 10 Н·м.

Відповідь: T_1 = 102 Н, T_2 = 51 Н.

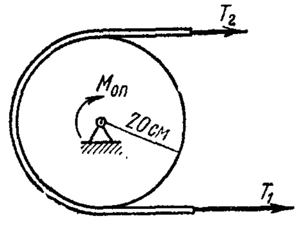
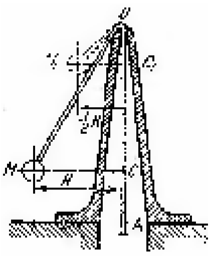


Рис. до задачі 18.1.

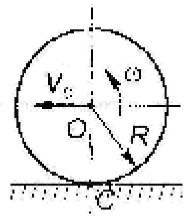
18.2. Гальмівний шків масою m = 2 кг і діаметром d = 80 см має форму диска і обертається з кутовою швидкістю ω_0 = 31,4 рад/с. Для зупинки вала до нього притискають гальмівну колодку з силою Q = 5 Н. Визначити час до зупинки вала, якщо коефіцієнт тертя між ним і колодкою f = 0,4. Тертям в підшипниках і масою вала знехтувати.
Відповідь: t = 0,628 с.

18.3. Вантаж M_1 прив'язаний до кінця довгої нерозтяжної нитки M_1OA, частина якої вставлена у вертикальну трубку, і обертається навколо осі трубки по колу радіуса M_1C_1 = R з частотою n_1 = 100 об/хв. Нитку повільно втягують всередину трубки до довжини зовнішньої частини OM_2 = R/2. Знайти кутову швидкість обертання вантажу в новому положенні.



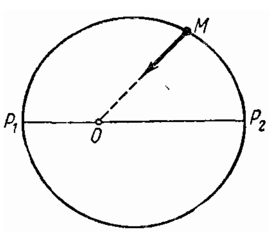
Відповідь: ω_2 = 42 рад/с.
Рис. до задачі 18.3.

18.4. Знайти кінетичний момент диска маси m = 6 кг і радіуса R = 40 см відносно миттєвої осі обертання, перпендикулярної до його площини. Диск котиться без ковзання по прямолінійній рейці з кутовою швидкістю ω = 20 рад/с.



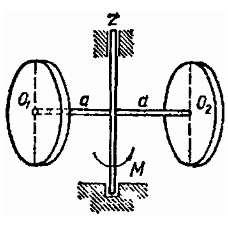
Відповідь: K = 28,8 кг·м^2/с.
Рис. до задачі 18.4.

18.5. Штучний супутник Землі M рухається по еліптичній орбіті під дією центральної сили тяжіння з боку Землі, яка знаходиться в одному з фокусів еліпса. Визначити швидкість υ_2 точки в афелії, якщо його швидкість в перигелії дорівнювала υ_1 = 8 км/с, а відстані відповідно OP_1 = 6 500 км, OP_2 = 6 600 км.



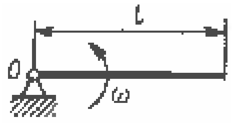
Відповідь: υ_2 = 7,88 км/с.
Рис. до задачі 18.5.

18.6. Два однорідні диски радіуса R = 20 см і маси m = 500 г кожен, розташовані у вертикальних площинах на кінцях стержня O_1O_2 довжини 80 см. Дана система обертається навколо вертикальної осі z під дією крутного моменту M = 2 Н·м. Визначити кутове прискорення дисків.



Відповідь: ε = 11,8 рад/с^2.
Рис. до задачі 18.6.

18.7. Однорідний стержень довжини l = 1 м і маси m = 6 кг обертається з кутовою швидкістю ω = 10 рад/с. Визначити кінетичний момент стержня відносно центра O.



Відповідь: K = 20 кг·м^2/с.
Рис. до задачі 18.7.

18.8. Гвинт човна має момент інерції I_0 = 600 кг·м^2 і приводиться до обертання із стану спокою обертальним моментом M = 1 600 Н·м. На гвинт з боку води діє момент сил опору, пропорційний другому ступеню кутової швидкості

$$M_{оп} = 4w^2 (\text{Н·м}).$$

Визначити проміжок часу, через який кутова швидкість гвинта буде дорівнювати ω = 15 рад/с.

Відповідь: t = 7,1 с.

18.9. Два твердих тіла обертаються незалежно одне від одного відносно однієї й тієї ж нерухомої осі з кутовими швидкостями ω_1 = 5 рад/с і ω_2 = 10 рад/с. Моменти інерції тіл відносно даної осі дорівнюють відповідно I_1 = 20 кг·м^2 і I_2 = 15 кг·м^2. З якою кутовою швидкістю будуть обертатися обидва тіла, якщо їх з'єднати в процесі руху?

Відповідь: ω = 7,14 рад/с.

18.10. Стержень довжиною l = 1 м і масою m = 3 кг має на кінцях кульки діаметром d = 10 см і масою m_1 = 2 кг кожна. Який крутний момент M необхідно прикласти до стержня, аби привести його до обертання з кутовим прискоренням ε = 2 рад/с^2 відносно осі, що проходить через центр тяжіння системи перпендикулярно до стержня?

Відповідь: M = 2,9 Н·м.

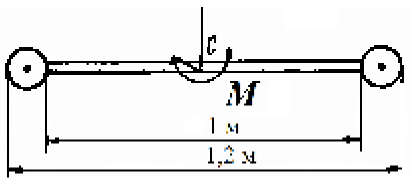


Рис. до задачі 18.10.

18.11. Астероїд обертається навколо Сонця по еліптичній орбіті, причому його швидкість в найближчій до Сонця точці дорівнює υ_1 = 24 км/с. Визначити швидкість υ_2 астероїда в найбільш віддаленій від Сонця точці, якщо дані відстані відносяться як 1:3.

Відповідь: υ_2 = 8 км/с.

18.12. Ротор гіроскопа маси 30 кг в момент вимкнення обертався з частотою n_0 = 12 000 об/хв. Визначити момент сил опору, прикладений до ротора, відносно осі обертання, якщо він зупинився через 30 хвилин. Осьовий радіус інерції ротора ρ = 10 см, момент сил опору вважати постійним.

Відповідь: $M_{оп}$ = 0,21 Н·м.

18.13. Циліндр 1 масою m = 80 кг і діаметром d = 25 см вільно обертається навколо горизонтальної осі. На циліндр намотана гнучка нитка, яка несе на кінці вантаж маси m_1 = 10 кг, який під дією власної ваги обертає барабан. Визначити кутове прискорення циліндра.

Відповідь: ε = 19,5 рад/с^2.

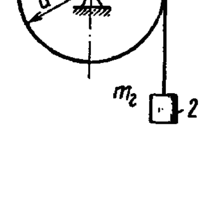


Рис. до задачі 18.13.

18.14. Для швидкого гальмування великих маховиків застосовують електричне гальмо. Струми Фуко в масі маховика при його русі біля електричних обмоток створюють гальмівний момент

$$M_1 = 12w \text{ (Н·м)}.$$

Момент опору руху від тертя в підшипниках можна прийняти постійним і рівним M_2 = 25 Н·м. Визначити, за який час зупиниться маховик, що обертався з кутовою швидкістю ω = 5 рад/с, якщо його радіус R = 0,5 м і маса m = 100 кг.
Відповідь: t = 0,91 с.

18.15. Вантажі P_1 = 50 Н і P_2 = 80 Н дією власної ваги приводять до обертання подвійний блок, який складається з двох однорідних дисків радіусів r_1 = 20 см і r_2 = 30 см. Нехтуючи вагою ниток і силами тертя, визначити кутове прискорення системи, якщо вага кожного з дисків відповідно Q_1 = 60 Н і Q_2 = 90 Н.
Відповідь: ε = 63,0 рад/с^2.

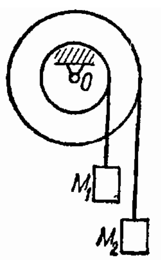


Рис. до задачі 18.15.

18.16. Однорідний диск радіуса R = 40 см і маси m = 2,5 кг рівномірно обертається навколо вертикальної осі Az, яка проходить через точку A на ободі диска. Визначити кінетичний момент диска, якщо кутова швидкість його обертання ω = 20 рад/с.
Відповідь: K = 12 кг·м^2/с.

18.17. Махове колесо з моментом інерції I_0 = 20 кг·м^2 в момент початку гальмування мав кутову швидкість ω_0 = 4 рад/с. Визначити час, за який його кутова швидкість зменшиться вдвічі, якщо момент сил опору пропорційний квадрату кутової швидкості і дорівнює

$$M_{on} = 2w^2 \text{ Н·м}.$$

Відповідь: t = 2,5 с.

18.18. Гальмівний шків маси m = 2 кг і діаметра d = 0,8 м обертається за інерцією з кутовою швидкістю ω_0 = 10 рад/с. Для зупинки шківа до нього притискають гальмівну колодку із силою Q = 5 Н. За скільки секунд вал зупиниться, якщо коефіцієнт тертя між шківом і колодками f = 0,4? Тертям в підшипниках вала знехтувати, а шків вважати однорідним диском.
Відповідь: t = 6,28 с.

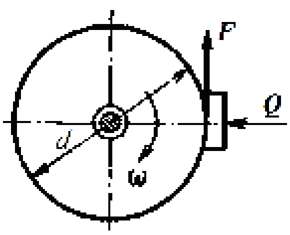


Рис. до задачі 18.18.

18.19. Махове колесо з моментом інерції відносно нерухомої осі обертання I = 15 кг·м^2 розганяється із стану спокою під дією постійного обертального моменту M = 75 Н·м. Нехтуючи опорами руху, визначити, через який час махове колесо отримає задану частоту обертання n = 150 об/хв.
Відповідь: t = 3,14 с.

18.20. Визначити, з якою швидкістю v необхідно було б пустити по екватору з заходу на схід потяг маси m = 2 000 тон, аби збільшити тривалість доби на одну секунду. Землю вважати однорідною кулею радіуса R = 6 000 км і маси M = $5 \cdot 10^{24}$ кг.
Відповідь: $v = 5{,}05 \cdot 10^{15}$ м/с.

18.21. Кругла горизонтальна платформа маси M = 120 кг і радіуса R = 1,5 м може обертатися без тертя навколо вертикальної осі z, яка проходить через центр O платформи. По платформі за годинниковою стрілкою рухається за законом

$$s = t^2 \text{ (м)}$$

чоловік маси m = 70 кг, залишаючись на незмінній відстані r = 0,8 м від осі обертання. Визначити кутову швидкість платформи в момент часу t = 4 с, якщо в початковий момент вона знаходилась в стані спокою.
Відповідь: ω = 3,32 рад/с.

18.22. Гальмівний шків масою m = 2 кг і діаметром d = 80 см має форму диска і обертається з кутовою швидкістю ω_0 = 31,4 рад/с. Для зупинки вала до нього притискають гальмівну колодку з силою Q = 5 Н. Визначити, скільки обертів до зупинки зробить вал, якщо коефіцієнт тертя між ним і колодкою f = 0,4. Тертям в підшипниках і масою вала знехтувати.
Відповідь: N = 15,7 обертів.

18.23. До кінця стержня AB довжиною l = 20 см прикріплена кулька A маси m = 80 г. Вся система обертається навколо нерухомої осі OO_1 всередині посудини з рідиною з початковою кутовою швидкістю ω_0 = 20 рад/с, причому сила опору пропорційна кутовій швидкості і визначається по формулі

$$R_{on} = 0{,}004w \text{ Н.}$$

Нехтуючи масою стержня, визначити, за який час кутова швидкість системи зменшиться вдвічі.
Відповідь: t = 2,77 с.

18.24. Кругла горизонтальна платформа маси M = 100 кг і радіуса R = 1 м може обертатися без тертя навколо вертикальної осі z, яка проходить через центр O платформи. По платформі за годинниковою стрілкою рухається за законом

$$s = t$$

чоловік маси m = 60 кг, залишаючись на незмінній відстані r = 0,8 м від осі обертання. Визначити кутове прискорення платформи, якщо в початковий момент вона знаходилась в стані спокою.
Відповідь: ω = 0,77 рад/с.

Глава 19. «Робота і енергія»

19.1. Робота сили

Як зазначалося раніше, кількість руху є мірою лише при переході механічного руху тіла в механічний. Мірою дії сили в цьому випадку є вектор імпульсу сили ***S***. При перетворенні механічного руху в іншу форму руху матерії в якості такої міри виступає ***енергія*** – характеристика руху матерії в усіх її видах. В такому випадку мірою дії сили є ***робота*** – фізична величина, яка характеризує перетворення механічного руху і енергії між тілами.

Елементарна робота сили – фізична величина, яка дорівнює скалярному добутку сили на диференціал радіус-вектора точки її прикладення

$$dA = \boldsymbol{F}d\boldsymbol{r} \tag{19.1}$$

Повна робота сили – фізична величина, яка дорівнює скалярному добутку сили, що діє на тіло, на переміщення тіла, викликане даною силою

$$A = \int_{M_0}^{M} \boldsymbol{F}d\boldsymbol{r}. \tag{19.2}$$

Теорема про роботу рівнодійної: робота рівнодійної системи сил на будь-якому переміщенні точки її прикладення дорівнює алгебричній сумі робот складових сил на цьому ж переміщенні

$$A = \int_{M_0}^{M} \boldsymbol{R}d\boldsymbol{r} = \int_{M_0}^{M} \left(\sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{F}_k \right) d\boldsymbol{r} = \sum_{k=1}^{n} \int_{M_0}^{M} \boldsymbol{F}_k d\boldsymbol{r} = \sum_{k=1}^{n} A_k. \tag{19.3}$$

Повну роботу сили (19.2) можна записати в прямокутній декартовій системі координат наступним чином

$$A = \int_{M_0}^{M} \left(F_x dx + F_y dy + F_z dz \right). \tag{19.4}$$

Слід зазначити, що інтеграли в формулах (19.1) – (19.3) є криволінійними, але від них можна перейти до визначного інтеграла

$$A = \int_{t_0}^{t} \left(F_x u_x + F_y u_y + F_z u_z \right) dt. \tag{19.5}$$

У випадку постійної сили формула (19.1) набуває вигляду

$$A = (\boldsymbol{F} \cdot \Delta\boldsymbol{r}) = Fr\cos a\ . \tag{19.6}$$

Теорема про роботу постійної сили на криволінійному переміщенні: робота постійної сили залежить лише від найкоротшої відстані між початковою і кінцевою точками і дорівнює скалярному добутку вектора сили на вектор переміщення

$$A = (\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{MM}_1) = F \cdot MM_1 \cos a\ . \tag{19.7}$$

Якщо тіло рухається прямолінійно (рис. 19.1), то модуль вектора переміщення дорівнює пройденому шляху ($MM_1 = s$), тому

$$A = Fs\cos a \tag{19.8}$$

Рис. 19.1. Робота сили на прямолінійному шляху.

Окремі випадки знаходження роботи постійної сили:

1. Напрям дії сили співпадає з напрямом переміщення ($\alpha = 0^\circ$). Тоді робота

$$A = Fs\cos 0° = Fs,$$

тобто вона завжди додатна і максимальна.

2. Напрям дії сили протилежний до напряму переміщення (α = 180˚). Робота в такому випадку

$$A = Fs\cos 180° = -Fs$$

завжди від'ємна, а подібні сили звуться силами опору.

3. Напрям дії сили перпендикулярний напряму переміщення (α = 90˚)

$$A = Fs\cos 90° = 0.$$

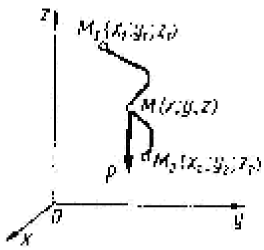
В цьому випадку сила роботи не здійснює.

19.2. Визначення роботи в окремих випадках руху

А) *Робота сили ваги*

Якщо матеріальна точка ваги $\boldsymbol{P}$ рухається з положення M_1 у положення M_2 (рис. 19.2), то проекції діючих сил на координатні осі мають вигляд

$$F_x = 0,\ F_y = 0,\ F_z = -P \Rightarrow A = \int_{M_2}^{M_1} (-P)dz = -P(z_2 - z_1) = \pm mgh. \qquad (19.9)$$



З (19.9) видно, що робота, виконувана силою ваги $\boldsymbol{P}$, не залежить від форми траєкторії, а залежить лише від крайніх її положень. Додатна робота має місце, коли точка M рухається вниз.

Рис. 19.2. Робота сили ваги.

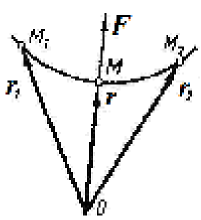
Б) *Робота центральної сили*

Якщо матеріальна точка рухається з положення M_1 у положення M_2 під дією центральної сили, величина якої залежить лише від відстані до нерухомого центру (рис. 19.3), то проекція сили на напрямок радіус вектора $\boldsymbol{r}$

$$\boldsymbol{F} = F_r(r)\frac{\boldsymbol{r}}{r}.$$

Користуючись формулою (19.1) знаходимо роботу

$$A = \int_{r_1}^{r_2} F_r(r)\frac{\boldsymbol{r}}{r}d\boldsymbol{r} = \int_{r_1}^{r_2} F_r(r)dr, \qquad (19.10)$$



яка в разі центральної сили не залежить від форми траєкторії точки, а залежить лише від її початкового і кінцевого положень. По формулі (19.10) можна знайти роботу сили всесвітнього тяжіння, кулонівської взаємодії, тощо.

Рис. 19.3. Робота центральної сили.

В) *Робота сили пружності*

Якщо початкове положення точки M відповідає недеформованій пружині, то робота сили пружності при деформації пружини на $\Delta\boldsymbol{r}$ (рис. 19.4)

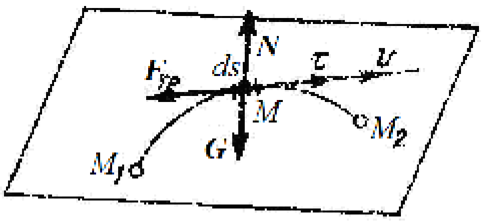
$$A = -c\int_{r_1}^{r_2}(r - r_0)dr = \left.\frac{-c(r - r_0)^2}{2}\right|_{r_1}^{r_2} = \frac{-c\left[(r_2 - r_0)^2 - (r_1 - r_0)^2\right]}{2}. \qquad (19.11)$$

В (19.11) входять радіус-вектори початкового і кінцевого положень вільного кінця пружини, тому і робота сили пружності не залежить від форми траєкторії.

Г) *Робота сили тертя ковзання*

Якщо важка точка M рухається по шорсткій горизонтальній площині (рис. 19.4), то на неї будуть діяти сила тяжіння $\boldsymbol{G}$, нормальна реакція поверхні $\boldsymbol{N}$ і сила тертя ковзання $\boldsymbol{F}_{тр}$, спрямована по дотичній до траєкторії у бік, протилежний швидкості. Робота сили тертя

$$A = \int_{M_1}^{M_2} F_t\, ds = -\int_{M_2}^{M_1} fNds = -fNs = -fmgs. \qquad (19.12)$$

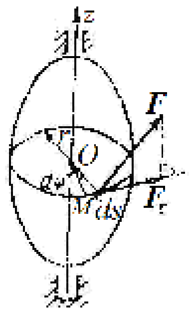


З (19.12) видно, що робота сили тертя завжди від'ємна і залежить від довжини переміщення, тому інтеграл в формулі криволінійний.

Рис. 19.4. Робота сили тертя ковзання.

Д) *Робота моменту сили, прикладеного до твердого тіла, що обертається*

Якщо тіло обертається навколо нерухомої осі z під дією сили $\boldsymbol{F}$, прикладеної в точці M (рис. 19.5), то робота буде визначатись по формулі



$$A = \int_{M_1}^{M_2} F_t\, ds.$$

Виразивши переміщення через кут повороту, знайдемо роботу

$$ds = rdj \Rightarrow A = \int_{M_1}^{M_2} F_t\, rdj = \int_{M_1}^{M_2} M_z dj. \qquad (19.13)$$

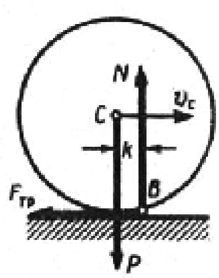
Рис. 19.5. Робота моменту сили.

Якщо момент сили відносно осі z є постійним, то (19.13) набуває вигляду

$$A = \int_{j_0}^{j_1} M_z dj = M_z (j_1 - j_0). \qquad (19.14)$$

Є) *Робота сили тертя кочення*

Опір коченню здійснює пара сил $\boldsymbol{P}$ и $\boldsymbol{N}$, що виникає при деформації опорної поверхні тіла (рис. 19.6). Як відомо з (19.14), робота в такому випадку



$$dA_{коч} = -M\, d\varphi = -kN\, d\varphi,$$

де k – коефіцієнт тертя кочення. За умови постійної сили реакції $N = const$ повна робота матиме вигляд

$$A_{кач} = -kN(\varphi_1 - \varphi_0). \qquad (19.15)$$

Оскільки величина сили тертя кочення дуже мала, то за наявності інших видів опору, нею можна знехтувати.

Рис. 19.6. Робота сили тертя при коченні.

Ж) *Робота зовнішніх сил, прикладених до твердого тіла*

Якщо до точок твердого тіла прикладена сукупність зовнішніх сил $\boldsymbol{F}^e_k$ у точках M_i ($i = 1\ldots k$) системи, то елементарна робота цих сил

$$dA = \boldsymbol{F}^e d\boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{M}_0^e dj \qquad (19.16)$$

дорівнює сумі роботи головного вектора зовнішніх сил, яка здійснюється на елементарному переміщенні полюса *O*, і роботи головного моменту цих сил, обчисленій відносно центра *O* при елементарному обертанні тіла навколо осі, що проходить через даний центр.

19.3. Потужність і ККД

Одну й ту ж саму роботу можна виконати за різний час, тому в динаміці вводиться поняття потужності. *Потужність* – фізична величина, що характеризує швидкість виконання роботи силою, яка прикладена до матеріальної точки. Потужність можна представити

$$N = \frac{\boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}}{dt} = \boldsymbol{F}\,\boldsymbol{\upsilon}, \qquad (19.17)$$

як скалярний добуток сили на швидкість точки її прикладення. З (19.17) витікає, що при їзді по рівній якісній дорозі, де нема значних опорів руху і необхідно отримати велику швидкість, вмикають вищі передачі. Нижчі передачі вмикають при русі на підйом або на поганій дорозі, де необхідно отримати якнайбільшу силу тяги, нехай і за рахунок втрати швидкості.

В проекціях на осі декартової системи координат (19.17) матиме вигляд

$$N = F_x u_x + F_y u_y + F_z u_z. \qquad (19.18)$$

Потужність не можна розглядати як похідну від роботи, оскільки остання не є повним диференціалом від деякої функції координат. Тому визначення потужності можливе за допомогою часткового диференціала

$$N = \frac{dA}{dt}. \qquad (19.19)$$

У випадку твердого тіла потужність зовнішніх сил, прикладених до нього, дорівнює сумі скалярного добутку головного вектора на швидкість полюса *O* і скалярного добутку головного моменту цих сил відносно даного полюса на кутову швидкість обертання тіла

$$N = \boldsymbol{F}^e \boldsymbol{\upsilon}_0 + \boldsymbol{M}_0^e \boldsymbol{\omega}. \qquad (19.20)$$

В окремому випадку, коли тіло здійснює обертання навколо нерухомої осі, причому момент залишається незмінним, потужність буде визначатись по формулі

$$N = M_z w_z.$$

У деяких випадках використовують *середню потужність* – роботу, виконану за скінчений проміжок часу Δt

$$N_{сер} = \frac{\Delta A}{\Delta t}. \qquad (19.21)$$

Одиниця виміру потужності – ват (Вт): 1 Вт = 1 Дж/1с.

Усі сили, що мають місце при роботі будь-якої машини чи механізму, можна розділити на рушійні (робота яких додатна) і сили опору (робота яких від’ємна). Сили опору, в свою чергу, поділяються на корисні і шкідливі. Робота проти корисних сил опору є корисною роботою, для виконання якої і призначена дана машина. Робота проти шкідливих сил опору (тертя деталей, подолання опору середовища) називається роботою втрат. Таким чином повна робота, яку здійснює сила, складається з корисної роботи і роботи втрат:

$$A = A_1 + A_2,$$

де A – повна робота; A_1 – корисна робота; A_2 – робота втрат. Відношення корисної роботи до повної роботи називається *коефіцієнтом корисної дії* η:

$$h = \frac{корисна\ робота}{повна\ робота} = \frac{A_1}{A}. \qquad (19.22)$$

Коефіцієнт корисної дії (ККД) менше одиниці, оскільки повна робота A завжди більше корисної роботи A_1.

19.4. Кінетична енергія матеріальної точки

В механіці існують дві міри механічного руху – векторна (кількість руху) і скалярна (кінетична енергія), які є основою для встановлення загальних теорем динаміки. В релятивістській механіці користуються складною мірою руху – тензором енергії-імпульсу, який об'єднує обидві вищеназвані міри механічного руху, проте в рамках класичної механіки їх розглядають як самостійні міри із власною сферою застосування.

Енергія – міра механічного руху матерії, яка характеризує перехід однієї форми руху в іншу, наприклад механічної в електричну або теплову. В цьому полягає відміна енергії від кількості руху, яка описує перетворення руху без зміни самої форми, тобто перехід механічного руху в механічний.

Кінетична енергія матеріальної точки – скалярна величина T, що дорівнює половині добутку маси точки на квадрат її швидкості

$$T = \frac{mu^2}{2}. \qquad (19.23)$$

Одиниця виміру кінетичної енергії – Джоуль (Дж). Формули кінетичної енергії можуть мати різний вигляд залежно від способу задання руху. Так при **векторному способі** задання кінетична енергія знаходиться по формулі

$$T = \frac{m}{2}\frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt}. \qquad (19.24)$$

При **координатному способі** задання руху кінетична енергія

$$T = \frac{m}{2}\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right]. \qquad (19.25)$$

При **натуральному способі** задання кінетична енергія має вигляд

$$T = \frac{m}{2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2. \qquad (19.26)$$

19.5. Кінетична енергія твердого тіла

Кінетична енергія твердого тіла – скалярна величина T, що дорівнює сумі кінетичних енергій усіх точок тіла

$$T = \frac{\sum_{k=1}^{n} m_k u_k^2}{2}. \qquad (19.27)$$

Кінетична енергія твердого тіла (як і матеріальної точки) є додатною величиною, яка обертається в нуль лише у випадку спокою системи.

В загальному випадку руху кінетична енергія твердого тіла визначається **теоремою Кеніга**: кінетична енергія механічної системи дорівнює сумі кінетичної енергії усієї маси системи, яка зосереджена в довільному полюсі *p* і рухається з його швидкістю, і кінетичної енергії відносного руху системи при її обертанні відносно даного полюса

$$T = \frac{Mu_p^2}{2} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} m_k \left(u_k^{від}\right)^2 + Mu_p u_C^{від}, \qquad (19.28)$$

де $\upsilon_C^{від}$ – швидкість відносного руху центра мас системи по відношенню до рухомої системи координат із центром у полюсі. У ряді випадків доцільно за початок рухомої системи координат (полюс) вибирати центр мас системи. В такому випадку кінетична енергія системи

$$T = \frac{Mu_C^2}{2} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} m_k \left(u_k^{від}\right)^2 \qquad (19.29)$$

складатиметься із кінетичної енергії руху усієї системи зі швидкістю центра мас і кінетичної енергії відносного руху системи при її обертанні навколо центра мас.

З формул (19.28) і (19.29) можна отримати вирази кінетичної енергії для окремих випадків руху. Так, при **поступальному русі** твердого тіла всі його точки рухаються зі швидкістю центра мас, тому другий доданок в (19.29) буде дорівняти нулю, а кінетична енергія

$$T = \frac{Mu^2}{2} \qquad (19.30)$$

дорівнює половині добутку маси тіла на квадрат його швидкості.

При **обертальному русі** твердого тіла навколо нерухомої осі швидкість поступального руху центра мас дорівнює нулю $\upsilon_C = 0$, крім того дорівнюють нулю кутові швидкості обертання навколо двох інших осей декартової системи координат. В такому випадку кінетична енергія тіла

$$T = T_z^{об} = \frac{I_z w_z^2}{2}. \qquad (19.31)$$

дорівнює половині добутку моменту інерції тіла відносно даної осі на квадрат його кутової швидкості.

При **плоскопаралельному русі** кінетична енергія тіла дорівнює сумі енергії поступального руху із швидкістю центру мас і енергії обертального руху тіла навколо центру мас

$$T_{плоск} = \frac{Mu_C^2}{2} + \frac{J_C w^2}{2}. \qquad (19.32)$$

Дана формула справедлива у випадку, коли за полюс береться центр мас тіла. В будь-якому іншому випадку дана формула набуває вигляду (19.28).

При **сферичному русі** твердого тіла швидкість його поступального руху теж дорівнюватиме нулю $\upsilon_C = 0$. Тоді кінетична енергія тіла

$$T = T_O^{об} = \frac{I_x w_x^2}{2} + \frac{I_y w_y^2}{2} + \frac{I_z w_z^2}{2}. \qquad (19.33)$$

В даній формулі система координат $Oxyz$ незмінно пов'язана з тілом, причому координатні осі є головними осями інерції. З іншого боку, сферичний рух можна представити як обертання навколо миттєвої осі, тоді формула кінетичної енергії матиме вигляд

$$T = T_O^{об} = \frac{I_w w^2}{2}. \qquad (19.34)$$

При **русі вільного тіла в просторі**, коли полюс не є центром мас, необхідно користуватися формулою (19.28) у розгорнутому вигляді

$$T = \frac{m}{2}\left(u_{Ox}^2 + u_{Oy}^2 + u_{Oz}^2\right) + m\begin{vmatrix} u_{Ox} & u_{Oy} & u_{Oz} \\ w_x & w_y & w_z \\ x_C & y_C & z_C \end{vmatrix} + \frac{I_x w_x^2 + I_y w_y^2 + I_z w_z^2}{2} - \qquad (19.35)$$

$$-I_{xy} w_x w_y - I_{xz} w_x w_z - I_{yz} w_y w_z .$$

19.6. Теореми про зміну кінетичної енергії матеріальної точки

Запишемо основне рівняння динаміки для точки, що знаходиться під дією системи сил

$$m\boldsymbol{a} = \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{F}_k .$$

Далі проведемо заміну змінної, виключивши час і виразивши прискорення точки через її швидкість і переміщення

$$\boldsymbol{a} = \frac{d\boldsymbol{\upsilon}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{\upsilon}}{d\boldsymbol{r}}\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \boldsymbol{\upsilon}\frac{d\boldsymbol{\upsilon}}{d\boldsymbol{r}},$$

після чого підставимо в початкове рівняння

$$m\boldsymbol{\upsilon}\frac{d\boldsymbol{\upsilon}}{d\boldsymbol{r}} = \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{F}_k \Rightarrow d\left(\frac{m\upsilon^2}{2}\right) = \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{F}_k d\boldsymbol{r}. \qquad (19.36)$$

В (19.1) було введене поняття елементарної роботи – фізичної величини, яка дорівнює скалярному добутку сили або системи сил на елементарне переміщення, викликане дією даної сили (системи)

$$dA = \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{F}_k d\boldsymbol{r}.$$

Підставивши елементарну роботу в (19.36), остаточно отримаємо

$$d\left(\frac{m\upsilon^2}{2}\right) = \sum_{k=1}^{n} dA \qquad (19.37)$$

теорему про зміну кінетичної енергії точки в диференціальній формі: диференціал кінетичної енергії матеріальної точки при деякому її переміщенні дорівнює алгебричній сумі елементарних робіт усіх сил, що діють на точку під час її переміщення**.**

Після інтегрування (19.37) отримаємо

$$\frac{mu_1^2}{2} - \frac{mu_0^2}{2} = \sum_{k=1}^{n} A \qquad (19.38)$$

теорему про зміну кінетичної енергії матеріальної точки в інтегральній формі: зміна кінетичної енергії точки при деякому її переміщенні дорівнює алгебричній сумі робіт усіх діючих на точку сил на тому ж переміщенні.

19.7. Теорема про зміну кінетичної енергії системи

Нехай механічна система складається з *n* матеріальних точок. Тоді для ***k***-ої точки зміна кінетичної енергії

$$d(\frac{m_k u_k^2}{2}) = dA_k^e + dA_k^i.$$

Зміна кінетичної енергії усієї механічної системи

$$dT = d(\sum_{k=1}^{n} \frac{m_k u_k^2}{2}) = \sum_{k=1}^{n} dA_k^e + \sum_{k=1}^{n} dA_k^i. \qquad (19.39)$$

Формула (19.39) є **теоремою про зміну кінетичної енергії механічної системи в диференціальній формі**: диференціал кінетичної енергії механічної системи дорівнює алгебричній сумі елементарних робіт зовнішніх і внутрішніх сил, що прикладені до системи.

Інтегруючи (19.39), отримуємо **теорему про зміну кінетичної енергії механічної системи в інтегральній формі**:

$$T_1 - T_0 = A_k^e + A_k^i \qquad (19.40)$$

зміна кінетичної енергії механічної системи на скінчених відрізках шляху, пройдених точками системи, дорівнює роботі зовнішніх і внутрішніх сил, що прикладені до точок системи на цих же відрізках шляху.

Незмінна – механічна система, в якій відстань між будь-якими її точками в процесі руху залишається сталою. Приміром такої системи є ***тверде тіло***. У разі незмінної системи сума робіт внутрішніх сил дорівнює нулю, тому теорема (19.40) набуває вигляду

$$T_1 - T_0 = A_k^e. \qquad (19.41)$$

Згідно (19.41), зміна кінетичної енергії твердого тіла на скінчених відрізках шляху, пройдених його точками, дорівнює роботі зовнішніх сил, що прикладені до точок тіла на цих же відрізках шляху.

19.8. Кінетична енергія невільної механічної системи

Нехай на механічну систему накладені стаціонарні (незмінні в часі) в’язі. Всі сили, що діють на систему, поділяються на активні і реакції в’язей. Тоді теорема про зміну кінетичної енергії невільної механічної системи матиме вигляд

$$dT = dA^a + dA^r$$

Припустимо, що всі в’язі, накладені на систему, є ідеальними. *Ідеальні в’язі* – в’язі, наявність яких не впливає на зміну кінетичної енергії системи. Для них сума робіт усіх реакцій на будь-яких елементарних переміщеннях дорівнює нулю

$$dA^r = \sum_{k=1}^{n} dA_k^r = 0.$$

До ідеальних в’язей можна віднести підшипники кочення, абсолютно гнучкі і нерозтяжні канати і троси, абсолютно тверді стержні, циліндричні та сферичні шарніри.

Ідеальна система – механічна система, в якій діють лише ідеальні в’язі. Для таких систем зміна кінетичної енергії на будь-якому її переміщенні дорівнює сумі робіт зовнішніх і внутрішніх активних сил

$$dT = \sum_{k=1}^{n} dA_k^a \Rightarrow T_1 - T_0 = \sum_{k=1}^{n} A_k^a. \qquad (19.42)$$

У випадку ідеальних в’язей дана теорема дозволяє виключити з рівнянь руху всі наперед невідомі реакції в’язей.

19.9. Силове поле і силова функція

В природі часто зустрічаються сили, що залежать лише від координат точки. Такі сили називаються позиційними, до них належать сили пружності, електричної, магнітної та гравітаційної взаємодії. Область, в кожній точці якої на рухому матеріальну точку діють позиційні сили, зветься *силовим полем*. Таке поле може бути стаціонарним і нестаціонарним.

Стаціонарне силове поле – частина простору, в якій на рухому точку діє сила, що залежить лише від координат і не залежить від часу

$$F = F(x, y, z).$$

Нестаціонарне силове поле – частина простору, в якій на рухому точку діє сила, що залежить не тільки від координат, а й від часу

$$F = F(t, x, y, z).$$

В свою чергу стаціонарне силове поле може бути потенціальним і непотенціальним. *Потенціальне силове поле* – частина простору, де робота сил поля, які діють на рухому матеріальну точку, не залежить від форми траєкторії, а визначається лише початковим і кінцевим положенням точки. Потенціальне силове поле має силову функцію, яка є його однозначною характеристикою.

Силова функція U – робота, яка виконується силою поля при переході матеріальної точки із початкового положення 0 задане положення *M*

$$U(x, y, z) = A_{0M}.$$

В потенціальному силовому полі частинні похідні від силової функції за координатами дорівнюють проекціям сили поля на відповідні координатні осі

$$F_x = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad F_y = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad F_z = \frac{\partial U}{\partial z}. \qquad (19.43)$$

Тоді повна сила, що діє на матеріальну точку в силовому полі, визначається за формулою

$$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{i}\frac{\partial U}{\partial x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial U}{\partial y}+\boldsymbol{k}\frac{\partial U}{\partial z}=\mathbf{grad}\,U=\nabla U, \qquad (19.44)$$

тобто є градієнтом силової функції. *Градієнт* – вектор, проекції якого на осі координат виражаються частинними похідними від скалярної функції за координатами.

З (19.43) можна визначити критерії існування силової функції

$$\frac{\partial F_x}{\partial y}=\frac{\partial F_y}{\partial x};\ \frac{\partial F_x}{\partial z}=\frac{\partial F_z}{\partial x};\ \frac{\partial F_y}{\partial z}=\frac{\partial F_z}{\partial y}. \qquad (19.45)$$

Елементарна робота сили поля, враховуючи (19.43) і (19.44), може бути виражена по формулі

$$dA=F_x dx+F_y dy+F_z dz=\frac{\partial U}{\partial x}dx+\frac{\partial U}{\partial y}dy+\frac{\partial U}{\partial z}dz=dU. \qquad (19.46)$$

Для отримання виразу для роботи сили поля на кінцевому шляху точки її прикладення необхідно знайти інтеграл від (19.46)

$$A=\int_{M_0}^{M_1}dU=U_1-U_0. \qquad (19.47)$$

Теорема: робота сили, що діє на матеріальну точку під час її руху в потенціальному полі, дорівнює різниці силових функцій в її кінцевому і початковому положеннях

Наслідки з теореми:

1. Лише в потенціальному силовому полі елементарна робота є повним диференціалом силової функції.
2. Під час руху матеріальної точки по замкненій траєкторії у потенціальному силовому полі робота сил на цій траєкторії дорівнює нулю.

З другого наслідку видно, що робота сил потенціального поля на будь-якому переміщенні точки визначається лише початковими і кінцевими координатами.

19.10. Потенціальна енергія

Еквіпотенціальні поверхні (поверхні рівня) – геометричне місце точок, на якому силова функція залишається сталою

$$U(x,y,z)=\text{const.}$$

Дане рівняння описує сімейство еквіпотенціальних поверхонь. Якщо силова функція даної поверхні дорівнює нулю, то таку поверхню називають поверхнею нульового рівня. Для характеристики властивостей механічного руху в потенціальному силовому полі вводять поняття потенціальної енергії.

Потенціальною енергією матеріальної точки або механічної системи в даному положенні називається скалярна величина *П*, що дорівнює роботі сил поля під час руху точки або системи із заданого положення *М* в її нульове положення.

$$П(x, y, z) = A_{(M0)} = -U(x, y, z). \qquad (19.48)$$

З (19.48) видно, що потенціальна енергія в будь-якій точці поля дорівнює значенню силової функції в цій точці, взятому з протилежним знаком. При цьому повна робота сили в потенціальному полі дорівнює різниці потенціальної енергії в початковому і кінцевому положенні точки або системи

$$A = \Pi_1 - \Pi_2.$$

Поєднавши співвідношення (19.43) і (19.48), можна виразити проекції сили через потенціальну енергію точки

$$F_x = -\frac{\partial \Pi}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial \Pi}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial \Pi}{\partial z}. \tag{19.49}$$

На практиці найчастіше доводиться стикатись з полями сили тяжіння і сили пружності. Нижче наведені приклади визначення потенціальної енергії:

1. Для поля ***сили тяжіння*** за поверхню нульового рівня приймається горизонтальна площина на рівні моря. Тоді потенціальна енергія точки або тіла на висоті h над рівнем моря

$$\Pi = \int_0^h F dz = mg\int_0^h dz = mgh. \tag{19.50}$$

2. Для поля ***сили пружності*** нульовим рівнем буде недеформований стан тіла, тоді потенціальна енергія при деформації уздовж однієї осі на величину x

$$\Pi = \int_0^x F dx = \int_0^x cx dx = \frac{cx^2}{2}. \tag{19.51}$$

19.11. Закон збереження механічної енергії

Кінетична енергія T і потенціальна енергія Π є окремими складовими повної механічної енергії тіла або точки E

$$E = T + \Pi. \tag{19.52}$$

В теоретичній механіці також часто застосовується різниця між кінетичною та потенціальною енергіями

$$L = T - \Pi, \tag{19.53}$$

яка називається *функцією Лагранжа*.

Закон збереження механічної енергії: під час руху матеріальної точки або системи в потенціальному силовому полі механічна енергія залишається незмінною

$$T + \Pi = \mathrm{const}. \tag{19.54}$$

Сили, що мають потенціал, називають *консервативними*; сили ж, що не мають потенціалу, звуться *дисипативними*, або розсіювальними. Для дисипативних сил закон збереження механічної роботи не виконується, оскільки частина механічної енергії переходить в інші форми (теплову, електричну). До дисипативних сил відносяться сили тертя і сили опору середовища.

Закон (19.54) є окремим випадком загального **закону збереження і перетворення енергії**: в замкненій системі енергія нікуди не зникає і ні звідки не з’являється, вона лише переходить з одного виду до іншого.

Питання для самоконтролю

1. Яка величина називається кінетичною енергією матеріальної точки?
2. Скільки складових у виразі для кінетичної енергії системи?
3. Що таке робота сили і як її визначити?
4. В якому випадку робота сили при русі тіла дорівнює нулю?
5. Що називається силовою функцією?
6. Запишіть критерій потенціальності силового поля.

Завдання № 19. «Робота і енергія»

Рекомендації до розв'язання задач

А) Кінетична енергія матеріальної точки

1. Обрати систему координатних осей і скласти схему сил, що діють на матеріальну точку в процесі її руху.
2. У випадку постійних сил задачу розв'язувати за допомогою теореми про зміну кінетичної енергії матеріальної точки в інтегральній формі, у випадку сил, що залежать від відстані, швидкості або часу використати теорему в диференціальній формі.
3. Визначити швидкість матеріальної точки на початку і в кінці переміщення.
4. Визначити роботу усіх сил під час руху точки, вважаючи при цьому роботу сил опору руху від'ємною.
5. Скласти рівняння зміни кінетичної енергії системи у відповідній формі і визначити з нього невідому величину.

Б) Кінетична енергія механічної системи (твердого тіла)

1. Визначити склад механічної системи, що розглядається, обрати систему координат і зобразити дану систему в поточному положенні.
2. Показати на рисунку усі силові фактори (сили і моменти), що діють на дану систему.
3. Визначити кінетичну енергію на початку і в кінці переміщення.
4. Визначити роботу усіх зовнішніх і внутрішніх сил і моментів на вказаному переміщенні.
5. Скласти рівняння зміни кінетичної енергії системи у відповідній формі, після чого визначити шукану величину.

Приклад розв'язання задачі (робота сили)

Задача 1. На матеріальну точку діє сила, проекції якої на осі декартової системи координат мають вигляд

$$F_x = xy^2, \quad F_y = x^2 y, \quad F_z = z^2.$$

Визначити роботу даної сили при переміщенні точки з положення M_0 (0, 2, 3) в положення M_1 (1, 2, 3). Положення точки задані в метрах, а проекції сил в ньютонах.

Розв'язання

По-перше з'ясуємо, чи існує у даному випадку силова функція. Для цього знайдемо частинні похідні і перевіримо умову (19.43)

$$\frac{\partial F_y}{\partial x}=\frac{\partial\left(x^2 y\right)}{\partial x}=2xy;\ \ \frac{\partial F_x}{\partial y}=\frac{\partial\left(xy^2\right)}{\partial y}=2xy.$$

$$\frac{\partial F_x}{\partial z}=\frac{\partial\left(x^2 y\right)}{\partial z}=0;\ \ \frac{\partial F_z}{\partial x}=\frac{\partial\left(z^2\right)}{\partial x}=0.$$

$$\frac{\partial F_y}{\partial z}=\frac{\partial\left(x^2 y\right)}{\partial z}=0;\ \ \frac{\partial F_z}{\partial y}=\frac{\partial\left(z^2\right)}{\partial y}=0.$$

Умови виконуються і силова функція існує.

Елементарну роботу знаходимо по формулі (19.46), підставивши в неї умови задачі

$$dA=F_x dx+F_y dy+F_z dz=\left(xy^2\right)dx+\left(x^2 y\right)dy+\left(z^2\right)dz;$$

$$dA=d\left(\frac{x^2y^2}{2}\right)+d\left(\frac{x^2y^2}{2}\right)+d\left(\frac{z^3}{3}\right)=d\left(\frac{x^2y^2}{2}+\frac{x^2y^2}{2}+\frac{z^3}{3}\right)=d\left(x^2y^2+\frac{z^3}{3}\right).$$

Знаходимо силову функцію, скориставшись формулою (19.46)

$$dA=dU\Rightarrow dU=d\left(x^2y^2+\frac{z^3}{3}\right)\Rightarrow U=x^2y^2+\frac{z^3}{3}+C.$$

Значення силової функції в початковій і кінцевій точках

$$U_0=0+\frac{3^3}{3}=9+C;\ \ U_1=1\cdot 2^2+\frac{3^3}{3}=13+C.$$

Згідно (19.47), робота дорівнює

$$A=U_1-U_0=13+C-9-C=4\ (\text{Дж}).$$

Задачу розв'язано.

Приклад розв'язання задачі (кінетична енергія точки)

Задача 2. Ударний маятник копра для динамічних досліджень матеріалів починає рух без початкової швидкості з положення *M*, в якому стержень *OM* довжини l = 1,1 м утворює кут φ = 15° з вертикаллю. Нехтуючи силами тертя та масою стержня, визначити швидкість ударної частини маятника в момент її удару по зразку в точці *B*.

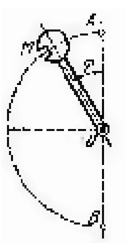


Рис. 19.7. До задачі 2.

Розв'язання

Оскільки за умовами задачі масою стержня можна знехтувати, то ударну частину маятника представимо як матеріальну точку. Оскільки досліджувана точка М знаходиться лише під дією постійної за величиною сили тяжіння, то згідно рекомендацій, слід застосувати теорему про зміну кінетичної енергії точки в інтегральній формі. Дана теорема має вигляд

$$\frac{mu_1^2}{2}-\frac{mu_0^2}{2}=\sum_{k=1}^{n}A=mgh.$$

Поле сили тяжіння є потенціальним, тому робота сили буде визначатись лише початковою і кінцевою висотами і не буде залежати від форми траєкторії. Знаходимо висоту падіння маятника

$$h = OM\cos j + OB = l\cos 15^\circ + l = 1{,}1(0{,}966 + 1) = 2{,}16\,(\text{м}).$$

Знаходимо кінцеву швидкість маятника, зауваживши, що його початкова швидкість дорівнювала нулю

$$\frac{mu_1^2}{2} = mgh \Rightarrow \frac{u_1^2}{2} = gh \Rightarrow u_1 = \sqrt{2gh} = \sqrt{2\cdot 9{,}81\cdot 2{,}16} = 6{,}5\,(\text{м/с}).$$

Задачу розв’язано.

<u>Приклад розв’язання задачі (кінетична енергія системи)</u>

Задача 3. Планетарний механізм приводиться до руху в горизонтальний площині за допомогою кривошипа *ОА* довжини *l* = 60 см, який з’єднує осі трьох однакових коліс 1, 2 і 3 (рис. 19.8). Колесо 1 нерухоме, а кутова швидкість кривошипа ω = 2 рад/с. Вага кожного колеса M_1 = 20 Н, а вага кривошипа M_2 = 4 Н. Визначити кінетичну енергію системи, вважаючи колеса однорідними дисками, а кривошип – однорідним стержнем.

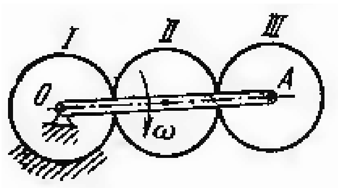


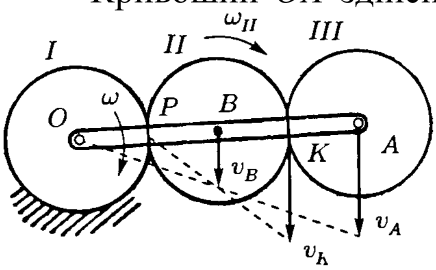
Рис. 19.8. До задачі 3.

<u>Розв’язання</u>

Оскільки колесо *I* нерухоме, то кінетична енергія системи буде сумою кінетичних енергій коліс *II* і *III* та кривошипа *OA*

$$T = T_{II} + T_{III} + T_{OA}.$$

Кривошип *OA* здійснює обертальний рух, тому його кінетичну енергію знайдемо по формулі



$$T_{OA} = \frac{Iw^2}{2} = \frac{M_2 l^2}{3}\cdot\frac{w^2}{2} = \frac{4\cdot 0{,}6^2\cdot 2^2}{6} = 1 \quad (\text{Дж}).$$

Спочатку знайдемо швидкість точки *A* на кінці кривошипу

$$u_A = w\cdot OA = wl = 2\cdot 0{,}6 = 1{,}2\,(\text{м/с}).$$

Далі розглянемо рух колес *II* і *III*. Швидкість точки на *B* осі колеса *II*

$$u_B = w\cdot OB = \frac{wl}{2} = \frac{2\cdot 0{,}6}{2} = 0{,}6\,(\text{м/с}).$$

Оскільки колесо *I* нерухоме, а між колесами нема ковзання, то кутова швидкість другого колеса

$$w_{II} = \frac{u_B}{r} = \frac{u_B}{l/4} = \frac{4\cdot 0{,}6}{0{,}6} = 4\,(\text{рад/с}).$$

Кінетична енергія другого колеса

$$T_{II} = \frac{M_1 u_B^2}{2} + \frac{I_B w_{II}^2}{2} = \frac{M_1 u_B^2}{2} + \frac{M_1 r^2}{2}\cdot\frac{w_{II}^2}{2} = \frac{20\cdot 0{,}6^2}{2} + \frac{20\cdot 0{,}15^2\cdot 4^2}{4} = 5{,}4\,(\text{Дж}).$$

Швидкість точки К зачеплення коліс *II* і *III*

$$u_K = w_{II}\cdot 2r = \frac{w_{II} l}{2} = \frac{4\cdot 0{,}6}{2} = 1{,}2\,(\text{м/с}).$$

Швидкості точок *K* і *A* однакові, тому колесо *III* рухається поступально (ω_{III} = 0), а його кінетична енергія

$$T_{III} = \frac{M_1 u_A^2}{2} = \frac{20 \cdot 1{,}2^2}{2} = 14{,}4\,(\text{Дж}).$$

Шукана кінетична енергія системи

$$T = 5{,}4 + 14{,}4 + 1 = 20{,}8\ (\text{Дж}).$$

Задачу розв'язано.

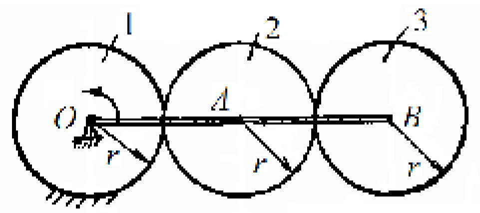
Завдання №19 до РГР

19.1. На матеріальну точку діє сила, проекції якої на осі декартової системи координат мають вигляд

$$F_x = 2x + y,\quad F_y = x + z^2,\quad F_z = 2yz + 1.$$

Визначити роботу даної сили при переміщенні точки з положення M_0 (1, 2, 3) в положення M_1 (2, 3, 4). Положення точки задані в сантиметрах, а проекції сил в ньютонах.
Відповідь: A = 0,38 Дж.

19.2. Планетарний механізм приводиться до руху в горизонтальний площині за допомогою водила OB = 80 см, яке з'єднує осі трьох однакових коліс 1, 2 і 3. Колесо 1 нерухоме, а кутова швидкість водила ω = 5 рад/с. Вага кожного колеса P = 20 Н, вага водила Q = 4 Н. Визначити кінетичну енергію системи, вважаючи колеса однорідними дисками, а водило – однорідним стержнем.



Відповідь: T = 23,5 Дж.
Рис. до задачі 19.2.

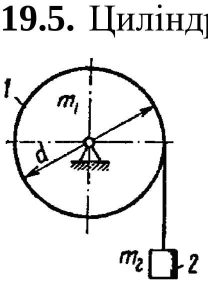
19.3. Потяг масою m = 200 т з виключеним двигуном гальмується силами опору, величина яких залежить від швидкості і визначається по формулі

$$R_{on} = 5000 + 200u\ (\text{Н}).$$

Визначити відстань, яку пройде потяг до зупинки, якщо на момент вимкнення двигуна його швидкість дорівнювала υ_0 = 20 м/с.
Відповідь: υ = 5 305 м.

19.4. Визначити потужність машини, яка підіймає 80 разів за хвилину молот вагою P = 5 000 Н на висоту h = 1 м, якщо її коефіцієнт корисної дії η = 0,75.
Відповідь: N = 8 888,9 Вт.

19.5. Циліндр 1 маси m_1 = 78 кг і діаметра d = 24 см може вільно обертатися навколо горизонтальної осі. На циліндр намотана гнучка нитка з вантажем 2 маси m_2 = 10 кг. Визначити кінетичну енергію системи через t = 4 с після початку руху.



Відповідь: T = 1 559 Дж.
Рис. до задачі 19.5.

19.6. Тілу A, яке знаходилось на шорсткій горизонтальній площині, надали швидкість υ_0 = 5 м/с. Визначити шлях, пройдений тілом до зупинки, якщо коефіцієнт тертя між тілом і площиною дорівнює f = 0,35.
Відповідь: s = 3,64 м.

19.7. Циліндричний вал діаметром d = 10 см і масою m = 50 кг, на який насаджене махове колесо діаметром d_1 = 2 м і масою m_1 = 3 000 кг, обертається за інерцією. Визначити, скільки обертів зробить вал до зупинки, якщо в момент вимкнення двигуна він мав частоту n = 60 об/хв. Коефіцієнт тертя в підшипниках f = 0,05.
Відповідь: k = 63 оберти.

19.8. Хокеїст, знаходячись на відстані 10 м від воріт, надає шайбі швидкість υ_0 = 8 м/с. Шайба, ковзаючи по поверхні льоду, потрапляє у ворота зі швидкістю υ_1 = 7,7 м/с. Визначити коефіцієнт тертя ковзання між шайбою і льодом.
Відповідь: f = 0,024.

19.9. Тонкостінний циліндр радіуса R = 0,5 м котиться без ковзання по горизонтальній площині. Визначити шлях, пройдений ним до зупинки, якщо в початковий момент часу кутова швидкість циліндра ω_0 = 4 рад/с, а коефіцієнт тертя кочення k = 0,01 м.
Відповідь: s = 20,4 м.

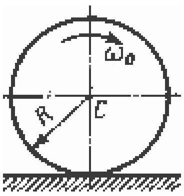


Рис. до задачі 19.9.

19.10. Тонкий диск масою m = 2 кг котиться по горизонтальній площині так, що швидкість його центра дорівнює υ_C = 2,5 м/с. Визначити кінетичну енергію даного диска.
Відповідь: T = 9,38 Дж.

19.11. Маховик вагою P = 7,5 кН обертається з частотою n = 900 об/хв. Визначити потужність, яку отримує маховик від двигуна, якщо діаметр вала d = 20 см, а коефіцієнт тертя в підшипнику f = 0,02.
Відповідь: N = 1 414 Вт.

19.12. Однорідний диск маси m = 30 кг і радіуса R = 1 м починає обертатися із стану спокою навколо власної осі з кутовим прискоренням ε = 2 рад/с^2. Визначити кінетичну енергію диска через t = 2 с після початку його руху.
Відповідь: T = 120 Дж.

19.13. Трос довжини l = 3 м і маси m_1 = 2 кг, намотаний на барабан маси m_2 = 1 кг, несе на кінці вантаж маси m_3 = 5 кг. Вважаючи масу барабана рівномірно розподіленою по ободу і нехтуючи товщиною троса, визначити швидкість вантажу в момент, коли довжина частини троса, що звішується, дорівнюватиме x = 2 м.
Відповідь: υ = 5,27 м/с.

19.14. Тіло маси m = 1 400 кг має початкову швидкість υ_0 = 12 м/с і рухається за інерцією. Через 100 м його швидкість зменшується до величини υ = 3,3 м/с. Визначити величину сили опору, яку долає тіло.
Відповідь: R_{on} = 932 Н.

19.15. Вантаж маси m = 4 кг дією власної ваги приводить до обертання циліндр радіуса R = 0,4 м, момент інерції якого відносно осі обертання I = 0,2 кг·м^2. Визначити кінетичну енергію системи в момент часу, коли швидкість вантажу дорівнює υ = 2 м/с.
Відповідь: T = 10,5 Дж.

19.16. Визначити необхідну потужність електродвигуна лебідки, яка має підіймати кліть з будівельними матеріалами загальною масою m = 1 500 кг на висоту h = 15 м за час t = 25 с. Коефіцієнт корисної дії лебідки η = 0,75.
Відповідь: N = 11 772 Вт.

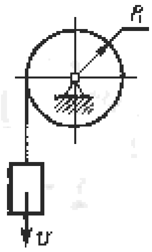


Рис. до задачі 19.16.

19.17. Силова функція потенціального силового поля має вигляд

$$U = 8x + 2y^2 + 3z^2 \text{ (Дж)}.$$

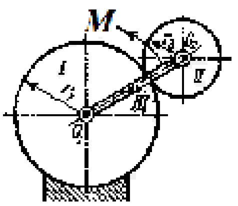
Визначити модуль сили F, що діє на матеріальну точку в положенні, яке визначається координатами (0, 0, 1).
Відповідь: F = 10 Н.

19.18. В тролейбусі з інерційним двигуном на кожній проміжній зупинці маховик за три хвилини розганяється з 1500 до 3000 об/хв. Після цього, обертаючись за інерцією, він приводить до руху тролейбус. Маса маховика m = 1,5 т, його діаметр d = 1,6 м. Вважаючи маховик однорідним диском, знайти середню потужність двигуна, що розганяє маховик.
Відповідь: N = 98,7 кВт.

19.19. Тілу A, яке знаходилось на шорсткій похилій площині з кутом нахилу α = 30°, надали швидкість υ_0 = 5 м/с, спрямовану вздовж похилої площини угору. Визначити шлях, пройдений тілом до зупинки, якщо коефіцієнт тертя між тілом і площиною дорівнює f = 0,35.
Відповідь: s = 1,50 м.

19.20. Визначити роботу, яку здійснює працівник, переміщуючи по горизонтальній підлозі вантаж маси m = 40 кг на відстань s = 6 м, якщо коефіцієнт тертя між вантажем і підлогою f = 0,25.
Відповідь: A = 588,6 Дж.

19.21. Епіциклічний механізм приводиться до руху в горизонтальній площині із стану спокою постійним обертовим моментом M = 6 Н·м, прикладеним до кривошипа O_1O_2. Визначити кутову швидкість кривошипа як функцію від кута повороту, якщо радіус нерухомого колеса r_1 = 20 см, радіус рухомого колеса r_2 = 10 см і вага P = 20 Н, вага кривошипа Q = 10 Н.

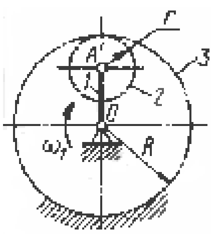


Відповідь: $\omega = 6{,}26\varphi^{1/2}$ рад/с.

Рис. до задачі 19.21.

19.22. Тілу, що знаходиться на похилій площині з кутом нахилу до горизонту α = 45°, надали початкову швидкість υ_0 = 8 м/с, напрямлену вздовж площини угору. Визначити, з якою швидкістю тіло повернеться у початкове положення, якщо коефіцієнт тертя між ним і площиною f = 0,25.
Відповідь: υ = 5,53 м/с.

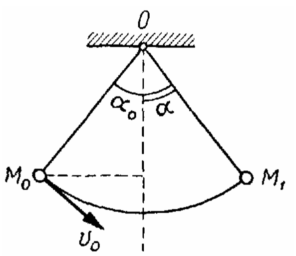
19.23. Кривошип 1 обертається з кутовою швидкістю ω = 10 рад/с і приводить до руху колесо 2 маси m = 1 кг, яке можна вважати однорідним диском. Момент інерції кривошипа відносно осі обертання I = 0,1 кг·м^2, радіус $R = 3r$ = 0,6 м. Визначить кінетичну енергію механізму.



Відповідь: T = 13,4 Дж.

Рис. до задачі 19.23.

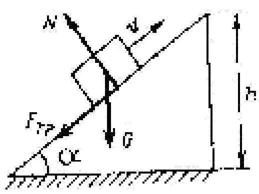
19.24. Нитка довжиною l = 2 м відхилена від положення рівноваги на кут α_0 = 40°, після чого прив'язаному до неї вантажу надано швидкість υ_0 = 3,2 м/с. Нехтуючи опором руху вантажу, визначити максимальний кут відхилення від горизонталі нитки в інший бік.



Відповідь: α_{max} = 60°.

Рис. до задачі 19.24.

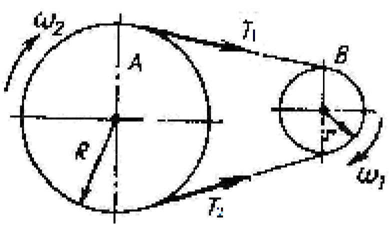
19.25. По похилій площині, яка утворює кут α = 45° з горизонтом, на висоту h з постійною швидкістю підіймається вантаж вагою G. Визначити коефіцієнт корисної дії похилої площини, якщо коефіцієнт тертя між вантажем і площиною f = 0,3.



Відповідь: η = 0,77.

Рис. до задачі 19.25.

19.26. Шків A радіуса R = 40 см отримує рух від шківа B радіуса r = 15 см, який обертається з кутовою швидкістю ω_1 = 6 рад/с. Натяг верхньої ведучої гілки паса T_1 = 50 Н вдвічі більший за натяг веденої гілки T_2. Визначити потужність на шківі A, нехтуючи ковзанням паса на шківах.



Відповідь: N = 22,5 Вт.

Рис. до задачі 19.26.

Глава 20. "Динаміка сферичного руху твердого тіла"

20.1. Кінетичні моменти твердого тіла при сферичному русі

Кінетичний момент твердого тіла, що здійснює сферичний рух, відносно довільного центра O визначається по формулі

$$\boldsymbol{K}_o = \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{r}_k \times m_k \boldsymbol{v}_k \,. \tag{20.1}$$

Зв'язок лінійної і кутової швидкостей виражається співвідношенням

$$\boldsymbol{v}_k = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_k ,$$

де $\boldsymbol{\omega}$ – вектор кутової швидкості тіла, $\boldsymbol{r}_k$ – радіус-вектор, проведений з центра O до k-ої точки. Підставивши в початкову формулу, отримаємо

$$\boldsymbol{K}_o = \sum_{k=1}^{n} m_k \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{r}_k \cdot \boldsymbol{r}_k) - \sum_{k=1}^{n} m_k \boldsymbol{r}_k (w \cdot \boldsymbol{r}_k) = \boldsymbol{\omega} \sum_{k=1}^{n} m_k \boldsymbol{r}_k^2 - \sum_{k=1}^{n} m_k \boldsymbol{r}_k (w \cdot \boldsymbol{r}_k).$$

Враховуючи, що відстань від точки до початку координат

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

а скалярний добуток векторів

$$\boldsymbol{\omega}_k \boldsymbol{r}_k = \omega_x x_k + \omega_y y_k + \omega_z z_k,$$

після підстановки остаточно отримаємо формулу для визначення кінетичного моменту твердого тіла при його сферичному русі відносно центра O

$$\boldsymbol{K}_o = \boldsymbol{\omega} \sum_{k=1}^{n} m_k (x_k^2 + y_k^2 + z_k^2) - \sum_{k=1}^{n} m_k \boldsymbol{r}_k (w_x x_k + w_y y_k + w_z z_k). \tag{20.2}$$

Із (20.2) можна отримати формулу для кінетичного моменту твердого тіла відносно осі x, що проходить через точку O

$$\begin{aligned} \boldsymbol{K}_x &= w_x \sum_{k=1}^{n} m_k (x_k^2 + y_k^2 + z_k^2) - \sum_{k=1}^{n} m_k x_k (w_x x_k + w_y y_k + w_z z_k) = \\ &= w_x \sum_{k=1}^{n} m_k (y_k^2 + z_k^2) - w_y \sum_{k=1}^{n} m_k x_k y_k - w_z \sum_{k=1}^{n} m_k z_k x_k . \end{aligned} \tag{20.3}$$

Враховуючи, що $J_x = \sum_{k=1}^{n} m_k (y_k^2 + z_k^2)$ – момент інерції тіла відносно осі x,

$J_{xy} = \sum_{k=1}^{n} m_k x_k y_k$ – відцентровий момент інерції тіла відносно осей x і y, а

$J_{zx} = \sum_{k=1}^{n} m_k z_k x_k$ – відцентровий момент інерції тіла відносно осей z і x,

отримуємо формули для обчислення кінетичних моментів тіла відносно координатних осей

$$K_x = J_x\omega_x - J_{xy}\omega_y - J_{zx}\omega_z, \quad K_y = -J_{xy}\omega_x + J_y\omega_y - J_{yz}\omega_z, \quad K_z = -J_{zx}\omega_x - J_{yz}\omega_y + J_z\omega_z. \tag{20.4}$$

Якщо за осі координат прийняті головні центральні осі інерції, то відцентрові моменти відносно цих осей дорівнюють нулю, і кінетичні моменти в такому випадку набувають вигляду

$$K_x = J_x\omega_x, \quad K_y = J_y\omega_y, \quad K_z = J_z\omega_z. \tag{20.5}$$

20.2. Диференціальні рівняння сферичного руху твердого тіла

Теорема про зміну кінетичного моменту системи згідно (18.14) має вигляд

$$\frac{d\boldsymbol{K}_0}{dt} = \boldsymbol{M}_0^e. \qquad (20.6)$$

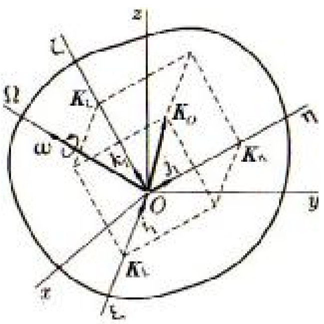


Рис. 20.1. До виводу динамічних рівнянь.

Пов'яжемо з рухомим тілом рухому систему координат з осями ξ, η, і ζ, які мають орти $\boldsymbol{i}_1$, $\boldsymbol{j}_1$, $\boldsymbol{k}_1$ відповідно (рис. 20.1), та запишемо кінетичний момент в проекціях на рухомі осі

$$\boldsymbol{K}_o = \boldsymbol{i}_1 K_\xi + \boldsymbol{j}_1 K_\eta + \boldsymbol{k}_1 K_\zeta,$$

після чого підставимо в рівняння (20.6)

$$\frac{d\boldsymbol{K}_0}{dt} = \left(\frac{d\boldsymbol{i}_1}{dt}K_x + \frac{d\boldsymbol{j}_1}{dt}K_h + \frac{d\boldsymbol{k}_1}{dt}K_z\right) + \left(\boldsymbol{i}_1\frac{dK_x}{dt} + \boldsymbol{j}_1\frac{d_1K_h}{dt} + \boldsymbol{k}_1\frac{dK_z}{dt}\right).$$

Розкриваючи дужки і перетворюючи вираз в правій частині, отримуємо

$$\boldsymbol{i}_1\left(\frac{dK_x}{dt} + w_h K_z - w_z K_h\right) + \boldsymbol{j}_1\left(\frac{dK_h}{dt} + w_z K_x - w_x K_z\right) + \boldsymbol{k}_1\left(\frac{dK_z}{dt} + w_x K_h - w_h K_x\right) = \boldsymbol{M}_o^e.$$

Враховуючи, що момент кількості руху $K = I\omega$, та проектуючи на вісі рухомої системи координат, остаточно отримуємо

$$I_x\frac{dw_x}{dt} + w_h w_z(I_z - I_h) = M_x^e,\; I_h\frac{dw_h}{dt} + w_x w_z(I_x - I_z) = M_h^e,$$
$$I_z\frac{dw_z}{dt} + w_h w_x(I_h - I_x) = M_z^e \qquad (20.7)$$

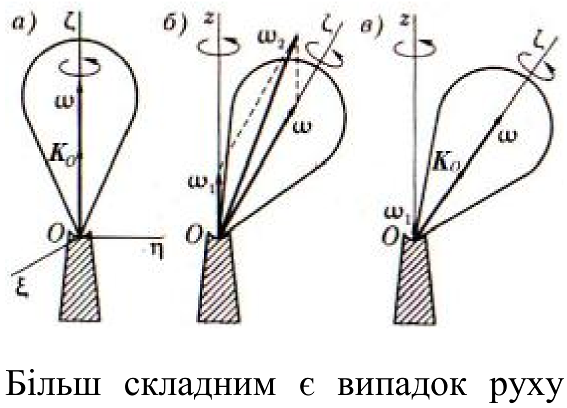
динамічні рівняння Ейлера для сферичного руху твердого тіла.

20.3. Кінетичний момент гіроскопа

Гіроскоп – тіло обертання, яке має вісь симетрії і обертається навколо неї з кутовою швидкістю, що значно перевищує швидкість обертання самої осі симетрії.

Найпростішим випадком є обертання гіроскопа з кутовою швидкістю ω навколо нерухомої осі $O\zeta$ (рис. 20.2, *а*). Проекції кутової швидкості на рухливі осі координат

$$\omega_\xi = 0,\ \omega_\eta = 0,\ \omega_\zeta = \omega.$$



Оскільки вісь $O\zeta$ є головною віссю інерції гіроскопа, то проекції кінетичного моменту на рухомі осі і кінетичний момент тіла відносно нерухомої точки O мають вигляд

$$K_\xi = 0,\quad K_\eta = 0,\quad K_\zeta = I_\zeta\omega \;\rightarrow\; K_o = K_\zeta = I_\zeta\omega.$$

Рис. 20.2. Кінетичний момент гіроскопа.

Більш складним є випадок руху (рис. 20.2, *б*), коли гіроскоп обертається навколо осі симетрії $O\zeta$ з кутовою швидкістю **ω** і разом з нею обертається навколо нерухомої осі Oz з кутовою швидкістю $\boldsymbol{\omega}_1$. Тоді вектор абсолютної кутової швидкості $\boldsymbol{\omega}_2$ визначається за правилом паралелограма

$$\boldsymbol{\omega}_2 = \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega}_1.$$

Як відзначалось раніше, швидкість обертання гіроскопа навколо власної осі симетрії $\boldsymbol{\omega}$ набагато більше швидкості обертання $\boldsymbol{\omega}_1$ навколо нерухомої осі, тому прийнято вважати кінетичний момент гіроскопа відносно нерухомої осі O спрямованим уздовж осі симетрії гіроскопа (рис. 20.2, *в*) і рівним

$$K_o = K_\zeta = I_\zeta \omega. \tag{20.8}$$

20.4. Гіроскоп с трьома степенями вільності

Гіроскоп з трьома ступенями вільності – тіло, рух якого обмежений наявністю тільки однієї нерухомої точки O, причому кутова швидкість його обертання навколо однієї з осей значно перевищує кутові швидкості обертання навколо інших осей. З назви витікає, що для опису руху даного гіроскопу необхідні три незалежні параметри. Найбільш поширеними гіроскопами такого типу є гіроскопи з кардановим підвісом (рис. 20.3, *а* і *б*).

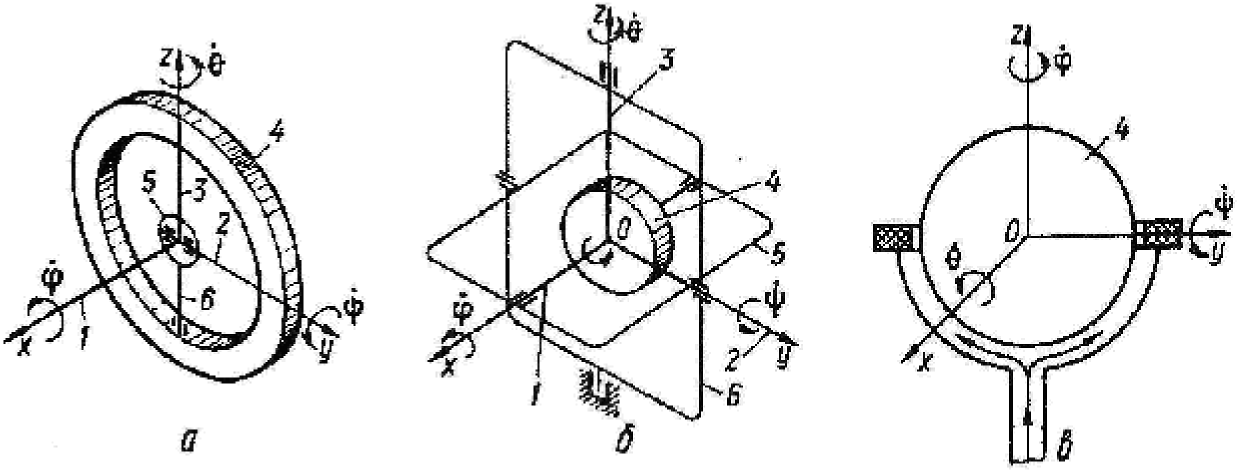


Рис. 20.3. Гіроскопи з трьома степенями вільності.

В карданових підвісах гіроскопа кільця або рамки 5 і 6 призначені для надання гіроскопу можливості обертатися одночасно навколо трьох осей 1, 2 і 3, що перетинаються в точці O, що еквівалентно тілу з однією нерухомою точкою (рис. 20.3, *в*).

При конструюванні гіроскопа намагаються звести до нуля моменти усіх зовнішніх сил (сил тертя, статичної незрівноваженості) відносно центра O, такі гіроскопи називають *вільними*.

Основні властивості гіроскопа:

1. Оскільки вісь обертання гіроскопа проходить через центр мас, то вектор кінетичного моменту зберігає свій напрямок незмінним в інерційній системі координат

$$\boldsymbol{M}_0(\boldsymbol{R}) = 0 \Rightarrow \frac{d\boldsymbol{K}_o}{dt} = 0 \Rightarrow \boldsymbol{K}_o = const. \tag{20.9}$$

Наприклад, якщо вектор кінетичного моменту гіроскопа спрямувати на нерухому зірку (Сонце, Полярну зірку), то під час руху він зберігатиме цей напрям. В наближеній теорії гіроскопа вектор кінетичного моменту вважається таким, що напрямлений по головній осі обертання гіроскопа

$$K_0 = \sqrt{I_x^2 w_x^2 + I_y^2 w_y^2 + I_z^2 w_z^2} \approx I_z w_z ,$$

оскільки $\omega_z >> \omega_x$; $\omega_z >> \omega_y$.

2. Якщо до гіроскопа прикласти момент відносно його головної осі обертання z, (рис. 20.4), то ця вісь почне прецесіювати навколо іншої осі обертання гіроскопа z_1 з кутовою швидкістю прецесії ω .

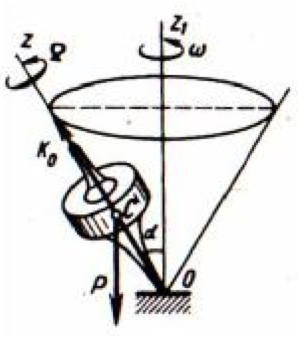


Рис. 20.4. Прецесія гіроскопа.

Дана властивість витікає з теореми Резаля, згідно з якої швидкість кінця вектора кінетичного моменту спрямована по дотичній до годографа кінетичного моменту і дорівнює головному моменту зовнішніх сил

$$\frac{d\boldsymbol{K_o}}{dt} = \boldsymbol{u} = \boldsymbol{M}_0^e . \qquad (20.10)$$

Тому, якщо на вісь гіроскопа, що обертається, подіє сила, то вісь почне відхилятися не у бік її дії, а по напряму моменту цієї сили відносно центру O, тобто перпендикулярно силі. Як тільки дія сили припиниться, вісь гіроскопа зупиняється: гіроскоп не зберігає руху, повідомленого йому силою. Це властивість гіроскопа називають *стійкістю осі*.

Визначимо кутову швидкість прецесії (переносного руху гіроскопа)

$$\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{K}_0 = \boldsymbol{M}_0^e \;\Rightarrow w_{пер} K_0 \sin q = M_0 \;\Rightarrow w_{пер} = \frac{M_0}{K_0 \sin q} = \frac{M_0}{J_z \Omega \sin q}. \qquad (20.11)$$

З (20.11) видно, що чим більше момент інерції гіроскопа і його швидкість обертання навколо головної осі, тим менша кутова швидкість прецесії під дією одного й того ж самого моменту зовнішніх сил.

Також відомо, що прецесія завжди супроводжується нутацією – коливаннями осі Oz відносно її середнього положення з дуже великою частотою і малою амплітудою. В елементарній теорії нутацію не враховують.

20.5. Гіроскоп з двома степенями вільності

Якщо в гіроскопах с трьома степенями вільності, показаних на рис. 20.3, зафіксувати одне з кілець, то отримаємо гіроскоп з двома ступенями вільності. Конструкція такого гіроскопа показана на рис. 20.5: ротор 3 закріплено в кільці 2, яке може обертатися по відношенню до основи 1 навколо осі Ox. Гіроскоп може обертатися навколо власної осі Oz і разом з кільцем навколо осі Ox.

Нехай в деякий момент основа 1 починає обертатися навколо осі Oz_1 з кутовою швидкістю ω. Тоді гіроскоп почне здійснювати вимушену прецесію відносно даної осі, а на ротор з боку підшипників діятиме момент

$$\boldsymbol{M_0} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{K_0} .$$

Згідно з третім законом Ньютона, на підшипники з боку осі має діяти гіроскопічний момент, протилежний до моменту зовнішніх сил $\boldsymbol{M_0}$

$$\boldsymbol{M}_{гір} = \boldsymbol{K_0} \times \boldsymbol{\omega},$$

модуль якого визначається за **правилом Жуковського**: якщо гіроскопу, що обертається, повідомити переносний прецесійний рух, то на підшипники, в яких закріплена вісь ротора гіроскопа, почне діяти гіроскопічний момент $M_{гір}$

$$M_{гір} = K_0 \times \omega = K_0 \omega \sin\theta = J_z \omega \Omega \sin\theta, \qquad (20.12)$$

який прагне встановити вісь ротора паралельно осі прецесії так, щоб напрями векторів $\boldsymbol{\Omega}$ і $\boldsymbol{\omega}$ співпадали.

Гіроскоп з двома ступенями свободи не має здатності протидіяти зміні напряму осі обертання.

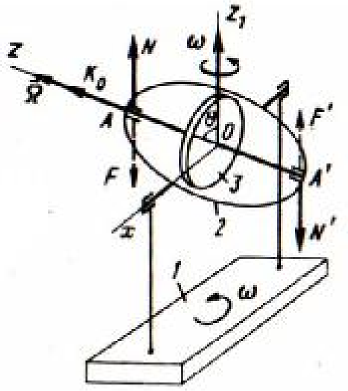


Рис. 20.5. Гіроскоп з двома степенями вільності.

20.6. Використання гіроскопів

Гіроскопи у техніці використовуються завдяки їх властивості зберігати заданий напрямок головної осі в інерційному просторі навіть за умови дії значних збурень. Основні типи гіроскопічних приладів наведені нижче.

1. *Гіроскопи напрямку*.

Тристуপеневі гіроскопи в кардановому підвісі, призначені для керування рухом об'єкта в заданому напрямку. Нехай ракета має рухатись в напрямку на нерухому зірку, тоді на початку руху головну вісь гіроскопа орієнтують саме на неї. Якщо в процесі руху ракета відхилилась від заданого напряму на кут α, то цей кут можна виміряти як кут відхилення зовнішньої рамки карданового підвісу відносно ракети, оскільки головна вісь зберігає свій напрям у просторі. Відхилення за допомогою спеціальних датчиків перетворюється в електричний сигнал, що подається на виконавчі органи ракети, які повертають її на початковий курс.

Цей же гіроскоп можна використати для здійснення запрограмованого розвороту ракети на заданий кут. Для цього до осі обертання внутрішньої рамки прикладають момент, який змусить головну вісь гіроскопа разом із зовнішньою рамкою повернутись в заданому напрямку, а під дією цих сил на той же кут повернеться і сама ракета.

2. *Гіротахометри*.

Дані гіроскопічні прилади призначені для вимірювання кутових швидкостей. За конструкцією поділяються на два типи – роторні та вібраційні.

Роторний вимірник – двоступеневий гіроскоп з однією рамкою карданового підвісу, кут повороту якої обмежений пружиною (рис. 20.6).

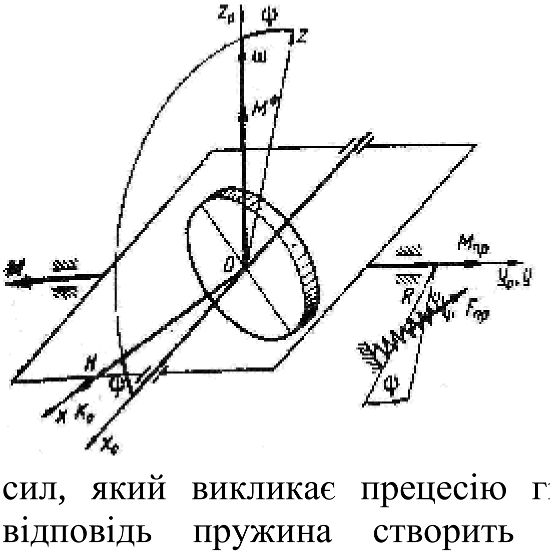


Рис. 20.6. Роторний гіротахометр.

Під час обертання основи з вимірюваною швидкістю ω через опори рамки до гіроскопа буде прикладений певний момент зовнішніх сил, який викликає прецесію гіроскопа відносно осі обертання рамки. У відповідь пружина створить момент протидії, який перешкоджатиме подальшому повороту рамки і визначатиметься жорсткістю пружини c. Тоді сумарний кут повороту рамки

$$y = Hw / cR^2$$

буде пропорційним вимірюваній кутовій швидкості основи.

Вібраційний вимірник – двоступеневий гіроскоп, також побудований на використанні моменту сил інерції Коріоліса (рис. 20.7). Дві однакові маси 1 і 2, закріплені на пружних ніжках, коливаються з однаковими за величиною і протилежними за напрямком швидкостями υ. Внаслідок обертання основи з вимірюваною кутовою швидкістю ω виникають прискорення Коріоліса a_1 і a_2, що утворюють гіроскопічний момент сил інерції, який зрівноважується моментом сил пружності, що виникає при закручуванні пружного торсіона 3 і залежить від його жорсткості на скручування c. Тоді сумарний кут закручування торсіона

$$q = 4mRuw / c$$

буде пропорційним кутовій швидкості основи.

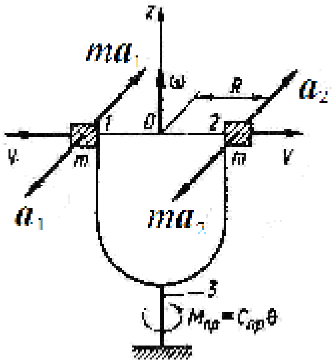


Рис. 20.7. Вібраційний гіротахометр.

3. *Гіроскопічний вимірник швидкості балістичної ракети.*

Ракета стартує вертикально, потім у польоті вона розвертається за допомогою гіроскопа і двигунів на заданий кут α, після досягнення розрахункової швидкості її двигуни вимикаються. Для вимірювання швидкості використовується триступеневий гіроскоп зі зміщеним центром мас ротора 2 і внутрішньої рамки 1, виконаної у формі циліндра (рис. 20.8).

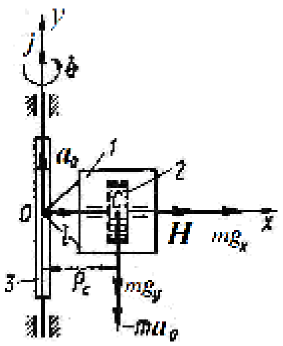


Рис. 20.8. Конструкція гіроскопічного вимірника швидкості.

4. *Гіромаятник.*

Також є триступеневим гіроскопом із зміщеним центром мас, розміщеним таким чином, що його головна вісь (вектор ***H***) була напрямлена вертикально. За відсутності обертання ротора даний прилад є звичайним сферичним маятником, застосовується він для вимірювання відхилення об’єкта від площини горизонту.

Зміщення центра мас маятника (ρ_C = 1,5 мм) обирається таким чином, щоб період його власних коливань дорівнював періоду коливань незбурюваного математичного маятника, довжина якого дорівнює радіусу Землі. Отже, параметри гіромаятника підбираються таким чином, щоб під час руху об’єкта з прискоренням він не відхилявся від вертикалі, як звичайний фізичний маятник. Така властивість дозволяє за будь-яких режимів руху мати точний напрямок на центр Землі.

Питання для самоконтролю

1. Як визначається кінетичний момент тіла при його сферичному русі.
2. Як записуються динамічні рівняння сферичного руху тіла?
3. Яке тверде тіло називають гіроскопом?
4. Які параметри руху літака можна виміряти за допомогою гіроскопа?

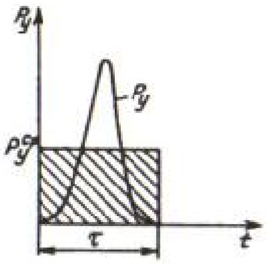
Глава 21. «Елементарна теорія удару»

21.1. Загальні визначення про удар

Удар – явище, при якому тіло або матеріальна точка знаходяться під дією сил значної величини протягом дуже малого проміжку часу. Прикладами є удари м'яча о поверхню, молота о деталь, кулі о перешкоду.

При ударі точки тіла не встигають зміститися, тому будь-якими переміщенням нехтують. При ударі має місце стрибок швидкості – швидкості точок тіла за нескінченно малий проміжок часу змінюють свою величину і напрям. До ударних відносять сили, час дії яких не перевищують $\tau = 10^{-2}$ с.

При розгляді ударних явищ вводяться наступні припущення:



а) Дії інших за природою сил не враховуються;
б) Переміщення точок тіла за час удару дорівнюють нулю;
в) Швидкості точок миттєво змінюють своє значення на кінцеву величину.

Рис. 21.1. Зміна сили в процесі удару.

Оскільки ударні сили дуже великі і за час удару змінюються в широких межах (рис. 21.1), то в механіці при описі удару використовують ударні імпульси.

21.2. Основні теореми теорії удару матеріальної точки

Нехай матеріальна точка маси m рухається під дією сили $\boldsymbol{P}$, а за час τ піддається ще й дії ударної сили $P_{уд}$. При цьому, по теоремі про зміну кількості руху матеріальної точки:

$$d(m\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{F}dt \Rightarrow m\boldsymbol{u} - m\boldsymbol{v} = \int_0^t (\boldsymbol{P} + \boldsymbol{P}_{уд})dt,$$

де $\boldsymbol{v}$ – швидкість точки до удару; $\boldsymbol{u}$ – швидкість точки після удару.

Оскільки час τ малий, то по теоремі про середнє маємо

$$\int_0^t (\boldsymbol{P} + \boldsymbol{P}_{уд})dt = (\boldsymbol{P} + \boldsymbol{P}_{уд})t = \boldsymbol{S} + \boldsymbol{S}_{уд}.$$

Але імпульс зовнішньої сили $\boldsymbol{S}$ за час τ дуже малий в порівнянні з імпульсом ударної сили $\boldsymbol{S}^{уд}$, тому їм нехтують.

Основне рівняння теорії удару: зміна кількості руху матеріальної точки за час удару дорівнює ударному імпульсу, прикладеному до цієї точки

$$m\boldsymbol{u} - m\boldsymbol{v} = \boldsymbol{P}_{уд}t = \boldsymbol{S}_{уд}. \tag{21.1}$$

Рівняння (20.1) в проекціях на координатні осі має вигляд

$$mu_x - mu_x = S_x, \qquad mu_y - mu_y = S_y, \qquad mu_z - mu_z = S_z. \tag{21.2}$$

Помножимо обидві частини рівняння (21.1) на радіус-вектор r, проведений із довільного центра O до даної матеріальної точки

$$\boldsymbol{r} \times (m\boldsymbol{u} - m\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{r} \times S_{уд} = \boldsymbol{r} \times \int_0^t \boldsymbol{P}_{уд}dt = (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{P}_{уд})dt. \tag{21.3}$$

Отримане рівняння (21.3) має назву **теореми про зміну моменту кількості руху точки при ударі:** зміна моменту кількості руху точки відносно центра O при ударі дорівнює моменту ударного імпульсу відносно того ж центра.

21.3. Основні теореми теорії удару механічної системи

Всі ударні сили, що діють на точки механічної системи, можна розділити на зовнішні і внутрішні. Тоді згідно теореми про зміну кількості руху механічної системи

$$\boldsymbol{Q}-\boldsymbol{Q}_0=\sum_{k=1}^{n}\boldsymbol{S}_k^e+\boldsymbol{S}_k^i,$$

де $\boldsymbol{S}_k^e=\int_0^t\boldsymbol{P}_k^e dt$ і $\boldsymbol{S}_k^i=\int_0^t\boldsymbol{P}_k^i dt$ – ударний імпульс результуючої зовнішніх і внутрішніх сил відповідно. Оскільки сумарний імпульс внутрішніх сил дорівнює нулю, то

$$\boldsymbol{Q}-\boldsymbol{Q}_0=\sum_{k=1}^{n}\boldsymbol{S}_k^e=\boldsymbol{S}_{уд}^e. \tag{21.4}$$

Рівняння (21.4) має назву **теореми про зміну кількості руху механічної системи при ударі:** зміна кількості руху системи при ударі дорівнює векторній сумі зовнішніх ударних імпульсів, прикладених до точок системи.

Якщо геометрична сума усіх зовнішніх ударних імпульсів протягом певного проміжку часу дорівнює нулю, то згідно (21.4) кількість руху системи за цей час не зміниться. А це значить, що внутрішні ударні імпульси не зможуть змінити кількості руху всієї системи.

У проекціях на координатні осі рівняння (21.4) має вигляд

$$Q_x-Q_{0x}=S_x^e,\qquad Q_y-Q_{0y}=S_y^e,\qquad Q_z-Q_{0z}=S_z^e. \tag{21.5}$$

Теорема про зміну кінетичного моменту системи: зміна за час удару кінетичного моменту механічної системи відносно деякого центру O дорівнює сумі моментів зовнішніх ударних імпульсів відносно того ж центру

$$\boldsymbol{K}-\boldsymbol{K}_0=\sum_{k=1}^{n}\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{S}_k^e). \tag{21.6}$$

У проекціях на координатні осі отримаємо

$$K-K_{0x}=\sum_{k=1}^{n}M_x(S_k^e);\quad K-K_{0y}=\sum_{k=1}^{n}M_y(S_k^e);\quad K-K_{0z}=\sum_{k=1}^{n}M_z(S_k^e). \tag{21.7}$$

З (21.6) і (21.7) видно, що коли сума моментів зовнішніх ударних імпульсів відносно довільного центра або осі дорівнюватиме нулю, то кінетичний момент кількості руху системи відносно даного центра або осі за час удару не зміниться. Це означає, що внутрішні ударні імпульси не можуть змінити кінетичний момент кількості руху механічної системи.

21.4. Удар кулі об нерухому поверхню. Коефіцієнт відновлення

Прямій – удар, при якому швидкість рухомого тіла до зіткнення була спрямована по нормалі до нерухомої поверхні. При цьому розрізняють дві фази удару:

а) *Деформація* – від моменту зіткнення тіл до моменту, коли швидкість кулі дорівнюватиме нулю. Частина кінетичної енергії кулі у момент удару переходить в потенційну енергію деформації, а частина перетворюється на теплоту і розсіюється;
б) *Відновлення* – з моменту зупинки кулі до моменту її відділення від поверхні. Відбувається повне або часткове відновлення форми кулі за рахунок дії пружних сил.

Як відомо, швидкості тіл, що стикаються, до удару більші, ніж після удару. Тому Ньютон ввів поняття про *коефіцієнт відновлення* – відношення швидкості в кінці удару до швидкості на початку удару

$$k = \frac{u}{u}. \tag{21.8}$$

Він довів, що дана величина є фізичною сталою, яка залежить від природи стичних тіл і не залежить від швидкостей в момент зіткнення. Коефіцієнт відновлення є головною характеристикою удару. Для його визначення кулю із досліджуваного матеріалу кидають з висоти h_1 на нерухому горизонтальну поверхню з того ж матеріалу і фіксують висоту відскоку h_2 (рис. 21.2).

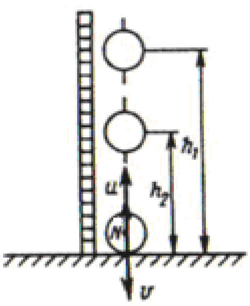


Рис. 21.2. Визначення коефіцієнту відновлення.

Значення швидкостей до і після удару відповідно

$$u = \sqrt{2gh_1}, \qquad u = \sqrt{2gh_2}.$$

Тоді коефіцієнт відновлення можна знайти через відношення висот

$$k = \frac{u}{u} = \sqrt{\frac{2gh_2}{2gh_1}} = \sqrt{\frac{h_2}{h_1}}. \tag{21.9}$$

Оскільки частина енергії витрачається на нагрів кулі, то швидкість в кінці удару менша, ніж на його початку. Залежно від коефіцієнта відновлення розрізняють наступні типи ударів:
– абсолютно непружний удар $k = 0$ ($u = 0$). В такому випадку процес удару відбувається в першій фазі, а форма тіл після удару не відновлюється;
– абсолютно пружний удар $k = 1$ ($u = v$). Втрати кінетичної енергії не відбувається, а тіла повністю відновлюють свою форму;
– частково пружний удар $0 < k < 1$ ($0 < u < v$).
Коефіцієнт відновлення для деяких матеріалів має наступні значення: дерево – 0,5; сталь – 0,56; слонова кістка – 0,89; скло – 0,94.

Повний ударний імпульс дорівнює сумі ударних імпульсів за обидві фази удару

$$S = S' + S'' = mv + mu = mv(1+k).$$

При абсолютно непружному ударі $S = mv$, при абсолютно пружному $S = 2mv$.

21.5. Робота і кінетична енергія при ударі

Для того, аби отримати формулу роботи ударних сил, помножимо скалярно обидві частини рівняння (21.1) спочатку на $\boldsymbol{u}$, а потім на $\boldsymbol{v}$

$$m\boldsymbol{uu} - m\boldsymbol{uv} = \boldsymbol{S}_{y\partial}\boldsymbol{u}, \qquad m\boldsymbol{uv} - m\boldsymbol{vv} = \boldsymbol{S}_{y\partial}\boldsymbol{v} \Rightarrow$$

$$mu^2 - m\boldsymbol{uv} = \boldsymbol{S}_{y\partial}\boldsymbol{u}, \qquad m\boldsymbol{uv} - mu^2 = \boldsymbol{S}_{y\partial}\boldsymbol{v}.$$

Склавши отримані рівняння і розділивши їх на два, отримаємо згідно теореми про зміну кінетичної енергії матеріальної точки

$$A = \frac{mu^2}{2} - \frac{mu^2}{2} = \frac{\boldsymbol{S}_{y\partial}\boldsymbol{u} + \boldsymbol{S}_{y\partial}\boldsymbol{v}}{2} = \frac{\boldsymbol{S}_{y\partial}(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v})}{2}. \tag{21.10}$$

Рівняння (21.10) має назву **теореми Кельвіна:** робота імпульсу ударної сили дорівнює половині скалярного добутку ударного імпульсу на векторну суму початкової і кінцевої швидкостей точки, до якої цей імпульс прикладений.

Розглянемо механічну систему, що складається з n матеріальних точок. Запишемо теорему Кельвіна для k-ої матеріальної точки

$$\frac{mu_k^2}{2} - \frac{mu_k^2}{2} = \frac{\boldsymbol{S}_k(\boldsymbol{u}_k + \boldsymbol{v}_k)}{2},$$

де S_k – сумарний імпульс зовнішніх і внутрішніх ударних сил. Провівши додавання по всім точкам механічної системи, отримаємо

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{mu_k^2}{2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{mu_k^2}{2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\left(\boldsymbol{S}_k^i + \boldsymbol{S}_k^e\right)(\boldsymbol{u}_k + \boldsymbol{v}_k)}{2}. \tag{21.11}$$

Оскільки величини в лівій частині є кінетичною енергією системи до і після удару, то остаточно отримуємо **теорему про зміну кінетичної енергії механічної системи при ударі**: зміна кінетичної енергії механічної системи при ударі дорівнює сумі робіт зовнішніх і внутрішніх ударних сил

$$T - T_0 = \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{\boldsymbol{S}_k^i(\boldsymbol{u}_k + \boldsymbol{v}_k)}{2} + \frac{\boldsymbol{S}_k^e(\boldsymbol{u}_k + \boldsymbol{v}_k)}{2} \right] = \sum_{k=1}^{n} A_k. \tag{21.12}$$

В теоремі (21.12) присутні невідомі ударні імпульси, тому аби дану теорему можна було застосувати до розв'язання практичних задач, цих імпульсів необхідно позбутися. В такому випадку застосовують **теорему Карно**, яка для абсолютно непружного удару двох тіл має вигляд: кінетична енергія, втрачена системою тіл при абсолютно непружному ударі, дорівнює тій кінетичній енергії, яку мала б система, якби її тіла рухалися з втраченими швидкостями.

$$T - T_0 = M_1 \frac{(u_1 - u)^2}{2} + M_2 \frac{(u_2 - u)^2}{2}, \tag{21.13}$$

де $T_0 = \dfrac{M_1 u_1^2 + M_2 u_2^2}{2}$ і $T_1 = \dfrac{(M_1 + M_2)u^2}{2}$ – кінетична енергія системи тіл до і після удару відповідно. Якщо удар є частково пружним, то в цьому випадку втрачена кінетична енергія знаходиться по формулі

$$T_0 - T_1 = \frac{1-k}{1+k} \cdot \frac{M_1(u_1 - u)^2 + M_2(u_2 - u)^2}{2}. \tag{21.14}$$

У випадку частково пружного удару коефіцієнт відновлення можна визначити по формулі

$$k = \frac{u_2 - u_1}{u_1 - u_2} \qquad (21.15)$$

21.6. Прямий центральний удар двох куль

Прямий центральний удар – удар, при якому спільна нормаль до поверхонь тіл в точці дотику проходить через їх центри мас, а швидкості центрів мас до удару спрямовані саме по цій нормалі.

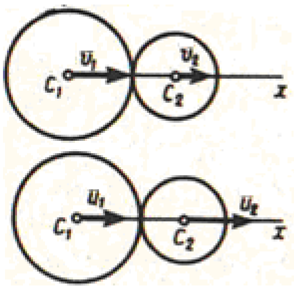


Рис. 21.3. Прямий центральний удар.

Нехай два тіла масами m_1 і m_2, швидкості центрів мас яких на початку удару $\boldsymbol{v}_1$ і $\boldsymbol{v}_2$, а в кінці удару u_1 і u_2, рухаються уздовж осі Ox (рис. 21.3). В цьому випадку ударні сили, що діють між тілами, будуть внутрішніми. По теоремі про зміну кількості руху механічної системи

$$m_1\boldsymbol{v}_1 + m_2\boldsymbol{v}_2 = m_1\boldsymbol{u}_1 + m_2\boldsymbol{u}_2 .$$

1. *При абсолютно непружному ударі* швидкості після зіткнення однакові:

$$u_1 = u_2 = \frac{M_1u_1 + M_2u_2}{M_1 + M_2}. \qquad (21.16)$$

Діючий при цьому на тіло ударний імпульс

$$S_2 = -S_1 = \frac{M_1M_2}{M_1 + M_2}(u_1 - u_2).$$

2. *При абсолютно пружному ударі*

$$u_1 = u_1 - \frac{2M_2}{M_1 + M_2}(u_1 - u_2); \qquad u_2 = u_2 + \frac{2M_1}{M_1 + M_2}(u_1 - u_2);$$

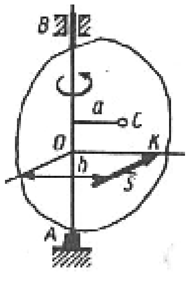
$$S_2 = -S_1 = \frac{2M_1M_2}{M_1 + M_2}(u_1 - u_2). \qquad (21.17)$$

21.7. Центр удару

При ударі по тілу, що обертається навколо нерухомої осі, в місцях закріплення тіла з'являються імпульсні реакції, які можуть привести до прискорення зносу і навіть руйнування деталі. Проте можливо нанести удар таким чином, щоб імпульсні реакції не виникли. Відстань h від осі до місця удару визначається по формулі

$$h = \frac{I_z}{Ma}, \qquad (21.18)$$

де I_z – момент інерції тіла відносно осі обертання, M – маса тіла, a – відстань від осі обертання до центру мас тіла.



Удар має бути спрямований перпендикулярно площині, що проходить через вісь обертання і центр мас тіла з того боку, де знаходиться центр мас. Якщо центр мас системи знаходиться на осі обертання, то в такому випадку центр удару відсутній.

Рис. 21.4. Знаходження центру удару.

Питання для самоконтролю

1. Яке фізичне явище називається ударом?
2. В чому полягає фізичний зміст коефіцієнта відновлення?
3. Як експериментально можна визначити коефіцієнт відновлення?
4. Які типи ударів існують?
5. Чи можуть внутрішні ударні імпульси змінити кількість руху механічної системи?
6. Як формулюється теорема Карно?

Завдання № 21. «Елементарна теорія удару»

Рекомендації до розв'язання задач

1. Визначити швидкості тіл υ_1 і υ_2 в момент перед ударом.
2. Скласти рівняння теорії удару, які дозволять знайти швидкості u_1 і u_2 після удару.
3. При розв'язанні задач на косий удар необхідно розкласти на складові по напряму спільної нормалі в точці дотику і на складові, що знаходяться в спільній дотичній площині, вивчити характер їх зміни в процесі удару, визначити їх величини після удару.
4. Визначити рух тіл після удару за допомогою загальних теорем динаміки.

Приклад розв'язання задачі (падіння кулі на нерухому поверхню)

Задача 1. Кулька падає з висоти h = 1 м на нерухому горизонтальну площину, виготовлену з такого ж матеріалу. Після другого удару об площину кілька підскакує на висоту h_2 = 50 см. Визначити коефіцієнт відновлення.

Розв'язання

Висота h_1, на яку підніметься куля після першого удару о нерухому поверхню, визначається по формулі (21.9)

$$k = \sqrt{\frac{h_1}{h}} \Rightarrow k^2 = \frac{h_1}{h} \Rightarrow h_1 = k^2 h.$$

Після другого удару кулька підіймається на висоту h_2, яку можна визначити із залежності

$$k = \sqrt{\frac{h_2}{h_1}} = \sqrt{\frac{h_2}{k^2 h}} \Rightarrow k^2 = \sqrt{\frac{h_2}{h}} \Rightarrow k = \sqrt[4]{\frac{h_2}{h}} = \sqrt[4]{\frac{0{,}5}{1}} = 0{,}84.$$

Задачу розв'язано.

Приклад розв'язання задачі (центральний удар куль)

Задача 2. Куля *A* доганяє кулю *B*, маючи при цьому втричі більшу швидкість. Визначити, яким має бути співвідношення мас куль, аби куля *A* після удару зупинилась. Удар вважати прямим центральним з коефіцієнтом відновлення k = 0,8.

Розв'язання

Оскільки сили взаємодії між кулями є внутрішніми, то слід застосувати закон збереження кількості руху системи, який у даному випадку має вигляд

$$m_A u_A + m_B u_B = m_A \cdot 0 + m_B u_B; \qquad 3m_A u_B + m_B u_B = m_B u_B.$$

Коефіцієнт відновлення згідно (21.15)

$$k = \frac{u_B - u_A}{u_A - u_B} = \frac{u_B}{3u_B - u_B} \Rightarrow u_B = 2ku_B = 1{,}6u_B.$$

Підставимо значення кінцевої швидкості кулі B в перше рівняння

$$3m_A u_B + m_B u_B = 1{,}6 m_B u_B; \qquad 3m_A + m_B = 1{,}6 m_B \Rightarrow 3m_A = 0{,}6 m_B;$$

$$\frac{m_B}{m_A} = \frac{3}{0{,}6} = 5.$$

Задачу розв'язано.

<u>Приклад розв'язання задачі (центр удару)</u>

Задача 3. Визначити положення центра удару прямокутної мішені для стрільби, якщо її висота дорівнює h = 80 см.

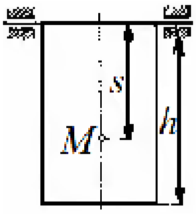


Рис. до задачі 21.8.

<u>Розв'язання</u>

Згідно (21.18) відстань s від осі до центра удару визначається по формулі

$$s = \frac{I_z}{ma},$$

де I_z – момент інерції тіла відносно осі обертання, m – маса тіла, a – відстань від осі обертання до центру мас тіла.

Центр мас однорідного прямокутника знаходиться в точці перетину його діагоналей, тобто на відстані

$$a = \frac{h}{2}$$

від осі обертання.

Момент інерції прямокутника відносно осі, що проходить через його сторону, знаходимо по Додатку Ж

$$I_z = \frac{mh^2}{3}.$$

Підставляємо отримані вирази в початкову формулу

$$s = \frac{I_z}{ma} = \frac{mh^2}{3} \cdot \frac{1}{mh/2} = \frac{2h}{3} = \frac{2 \cdot 80}{3} = 53{,}3\,(\text{см}).$$

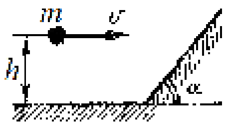
Задачу розв'язано.

<u>Завдання №21 до РГР</u>

21.1. Паля масою m_1 = 50 кг забивається копром маси m_2 = 450 кг, який падає з висоти h = 2 м без початкової швидкості. За десять ударів паля заглибилась в землю на δ = 5 см. Визначити силу опору ґрунту, якщо коефіцієнт відновлення при ударі k = 0.

Відповідь: F = 24,5 кН.

21.2. Куля маси m = 50 г рухається на висоті h = 40 см зі швидкістю υ = 10 м/с і влучає в стіну, нахилену під кутом α = 45° до горизонту. Вважаючи удар абсолютно пружним, знайти повну механічну енергію кулі в її найвищій точці. Сили опору повітря до уваги не брати.



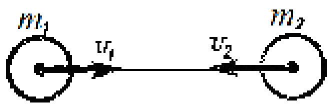
Відповідь: E = 2,7 Дж.

Рис. до задачі 21.2.

21.3. Два вагони масами m_1 = 270 т і m_2 = 310 т рухаються зі швидкостями υ_1 = 25 км/год і υ_2 = 40 км/год. Визначити енергію, втрачену при їх абсолютно непружному ударі.
Відповідь: E = 1,51 МДж.

21.4. При автоматичному завантаженні шахтної кліті вагонетка з вантажем масою m_1 = 1 600 кг, що рухається зі швидкістю υ_1 = 1,9 м/с, набігає на порожню вагонетку маси m_2 = 1 200 кг. Визначити швидкості руху вагонеток після удару, якщо коефіцієнт відновлення k = 0,5.
Відповідь: u_1 = 0,68 м/с, u_2 = 1,63 м/с.

21.5. Дві кулі масами m_1 = 4 кг і m_2 = 2 кг рухались одна на зустріч одній з однаковими по модулю швидкостями. Після частково пружного удару перша куля зупинила, а друга почала рухатись в протилежний бік. Визначити коефіцієнт відновлення куль при ударі.

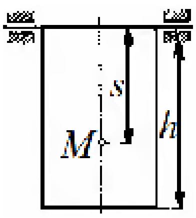


Відповідь: k = 0,5.

Рис. до задачі 21.5.

21.6. На яку висоту підскочить тіло, що вільно падає з висоти h = 10 м, якщо коефіцієнт відновлення при ударі дорівнює k = 0,5?
Відповідь: h = 2,5 м.

21.7. Молот падає з висоти H = 0,8 м на поковку, причому середня сила ударної взаємодії молота на поковку в 41 раз перевищує його силу тяжіння. Визначити тривалість удару t.
Відповідь: t = 0,01 с.

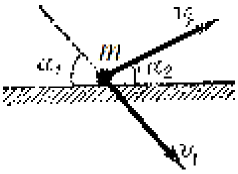


21.8. Визначити положення центра удару прямокутної мішені для стрільби, якщо її висота дорівнює h = 60 см.
Відповідь: s = 40 см.

Рис. до задачі 21.8.

21.9. Тіло маси m_1 = 20 кг рухається зі швидкістю υ_1 = 8 м/с. З якою швидкістю υ_2 має рухатись йому назустріч тіло маси m_2 = 36 кг, щоб обидва тіла зупинились, зазнавши непружного удару?
Відповідь: υ_1 = 4,44 м/с.

21.10. В нерухому горизонтальну поверхню під кутом α_1 = 45° до її нормалі влучає кулька маси m = 20 г, що рухалась зі швидкістю υ_1 = 5 м/с. Знайти швидкість υ_2 і кут α_2 відскоку, якщо коефіцієнт відновлення k = 0,5.

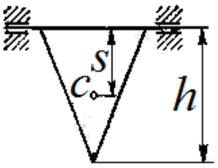


Відповідь: υ_1 = 0,79 м/с, α_2 = 27°.

Рис. до задачі 21.10.

21.11. Молот маси m_1 = 10 т падає зі швидкістю υ = 5 м/с на наковальню, маса якої разом з поковкою m_2 = 240 т. Визначити коефіцієнт корисної дії молота, якщо коефіцієнт відновлення при ударі k = 0,3.

Відповідь: η = 0,874.



21.12. Визначити положення центра удару C трикутної мішені для стрільби, якщо її висота дорівнює h = 80 см.

Відповідь: s = 40 см.

Рис. до задачі 21.12.

21.13. Кулька падає з висоти h = 1 м на нерухому горизонтальну площину, виготовлену з того ж матеріалу. Після четвертого удару об площину кулька підскакує на висоту h_4 = 5 см. Визначити коефіцієнт відновлення.

Відповідь: k = 0,69.

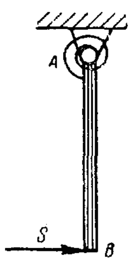
21.14. Визначити відношення мас кульок при прямому центральному ударі, якщо до удару перша кулька знаходилась в стані спокою, а після удару залишилась нерухомою друга кулька. Коефіцієнт відновлення прийняти рівним k = 0,75.

Відповідь: m_1/m_2 = 1,33.

21.15. Швидкості центрів мас двох куль, що рухались назустріч одна одній дорівнювали відповідно υ_1 = 6 м/с і υ_2 = 10 м/с, а маса першої кулі – m_1 = 10 кг. Визначити масу другої кулі, якщо після непружного удару обидві кулі зупинились.

Відповідь: m_2 = 6 кг.

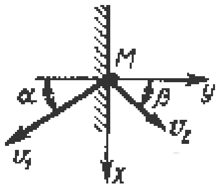
21.16. Стержень AB довжиною l = 0,5 м і масою m = 2,5 кг має шарнірне кріплення в точці A, а його повороту перешкоджає спіральна пружина з жорсткістю c = 200 Н/рад, яка не напружена при вертикальному положенні стержня. В певний момент часу по стержню в точці B завдається удар, імпульс якого перпендикулярний до осі стержня. Визначити величину цього імпульсу, якщо відомо, що під його дією стержень відхилився на кут α = 45°.



Відповідь: S = 10,3 Н·м.

Рис. до задачі 21.16.

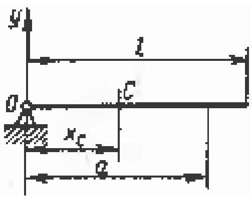
21.17. При зіткненні матеріальної точки M з перешкодою кут падіння α = 30°, а кут відбиття β = 36°. Швидкість точки після удару υ_2 = 5,1 м/с. Нехтуючи силами тертя в момент удару, визначити початкову швидкість точки υ_1.



Відповідь: υ_1 = 6 м/с.

Рис. до задачі 21.17.

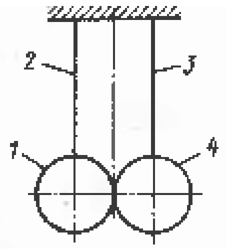
21.18. Центр мас неоднорідного стержня маси m = 2,4 кг і довжини l = 0,8 м знаходиться на відстані x_C = 0,37 м, а центр удару – на відстані a = 0,5 м. Визначити момент інерції стержня відносно осі обертання Oz.



Відповідь: I = 0,444 кг·м^2.

Рис. до задачі 21.18.

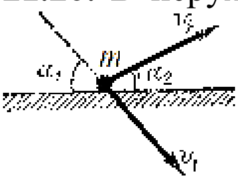
21.19. Куля 1, підвішена на нитці 2, б’є зі швидкістю υ_1 = 0,5 м/с по нерухомій кулі 4, підвішеній на нитці 3. Визначити швидкість після удару кулі 4, якщо коефіцієнт відновлення k = 0,8, а маси куль однакові.



Відповідь: υ_2 = 0,45 м/с.

Рис. до задачі 21.19.

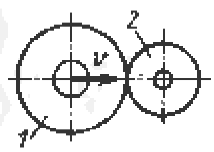
21.20. В нерухому горизонтальну поверхню під кутом α_1 = 45° до неї влучає кулька маси m = 20 г, що рухалась зі швидкістю υ_1 = 5 м/с. Знайти ударний імпульс S, якщо коефіцієнт відновлення k = 0,5.



Відповідь: S = 0,02 Н·с.

Рис. до задачі 21.20.

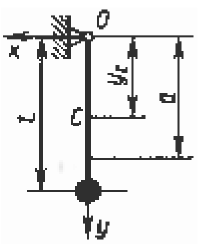
21.21. Дві кулі 1 і 2 ударяються з протилежними за напрямком, але рівними за модулем швидкостями υ = 6 м/с. Визначити швидкість тіла 2 після зіткнення, якщо маси куль m_1 = 2 кг і m_2 = 1 кг, а коефіцієнт відновлення при ударі k = 0,5.



Відповідь: υ_2 = 6 м/с.

Рис. до задачі 21.21.

21.22. Знайти відстань a від центра удару до осі обертання O однорідного стержня довжини l = 0,6 м і маси m = 0,8 кг і матеріальної точки маси m_1 = 0,2 кг. Відстань від центра мас до осі обертання y_C = 0,36 м, а момент інерції I_0 = 0,168 кг·м^2.



Відповідь: a = 0,467 м.

Рис. до задачі 21.22.

21.23. Тіло маси m_1 = 1кг влучає зі швидкістю 2 м/с в нерухоме тіло маси m_2 = 3 кг. Вважаючи удар абсолютно непружним, визначити втрати кінетичної енергії.

Відповідь: ΔT = 1,5 Дж.

Глава 22. «Принцип кінетостатики»

22.1. Принцип кінетостатики точки (Германа – Ейлера – Д'Аламбера)

Для розв'язання першої задачі динаміки невільної матеріальної точки зручно використовувати формальний *метод кінетостатики* – спосіб вирішення задач, при якому диференціальним рівнянням руху надають вигляд рівнянь статики. Даний метод еквівалентний другому закону Ньютона та аксіомі про звільнення від в'язей, його найбільш раціонально застосовувати при розв'язанні задач, в яких необхідно визначити реакції в'язей.

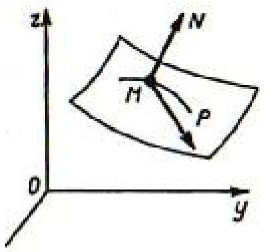


Рис. 22.1. До виводу принципу кінетостатики точки.

Нехай матеріальна точка M маси m рухається по ідеально гладкій поверхні під дією активної сили $\boldsymbol{P}$ (рис. 22.1). У відповідь на дію активної сили з боку поверхні виникає сила нормальної реакції $\boldsymbol{N}$. Другий закон Ньютона у цьому випадку

$$m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{P} + \boldsymbol{N}.$$

Переносимо усі доданки в один бік

$$\boldsymbol{P} + \boldsymbol{N} - m\boldsymbol{a} = 0, \qquad (22.1)$$

після чого вводимо поняття *даламберової сили інерції*

$$\boldsymbol{\Phi} = -m\boldsymbol{a}. \qquad (22.2)$$

Сила інерції завжди напрямлена в бік, протилежний прискоренню, тобто вона протилежна напрямку прискореного руху і збігається за напрямком із сповільненим рухом. Підставивши (22.2) до (22.1), отримаємо закон руху невільної матеріальної точки

$$\boldsymbol{P} + \boldsymbol{N} + \boldsymbol{\Phi} = 0. \qquad (22.3)$$

Рівняння (22.2) є **принципом кінетостатики для матеріальної точки**: для невільної матеріальної точки в кожен момент часу сума активних сил, що прикладені до неї, реакцій в'язей і сил інерції дорівнює нулю.

Слід зазначити, що рівняння (22.3) не є умовою рівноваги сил, оскільки сила інерції є формальною і не пов'язана з реальними силами, якими є активна сила $\boldsymbol{P}$ і реакція в'язі $\boldsymbol{N}$.

У випадку руху *вільної матеріальної точки* відсутня реакція в'язі, тому принцип кінетостатики має вигляд

$$\boldsymbol{P} + \boldsymbol{\Phi} = 0. \qquad (22.4)$$

В проекціях на координатні осі рівняння (22.4) записується наступним чином

$$P_x - m\ddot{x} = 0, \quad P_y - m\ddot{y} = 0, \quad P_z - m\ddot{z} = 0.$$

Слід зазначити, що сили інерції вводяться лише тоді, коли для вивчення руху застосовується принцип Даламбера, причому рух точки або тіла розглядається виключно по відношенню до інерціальних систем відліку.

22.2. Складові сили інерції

В різних задачах динаміки доводиться проектувати сили інерції на різні осі координат і розкладати по різним напрямам, проте найчастіше по напрямам дотичної і головної нормалі.

У випадку криволінійного руху точки її прискорення можна розкласти на дві складові – нормальну і дотичну

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_n + \boldsymbol{a}_\tau. \tag{22.5}$$

На ті ж складові розкладається і сила інерції

$$\boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{\Phi}_n + \boldsymbol{\Phi}_\tau = -m\boldsymbol{a}_n - m\boldsymbol{a}_\tau.$$

Дотична сила інерції спрямована у бік, протилежний дотичному прискоренню, а її модуль визначається формулою

$$\Phi_t = m\left|\frac{du}{dt}\right|. \tag{22.6}$$

Нормальну силу інерції часто називають відцентровою силою. Вона спрямована у бік випуклості траєкторії, а її модуль визначається формулою

$$\Phi_n = m\frac{u^2}{R} = mwR. \tag{22.7}$$

22.3. Принцип кінетостатики для механічної системи

Нехай маємо система з n матеріальних точок. У такому разі для усіх точок згідно з принципом Даламбера отримуємо

$$\sum_{k=1}^{n}\boldsymbol{P}_k + \sum_{k=1}^{n}\boldsymbol{N}_k + \sum_{k=1}^{n}\boldsymbol{\Phi}_k^{ін} = 0. \tag{22.8}$$

де $\sum\limits_{k=1}^{n}\boldsymbol{P}_k$ – рівнодійна усіх активних сил; $\sum\limits_{k=1}^{n}\boldsymbol{N}_k$ – рівнодійна усіх реакцій в'язей; $\sum\limits_{k=1}^{n}\boldsymbol{\Phi}_k^{ін}$ – рівнодійна сил інерції усі точок системи.

Помножимо обидві частини рівняння (22.8) на радіус-вектор кожної з точок, проведений з деякого довільного центру O

$$\begin{gathered}\sum_{k=1}^{n}(\boldsymbol{r}_k \times \boldsymbol{P}_k) + \sum_{k=1}^{n}(\boldsymbol{r}_k \times \boldsymbol{N}_k) + \sum_{k=1}^{n}\left(\boldsymbol{r}_k \times \boldsymbol{\Phi}_k^{ін}\right) = 0;\\ \sum_{k=1}^{n}\boldsymbol{M}_{ok}(\boldsymbol{P}_k) + \sum_{k=1}^{n}\boldsymbol{M}_{ok}(\boldsymbol{N}_k) + \sum_{k=1}^{n}\boldsymbol{M}_{ok}\left(\boldsymbol{\Phi}_k^{ін}\right) = 0; \qquad \boldsymbol{M}^a + \boldsymbol{M}^p + \boldsymbol{M}^{ін} = 0\end{gathered} \tag{22.9}$$

Рівняння (22.8) і (22.9) утворюють **принцип кінетостатики для механічної системи:** для невільної механічної системи геометрична сума головних векторів активних сил, реакцій в'язів і сил інерції дорівнює нулю. Крім того, векторна сума головних моментів активних сил, реакцій в'язей і сил інерції рухомої системи дорівнює нулю.

Векторному рівнянню (22.9) відповідають шість рівнянь у координатній формі:

$$\begin{gathered}F_x + N_x + \Phi_x^{ін} = 0, F_y + N_y + \Phi_y^{ін} = 0, F_z + N_z + \Phi_z^{ін} = 0;\\ \boldsymbol{M}_x^a + M_x^p + M_x^{ін} = 0, \qquad \boldsymbol{M}_y^a + M_y^p + M_y^{ін} = 0, \qquad \boldsymbol{M}_z^a + M_z^p + M_z^{ін} = 0.\end{gathered} \tag{22.10}$$

Рівняннями (22.10) особливо зручно користуватись при вивченні руху твердого тіла або системи твердих тіл, оскільки вони не містять внутрішніх сил. Для вивчення руху змінної системи цих рівнянь вже недостатньо.

22.4. Головний вектор і головний момент сил інерції

Головний вектор сил інерції механічної системи дорівнює добутку маси тіла на прискорення центру мас і спрямований в протилежний від прискорення бік

$$\boldsymbol{\Phi}^{ін} = \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{\Phi}_k^{ін} = -M\boldsymbol{a}_c. \tag{22.11}$$

Якщо прискорення центру мас розкласти згідно (20.5) на дотичну і нормальну складові

$$\boldsymbol{\Phi}^{ін} = \boldsymbol{\Phi}_t^{ін} + \boldsymbol{\Phi}_n^{ін} = -M\boldsymbol{a}_t^{ін} - M\boldsymbol{a}_n^{ін}.$$

Головний момент сил інерції механічної системи (твердого тіла) відносно довільного центра *O* або осі *z* дорівнює взятій із знаком мінус похідній за часом від кінетичного моменту системи (тіла) відносно того ж центру або осі

$$\boldsymbol{M}_o^{ін} = -\frac{d\boldsymbol{K}_o}{dt} = -\boldsymbol{J}_o\boldsymbol{\varepsilon}, \quad \boldsymbol{M}_z^{ін} = -\frac{d\boldsymbol{K}_z}{dt} = -\boldsymbol{J}_z\boldsymbol{\varepsilon}. \tag{22.12}$$

Згідно основної теореми статики, систему сил інерції твердого тіла можна замінити однією силою $\boldsymbol{\Phi}^{ін}$, прикладеною в довільно вибраному центрі *O*, і парою з моментом $\boldsymbol{M}^{ін}$. Можливі наступні випадки приведення сил інерції твердого тіла:

1. При поступальному русі сили інерції твердого тіла приводяться до рівнодійної, що дорівнює $\boldsymbol{\Phi}^{ін}$ і проходить через центр мас тіла

$$\boldsymbol{\Phi}^{ін} = -M\boldsymbol{a}_c.$$

2. При обертальному русі навколо осі *z* система сил інерції зводиться до рівнодійної $\boldsymbol{\Phi}^{ін}$, що прикладена в довільному центрі зведення *O*, і до пари сил з моментом $\boldsymbol{M}^{ін}$

$$\boldsymbol{\Phi}^{ін} = -M\boldsymbol{a}_c, \quad \boldsymbol{M}_z^{ін} = -\boldsymbol{J}_z\boldsymbol{\varepsilon}.$$

3. Якщо вісь обертання проходить через центр мас тіла, то головний вектор сил інерції $\boldsymbol{\Phi}^{ін} = 0$, оскільки прискорення центра мас $\boldsymbol{a}_C = 0$, і система приводиться до пари з моментом, який визначається по другій формулі (22.12).

4. При плоскопаралельному русі система сил інерції зводиться до рівнодійної $\boldsymbol{\Phi}^{ін}$, що лежить в площині симетрії і прикладена в центрі мас тіла, і пари з моментом

$$\boldsymbol{M}_{Cz}^{ін} = \boldsymbol{J}_{Cz}\boldsymbol{\varepsilon}.$$

Питання для самоконтролю

1. В чому полягає суть принципу Даламбера?
2. В якому випадку вводять до розгляду сили інерції?
3. До чого зводяться сили інерції твердого тіла при поступальному русі?
4. До чого зводяться сили інерції твердого тіла при обертальному русі?
5. До чого зводяться сили інерції твердого тіла при плоскопаралельному русі?
6. В яких системах відліку розглядається рух тіла при застосуванні принципу Даламбера?

Завдання № 22. «Принцип кінетостатики»

Рекомендації до розв'язання задач

1. Визначити точку, рух якої розглядається, і показати її на рисунку.
2. Вказати на рисунку всі активні сили, що діють на матеріальну точку.
3. Вивільнити точку від в'язей, замінивши їх реакціями, реакції також нанести на рисунок.
4. Додати сили інерції до отриманої системи сил, показавши їх на рисунку.
5. Використавши принцип Даламбера, скласти рівняння (22.3) принципу кінетостатики і знайти шукану величину.

Приклад розв'язання задачі

Задача 1. Автомобіль маси m = 1 000 кг рухається по випуклому мосту зі швидкістю υ = 10 м/с. Визначити силу тиску автомобіля на міст в момент проходження його середини, якщо радіус кривини в середині моста R = 50 м.

Розв'язання

Розглянемо автомобіль в момент проходження середини моста. На нього діє доцентрова сила тяжіння і протилежна їй сила реакції моста, причому ці сили не зрівноважують одно одну, оскільки автомобіль рухається.

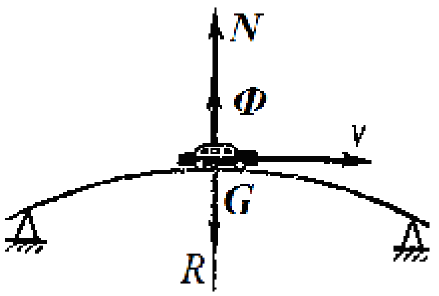


Рис. 22.2. До задачі 1.

Перед тим, як прикласти до системи силу інерції, визначимо величину і напрям прискорення автомобіля. Оскільки автомобіль рухається з постійною швидкістю, то дотична складова прискорення відсутня і прискорення автомобіля дорівнює його нормальній складовій

$$a = a_n = \frac{u^2}{R} = \frac{10^2}{50} = 2\,(\text{м/с}^2).$$

Сила інерції по модулю дорівнює

$$\varPhi = ma_n = 1000 \cdot 2 = 2000\,(\text{Н})$$

і направлена у бік випуклості траєкторії (рис. 22.2).

Приклавши силу інерції, можна записати рівняння статики для даної системи в проекції на нормальну вісь

$$\sum_{k=1}^{n} Y_k = 0.\;\; N + \varPhi - G = 0 \Rightarrow N = mg - \varPhi = 1000 \cdot 9{,}81 - 2000 = 7810\,(\text{Н}).$$

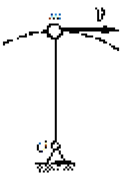
Задачу розв'язано.

Завдання №22 до РГР

22.1. Прискорення швидкісного ліфту висотної будівлі при підйомі змінюється від a_1 = 2 м/с^2 до a_2 = - 2 м/с^2. Визначити натяг троса в момент максимального і мінімального прискорення, якщо вага кабіни з пасажирами G = 1 200 Н.

Відповідь: T_1 = 1 445 Н, T_2 = 955 Н.

22.2. Кулька масою m = 0,5 кг, прив'язана до нитки довжиною l = 0,7 м, обертається з постійною швидкістю в вертикальній площині, роблячи 1 оберт за секунду. Визначити силу натягу нитки в найвищому положенні кульки.



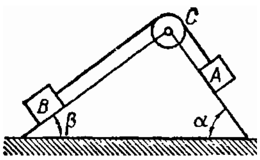
Відповідь: T = 8,9 Н.

Рис. до задачі 22.2.

22.3. З якою швидкістю має їхати мотоцикліст по арочному мосту радіуса R = 20 м, аби під час проходження верхньої точки не створювати тиску на міст?
Відповідь: υ = 14 м/с.

22.4. На невагомому нерозтяжному тросі підвішений вантаж маси m = 2 кг. Визначити натяг тросу, якщо за його допомогою вантаж підіймається угору з прискоренням a = 3 м/с^2.
Відповідь: T = 25,6 Н.

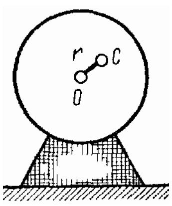
22.5. Вантажі A і B вагою P = 60 Н кожен ковзають без тертя по бічним граням нерухомого клина. Нехтуючи масами нитки і блока, знайти сили натягу нитки, якщо кути в основі клина α = 60° і β = 45°.



Відповідь: T = 47,2 Н.

Рис. до задачі 22.5.

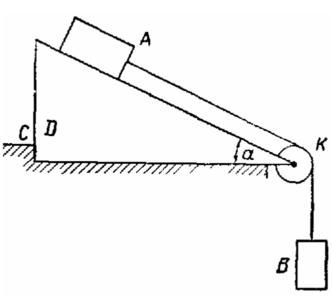
22.6. Електричний двигун маси M = 40 кг встановлено на горизонтальному фундаменті. Центр тяжіння ротора C зміщений від осі обертання O на відстань r = 5 см. Визначити максимальну силу тиску на фундамент з боку двигуна, якщо маса ротора m = 4 кг, а його кутова швидкість ω = 5 рад/с.



Відповідь: F_{max} = 397,4 Н.

Рис. до задачі 22.6.

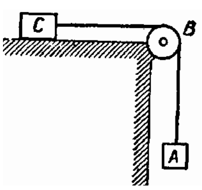
22.7. Вантаж B вагою Q = 50 Н опускається під дією власної ваги, приводячи до руху вантаж A вагою P = 40 Н, який знаходиться на похилій площині з кутом нахилу до горизонту α = 30°. Визначити горизонтальну складову сили тиску на виступ C з боку похилої площини, якщо коефіцієнт тертя ковзання між тілом A і площиною дорівнює f = 0,25.



Відповідь: F_{max} = 23,6 Н.

Рис. до задачі 22.7.

22.8. Вантаж A вагою P_A = 150 Н за допомогою нерозтяжної нитки, перекинутої через блок В вагою P_B = 5 Н, приєднаний до вантажу С вагою P_C = 95 Н, який вільно ковзає по горизонтальній площині. Визначити силу, з якою блок діє на вісь, якщо його маса рівномірно розподілена по ободу.



Відповідь: N = 86,5 Н.

Рис. до задачі 22.8.

22.9. Математичний маятник довжиною l = 0,5 м і вагою P = 10 Н відвели на кут φ_0 = 15° від положення рівноваги і надали йому початкову швидкість υ_0 = 5 м/с, спрямовану угору перпендикулярно до нитки. Знайти натяг нитки маятника в момент, коли вона утворює з вертикаллю кут φ = 60°.
Відповідь: T = 46,6 Н.

22.10. Залізничний вагон здійснює вертикальні коливання по закону

$$y = 0{,}4\sin 10pt\,.$$

Коливання відбуваються на ресорах, розташованих між кузовом вагона масою M = 2 т і його візком масою m = 200 кг. Визначити мінімальну і максимальну силу тиску вагона на рейки.
Відповідь: T_{max} = 30 кН, T_{min} = 14 кН.

22.11. На невагомому нерозтяжному тросі підвішений вантаж маси m = 2 кг. Визначити натяг тросу, якщо за його допомогою вантаж опускається донизу з прискоренням a = 4,5 м/с^2.
Відповідь: T = 10,6 Н.

22.12. Кулька масою m = 0,5 кг, прив'язана до нитки довжиною l = 0,7 м, обертається з постійною швидкістю в вертикальній площині, роблячи 1 оберт за секунду. Визначити силу натягу нитки в найнижчому положенні кульки.
Відповідь: T = 18,7 Н.

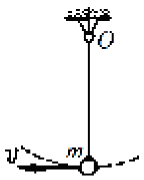


Рис. до задачі 22.12.

22.13. Підйомник вагою P = 5 000 Н підіймається рівноприскорено і за перші 5 с проходить відстань s = 40 м. Визначити натяг тросу підйомника.
Відповідь: T = 6 631 Н.

22.14. Визначити силу, з якою вантаж 1 маси m = 5 кг діє на упор візка 2, який рухається поступально з прискоренням a = 4 м/с^2.
Відповідь: $\boldsymbol{F}$ = 20 Н.

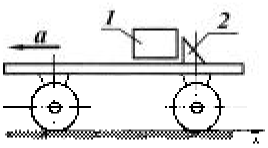


Рис. до задачі 21.14.

22.15. Два тіла рухаються з однаковими кутовими швидкостями ω по колах радіуса $\boldsymbol{R}_1$ = 20 см і $\boldsymbol{R}_2$ = 40 см відповідно. Визначити відношення мас m_1 і m_2 даних тіл, якщо їх відцентрові сили інерції однакові.
Відповідь: m_1/m_2 = 2.

22.16. Точка маси m = 2 кг рухається по шорсткій горизонтальній площині під дією сили $\boldsymbol{F}$ = 10 Н, спрямованої під кутом α = 30° до горизонту. Визначити прискорення точки, якщо коефіцієнт тертя ковзання f = 0,1.
Відповідь: a = 3,6 м/с^2.

22.17. Залізний прут довжини l = 6 м і діаметра d = 0,03 м обертається в горизонтальній площині навколо осі, що проходить через його кінець. До другого кінця прикріплена куля масою m = 200 кг. Визначити найбільшу кутову швидкість стержня, яка не призведе до його руйнування, якщо межа міцності матеріалу дорівнює $\sigma_{міц}$ = 140 МПа.
Відповідь: ω = 18 рад/с.

22.18. Підйомник вагою P = 5 000 Н опускається рівноприскорено і за перші 5 с проходить відстань s = 40 м. Визначити натяг тросу підйомника.
Відповідь: T = 3 369 Н.

22.19. Вантажі A і B однакової ваги ковзають по без тертя по бічним граням нерухомого клина. Нехтуючи масами нитки і блока C, знайти прискорення вантажів, якщо кути в основі клина α = 60° і β = 45°.
Відповідь: a = 0,8 м/с^2.

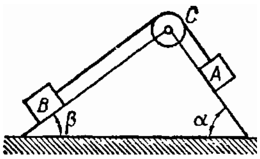


Рис. до задачі 22.19.

22.20. Дві кулі масами m_1 = 9 кг і m_2 = 2 кг з'єднані за допомогою мотузки довжини l = 5 м, перекинутої через блок. Перша куля може ковзати без тертя по горизонтальній дошці, а друга куля рухається донизу, тягнучи за собою першу. Визначити швидкість руху системи в момент, коли друга куля опуститься на 4 метри.
Відповідь: v = 3,6 м/с.

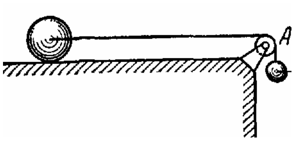


Рис. до задачі 22.20.

22.21. Вантаж маси m = 60 кг підвішений на канаті, намотаному на барабан радіуса r = 0,4 м, який обертається згідно рівняння

$$j = 0{,}6t^2, \text{ рад.}$$

Визначити натяг канату при підйомі вантажу.
Відповідь: T = 617 Н.

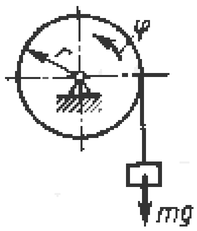


Рис. до задачі 22.21.

22.22. Дві кулі масами m_1 = 9 кг і m_2 = 2 кг з'єднані за допомогою мотузки довжини l = 5 м, перекинутої через блок (рис. до задачі 21.20). Перша куля може ковзати без тертя по горизонтальній дошці, а друга рухається донизу, тягнучи за собою першу. Визначити час, за який друга куля опуститься на 4 м.
Відповідь: t = 2 с.

22.23. Яку горизонтальну силу F необхідно прикласти до похилої площини маси M = 20 кг, аби тіло маси m = 2 кг, що знаходиться на ній, залишалось в стані спокою відносно похилої площини. Кут нахилу площини до горизонту α = 30°.
Відповідь: F = 124,6 Н.

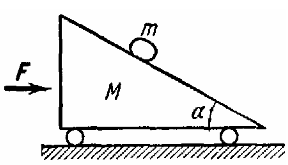


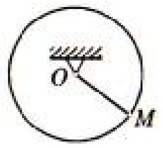
Рис. до задачі 22.23.

Глава 23. «Принцип можливих переміщень»

23.1. Класифікація в’язей

Наведена раніше класифікація в’язей не є повною. Оскільки в аналітичній механіці в’язі відіграють важливу роль, то їх класифікація потребує розширення. Так з геометричної точки зору можна запропонувати наступну класифікацію в'язей:

1. *Одностороння* (така, що не утримує) – перешкоджає переміщенню точки лише в одному напрямі. Обмеження, що накладаються такими в'язями, записуються у вигляді нерівностей. Так кулька *M* на нитці *OM* (рис. 23.1) може знаходитися всередині сфери або на її поверхні. Рівняння в'язі в такому випадку



$$x^2 + y^2 + z^2 \le l^2. \tag{23.1}$$

Рис. 23.1. Одностороння в’язь.

2. *Двостороння* (така, що утримує) – перешкоджає переміщенню точки в двох протилежних напрямах. Обмеження, що накладаються такою в'яззю, записуються у вигляді рівнянь. Так кулька *M* на жорсткому стержні *OM* може знаходитися тільки на поверхні сфери. Рівняння в'язі в такому випадку

$$x^2 + y^2 + z^2 = l^2. \tag{23.2}$$

З іншого боку, в залежності від виду рівняння в’язі, всі їх поділяють на:

1. *Голономні* – в’язі, які накладають обмеження тільки на координати точки. Їх рівняння не містять похідних від координат, або можуть бути зведені до такого виду. Голономними рівняннями є вирази (23.1) і (23.2).

2. *Неголономні* – в’язі, які крім координат накладають обмеження на швидкості або прискорення точки. Їх не можна виразити рівняннями без похідних від координат або диференціальними рівняннями, які інтегруються. Бувають першого (входять перші похідні від координат) і другого порядків.

Голономні в'язі, в свою чергу, бувають двох типів:

1. *Стаціонарні* – в’язі, рівняння яких в явному вигляді не містить час. Усі наведені вище рівняння в'язів є стаціонарними.

2. *Нестаціонарні* – в’язі, рівняння яких містить час в явному виді. Наприклад, точка здійснює коливання на нитці, довжина якої змінюється по закону

$$l = l_0 - ut$$

де l_0 – початкова довжина нитки.

Як витікає з (19.8), перпендикулярна сила не здійснює роботи, тому робота ідеальної реакції на віртуальному переміщенні дорівнює нулю. *Ідеальні* – в'язі, для яких сума елементарних робіт їх реакцій на будь-якому переміщенні системи дорівнює нулю

$$\sum_{k=1}^{n} dA_k^p = 0. \tag{23.3}$$

Оскільки кожна з точок системи знаходиться в рівновазі, то сума робіт усіх активних сил (зовнішніх і внутрішніх) і реакцій в'язів при будь-якому переміщенні кожної з точок має дорівнювати нулю:

$$\sum_{k=1}^{n} dA_k^a + \sum_{k=1}^{n} dA_k^p = 0. \tag{23.4}$$

23.2. Поняття про можливі переміщення

В попередніх главах теоретичної механіки часто використовувалось поняття **диференціала функції** – елементарної зміни функції за рахунок зміни величини її аргументу

$$dy = y_2 - y_1 = f(x + \Delta x) - f(x).$$

В аналітичній механіці наряду з диференціалом використовується поняття **варіації функції** – елементарної зміни виду функції при сталому значенні її аргументу

$$dy = y_2 - y_1 = f_2(x) - f_1(x).$$

Дійсним переміщенням матеріальної точки називають дозволене накладеними в'язями елементарне переміщення ***dr***, яке точка здійснює за нескінченно малий проміжок часу ***dt***

$$\boldsymbol{dr} = \boldsymbol{i}dx + \boldsymbol{j}dy + \boldsymbol{k}dz\,.$$

Характер даного переміщення залежить від прикладених сил, вигляду накладених в'язей і початкових умов руху.

Дійсним переміщенням механічної системи називають сукупність дійсних переміщень точок системи.

Можливим переміщенням матеріальної точки називають уявне елементарне переміщення $\delta\boldsymbol{r}$, дозволене накладеними в'язями

$$\boldsymbol{dr} = \boldsymbol{i}dx + \boldsymbol{j}dy + \boldsymbol{k}dz\,.$$

Можливе переміщення визначається лише накладеними в'язями і не залежить від прикладених сил.

Можливим переміщенням механічної системи вважають будь-яку сукупність елементарних переміщень точок даної системи із займаного положення, які допускаються накладеними на систему в'язями.

У випадку стаціонарних в'язей дійсне переміщення точки є одним з числа її можливих переміщень, для нестаціонарних в'язей дійсне переміщення розглядається при миттєво зупинених в'язях у фіксований момент часу, тому не є частковим випадком можливих переміщень.

У загальному випадку система може мати безліч можливих переміщень, але для будь-якої системи можна вказати деяке число незалежних між собою переміщень, через які можуть бути виражені усі інші. Таке число незалежних можливих переміщень називається числом *степеней вільності* даної системи. Вільна точка має три степені вільності – δx, δy і δz; точка на площині матиме дві степені – δx і δy; а та, що рухається по кривій – одну δs.

23.3. Принцип можливих переміщень

В рівняння руху або рівноваги тіл наряду з активними силами входять і реакції в'язей, які часто є невідомими, що ускладнює розв'язання задач. Однак якщо у в'язях відсутнє тертя (ідеальні в'язі), то на базі принципу можливих переміщень можна отримати рівняння, в які не входять сили реакції в'язей.

Принцип можливих переміщень: для рівноваги механічної системи з ідеальними в'язями необхідно і достатньо, аби сума елементарних робіт усіх діючих на неї активних сил при будь-якому можливому переміщенні системи дорівнювала нулю

$$\sum_{k=1}^{n} dA_k^a = 0 \rightarrow \sum_{k=1}^{n} (F_{kx}^a dx_k + F_{ky}^a dy_k + F_{kz}^a dz_k) = 0. \quad (23.5)$$

За допомогою принципу можливих переміщень достатньо просто розв'язувати задачі рівноваги твердого тіла або системи твердих тіл, а також визначати залежності між величинами заданих сил. Найбільш ефективним даний метод є в задачах про рівновагу систем твердих тіл. Виходячи з даного принципу, можливо вивести рівняння рівноваги твердого тіла під дією як плоскої, так і просторової системи сил.

Якщо не всі в'язі, накладені на систему, є ідеальними, то до заданих сил необхідно додати сили тертя, після чого прирівняти до нуля сумарну роботу активних сил і сил тертя на можливих переміщеннях системи.

Принцип можливих переміщень може бути використаний і до розрахунку невідомих реакцій в'язей. Для визначення такої реакції відкидають відповідну в'язь, внаслідок чого система отримує додаткову степінь вільності, і надають системі переміщення, що відповідає даній степені вільності. У такому випадку до рівняння робот реакція в'язі входить як невідома активна сила.

Завдання № 23. «Принцип можливих переміщень»

Рекомендації до розв'язання задач

Система з одним степенем вільності

1. Нанести на рисунок задані сили.
2. За наявності неідеальних в'язей додати відповідні сили реакцій.
3. За необхідності визначити величину сили реакції в'язі та застосувати принцип звільнення від в'язей.
4. Надати можливе переміщення одній з точок системи і виразити через нього можливі переміщення точок прикладення усіх сил, що діють на систему.
5. Знайти суму робіт усіх сил на відповідних можливих переміщеннях їх точок прикладення і прирівняти дану суму нулю.
6. Розв'язати отримане рівняння рівноваги і визначити шукану величину.

Система з кількома степенями вільності

1. Нанести на рисунок задані сили.
2. За наявності неідеальних в'язей додати відповідні сили реакцій.
3. За необхідності визначити величину сили реакції в'язі та застосувати принцип звільнення від в'язей.
4. Обрати незалежні можливі переміщення точок системи в кількості, рівній числу її степеней вільності.
5. Надати можливе переміщення, що відповідає одній степені вільності, вважаючи переміщення, що відповідають іншим степеням вільності, рівними нулю.
6. Виразити через надане переміщення можливі переміщення точок прикладення усіх сил, що діють на систему.

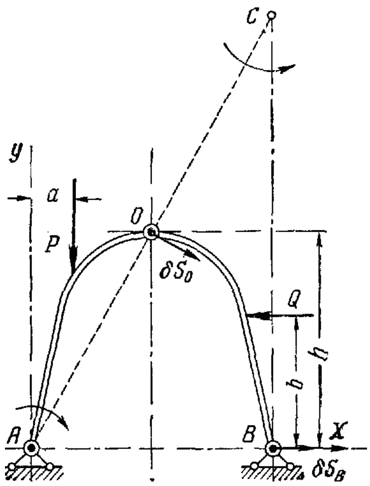
7. Знайти суму робіт усіх сил на відповідних можливих переміщеннях їх точок прикладення і прирівняти дану суму нулю.
8. Послідовно виконати пункти 5 – 7 для усіх незалежних можливих переміщень системи.
9. Розв’язати отриману систему рівнянь рівноваги і визначити шукані величини.

Приклад розв’язання задачі

Задача 1. Симетрична балка *AOB* навантажена силами P = 5 кН і Q = 1 кН (рис. 23.2). Знайти горизонтальну складову реакції шарніра *B*, якщо розміри балки: a = 0,5 м, b = 2,5 м, h = 4 м.

Розв’язання

Подумки замінимо шарнірно нерухому опору в точці *B* шарнірно рухомою, аби дана точка могла переміщуватись в горизонтальному напрямку. Після цього нанесемо на рисунок можливе переміщення опори δs_B.



Переміщення опори *B* призведе до повороту половини арки *OA* навколо нерухомої точки *A* на деякий кут $\delta\varphi_A$. При цьому точка *O* отримає можливе переміщення δs_O, спрямоване по дотичній по дузі кола, що описує точка *O*, тобто перпендикулярно *AO*.

Знайдемо миттєвий центр обертання половини арки *OA* на перетині перпендикулярів до можливих переміщень δs_O і δs_B. Тепер переміщення половини арки *OB* можна представити як поворот на елементарний кут $\delta\varphi_A$ навколо точки *C*.

Рис. 23.2. До задачі 1.

Згідно принципу можливих переміщень

$$\sum dA = dA_X + dA_Q + dA_P = 0.$$

Визначимо роботу кожної з сил на елементарних переміщеннях

$$dA_X = M_C(\boldsymbol{X})dj_C = X \cdot 2hdj_C; \qquad dA_Q = M_C(\boldsymbol{Q})dj_C = -Q(2h-b)dj_C;$$

$$dA_P = M_A(\boldsymbol{P})dj_A = Padj_A.$$

Виразимо елементарний поворот $\delta\varphi_A$ навколо точки *A* через елементарний поворот $\delta\varphi_C$ навколо точки *C*. Оскільки точка *O* належить одночасно обом половинам арки, то її переміщення можна записати як поворот навколо опори *A* і навколо опори *C*

$$ds_O = OAdj_A = OCdj_C.$$

За умовами задачі арка симетрична, тому

$$OA = OC \Rightarrow dj_A = dj_C.$$

Підставляємо отримані результати в перше рівняння

$$X \cdot 2hdj_C - Q(2h-b)dj_C + Padj_C = 0. \qquad X \cdot 2h = Q(2h-b) - Pa;$$

$$X = \frac{Q(2h-b)-Pa}{2h} = \frac{1\cdot(2\cdot 4-2{,}5)-5\cdot 0{,}5}{2\cdot 4} = 0{,}375(кН).$$

Задачу розв’язано.

Завдання №23 до РГР

23.1. До повзуна кривошипно-шатунного механізму прикладена горизонтальна сила Q = 200 Н. Визначити силу P, яку слід прикласти в точці A перпендикулярно кривошипу OA, аби механізм в даному положенні знаходився в стані рівноваги. Розміри ланок: OA = 30 см і AB = 113 см, кут AOB = 30°.
Відповідь: F = 123,2 Н.

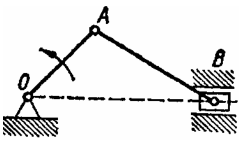


Рис. до задачі 23.1.

23.2. Для двохколодкового гальма визначити силу тиску гальмівних колодок на колесо, якщо до важеля BC прикладена вертикальна сила Q = 2 кН. Геометричні розміри ланок механізму: BC = BD = 0,1 м; KL = OA = 0,35 м; LE = OD = 0,7 м. Власну вагу ланок механізму до уваги не брати.
Відповідь: N_A = 3,4 кН, N_K = 4 кН.

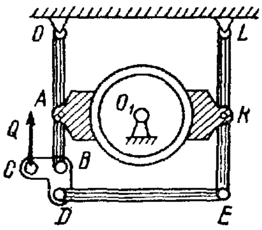


Рис. до задачі 23.2.

23.3. Визначити реакцію в опорі C складної невагомої балки $ABCD$, навантаженої парою сил з моментом M = 400 Н·м, якщо довжина a = 2 м.
Відповідь: R_C = 100 Н.

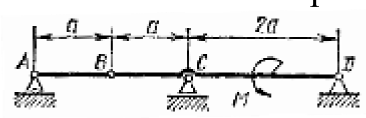


Рис. до задачі 23.3.

23.4. В шарнірному паралелограмі $OABC$, розташованому в вертикальній площині, довжина кривошипа OA = 20 см, причому вага шатуна AB дорівнює G = 40 Н. Нехтуючи власною вагою кривошипів визначити величину моменту M, прикладеного до кривошипа OA, за умови, що механізм знаходиться в стані рівноваги в даному положенні.
Відповідь: M = 4 Н·м.

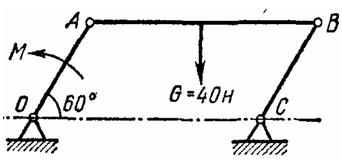


Рис. до задачі 23.4.

23.5. До кривошипа OA дезаксіального кривошипно-шатунного механізму прикладений момент M = 2,4 кН·м. Визначити горизонтальну силу P, яку слід прикласти до повзуна B, аби даний механізм знаходився в стані рівноваги у вказаному положенні. Розміри ланок механізму: OA = 60 см, AB = 120 см, ексцентриситет OB_1 = 30 см, кут α = 30°.
Відповідь: P = 4 кН.

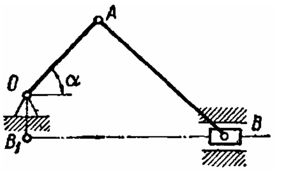


Рис. до задачі 23.5.

23.6. Визначити момент пари сил M, який необхідно прикласти до барабана 2 радіуса r = 20 см для рівномірного підняття вантажу 1 ваги 200 Н.
Відповідь: M = 20 Н·м.

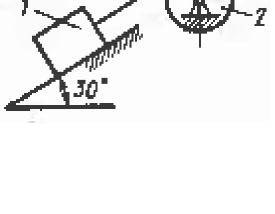
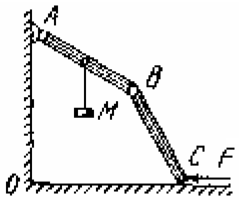


Рис. до задачі 23.6.

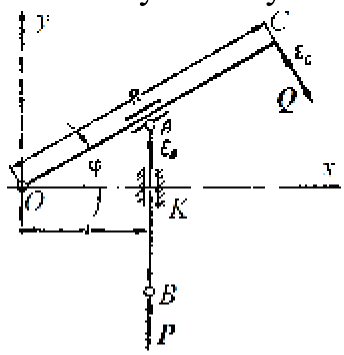
23.7. Два однакові однорідні стержні *AB* і *BC* вагою P = 5 Н кожен, шарнірно з'єднані між собою. Стержень *AB* шарнірно закріплений в точці *A*, а до його середини підвішений вантаж *M* вагою Q = 10 Н. Стержень *BC* спирається на ідеально гладку підлогу. Яку горизонтальну силу F необхідно прикласти в точці *C*, аби система знаходилась в стані рівноваги, якщо кути *OAB* = *OCB* = 60°?



Відповідь: F = 8,7 Н.

Рис. до задачі 23.7.

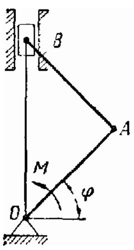
23.8. В кулісному механізмі при обертанні кривошипа *OC* навколо осі *O* повзун *A*, що рухається вздовж кривошипа, приводить до руху в вертикальних напрямних *K* стержень *AB*. Яку силу Q необхідно прикласти перпендикулярно кривошипу *OC* в точці *C* для того, аби зрівноважити силу P = 50 Н, спрямовану догори уздовж стержня, якщо *OC* = 0,6 м і *OK* = 0,25 м, φ = 30°.



Відповідь: F = 27,8 Н.

Рис. до задачі 23.8.

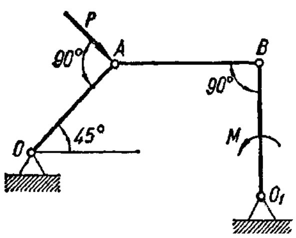
23.9. До кривошипа *OA* кривошипно-шатунного механізму, розташованого у вертикальній площині, прикладена пара сил із моментом M = 5 Н·м. Визначити кут φ, за якого увесь механізм залишиться в стані рівноваги, якщо *OA* = *AB* = 20 см, вага кожного із стержнів P = 10 Н, вага повзуна Q = 5 Н.



Відповідь: φ = 60°.

Рис. до задачі 23.9.

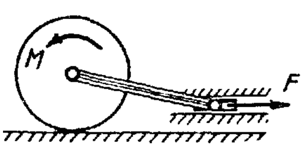
23.10. До ланки *OA* шарнірного чотириланкового механізму прикладена сила P = 50 Н. Визначити момент пари сил *M*, який необхідно прикласти до ланки O_1B довжиною r = 0,4 м, аби механізм в даному положенні знаходився в стані рівноваги.



Відповідь: M = 10 Н·м.

Рис. до задачі 23.10.

23.11. Колесо радіуса R = 0,7 м рівномірно котиться без ковзання по горизонтальній рейці під дією пари сил з моментом M = 140 Н·м. До центра колеса шарнірно приєднаний стержень, другий кінець якого ковзає по напрямним, паралельним рейці. Нехтуючи силами опору коченню, визначити силу тертя в напрямних.



Відповідь: F = 433 Н.

Рис. до задачі 23.11.

23.12. Прямокутна тришарнірна арка знаходиться в рівновазі під дією пари сил з моментом M = 2 кН·м. Нехтуючи власною вагою арки, визначити реакцію в опорі E, якщо довжини елементів арки $AB = BC = CD = DE$ = 2 м.

Відповідь: R_E = 0,71 кН.

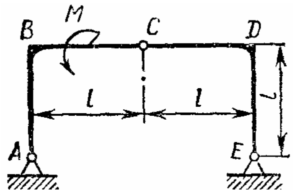


Рис. до задачі 23.12.

23.13. К шатуну AB шарнірного паралелограма $OABC$ прикладена горизонтальна сила F = 50 Н. Визначити величину моменту пари сил M, яку необхідно прикласти до кривошипа OA довжиною l = 10 см, для того, аби зрівноважити даний механізм.

Відповідь: M = 4,3 Н·м.

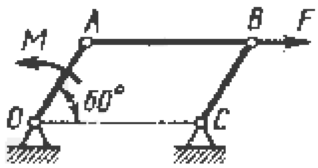


Рис. до задачі 23.13.

23.14. На рукоятку підйомного механізму AB довжиною l = 10 см діє сила P = 40 Н. Визначити зусилля Q на виході механізму, якщо при кожному оберті рукоятки гвинт D переміщується на величину h = 5 мм.

Відповідь: Q = 5,02 кН.

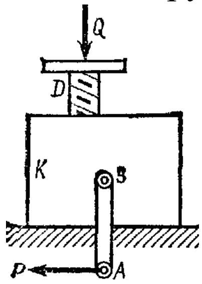


Рис. до задачі 23.14.

23.15. На поршень B механізму діє сила P = 100 Н, а до куліси O_1C прикладений момент M_1 = 30 Н·м. Нехтуючи тертям, визначити момент M, який необхідно прикласти до кривошипа OA, аби механізм залишався в стані рівноваги в положенні, в якому ланки OA = 20 см і O_1C = 60 см вертикальні.

Відповідь: M = 10 Н·м.

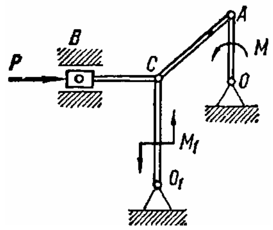


Рис. до задачі 23.15.

23.16. На кривошип O_1A кулісного механізму діє обертовий момент M_1 = 20 Н·м. Визначити величину моменту M_2, який необхідно прикласти до куліси O_2A, аби зрівноважити механізм в положенні, коли кут O_1O_2A = 30°, а кривошип займає горизонтальне положення.

Відповідь: M_2 = 80 Н·м.

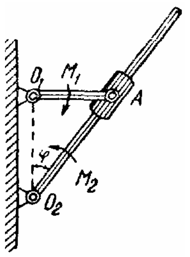


Рис. до задачі 23.16.

23.17. На гладкій горизонтальній похилій площині лежить вантаж вагою P = 50 Н, який утримується перекинутою через блок ниткою, яка несе на іншому кінці вантаж Q = 30 Н. Визначити кут α, за якого дана система буде знаходитись в стані рівноваги.

Відповідь: α = 36,9°.

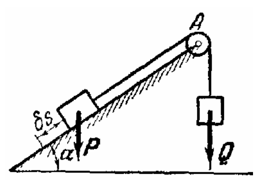
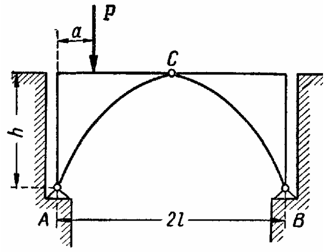


Рис. до задачі 23.17.

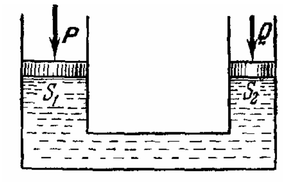
23.18. На ліву частину тришарнірної арки діє вертикальна сила P = 2 кН, лінія дії якої знаходиться на відстані a = 0,5 м від осі лівого шарніра A. Визначити горизонтальну складову реакції в шарнірі B, якщо розміри арки l = 5 м і h = 3 м.



Відповідь: X_B = 10 Н.

Рис. до задачі 23.18.

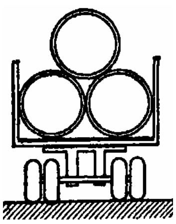
23.19. До поршня лівого коліна гідравлічного пресу прикладена сила P = 100 Н. Визначити силу Q, яку необхідно прикласти до поршня правого коліна, аби прес залишався у стані рівноваги, якщо площі поперечних перерізів поршнів S_1 = 0,1 м^2 і S_2 = 0,01 м^2.



Відповідь: Q = 10 Н.

Рис. до задачі 23.19.

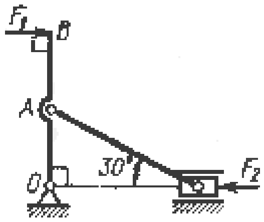
23.20. Автомобіль з причепом перевозить три труби вагою P = 1 500 Н кожна. За допомогою принципу можливих переміщень визначити силу тиску труб на борти автомобілю.



Відповідь: F = 433 Н.

Рис. до задачі 23.20.

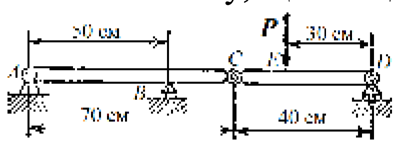
23.21. Визначити модуль сили F_2, яку необхідно прикласти до повзуна, аби зрівноважити механізм в заданому положенні, якщо F_1 = 100 Н, а довжина $OA = AB$.



Відповідь: F = 200 Н.

Рис. до задачі 23.21.

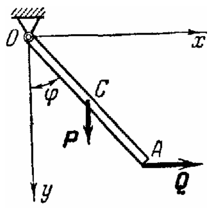
23.22. На балку, що складається з двох брусів, з'єднаних шарніром C, діє сила P = 500 Н. Визначити реакцію в опорі B балки, розміри і розташування опор якої показано на рисунку.



Відповідь: R_B = 525 Н.

Рис. до задачі 23.22.

23.23. Однорідний стержень вагою P = 20 Н підвішений вертикально за один кінець. Яку горизонтальну силу Q необхідно прикласти до другого кінця, аби стержень відхилився від вертикалі на кут φ = 45°.



Відповідь: Q = 10 Н.

Рис. до задачі 23.23.

Глава 24. «Загальне рівняння динаміки»

24.1. Загальне рівняння динаміки

Розглянутий в главі 22 принцип Даламбера дозволяє розв’язувати задачі динаміки методами статики за рахунок введення сил інерції до числа активних сил, що діють на дану систему. Принцип можливих переміщень, розглянутий в главі 23, широко використовується при розв’язанні задач статики для системи, на яку накладені голономні стаціонарні двосторонні та ідеальні в’язі. Поєднання цих двох принципів утворює новий принцип Даламбера-Лагранжа, суть якого полягає у введенні сил інерції при розгляді руху системи і подальшому застосуванні принципу можливих переміщень. Таке поєднання дозволяє отримати достатньо потужний метод розв’язання широкого кола задач динаміки механічних систем.

Нехай до системи із n матеріальних точок прикладена рівнодійна активних сил $\boldsymbol{P}$ і рівнодійна сил реакції в'язів $\boldsymbol{R}$. Введемо для кожної точки системи силу інерції

$$\boldsymbol{\Phi}_k = -m\boldsymbol{a}_k .$$

Тоді згідно принципу Даламбера в будь-який момент часу виконується умова

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\boldsymbol{P}_k + \boldsymbol{R}_k + \boldsymbol{\Phi}_k\right) = 0.$$

Подумки зафіксуємо час і надамо усім точкам системи відповідне можливе переміщення, тоді

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\boldsymbol{P}_k d\boldsymbol{r}_k + \boldsymbol{R}_k d\boldsymbol{r}_k + \boldsymbol{\Phi}_k d\boldsymbol{r}_k\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(dA_k^a + dA_k^p + dA_k^{ін}\right) = 0. \qquad (24.1)$$

Вираз (24.1) є **загальним рівнянням динаміки**: при русі механічної системи з неідеальними в'язями в кожен момент часу сума елементарних робіт усіх прикладених активних сил, сил реакції в’язей і сил інерції на будь-якому можливому переміщенні дорівнює нулю.

Якщо ж на систему накладені ідеальні в’язі, то їх сума робіт дорівнюватиме нулю, а загальне рівняння динаміки матиме вигляд:

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\boldsymbol{P}_k d\boldsymbol{r}_k + \boldsymbol{\Phi}_k d\boldsymbol{r}_k\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(dA_k^a + dA_k^{ін}\right) = 0, \qquad (24.2)$$

тобто при русі механічної системи з двосторонніми ідеальними в'язями в кожен момент часу сума елементарних робіт усіх прикладених активних сил і сил інерції на будь-якому можливому переміщенні дорівнює нулю.

В аналітичній формі рівняння (24.2) має вигляд

$$\sum_{k=1}^{n}[(P_{kx} + \Phi_{kx}^{ін})dx_k + (P_{ky} + \Phi_{ky}^{ін})dy_k + (P_{kz} + \Phi_{kz}^{ін})dz_k] = 0. \qquad (24.3)$$

Розписавши сили інерції

$$\sum_{k=1}^{n}[(P_{kx} - m_k\ddot{x}_k)dx_k + (P_{ky} - m_k\ddot{y}_k)dy_k + (P_{kz} - m_k\ddot{z}_k)dz_k] = 0. \qquad (24.4)$$

отримаємо **загальне рівняння динаміки в декартовій системі координат**.

Рівняння (24.1) – (24.4) перш за все призначені для отримання диференціальних рівнянь руху конкретних механічних систем. Для систем, що складаються з окремих твердих тіл, сили інерції кожного тіла слід привести до головного вектора і головного моменту відносно деякого центра, причому за такий центр найчастіше доцільно обирати центр мас тіла.

24.2. Випадки визначення роботи сил інерції

При *поступальному русі* твердого тіла робота сил інерції твердого тіла на можливих переміщеннях точок системи визначається по формулі

$$dA = \boldsymbol{\Phi}^{ін} d\boldsymbol{r} = -m\boldsymbol{a}d\boldsymbol{r}, \tag{24.5}$$

де $\boldsymbol{\Phi}^{ін}$ – рівнодійна сил інерції, $\delta\boldsymbol{r}$ – можливе переміщення довільної точки твердого тіла.

При *обертальному русі* твердого тіла навколо нерухомої осі z робота сил інерції твердого тіла на можливих переміщеннях точок системи визначається по формулі

$$dA = M_z^{ін} dj = -I_z e_z dj, \tag{24.6}$$

де $M^{ін}{}_z$ – головний момент сил інерції відносно осі обертання z, $\delta\varphi$ – можливе кутове переміщення твердого тіла.

При *плоскопаралельному русі* твердого тіла робота сил інерції твердого тіла на можливих переміщеннях точок системи визначається по формулі

$$dA = \boldsymbol{\Phi}_C^{ін} d\boldsymbol{r} + \boldsymbol{M}_C^{ін} dj = -m\boldsymbol{a}_C d\boldsymbol{r} - I_C \boldsymbol{\varepsilon}_z dj, \tag{24.7}$$

де $\boldsymbol{\Phi}^{ін}{}_C$ – головний вектор сил інерції, $\boldsymbol{M}^{ін}{}_C$ – головний момент сил інерції відносно осі, що проходить через центр мас тіла перпендикулярно площині його симетрії, $\delta\boldsymbol{r}_C$ – можливе переміщення центра мас твердого тіла, $\delta\boldsymbol{\varphi}$ – можливе кутове переміщення твердого тіла.

24.3. Узагальнені координати і сили

Використання декартової системи координат не завжди виправдане з точки зору раціональності описання руху механічних систем, оскільки частина використовуваних координат є надлишковою через їх входження до рівнянь в'язей. Тому для описання руху часто використовують узагальнені координати.

Узагальнені координати – незалежні параметри будь-якої розмірності, які однозначно визначають положення системи, а їх число дорівнює числу степенів вільності системи.

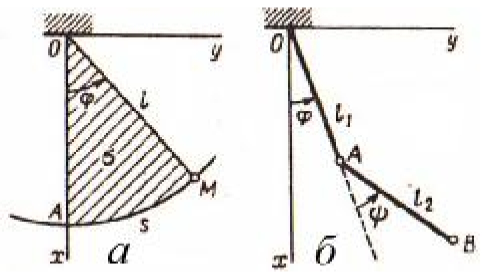


Рис. 24.1. Узагальнені координати.

Математичний маятник (рис. 24.1, *а*) має одну степінь вільності, тому за узагальнену координату можна обрати або кут φ, довжину дуги s, або площу сектора σ, вказавши при цьому позитивний і негативний напрям відповідної координати. В декартових координатах для задання положення маятника необхідно задати дві координати – x_A і y_A, які зв'язані між собою рівнянням траєкторії точки *M*.

Для задання положення подвійного математичного маятника (рис. 24.1, *б*), який має дві степені вільності, в декартовій системі необхідно чотири координати – x_A і y_A, x_B і y_B. Проте ці чотири координати зв'язані між собою двома рівняннями в'язей – траєкторіями точок A і B. Тому при відомих довжинах ланок l_1 і l_2 достатньо задати два незалежні параметри, наприклад кути φ і ψ, яких достатньо для однозначного описання положення маятника.

Кількість узагальнених координат завжди дорівнює кількості степеней вільності даної механічної системи, а різниця між кількістю декартових і узагальнених координат дорівнює кількості в'язей, накладених на дану систему. Введення узагальнених координат звільняє від необхідності вводити рівняння в'язей.

Розглянемо механічну систему із n матеріальних точок, на кожну з яких діє активна сила $\boldsymbol{P}_k$. Надамо системі можливе переміщення і визначимо суму елементарних робіт на ньому

$$dA = \sum_{k=1}^{n} dA_k = \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{P}_k d\boldsymbol{r}_k \,, \tag{24.8}$$

де $\delta\boldsymbol{r}_k$ – можливе переміщення k-ої точки системи. Вважаємо, що переміщення системи отримане шляхом надання узагальненим координатам можливих переміщень, тоді

$$d\boldsymbol{r}_k = \frac{\partial \boldsymbol{r}_k}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial \boldsymbol{r}_k}{\partial q_2} dq_2 + \ldots + \frac{\partial \boldsymbol{r}_k}{\partial q_N} dq_N = \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial \boldsymbol{r}_k}{\partial q_i} dq_i \,,$$

де s – кількість степеней вільності системи. Підставимо отримане можливе переміщення в (24.8)

$$dA = \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{P}_k \left(\sum_{i=1}^{s} \frac{\partial \boldsymbol{r}_k}{\partial q_i} dq_i \right) = \sum_{i=1}^{s} \left(\sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{P}_k \frac{\partial \boldsymbol{r}_k}{\partial q_i} dq_i \right). \tag{24.9}$$

Введемо поняття узагальненої сили

$$Q_i = \sum_{k=1}^{s} \boldsymbol{P}_k \frac{\partial \boldsymbol{r}_k}{\partial q_i}. \tag{24.10}$$

Аби знайти узагальнену силу, яка відповідає даній узагальненій координаті, необхідно надати можливе переміщення лише цій координаті, залишаючи величини усіх інших узагальнених координат незмінними, після чого знайти суму робіт активних сил

$$dA = \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{P}_k d\boldsymbol{r}_k = Q_i dq_i \,. \tag{24.11}$$

Згідно (24.11) можна дати визначення *узагальнених сил* Q_1, Q_2, …, Q_n як величин, що дорівнюють відношенню суми елементарних робіт активних сил до зміни відповідної узагальненої координати

$$Q_i = \frac{dA_i}{dq_i}.$$

Розмірність узагальненої сили залежить від типу узагальненої координати

$$[Q] = \frac{[A]}{[q]},$$

так, якщо узагальнена координата – лінійна величина, то Q має розмірність сили, якщо q – кут, то розмірність моменту (Н·м).

Якщо усі сили, що діють на систему, потенційні, то узагальнені сили дорівнюють узятим зі знаком мінус частковим похідним від потенційної енергії по відповідним узагальненим координатам

$$Q_1 = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_1},\ Q_2 = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_2}, ...,\ Q_n = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_n}.$$

24.4. Загальне рівняння динаміки в узагальнених силах

Згідно (24.2), в будь-який момент часу сума елементарних робіт активних сил і сил інерції дорівнює нулю, якщо на систему накладені ідеальні в'язі. Запишемо суму елементарних робіт сил інерції через узагальнені сили і координати

$$\sum_{k=1}^{n} dA_k^{ін} = \sum_{k=1}^{n} \Phi_k dr_k = \sum_{i=1}^{s} Q_i^{ін} dq_i, \tag{24.12}$$

де узагальнена сила інерції

$$Q_i^{ін} = \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{\Phi}_k \frac{\partial \boldsymbol{r}_k}{\partial q_i}. \tag{24.13}$$

Тоді, враховуючи (24.12) і (24.13), загальне рівняння динаміки набуває вигляду

$$\sum_{i=1}^{s} \left(Q_i + Q_i^{ін}\right) dq_i = 0. \tag{24.14}$$

Оскільки всі узагальнені координати незалежні, а їх варіації довільні, то виконання (24.14) можливо лише за умови, що

$$Q_i + Q_i^{ін} = 0. \tag{24.15}$$

Рівняння (24.15) є *загальним рівнянням динаміки в узагальнених координатах*.

Із (24.15) може бути отримане рівняння рівноваги механічної системи. Якщо система знаходиться в стані рівноваги, то узагальнені сили інерції також дорівнюють нулю, тому умова рівноваги

$$Q_i = 0. \tag{24.16}$$

Узагальнені сили інерції знаходять аналогічно узагальненим активним силам. Вираховують головний вектор і головний момент сил інерції, прикладають їх до тіл, після чого надають системі можливі переміщення. Визначивши суму елементарних робіт на цих переміщеннях, узагальнені сили інерції знаходять по формулі

$$Q_i^{ін} = \frac{\sum_{i=1}^{s} dA_i^{ін}}{dq_i}. \tag{24.17}$$

Завдання № 24. «Загальне рівняння динаміки»

<u>Рекомендації до розв’язання задач</u>

Система з одним степенем вільності

1. Нанести на рисунок задані сили і за наявності неідеальних в’язей додати їх сили реакцій.
2. Визначити головні вектори і головні моменти сил інерції мас системи.
3. Надати можливе переміщення одній з точок системи і виразити через нього можливі переміщення точок прикладення усіх активних сил і сил інерції, що діють на систему.
4. Знайти суму робіт усіх активних сил і сил інерції на відповідних можливих переміщеннях їх точок прикладення і прирівняти дану суму до нуля.
5. Після скорочення можливого переміщення визначити шукану величину або проінтегрувати диференціальне рівняння руху.

Система з кількома степенями вільності

1. Нанести на рисунок задані сили і за наявності неідеальних в’язей додати їх сили реакцій.
2. Визначити головні вектори і головні моменти сил інерції мас системи.
3. Надати незалежні можливі переміщення точкам системи в кількості її степеней вільності і виразити через них можливі переміщення точок прикладення усіх активних сил і сил інерції, що діють на систему.
4. Знайти суму робіт усіх активних сил і сил інерції на відповідних можливих переміщеннях їх точок прикладення і прирівняти дану суму до нуля.
5. Після скорочення всіх можливих переміщень отримати систему рівнянь, кількість яких дорівнює кількості степенів вільності даної системи.
6. Розв’язати отриману систему рівнянь руху механічної системи і визначити шукані величини.

<u>Приклад розв’язання задачі</u>

Задача 1. Барабани радіусами r_1 = 20 см і r_2 = 30 см жорстко з’єднані між собою і обертаються навколо горизонтальної осі. На барабани намотані нерозтяжні нитки, до кінців яких прикріплені вантаж A вагою m_1 = 5 кг і вантаж B вагою m_2 = 20 Н, а система рухається під дією їх ваги. Нехтуючи масами барабанів і ниток, визначити кутове прискорення барабанів.

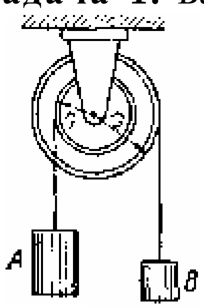


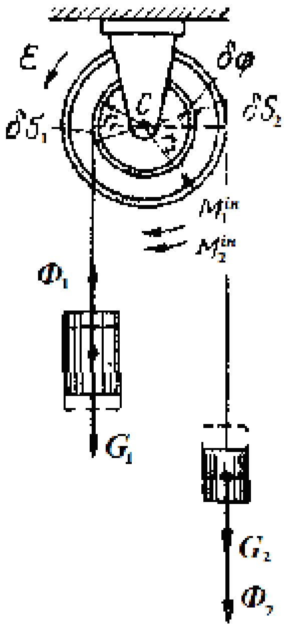
Рис. 24.4. До задачі 1.

<u>Розв’язання</u>

Дана система має одну степінь вільності. Оскільки вантаж A важчий, то барабани будуть обертатись з кутовим прискоренням, спрямованим проти годинникової стрілки. Тоді прискорення першого вантажу буде спрямоване вниз, а другого – угору.

Прикладемо сили інерції, спрямувавши їх у бік, протилежний напрямам прискорень (рис. 24.4) і визначимо їх модулі

$$\Phi_1 = m_1 a_1 = m_1 r_1 e;\ \Phi_2 = m_2 a_2 = m_2 r_2 e .$$



Надамо системі можливе переміщення, повернувши барабан на кут $\delta\varphi$ в напрямку дійсного руху системи, а кутові переміщення вантажів виразимо через поворот барабана

$$ds_1 = r_1 dj , \quad ds_2 = r_2 dj .$$

Складаємо загальне рівняння динаміки у вигляді (24.3)

$$m_1 g ds_1 - \Phi_1 ds_1 - m_2 g ds_2 - \Phi_2 ds_2 = 0,$$

після чого підставимо в отримане рівняння значення сил інерції і можливих переміщень

$$m_1 g r_1 dj - m_1 e r_1 r_1 dj - m_2 g r_2 dj - m_2 e r_2 r_2 dj = 0,$$

$$m_1 g r_1 - m_1 e r_1^2 - m_2 g r_2 - m_2 e r_2^2 = 0.$$

Рис. 24.3. Застосування загального рівняння динаміки.

Перетворюємо останнє рівняння і визначаємо шукану величину

$$m_1 g r_1 - m_2 g r_2 = m_1 e r_1^2 + m_2 e r_2^2 \Rightarrow (m_1 r_1 - m_2 r_2) g = \left(m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2\right) e ;$$

$$e = \frac{(m_1 r_1 - m_2 r_2) g}{\left(m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2\right)} = \frac{(5 \cdot 0{,}2 - 2 \cdot 0{,}3) \cdot 9{,}81}{\left(5 \cdot 0{,}2^2 + 2 \cdot 0{,}3^2\right)} = 10{,}3\left(\frac{рад}{c^2}\right).$$

Задачу розв’язано.

Завдання №24 до РГР

24.1. Два зубчасті колеса радіусами r_1 = 30 см і r_2 = 60 см мають нерухомі осі і знаходяться у зовнішньому зачепленні, причому моменти інерції коліс відносно осей обертання I_1 = 3 кг·м^2 і I_2 = 5 кг·м^2. Нехтуючи силами опору, визначити кутове прискорення колеса, якщо на нього діє пара сил з моментом M = 15 Н·м.
Відповідь: ε = 3,5 рад/с^2.

24.2. Вантаж A вагою P = 50 Н за допомогою нитки ABC приводить до руху однорідний циліндр вагою Q = 40 Н. Нехтуючи вагою нитки і блока B, визначити прискорення вантажа, вважаючи, що циліндр котиться по площині без ковзання.
Відповідь: a = 4,5 м/с^2.

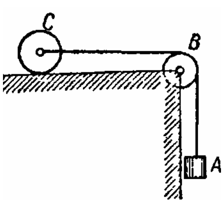


Рис. до задачі 24.2.

24.3. Важкий полий циліндр із зовнішнім радіусом R = 40 см і внутрішнім радіусом r = 25 см котиться без ковзання по похилій площині, яка утворює з горизонтом кут α = 30°. Визначити кутове прискорення циліндра.
Відповідь: ε = 7,2 рад/с^2.

24.4. До шківа 1 пасової передачі прикладений обертовий момент M = 3 Н·м. Маси шківів дорівнюють m_1 = 1 кг і m_2 = 2 кг, причому їх можна вважати рівномірно розподіленими по ободу. Нехтуючи тертям, визначити кутове прискорення шківа 1, якщо його радіус r = 0,1 м.

Відповідь: ε = 100 рад/с^2.

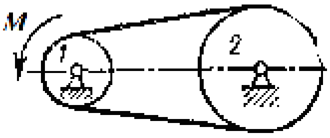


Рис. до задачі 24.4.

24.5. Два вантажі з масами M_1 = 2 кг і M_2 = 3,5 кг підвішені на нерозтяжних нитках, що накинуті на жорстко з'єднані барабани радіусами r_1 = 5 см і r_2 = 10 см. Маса меншого барабану m_1 = 400 г, більший барабан вдвічі важчій. Вважаючи барабани однорідними дисками, визначити їх кутове прискорення.

Відповідь: ε = 49 рад/с^2.

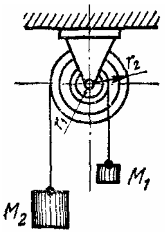


Рис. до задачі 24.5.

24.6. Через блок маси m = 3 кг перекинута невагома нитка, на кінцях якої знаходяться вантажі масами m_1 = 5 кг і m_2 = 10 кг. Визначити прискорення вантажів, нехтуючи тертям і вважаючи масу блока рівномірно розподіленою по ободу.

Відповідь: a = 2,45 м/с^2.

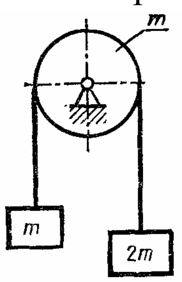


Рис. до задачі 24.6.

24.7. Два суцільні однорідні вали I і II масами m_1 = 1,5 кг і m_2 = 2 кг, обертаються без тертя навколо паралельних осей, з'єднані нескінченим пасом. До першого валу прикладений обертовий момент M = 5 Н·м, на другий намотується трос з вантажем маси m = 4 кг на кінці. Нехтуючи власною вагою паса і троса, визначити прискорення вантажу, якщо радіус першого валу r = 50 мм.

Відповідь: a = 10,6 м/с^2.

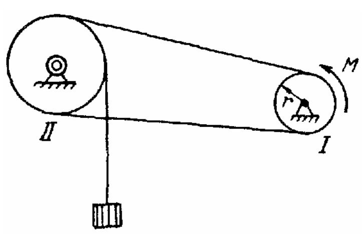


Рис. до задачі 24.7.

24.8. Два вантажі 1 і 2 масами m_1 = m_3 = 2 кг з'єднані між собою нерозтяжною ниткою, перекинутою через невагомий блок 2. Визначити прискорення вантажів, якщо коефіцієнт тертя між вантажем 1 і горизонтальною площиною f = 0,1.

Відповідь: a = 4,4 м/с^2.

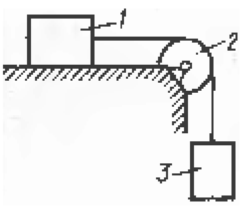


Рис. до задачі 24.8.

24.9. Однорідний циліндр маси m = 10 кг котиться без ковзання по бічній грані призми, що спирається на гладку підлогу і стіну. Визначити силу тиску призми на стіну, якщо кут її нахилу до горизонту α = 30°.

Відповідь: N = 282,9 Н.

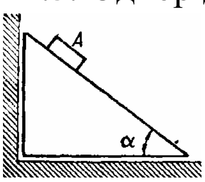
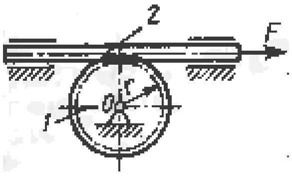


Рис. до задачі 24.9.

24.10. В рейковій передачі до зубчастої рейки 1 прикладена змінна сила

$$F = 9t^2 \text{ Н.}$$



Визначити кутове прискорення шестерні 1 радіуса r = 0,4 м через 1 с після початку дії сили, якщо її момент інерції відносно осі обертання I = 2 кг·м^2.

Відповідь: ε = 10 рад/с^2.

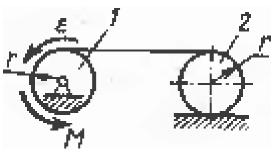
Рис. до задачі 24.10.

24.11. На трьох однорідних валах, до кожного з яких прикладений обертовий момент M = 50 Н·м, знаходиться балка масою m_2 = 20 кг. Визначити прискорення балки, якщо маса кожного вала m_1 = 2 кг, а радіус r = 20 см. Тертя в осях валів і ковзання між балкою і валами відсутнє.

Відповідь: a = 4,5 м/с^2.

Рис. до задачі 24.11.

24.12. Визначити модуль M сталого моменту пари сил, під дією якого барабан 1 обертається з кутовим прискоренням ε = 1 рад/с^2. За допомогою нитки даний барабан з'єднаний з катком 2 радіуса r = 0,2 м. Маси катка і барабана однакові і дорівнюють m = 2 кг, їх можна вважати однорідними циліндрами.



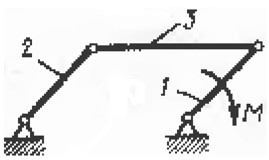
Відповідь: M = 0,07 Н·м.

Рис. до задачі 24.12.

24.13. Два вантажі з масами M_1 = 2 кг і M_2 = 3,5 кг відповідно підвішені на нерозтяжних нитках, що накинуті на жорстко з'єднані барабани радіусами r_1 = 5 см і r_2 = 10 см (рис. до задачі 24.5). Маса меншого барабану m_1 = 400 г, більший барабан вдвічі важчій. Вважаючи барабани однорідними дисками, сили натягу ниток T_1 і T_2.

Відповідь: T_1 = 25 Н, T_2 = 17 Н.

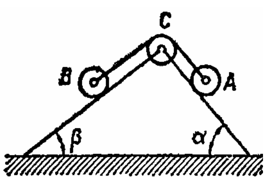
24.14. Пара сил з моментом M = 0,8 Н·м приводить до руху механізм, розташований в горизонтальній площині. Кривошипи 1 і 2 мають довжину l = 0,2 м і однакові маси $m_1 = m_2$ = 1 кг, а маса шатуна m_3 = 2 кг. Визначити кутове прискорення кривошипа 1.



Відповідь: ε = 7,5 рад/с^2.

Рис. до задачі 24.14.

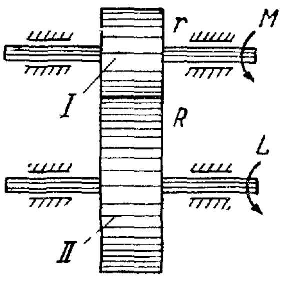
24.15. Однорідний диск A вагою P = 40 Н котиться без ковзання по одній з граней нерухомої призми і при цьому підіймає по іншій грані такий самий диск B за допомогою нерозтяжної невагомої нитки, перекинутої через ідеальний блок C. Знайти натяг нитки, якщо кути в основі призми α = 45° і β = 30°.



Відповідь: T = 24,1 Н.

Рис. до задачі 24.15.

24.16. Циліндричний зубчастий редуктор складається з коліс *I* і *II*, радіуси яких r = 50 мм і R = 600 мм, а маси m_1 = 5 кг і m_2 = 80 кг відповідно. На перше колесо діє рушійний момент M = 40 Н·м, на друге – гальмівний момент L = 150 Н·м. Нехтуючи тертям в підшипниках, визначити кутове прискорення першого колеса, вважаючи його однорідним диском.



Відповідь: ε = 353 рад/с^2.

Рис. до задачі 24.16.

24.17. Обертовий момент M = 0,11 Н·м прикладений до рухомого колеса планетарного механізму, розташованого в горизонтальній площині. Радіуси обох коліс механізму однакові і дорівнюють r = 0,1 м. Маси кривошипа OA і рухомого колеса також однакові і дорівнюють m = 1 кг. Визначити кутове прискорення ε кривошипа, вважаючи його однорідним стержнем, а рухоме колесо – однорідним диском.

Відповідь: ε = 3 рад/с^2.

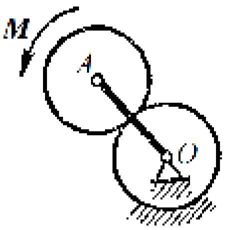


Рис. до задачі 24.17.

24.18. Відцентровий регулятор Вата обертається навколо вертикальної осі з постійною кутовою швидкістю ω = 10 рад/с. Визначити кут α відхилення від вертикалі стержнів OA і OB, якщо вага кожної з куль P = 10 Н, а вага муфти P_1 = 5 Н. Всі стержні вважати невагомими і такими, що мають однакову довжину l = 40 см.

Відповідь: α = 68°.

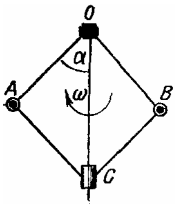
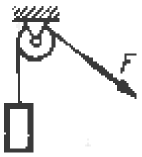


Рис. до задачі 24.18.

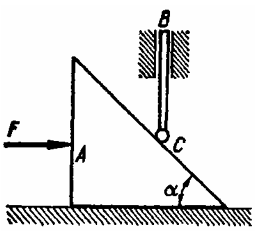
24.19. Визначити модуль сили F, під дією якої тіло маси m = 10 кг підіймається з прискоренням a = 1 м/с^2.



Відповідь: F = 108 Н.

Рис. до задачі 24.19.

24.20. Клин вагою Q = 60 Н приводить до руху вертикальний стержень BC вагою P = 10 Н. Нехтуючи тертям, витзначити прискорення стержня, якщо на клин діє горизонтальна сила F = 20 Н, а його кут нахилу до горизонта α = 45°.



Відповідь: a = 1,4 м/с^2.

Рис. до задачі 24.20.

24.21. Циліндричний зубчастий редуктор складається з коліс *I* і *II*, радіуси яких r = 50 мм і R = 600 мм, а маси m_1 = 5 кг і m_2 = 80 кг відповідно. На перше колесо діє рушійний момент M = 40 Н·м, на друге – гальмівний момент L = 150 Н·м. Нехтуючи тертям в підшипниках, визначити кутове прискорення другого колеса, вважаючи його однорідним диском.

Відповідь: ε = 29,4 рад/с^2.

Глава 25. «Рівняння Лагранжа II роду»

<u>25.1. Вивід рівняння Лагранжа II роду</u>

Загальне рівняння динаміки в узагальнених силах у вигляді (24.15) використовують для складання рівнянь руху механічних систем лише у відносно простих випадках. Однак для систем з багатьма степенями вільності використання даного рівняння вимагає досить складних перетворень. Цих труднощів можливо уникнути, якщо узагальнені сили інерції виразити через кінетичну енергію механічної системи.

Розглянемо в інерційній системі відліку рух механічної системи із n матеріальних точок, на яку накладені двосторонні голономні ідеальні в'язі. У випадку, коли не всі в'язі є ідеальними, необхідно знайти реакції таких в'язей і додати їх до активних сил. Загальне рівняння динаміки такої системи матиме вигляд

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\boldsymbol{P}_k - m_k \ddot{\boldsymbol{r}}_k\right) d\boldsymbol{r}_k = 0. \qquad (25.1)$$

Нехай дана система має s ступенів вільності, її положення визначається s узагальненими координатами, а можливе переміщення k-ої точки знаходиться по формулі

$$d\boldsymbol{r}_k = \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial \boldsymbol{r}_k}{\partial q_i} dq_i\,, \qquad (25.2)$$

Підставивши (25.2) в (25.1) і змінивши порядок додавання, отримуємо

$$\sum_{k=1}^{n}\left[\sum_{i=1}^{s} P_k \frac{\partial \boldsymbol{r}_k}{\partial q_i} - \sum_{i=1}^{s} m_k \frac{d\dot{\boldsymbol{r}}_k}{dt}\left(\frac{\partial \boldsymbol{r}_k}{\partial q_i}\right)\right] dq_i = 0. \qquad (25.3)$$

У (25.3) перший доданок у квадратних дужках є узагальненою силою Q_i, що відповідає i-ій узагальненій координаті. Виконаємо перетворення другого доданку у квадратних дужках

$$\frac{d\dot{\boldsymbol{r}}_k}{dt}\left(\frac{\partial \boldsymbol{r}_k}{\partial q_i}\right) = \frac{d}{dt}\left(\dot{\boldsymbol{r}}_k \frac{\partial \boldsymbol{r}_k}{\partial q_i}\right) - \dot{\boldsymbol{r}}_k \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \boldsymbol{r}_k}{\partial q_i}\right). \qquad (25.4)$$

З аналітичної механіки відома *перша тотожність Лагранжа*

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}_k}{\partial q_i} = \frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_k}{\partial \dot{q}_i}.$$

Підставивши тотожність у перший доданок (25.4), отримуємо

$$\frac{d}{dt}\left(\dot{\boldsymbol{r}}_k \frac{\partial \boldsymbol{r}_k}{\partial q_i}\right) = \dot{\boldsymbol{r}}_k \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_k}{\partial \dot{q}_i}\right) = \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}\left(\frac{\dot{\boldsymbol{r}}_k^2}{2}\right)\right].$$

Отримане співвідношення тепер підставляємо у другий доданок (25.3)

$$\sum_{i=1}^{s} m_k \frac{d\dot{\boldsymbol{r}}_k}{dt}\left(\frac{\partial \boldsymbol{r}_k}{\partial q_i}\right) = \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}\left(\sum_{i=1}^{s} \frac{m_k \dot{\boldsymbol{r}}_k^2}{2}\right)\right] = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right). \qquad (25.5)$$

Далі скористаємось *другою тотожністю Лагранжа*, відомим з аналітичної механіки

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \boldsymbol{r}_k}{\partial q_i}\right)=\frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_k}{\partial q_i}.$$

Підставимо дану тотожність у другий доданок (25.4)

$$\dot{\boldsymbol{r}}_k \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \boldsymbol{r}_k}{\partial q_i}\right)=\dot{\boldsymbol{r}}_k \frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_k}{\partial q_i},$$

після чого даний вираз підставляємо до другого доданку (25.3)

$$\sum_{i=1}^{s} m_k \frac{d\dot{\boldsymbol{r}}_k}{dt}\left(\frac{\partial \boldsymbol{r}_k}{\partial q_i}\right)=\sum_{i=1}^{s} m_k \dot{\boldsymbol{r}}_k \frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_k}{\partial q_i}=\frac{\partial}{\partial q_i}\left(\sum_{i=1}^{s}\frac{m_k \dot{\boldsymbol{r}}_k^2}{2}\right)=\frac{\partial T}{\partial q_i}. \qquad (25.6)$$

Далі підставляємо в (25.3) отримані вирази (25.5) і (25.6)

$$\sum_{i=1}^{s}\left[Q_i-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right)+\frac{\partial T}{\partial q_i}\right]dq_i=0. \qquad (25.7)$$

Варіації узагальнених координат δq_i між собою незалежні, тому умова (25.7) виконується, коли дорівнює нулю множник у дужках, тобто

$$\sum_{i=1}^{s}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_i}\right]=\sum_{i=1}^{s} Q_i. \qquad (25.8)$$

Рівняння (25.8) мають назву **рівнянь Лагранжа II роду**. Їх кількість дорівнює кількості степеней вільності механічної системи, причому в рівняння не входять невідомі наперед реакції ідеальних в’язей.

25.2. Випадок потенціальних сил

У випадку, коли усі сили, що діють на систему, є потенціальними, узагальнені сили можна представити у вигляді

$$Q_i=-\frac{\partial П}{\partial q_i}, \qquad (25.9)$$

і рівняння Лагранжа II роду набуває вигляду

$$\sum_{i=1}^{s}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_i}\right]=-\sum_{i=1}^{s}\frac{\partial P}{\partial q_i}. \qquad (25.10)$$

Скористаємось поняттям ***функції Лагранжа*** – величини, яка дорівнює різниці кінетичної і потенціальної енергій механічної системи

$$L=T-P. \qquad (25.11)$$

Оскільки потенціальна енергія системи є лише функцією від узагальнених координат, то

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}=\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i},$$

а рівняння Лагранжа остаточно набуває вигляду

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_i}=0.$$

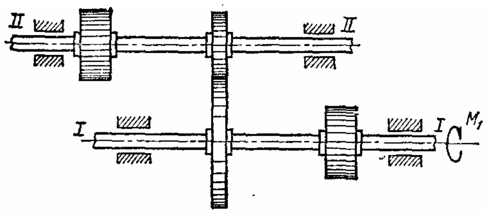
Завдання № 25. «Рівняння Лагранжа II роду»

Рекомендації до розв’язання задач

1. Встановити число степеней вільності і обрати узагальнені координати.
2. Зобразити систему в довільному положенні і показати на рисунку усі сили, що діють на неї.
3. Обчислити узагальнені сили Q_s за формулами (25.3) або (25.9).
4. Визначити кінетичну енергію при абсолютному русі системи і виразити цю енергію через узагальнені координати і узагальнені швидкості.
5. Знайти усі частинні похідні і підставити їх в рівняння Лагранжа.
6. Відповідно до конкретних умов задачі проаналізувати знайдений розв’язок.

Приклад розв’язання задачі

Задача 1. Вали *I* і *II* разом з насадженими на них зубчастими колесами мають моменти інерції I_1 = 5 кг·м^2 і I_2 = 4 кг·м^2, а передаточне число передачі u = 0,5.



Система приводиться до обертання із стану спокою крутним моментом M_1 = 30 Н·м, прикладеним до валу *I*. Нехтуючи тертям визначити, через який час кутова швидкість валу *II* дорівнюватиме $\omega_2 = 4\pi$.

Рис. 25.1. До задачі 1.

Розв’язання

Система на рис. 25.1 має одну степінь вільності, в якості узагальненої координати оберемо кут повороту першого валу φ_1. В токому випадку узагальненою швидкістю буде кутова швидкість

$$\dot q = \frac{d\varphi_1}{dt} = \omega_1 \text{ (рад/с)}.$$

Кутова швидкість другого валу

$$q_2 = \dot\varphi_2 = \frac{\omega_1}{u} = \frac{\omega_1}{0{,}5} = 2\omega_1.$$

Задачу розв’язано.

Завдання №25 до РГР

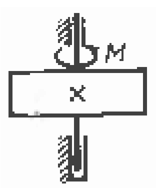
25.1. Потенційна енергія механічної системи визначається за формулою

$$П = 20\varphi^2,$$

де φ – узагальнена координата, виражена в радіанах. Визначити узагальнену силу Q, що відповідає даній координаті в момент часу, коли φ = 45°.

Відповідь: Q = - 31,4 Н.

25.2. Кінетична енергія диска, на який діє пара сил з моментом M = 6 Н·м, виражена через узагальнену координату і має вигляд



$$T = 12\dot\varphi^2$$

Визначити кутове прискорення диска.

Відповідь: ε = 0,25 рад/с^2.

Рис. до задачі 25.2.

25.3. Кінетична енергія системи має вигляд

$$T = 1{,}5\dot{s}^2\ \text{(Дж)},$$

а потенціальна енергія

$$П = 60s\ \text{(Дж)}.$$

Визначити прискорення системи.
Відповідь: a = - 20 м/с^2.

25.4. Визначити кутове прискорення диска 1 радіуса r = 0,2 м, якщо на нього діє пара сил з моментом M = 0,4 Н·м. Маси обох дисків однакові і дорівнюють $m_1 = m_2$ = 10 кг.
Відповідь: ε = 1 рад/с^2.

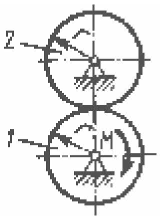


Рис. до задачі 25.4.

25.5. Кінетична енергія системи має вигляд

$$T = 4\dot{\varphi}^2\ \text{(Дж)},$$

а узагальнена сила

$$Q_{\varphi} = 4 - \varphi\ \text{(Н·м)}.$$

Визначити кутове прискорення системи в момент, коли φ = 2 рад.
Відповідь: ε = 0,25 рад/с^2.

25.6. Однорідний стержень довжини l = 3 м і маси m = 3 кг обертається в вертикальній площині. Визначити узагальнену силу, що відповідає узагальненій координаті в момент часу, коли φ = 45°.
Відповідь: Q = - 312 Н.

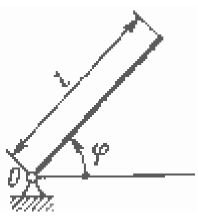


Рис. до задачі 25.6.

25.7. Кінетична енергія системи має вигляд

$$T = 4\dot{\varphi}^2\ \text{(Дж)},$$

а потенціальна енергія

$$П = -80\varphi\ \text{(Дж)}.$$

Визначити узагальнену швидкість системи в момент часу t = 2 с, якщо кутова швидкість в початковий момент ω (0) = 1 рад/с.
Відповідь: υ = 19 м/с.

25.8. Вантаж M маси m = 5 кг падає вертикально і при цьому розмотує нитку, яка приводить до обертання блоки I і II масами m_1 = 2 кг і m_2 = 4 кг відповідно. Визначити прискорення вантажу M, вважаючи, що ковзання між ниткою і блоками відсутнє, а блоки є однорідними суцільними циліндрами.
Відповідь: a = 6,1 м/с^2.

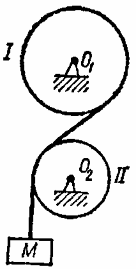


Рис. до задачі 25.8.

25.9. Кінетична і потенціальна енергія системи мають вигляд

$$T = 2\dot{s}^2\,(\text{Дж}),\ \ П = -20s\,(\text{Дж}).$$

Визначити узагальнену швидкість системи в момент часу t = 1 с, якщо в початковий момент υ (0) = 1 м/с.

Відповідь: υ = 8 м/с.

25.10. Три зубчастих колеса масами m_1 = 3 кг, m_2 = 2 кг і m_3 = 1 кг, які є однорідними дисками з радіусами r_1 = 30 см, r_2 = 25 см і r_3 = 20 см, знаходяться у зовнішньому зачепленні. До першого колеса прикладений обертовий момент M_1 = 5 Н·м, до коліс 2 і 3 – моменти опору M_2 = 1 Н·м і M_3 = 2 Н·м. Визначити кутове прискорення першого колеса 1.

Відповідь: ε = 1,5 рад/с^2.

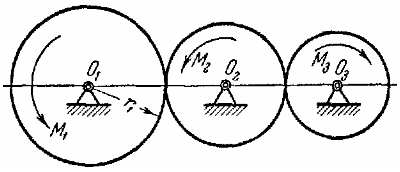


Рис. до задачі 25.10.

25.11. До циліндра радіуса R = 40 см, що обертається під дією пари сил з моментом M = 20 Н·м, притискається гальмівна колодка з силою F = 100 Н. Визначити узагальнену силу, яка відповідає узагальненій координаті φ, якщо коефіцієнт тертя між циліндром і колодками f = 0,4.

Відповідь: Q = 4 Н.

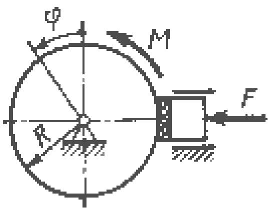


Рис. до задачі 25.11.

25.12. Визначити кутове прискорення системи, якщо її кінетична енергія має вигляд

$$T = 5\dot{\varphi}^2\,(\text{Дж}),$$

а узагальнена сила постійна і дорівнює

$$Q_{\varphi} = 20\,(\text{Н·м}).$$

Відповідь: ε = 2 рад/с^2.

25.13. Визначити кутове прискорення катка 2 маси m = 4 кг і радіуса r = 0,5 м, який котиться без ковзання по горизонтальній площині, якщо на невагомий блок 1, з'єднаний за допомогою нерозтяжної нитки з центром катка 2, діє пара сил з моментом M = 0,6 Н·м. Каток 2 вважати однорідним диском.

Відповідь: ε = 0,4 рад/с^2.

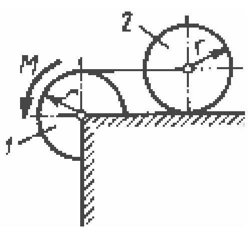


Рис. до задачі 25.13.

25.14. Функція Лагранжа для механічної системи має вигляд

$$L = 6\dot{x}^2 + 2x\,.$$

Визначити значення узагальненої координати x в момент часу t = 3 с, якщо в початковий момент часу система мала нульову координату, а її початкова швидкість υ (0) = 2 м/с.

Відповідь: x = 7,5 м.

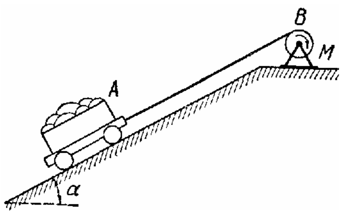
25.15. Функція Лагранжа для механічної системи має вигляд

$$L = 5\dot{\varphi}^2 + \varphi\ .$$

Визначити значення узагальненої координати φ в момент часу t = 2 с, якщо в початковий момент часу система мала нульові початкові умови.

Відповідь: φ = 0,4 рад.

25.16. Вагонетка A підіймається по похилій площині з кутом α = 45° нахилу до горизонту за допомогою барабана B радіуса R = 20 см, до якого прикладений обертовий момент M = 160 Н·м. Визначити прискорення барабана, якщо маса вагонетки m = 100 кг, момент інерції барабана відносно осі обертання I = 0,5 кг·м^2, коефіцієнт тертя між вагонеткою і похилою площиною f = 0,1.



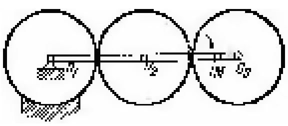
Відповідь: a = 0,34 м/с^2.

Рис. до задачі 25.16.

25.17. Однорідний циліндр із відношенням внутрішнього і зовнішнього радіусів r/R = 0,8 котиться вниз по похилій площині з кутом нахилу до горизонту α = 30°. Визначити прискорення осі циліндра.

Відповідь: a = 2,7 м/с^2.

25.18. В планетарному механізмі, розташованому в горизонтальній площині, до кривошипа O_1O_3 прикладений обертовий момент M = 3 Н·м. Визначити кутове прискорення кривошипа, вважаючи колеса однорідними дисками маси m = 1 кг і радіуса r = 25 см і нехтуючи тертям і масою кривошипа.



Відповідь: a = 0,34 м/с^2.

Рис. до задачі 25.18.

25.19. Функція Лагранжа для механічної системи має вигляд

$$L = 6\dot{x}^2 + 2x\ .$$

Визначити узагальнену швидкість системи в момент часу t = 3 с, якщо в початковий момент часу її швидкість дорівнювала υ (0) = 2 м/с.

Відповідь: υ = 2,5 м/с.

25.20. Функція Лагранжа для механічної системи має вигляд

$$L = 5\dot{\varphi}^2 + \varphi\ .$$

Визначити значення узагальненої швидкості ω в момент часу t = 10 с, якщо в початковий момент часу система знаходилась в стані спокою.

Відповідь: ω = 2 рад/с.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ І РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Павловський М.А. Теоретична механіка. – К.: Техніка, 2002. – 512 с.
2. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики: Учеб. для втузов/С.М. Тарг. – 17-е изд., стер. – М.: Высш. шк., 2007. – 416 с.
3. Яблонский А.А., Никифорова В.М. Курс теоретической механики: Учебник для вузов. – изд. 13-е, испр. – М.: Интеграл-Пресс, 2006. – 608 с.
4. Цасюк В.В. Теоретична механіка: Навчальний посібник. – К.: Центр навчальної літератури, 2004. – 402 с.
5. Лачуга Ю.Ф., Ксендзов В.А. Теоретическая механика. – 2-е изд., перераб. И доп. – М.: КолосС, 2005. – 576 с.
6. Лойцянский Л.Г., Лурье А.И. Курс теоретической механики. Т. 2: Динамика : учеб. пособие для вузов. – 9-е изд., испр. – 2006. – 447 с.
7. Бражниченко Н.А и др. Сборник задач по теоретической механике. – М.: Высш. шк., 1987. – 529 с.
8. Березова О.А., Друшляк Г.Е., Солодовников Р.В. Теоретическая механика. Сборник задач: Учеб. пособие для втузов. – Киев: Вища школа. Головное изд-во, 1980. – 400 с.
9. Будник Ф.Г., Зингерман Ю.М., Селенский Е.И. Сборник задач по теоретической механике: Учеб. пособие для втузов. – М: Высш. шк., 1987. – 176 с.
10. Мещерский И.В. Сборник задач по теоретической механике: Учеб. пособие. – 36-е изд., исправл./ Под. Ред. Н.В. Бутенина, А.И. Лурье, Д.Р. Меркина. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. Лит., 1986. – 448 с.
11. Стрелков С.П. Механика. 4-е изд., стер. – СПб.: Издательство «Лань», 2005 – 560 с.
12. Яблонский Б.М. Детлаф А.А., Лебедев А.К. Справочник по физике для инженеров и студентов вузов. – 8-е изд., перераб. И испр. – М.: ООО «Издательство Оникс», 2006. – 1056 с.
13. Выгодский М.Я. Справочник по высшей математике. – М.: АСТ: Астрель, 2006. – 991 с.
14. Бушок Г.Ф., Венгер Є.Ф. Курс фізики: У 3 кн. Кн. 1. Фізичні основи механіки. Молекулярна фізика і термодинаміка: Навч. Посіб. – К: Вища шк., 2002. – 375 с.
15. Гернет М.М. Курс теоретической механики. Изд. 3-е, перераб. И доп. Учебник для вузов. – М: Высш. шк., 1973. – 464 с.
16. Кабальський М.М. и др. Типовые задачи по теоретической механике и методы их решения. – Киев: Гос. Изд-во тех. Лит-ры УССР, 1956. – 511 с.
17. Бать М.И., Джанелидзе Г.Ю., Кельзон А.С. Теоретическая механика в примерах и задачах. Т. 2 (динамика). – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. Лит., 1967. – 512 с.
18. Мисюрев М.А. Методика решения задач по теоретической механике. – М: Высш. шк., 1963. – 307 с.
19. Сборник коротких задач по теоретической механике: Учеб. пособие для втузов/ Под ред. О.Э. Кепе. – М.: Высш. шк., 1989. – 368 с.

ДОДАТКИ

Додаток А

Грецький алфавіт

Α, α – альфа	Ι, ι – йота	Ρ, ρ – ро
Β, β – бета	Κ, κ – каппа	Σ, σ – сігма
Γ, γ – гамма	Λ, λ – лямбда	Τ, τ – тау
Δ, δ – дельта	Μ, μ – мю	Υ, υ – іпсилон
Ε, ε – епсилон	Ν, ν – ню	Φ, φ – фі
Ζ, ζ – дзета	Ξ, ξ – ксі	Χ, χ – хі
Η, η – ета	Ο, ο – омікрон	Ψ, ψ – псі
Θ, θ – тета	Π, π – пі	Ω, ω – омега

Додаток Б

Кратні та часткові одиниці

Множник	**Назва**	**Позначення**	**Множник**	**Назва**	**Позначення**
10^{18}	екса	Е	10^{-1}	деци	д
10^{15}	пета	П	10^{-2}	санті	с
10^{12}	тера	Т	10^{-3}	мілі	м
10^{9}	гіга	Г	10^{-6}	мікро	мк
10^{6}	мега	М	10^{-9}	нано	н
10^{3}	кіло	к	10^{-12}	піко	п
10^{2}	гекто	г	10^{-15}	фемто	ф
10	дека	да	10^{-18}	атто	а

Додаток В

Одиниці вимірювання основних величин в системі СІ

Величина	**Одиниця виміру**	**Позначення**
Довжина	Метр	м
Маса	Кілограм	кг
Час	Секунда	с
Кут	Радіан	рад
Площа	Квадратний метр	м^2
Об’єм	Кубічний метр	м^3
Швидкість	Метр за секунду	м/с
Кутова швидкість	Радіан за секунду	рад/с
Прискорення	Метр за секунду в квадраті	м/с^2
Кутове прискорення	Радіан за секунду в квадраті	рад/с^2
Сила	Ньютон	Н
Тиск (напруження)	Паскаль	Па = Н/м^2
Робота і енергія	Джоуль	Дж = Н·м
Момент сили	Ньютон на метр	Н·м
Момент інерції	Кілограм на метр в квадраті	кг·м^2
Кількість руху	Ньютон на секунду	Н·с = кг·м/с

Додаток Г

Спеціальні значення тригонометричних функцій

Кут	**0°**	**30°**	**45°**	**60°**	**90°**	**180°**	**270°**
sin α	0	0,5	0,707	0,866	1	0	-1
cos α	1	0,866	0,707	0,5	0	-1	0
tg α	0	0,577	1	1,732	±∞	0	±∞
ctg α	±∞	1,732	1	0,577	0	±∞	0

Додаток Д

Похідні елементарних функцій

1. $(a)' = 0$, де a = const	2. $(x)' = 1$
3. $(x^n)' = nx^{n-1}$	4. $(e^x)' = e^x$
5. $(e^{nx})' = ne^{nx}$	6. $(\ln x)' = 1/x$
7. $(\lg x)' = 0{,}4343/x$	8. $(\log_a x)' = \log_a e/x$
9. $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$	10. $(\sin x)' = \cos x$
11. $(\cos x)' = -\sin x$,	12. $(\operatorname{tg} x)' = 1/\cos^2 x$
13. $(\operatorname{ctg} x)' = -1/\sin^2 x$	14. $(\arcsin x)' = 1/(1-x^2)^{1/2}$
15. $(\arccos x)' = -1/(1-x^2)^{1/2}$	16. $(\operatorname{arctg} x)' = 1/(1+x^2)$
17. $(\operatorname{arcctg} x)' = -1/(1+x^2)$	18. $(\sec x)' = \operatorname{tg} x \cdot \sec x$
19. $(\operatorname{cosec} x)' = -\operatorname{ctg} x \cdot \operatorname{cosec} x$	20. $(\operatorname{arcsec} x)' = -1/[x \cdot (x^2-1)^{1/2}]$

Додаток Є

Інтеграли елементарних функцій

$$1. \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, (n \neq -1); \qquad 2. \int e^x dx = e^x + C;$$

$$3. \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C; \qquad 4. \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C;$$

$$5. \int \sin x\, dx = -\cos x + C; \qquad 6. \int \cos x\, dx = \sin x + C;$$

$$7. \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctg\, x + C; \qquad 8. \int \frac{dx}{\cos^2 x} = tg\, x + C;$$

$$9. \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C; \qquad 10. \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C;$$

$$11. \int \frac{dx}{1+x^2} = arctg\, x + C; \qquad 12. \int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C;$$

$$13. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C; \qquad 14. \int tg\, x\, dx = -\ln|\cos x| + C;$$

$$15. \int ctg\, x\, dx = \ln|\sin x| + C; \qquad 16. \int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|tg \frac{x}{2}\right| + C;$$

$$17. \int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|tg\left(\frac{x}{2} + \frac{p}{4}\right)\right| + C; \qquad 18. \int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C.$$

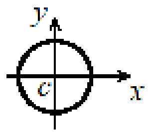
Додаток Ж

Моменти інерції однорідних тіл

1. Момент інерції ***матеріальної точки*** маси *m*, яка знаходиться на відстані *R* від осі обертання

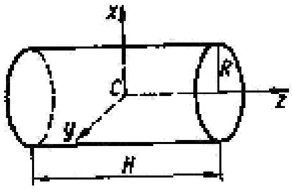
$$I = mR^2$$

2. Момент інерції колової тонкої ***пластинки*** радіуса *R* і маси *m*



$$I_x = \frac{mR^2}{4}, \quad I_y = \frac{mR^2}{4}, \quad I_{Cz} = \frac{mR^2}{2}.$$

3. Момент інерції ***прямого колового циліндра*** радіуса *R* і маси *m*

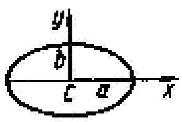


$$I_x = I_y = \frac{m}{4}\left(\frac{H^2}{3} + R^2\right), \quad I_z = \frac{mR^2}{2}.$$

4. Момент інерції ***кулі*** радіуса *R* і маси *m*

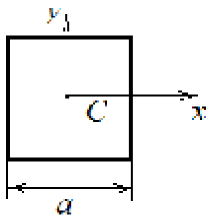
$$I_x = I_y = I_z = \frac{2mR^2}{5}$$

5. Моменти інерції ***еліпса***



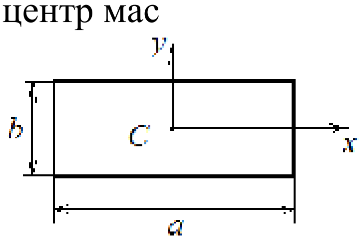
$$I_x = \frac{mb^2}{4}, \quad I_y = \frac{ma^2}{4}, \quad I_{Cz} = \frac{m\left(a^2 + b^2\right)}{4}.$$

6. Моменти інерції ***квадрата*** маси *m* зі стороною *a*



$$I_x = I_y = \frac{ma^2}{12}, \qquad I_z = \frac{ma^2}{6}.$$

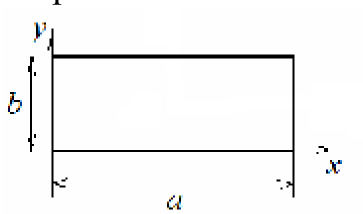
7. Моменти інерції ***прямокутника*** відносно осей, що проходять через його центр мас



$$I_x = \frac{mb^2}{12}, \qquad I_y = \frac{ma^2}{12},$$

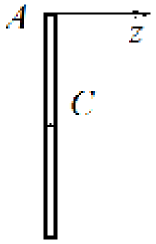
$$I_z = \frac{m\left(a^2 + b^2\right)}{12}.$$

Моменти інерції ***прямокутника*** відносно осей, що проходять через його сторони



$$I_x = \frac{mb^2}{3}, \qquad I_y = \frac{ma^2}{3}.$$

8. Момент інерції ***стержня*** маси m і довжини l



а) відносно осі, що проходить через його твірну

$$I_z = \frac{ml^2}{3};$$

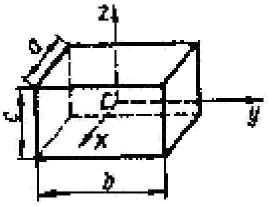
б) відносно осі, що проходить через його центр

$$I_C = \frac{ml^2}{12}.$$

9. Момент інерції ***тонкого кільця*** або ***полого циліндра*** радіуса R і маси m відносно осі, що проходить через його центр перпендикулярно площині кільця

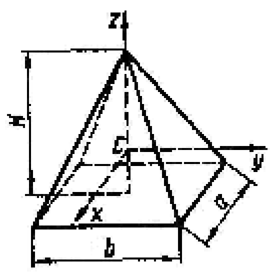
$$I_C = mR^2.$$

10. Момент інерції ***прямокутного паралелепіпеда*** маси m



$$I_x = \frac{m\left(b^2 + c^2\right)}{12}, \quad I_y = \frac{m\left(a^2 + c^2\right)}{4}, \quad I_z = \frac{m\left(a^2 + b^2\right)}{4}.$$

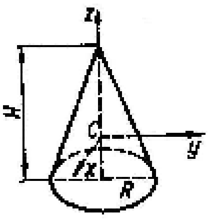
11. Момент інерції прямокутної піраміди маси m



$$I_x = \frac{m}{20}\left(\frac{3H^2}{4} + b^2\right), \qquad I_y = \frac{m}{20}\left(\frac{3H^2}{4} + a^2\right),$$

$$I_z = \frac{m\left(a^2 + b^2\right)}{20}.$$

12. Момент інерції прямого колового конуса маси m



$$I_x = I_y = \frac{3m}{20}\left(\frac{H^2}{4} + R^2\right), \qquad I_z = \frac{3mR^2}{30}.$$

Навчальне видання

КОЗУБ Юрій Гордійович
КАЛАЙДО Олександр Віталійович

Теоретична механіка

Частина II.
Динаміка

Навчальний посібник з варіантами завдань
до розрахунково-графічної роботи
для студентів спеціальності «Професійна освіта»
напряму підготовки «Транспорт» усіх форм навчання

За редакцією авторів
Комп'ютерний макет – Калайдо О. В.

Здано до склад. 16. 01. 2012 р. Підп. до друку 15. 02. 2012 р.
Формат 60х84 1/16. Папір офсет. Гарнітура Times New Roman
Друк ризографічний. Ум. друк. арк. 8,43. Наклад 300 прим. Зам. № 35.

Видавець і виготовлювач
Видавництво Державного закладу
«Луганський національний університет імені Тараса Шевченка»
вул. Оборонна, 2, м. Луганськ, 91011. т/ф: (0642) 58-03-20.
e-mail: alma-mater@list.ru
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК №3459 від 09.04.2009 р.