МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
ЛУГАНСКОЙ НАРОДНОЙ РЕСПУБЛИКИ
ГОУ ВПО ЛНР «ЛУГАНСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ ТАРАСА ШЕВЧЕНКО»

О.В. Давыскиба, О.Н. Ие, Р.В. Киричевский,
А.В. Скринникова, С.В. Темникова

Дискретная математика. Часть 1

Учебно-методическое пособие
для студентов очной и заочной форм обучения
по направлениям подготовки
01.03.01 «Математика», 27.03.03 «Системный анализ и управление»,
09.03.03 «Прикладная информатика», 09.03.04 «Программная
инженерия»

Луганск
2019

УДК 519.854 (075.8)
ББК 22.174я73
Д 48

Рецензенты:

Попов С.В. – заведующий кафедрой компьютерных систем и сетей ГОУ ВПО ЛНР «Луганский национальный университет имени Владимира Даля», кандидат технических наук, доцент;

Савельев В.М. – доцент кафедры фундаментальной математики ГОУ ВПО ЛНР «Луганский национальный университет имени Тараса Шевченко», кандидат физико-математических наук;

Швыров В.В. – доцент кафедры информационных технологий и систем ГОУ ВПО ЛНР «Луганский национальный университет имени Тараса Шевченко», кандидат физико-математических наук, доцент.

Давыскиба О.В., Ие О.Н., Киричевский Р.В., Скринникова А.В., Темникова С.В.
Д 48 Дискретная математика. Часть 1 : Учебно-методическое пособие / О.В. Давыскиба, О.Н. Ие, Р.В. Киричевский, А.В. Скринникова, С.В. Темникова; ГОУ ВПО ЛНР «Луганский национальный университет имени Тараса Шевченко». – Луганск : Книта, 2019. – 126 с.

Учебно-методическое пособие содержит краткие теоретические сведения, примеры подробного решения типовых задач, задания для самостоятельной работы, контрольные вопросы и индивидуальные задания по дискретной математике.

Учебно-методическое пособие предназначено для студентов очной и заочной форм обучения по направлениям подготовки 01.03.01 «Математика», 27.03.03 «Системный анализ и управление», 09.03.03 «Прикладная информатика», 09.03.04 «Программная инженерия»

УДК 519.854 (075.8)
ББК 22.174я73

Рекомендовано Учебно-методическим советом Луганского национального университета имени Тараса Шевченко в качестве учебно-методического пособия для студентов, обучающихся по направлениям подготовки 01.03.01 «Математика», 27.03.03 «Системный анализ и управление», 09.03.03 «Прикладная информатика», 09.03.04 «Программная инженерия»

(протокол № от . 2019 года).

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение

Объектами изучения дискретной математики являются дискретные структуры, которые возникли как внутри самой математики, так и в ее междисциплинарных приложениях. Классическими разделами дискретной математики являются теория множеств, математическая логика, теория алгоритмов, теория кодирования и теория графов. Для понимания излагаемых вопросов достаточно знаний в объеме программы средней школы. Однако некоторые затруднения может вызвать широкое использование языка теории множеств. Поэтому изучение курса «Дискретная математика» начинается именно с этой темы, акцентируя внимание на практический аспект данного курса.

Курс «Дискретной математики» имеет особое значение для успешного изучения прикладной математики и прикладной информатики, а также является фундаментом математического образования будущего специалиста и средством формирования современной математической культуры мышления, необходимой для работы в условиях современного технического прогресса. Потребности практики, программирования в частности, определяют развитие взаимодействия информатики и математики. Данная область знаний не исчерпывается одним предметом - «Дискретная математика», но является основополагающим.

Пособие предназначено для студентов по следующим направлениям подготовки: 27.03.03 «Системный анализ и управление», 01.03.01 «Математика», 09.03.03 «Прикладная информатика», 09.03.04 «Программная инженерия» для изучения на первом курсе первого семестра предложенных тем учебной дисциплины «Дискретная математика». Основу данного учебно-методического пособия составляет материал лекционного курса, который авторы читали в Луганском национальном университете имени Тараса Шевченко.

Курс является вводным по отношению к специальным дисциплинам, изучаемым студентами на старших курсах, и служит интегрирующим звеном между математикой и дисциплинами конкретных профильных специальностей.

Целью данного учебно-методического пособия является: ознакомить студентов с современными методами дискретной математики, ее теоретическими положениями и основными направлениями использования в прикладных задачах математики и специализированных дисциплин; научить логически и аналитически мыслить, использовать комбинаторные методы и логические схемы при решении математических задач; активизировать познавательную, самостоятельную и творческую деятельности студентов.

Данное учебное пособие включает 10 тем, каждая из которых имеет такую логическую структуру:

- краткие теоретические сведения: приведены основные понятия, утверждения, которые необходимы для решения практических задач;
- примеры решения задач: приведены подробные решения типовых задач соответствующей темы;
- основные типовые задачи для практической работы: приведены задачи для коллективной аудиторной работы студентов;
- задания для самостоятельной работы: приведены задания для индивидуальной, самостоятельной работы студентов, большинство из которых являются подобными для коллективной аудиторной работы;
- контрольные вопросы: приведены вопросы для проверки и самопроверки усвоения полученных знаний соответствующей темы.

Условные обозначения

Множества

N – множество всех натуральных чисел

Z – множество всех целых чисел

Q – множество всех рациональных чисел

R – множество всех действительных чисел

C – множество всех комплексных чисел

Z^+ – множество всех целых положительных чисел

Q^+ – множество всех рациональных положительных чисел

R^+ – множество всех действительных положительных чисел

Z^- – множество всех целых отрицательных чисел

Q^- – множество всех рациональных отрицательных чисел

R^- – множество всех действительных отрицательных чисел

$\varnothing$ – пустое множество

U – универсальное множество

$x \in A$ – x является элементом множества A

$x \notin A$ – x не является элементом множества A

$|A|$ – мощность множества A

$X \subseteq Y$ – нестрогое включение X в Y

$A \subset B$ – строгое включение A в B

$A \bigcup B$ – объединение множеств A и B

$A \bigcap B$ – пересечение множеств A и B

$A \setminus B$ – разность множеств A и B

$A \Delta B$ – симметрическая разность множеств A и B

$\overline{A}$ – дополнение к множеству A

$U(X)$ – булеан множества *A*

$\&$ – знак логического «И»

$\vee$ – знак логического «ИЛИ»

Отношения

$A \times B$ – прямое произведение множеств *A* и *B*

A^n – декартова *n*-степень множества *A*

ω_A – универсальное отношение на множестве *A*

i_A – тождественное отношение на множестве *A*

$\overline{\rho}$ – дополнение к отношению ρ

ρ^{-1} – обратное отношение к отношению ρ

$Ker\rho$ – ядро отношения ρ

$\alpha \circ \beta$ – композиция отношений α и β

ρ^n – *n*-степень отношения ρ

$[x]_\rho$ – класс эквивалентности ρ, содержащий *x*

X / ρ – фактор-множество *X* с эквивалентностью ρ

$Dom\rho$ – область определения отношения ρ

$\mathrm{Im}\,\rho$ – область значений отношения ρ

Структуры

$f : A \to B$ – отображение из множества *A* в множество *B*

f^{-1} – отображение, обратное к инъекции f

$f(X)$ – образ множества $X \subseteq A$

$f(x)$ – образ элемента $x \in A$

$f^{-1}(Y)$ – прообраз множества $Y \subseteq B$

$f^{-1}(y)$ – прообраз элемента $y \in B$

$Fun(A;B)$ – множество всех функциональных отношений на множествах *A* и *B*

$Map(A;B)$ – множество всех отображений из множества *A* в множество *B*

$*, \circ, \oplus, \otimes$ – символы бинарных операций

e – нейтральный элемент

θ – нуль

a' (или a^{-1}) – обратный элемент к элементу a

$A \cong B$ – алгебраические системы A и B являются изоморфными

$\min\{x; y\}$ – операция взятия меньшего из чисел x, y

$\max\{x; y\}$ – операция взятия большего из чисел x, y

НОД $(x; y)$ – операция взятия *НОД* чисел x, y

НОК $(x; y)$ – операция взятия *НОК* чисел x, y

Тема 1. Множества и способы их задания

Ключевые понятия: множество, подмножество, конечное множество, бесконечное множество, универсальное множество, пустое множество, мощность множества, задание множеств, равенство множеств.

1.1. Краткие теоретические сведения

Понятие множества является фундаментальным и одним из первичных понятий в математике. Кроме того, понятие множества нельзя строго определить через другие математические понятия. Не строгое математическое **понятие множества** как объединения объектов, обладающих общим для них свойством, в единое целое сформировалось на основании интуитивных представлений про любые подобные, четко определенные совокупности объектов. Изучением общих свойств множеств занимаются теория множеств и смежные разделы дискретной математики, математической логики.

Слова «совокупность», «система», «набор» и другие являются синонимами слова «множество». Примеры множеств: множество всех целых чисел, семейство звезд Большой Медведицы, система уравнений их трех неизвестных и т.п.

Объекты, которые создают множество, называют его **элементами**. Элементы множеств заключаются в фигурные скобки.

Множество называется **определенным**, если можно установить принадлежит ли какой-нибудь объект этому множеству.

Для обозначения множеств обычно используют заглавные буквы латинского алфавита или заглавные буквы с индексами, а для обозначений элементов – прописные буквы или прописные буквы с индексами.

Чтобы задать множество, необходимо указать, какие элементы ему принадлежат. Это можно сделать различными способами:

– вербальным (словесным), то есть с помощью описания характерных свойств, которые должны иметь элементы множества;

– перечислением элементов;

– с помощью **характеристического предиката** (некоторого условия, выраженного в форме логического утверждения или процедуры, которая возвращает логическое значение); если для данного элемента условие выполнено, то он принадлежит множеству, иначе – не принадлежит множеству.

Множества могут быть изображены как строго геометрически на плоскости или в пространстве, так и схематически в виде кругов Эйлера или диаграмм Эйлера-Венна.

Множество называется **конечным**, если количество его элементов конечное и **бесконечным** – во всех остальных случаях, то есть, когда количество элементов неограниченно.

Если множество A – конечное, то количество его элементов называется **мощностью** и обозначается через $|A|$.

Если мощности двух конечных множеств совпадают, то эти множества называются **равномощными**.

Если объект x является элементом множества A, то говорят, что x **принадлежит** A и записывают $x \in A$. В противном случае, говорят, что x **не принадлежит** множеству A и записывают $x \notin A$.

Универсальное множество – это наибольшее множество относительно теоретико-множественного включения, которое может быть в конкретно рассматриваемой задаче. Иначе говоря, **универсальное множество** – это множество, включающее все множества, участвующие в рассматриваемой задаче.

Универсальное множество обозначается символом U.

Пустое множество – это множество, которое не имеет ни одного элемента. Это множество обозначают символом $\varnothing$.

Пустое множество является конечным множеством и имеет наименьшую мощность среди всех множеств. Пустое множество –

). Также, пустое

множество – единственное множество, имеющее ровно одно подмножество (само себя), и единственное множество, равномощное любому своему подмножеству.

Множество *A* называется **подмножеством** множества *B*, если каждый элемент множества *A* является элементом множества *B*. Соответственное обозначение: $A \subseteq B$.

Пустое множество является своим (тривиальным) подмножеством, но не является своим элементом. Также пустое множество является подмножеством любого другого множества.

Если $A \subseteq B$ и $A \neq B$, тогда *A* называют **собственным подмножеством** множества *B*, что обозначается как $A \subset B$. Операции $A \subseteq B$ называют нестрогим **включением**, $A \subset B$ – строгим включением множества *A* в *B*.

Множества *A* и *B* называют **равными**, если они состоят из одинаковых элементов.

Два множества *A* и *B* являются равными тогда и только тогда, когда они есть подмножества друг для друга, то есть:

$$A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \,\&\, B \subseteq A$$

1.2. Примеры решения задач

Задача 1. *Задайте перечислением элементов множество:*

а) простых чисел, которые находятся между 15 и 30;

б) букв города Балабаново.

Решение

а) Множество простых чисел представляет собой натуральные числа, которые делятся только на 1 и на самих себя. Согласно условию $A = \{17, 19, 23, 29\}$.

б) В названии города есть повторяющиеся буквы, поэтому

$$B = \{б, а, л, н, о, в\}.$$

Задача 2. *С помощью характеристического предиката задайте множество всех:*

а) четных натуральных чисел;

б) целых чисел, не больших чем 100.

Решение

а) Четные натуральные числа – это числа, принадлежащие множеству натуральных чисел и делящиеся на 2 без остатка; логическая запись этого соответствует записи:

$$C = \{x \in \mathrm{N} \mid x \vdots 2\}.$$

б) Целые числа, не большие чем 100, логически запишем в виде следующего предиката:

$$D = \{x \in \mathrm{Z} \mid x \le 100\}.$$

Задача 3. *Определите, какие элементы содержит множество:*

а) $A = \{x \in \mathrm{N} \mid x - \textit{делитель}\ 10\}$.

б) $B = \{x \mid x - \textit{буква слова "математика"}\}$.

Решение

а) Множество A состоит из чисел: 1,2,5,10, то есть $A = \{1,2,5,10\}$.

б) Множество B состоит из букв: м, а, т, е, и, к.

Итак $B = \{м, а, т, е, и, к\}$.

Задача 4. *Являются ли истинными следующие утверждения:*

а) $t \in \{15, U\}$;

б) множество $D = \{x \in R \mid x^4 + 12 = 0\}$ является бесконечным;

в) если $A \subseteq B$ и $B \subseteq C$, тогда $A \subseteq C$.

Решение

а) Да, поскольку ничего другого про элемент t неизвестно и может быть, что $t = 15$, и естественно, что t может принадлежать множеству U, включающему все множества, участвующие в рассматриваемой задаче.

Либо нет, поскольку опять же не указано, входит ли элемент t в универсальное множество элементов задачи и может быть что $t \ne 15$.

б) Нет, поскольку на множестве R уравнение $x^4 + 12 = 0$ не имеет корней, т.е. $D = \varnothing$. Следовательно, D – конечно.

в) Да, поскольку из условия $A\subseteq B$ при взятом любом элементе $x\in A$ имеем $x\in B$, а из условия $B\subseteq C$ при любом $x\in B$, следует, что $x\in C$.

Задача 5. *Связаны ли между собой операцией включение множества:*

а) $A=\{1,\{2,3\},\{3\}\}$ и $B=\{\{3\},1,\{2\}\}$;

б) $C=\{x\in N\,|\,3\le x\le 9\}$ и $D=\{x\in Z\,|\,8\le x^2\le 88\}$.

Решение

а) Нет, $A\not\subset B$ и $B\not\subset A$, поскольку $\{\{3\}\}\not\subset B$ и $\{3\}\not\subset A$.

б) Да, $C\subseteq D$, поскольку $8\le 3^2\le 88,\ldots,8\le 9^2\le 88$. Вместе с этим, $D\not\subset C$, поскольку, например, $-3\in D$, но $-3\notin C$.

1.3. Основные типовые задачи для практической работы

1. *Найдите мощность множества:*

а) $A=\{374{,}49,\ number\}$;

б) $B=\{\{+,\{\,\}\},\{+,\{\,\}\},\{\{+\},\{+,\{\,\}\}\}\}$;

в) $C=\{x\in N\,|\,x\le 67\,\&\,x\,\vdots\,8\}$;

г) $D=\{x\in Z\,|\,2{,}9\le x^2\le 9{,}2\}$.

2. *Какое из следующих утверждений является истинным:*

а) множество $B=\{x\in R\,|\,\sin x=0\}$ – конечно;

б) $210\in C=\{x\in N\,|\,x\,\vdots\,2\,\&\,x\,\vdots\,3\}$;

в) множество $A=\{x\in Q\,|\,x^4-1=0\}$ – бесконечно;

г) $\{к,о,т\}=\{т,о,к\}=\{о,к,т\}$.

3. *Задайте всеми возможными способами множество:*

а) всех простых четных натуральных чисел;

б) букв слова «аттестат»;

в) всех простых нечетных натуральных чисел;

г) всех решений уравнения $x^2-5x+6=0$.

4. *Определите, какие элементы содержит множество:*

а) $A=\{x\in N\,|\,36\,\vdots\,x\}$;

б) $B=\{x\,|\,x-цифра\ \ числа\ \ 344566788\}$;

в) $C = \{x \in Z \mid x(x+1) \neq 0\}$;

г) $D = \{x \in Z \mid x^2 \in E\}$, где $E = \{1,2,...10\}$.

5. *Связаны ли между собой операцией включение множества:*

а) $A = \{1,2,3,4,5\}$ и $B = \{9,8,7,...0\}$;

б) $C = \{x \in N \mid 2 \leq x \leq 8\}$ и $D = \{x \in Z \mid 6 \leq x^2 \leq 66\}$;

в) $E = \{x \in N \mid x \vdots 3 \,\&\, x \vdots 5\}$ и $F = \{x \in N \mid x \vdots 30\}$;

г) $G = \{с, т, у, д, е, н, т, к, а\}$ и $H = \{с, т, е, н, а\}$.

6. *Дано универсальное множество* $U = \{3,4,5,6,7,...30\}$. *Запишите для универсума U подмножества:*

а) *A* всех кубов чисел;

б) *B* всех простых чисел;

в) *C* всех делителей числа 18;

г) *D* всех четных квадратов чисел.

7. *Какие из утверждений верны для всех множеств A, B,* C*, входящих в* U *:*

а) если $A \notin B$ и $B \notin C$, тогда $A \notin C$;

б) если $A \neq B$ и $B \neq C$, тогда $A \neq C$;

в) если $A \in B$ и $B \notin C$, тогда $A \notin C$;

г) если $A \neq B$ и $B = C$, тогда $A \neq C$.

8. *Докажите, что для всех множеств A, B,* C*, входящих в множество* U *, верными являются утверждения:*

а) если $A \subseteq B$ и $B \subseteq C$, тогда $A \subseteq C$;

б) если $A \subset B$ и $B \subseteq C$, тогда $A \subset C$;

в) если $A \not\subset B$ и $B = C$, тогда $A \not\subset C$;

г) если $A = B$ и $B \not\subset C$, тогда $A \not\subset C$.

9. *Равны ли между собой множества:*

а) $A = \{1,2,3,4,5\}$ и $B = \{5,4,3,2,1\}$;

б) $C = \{x \in N \mid 2 \leq x \leq 8\}$ и $D = \{x \in Z \mid 9 > x > 1\}$;

в) $E = \{1,2,3,4,6,12\}$ и $F = \{x \in N \mid 12 \vdots x\}$;

г) $G = \{к, а, р, е, т, а\}$ и $H = \{р, а, к, е, т, а\}$.

10. *Выясните, является ли множество конечным:*

а) $A = \{x \in N \mid 12345 \vdots x\}$;

б) $B=\{x\in Z\mid x^3\in E\}$, где $E=\{0,1,...15\}$;

в) $C=\{x\in 2N+1\mid x\vdots 54321\}$;

г) $D=\{x\in Z\mid \log_2 x=10\}$.

11. *Выясните, является ли множество пустым:*

а) $A=\{x\in Q\mid x\geq 2\,\&\,3\vdots x\,\&\,5\vdots x\}$;

б) $B=\{x\in N\mid x^5\in E\}$, где $E=\{3,4,...30\}$;

в) $C=\{x\in R\mid \cos x=0\}$;

г) $D=\{x\in Z\mid \log_2 12=x\}$.

12. *Найдите все собственные подмножества множества:*

а) $A=\varnothing$;

б) $B=\{b\}$;

в) $C=\{1,2,3\}$;

г) $D=\{u,v,p,q\}$.

13. *Задайте перечислением элементов множество:*

а) всех простых чисел, находящихся между 10 и 50;

б) согласных букв вашего имени;

в) всех целых чисел, меньших 15 и больших –15;

г) гласных букв русского алфавита.

14. *При помощи характеристического предиката задайте множество:*

а) $A=\{2,4,6,...\}$;

б) $B=\{6,12,18,...\}$;

в) $C=\{3,5,7,11,13\}$;

г) $D=\{1,4,9,16,...\}$.

15. *Найдите равномощные подмножества множества:*

а) $A=\varnothing$;

б) $B=\{b\}$;

в) $C=\{3,4\}$;

г) $D=\{a,b,c,d,e\}$

1.4. Задания для самостоятельной работы

1. *Докажите, что для всех множеств A, B, $C \subseteq U$ верным является утверждение:*

а) если $A \subseteq B$ и $B \subset C$, тогда $A \subset C$;

б) если $A \subset B$ и $B \subset C$, тогда $A \subset C$;

в) если $A \supseteq B$ и $B \supseteq C$, тогда $A \supseteq C$;

г) если $A \subseteq B$, $B \subseteq C$ и $C \subseteq A$, тогда $A = C$.

2. *Какое из утверждений верно для всех множеств A, B, $C \subseteq U$:*

а) если $A \in B$ и $B \in C$, тогда $A \in C$;

б) если $A = B$ и $B \neq C$, тогда $A \neq C$;

в) если $A \notin B$ и $B \in C$, тогда $A \notin C$;

г) если $A \not\subset B$ и $B \not\subset C$, тогда $A \not\subset C$.

3. *Найдите мощность множества:*

а) $A = \{3, \{7,4,9\}, s, \{e,t\}\}$;

б) $B = \{\{\cdot,+\}, \{-,\cdot\}, \{+,\cdot\}, \{-,\cdot,+\}\}$;

в) $C = \{x \in N \mid x \leq 234 \,\&\, x \vdots 5\}$;

г) $D = \{x \in Z \mid -3 \leq x^3 \leq 33\}$.

4. *Задайте всеми возможными способами множество:*

а) всех простых непарных чисел;

б) букв слова «дискретность»;

в) всех квадратов целых чисел;

г) всех равносторонних треугольников на плоскости.

5. *Определите, какие элементы содержит множество:*

а) $A = \{x \in Z \mid x^2 \in E, x^3 \in E\}$, $E = \{1,2,...,10\}$;

б) $B = \{x \mid x - \textit{ненулевая цифра числа } 1030507090\}$;

в) $C = \{x \in Z \mid 18 \vdots x\}$;

г) $D = \{x \in R \mid x^2 + 7x - 8 = 0\}$.

6. *Связаны ли между собой операцией включение множества:*

а) $A = \{1^2, 2^2, 3^2, 4^2\}$ и $B = \{1,2,3,4\}$;

б) $C = \{x \in Z \mid 5 \leq x^2 \leq 55\}$ и $D = \{x \in Z \mid 2 \leq x^2 \leq 22\}$;

в) $E = \{x \in N \mid x \vdots 2 \;\&\; x \vdots 7\}$ и $F = \{x \in N \mid x \vdots 42\}$;

г) $G = \{м, о, д, у, л, ь\}$ и $H = \{м, о, д, а\}$.

7. *Дано универсальное множество* $U = \{1, 2, ... 40\}$. *Запишите для универсума U подмножество:*

а) A всех квадратов чисел;

б) B всех составных чисел;

в) C всех делителей числа 24;

г) D всех кубов четных чисел.

8. *Проверьте, равны ли множества:*

а) $A = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ и $B = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$;

б) $C = \{x \in Z \mid 12 \le x \le 21\}$ и $D = \{x \in N \mid 22 > x > 11\}$;

в) $E = \{x \in N \mid 32 \vdots x\}$ и $F = \{1, 2, 4, 8, 16\}$;

г) $G = \{а, л, г, е, б, р, а\}$ и $H = \{а, н, а, л, и, з\}$.

9. *Выясните, является ли конечным множество:*

а) $A = \{x \in R \mid \log_x 16 = 2\}$;

б) $B = \{x \in Q \mid x \vdots 123 \;\&\; x \vdots 456\}$;

в) $C = \{x \in Z \mid x^3 \in N\}$;

г) $D = \{x \in N \mid 100^{100} \vdots x\}$.

10. *Являются ли равномощными множества:*

а) $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ и $B = \{9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1\}$;

б) $C = \{x \in Z \mid 34 \le x \le 43\}$ и $D = \{x \in N \mid 54 > x > 45\}$;

в) $E = \{x \in Z \mid 12 \vdots x \;\&\; 16 \vdots x\}$ и $F = \{a, 2, b, 3, +\}$;

г) $G = \{\wedge, \&, *, \$, a\}$ и $H = \{!, \%, (,), \_, =\}$.

1.5. Контрольные вопросы

1. Что называют множеством? Приведите примеры множеств.
2. Какое множество считается определенным?
3. Приведите примеры множеств, элементы которых являются множествами.
4. Как обозначаются множества и их элементы?
5. Какими способами можно задать множество?
6. Что называют характеристическим предикатом?

7. Сформулируйте определения конечного и бесконечного множества.

8. Приведите примеры конечных и бесконечных множеств.

9. Что называют подмножеством множества?

10. Дайте определение пустого множества.

11. Каким является пустое множество: конечным или бесконечным?

12. Сформулируйте определение универсального множества?

13. Приведите примеры универсальных множеств?

14. Найдется ли хотя бы одно множество, являющееся элементом пустого множества?

15. Существует ли множество, которое не содержит ни одного подмножества?

16. Приведите примеры конечных и бесконечных подмножеств некого множества?

17. Как определяется собственное множество?

18. Любое ли множество имеет хотя бы одно собственное подмножество?

19. Что называют мощностью множества?

20. Какова мощность пустого множества?

21. Существует ли множество, собственное подмножество которого является бесконечным?

22. Какие множества называются равными?

23. Приведите примеры равных множеств, которые заданы разными способами.

24. Сформулируйте определение равномощных множеств.

Тема 2. Операции над множествами

Ключевые понятия: объединение, пересечение, теоретико-множественная разность, симметрическая разность, дополнение, диаграммы Эйлера-Венна, свойства операций.

2.1. Краткие теоретические сведения

Поскольку множеством является, например, и множество жильцов дома, и множество домашних питомцев этих жильцов, то самого по себе понятия множества недостаточно для того, чтобы отличать одно множество от другого, необходимо определить способы конструирования новых множеств, то есть определить операции над множествами.

Объединением $A \bigcup B$ множеств A и B называется множество, которое состоит из всех элементов множества A, всех элементов множества B и которое не содержит никаких других элементов, то есть

$$A \bigcup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}.$$

Пересечением $A \bigcap B$ множеств A и B называется множество, которое состоит из тех и только тех элементов, которые принадлежат одновременно множеству A и множеству B, то есть

$$A \bigcap B = \{x \mid x \in A \,\&\, x \in B\}.$$

Теоретико-множественной разностью $A \setminus B$ множеств A и B называется множество, которое состоит из тех и только тех элементов, которые принадлежат множеству A и не принадлежат множеству B, то есть

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \,\&\, x \notin B\}.$$

Симметрической разностью $A \Delta B$ множеств A и B называется множество, которое состоит из всех элементов множества A, не принадлежащих B, и всех элементов множества B не принадлежащих A, и которое не содержит никаких других элементов, то есть

$$A \Delta B = (A \setminus B) \bigcup (B \setminus A) = (A \bigcup B) \setminus (A \bigcap B).$$

Дополнением $\overline{A}$ к множеству A называется множество, которое состоит из всех элементов универсального множества, которые не принадлежат A, то есть

$$\overline{A} = \{x \in U \mid x \notin A\}.$$

Пусть задано универсальное множество U. Тогда для всех $A, B, C \subseteq U$ выполняются следующие свойства:

– *ассоциативность*: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$,

$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$;

– *коммутативность*: $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$;

– *идемпотентность*: $A \cup A = A$, $A \cap A = A$;

– *дистрибутивность*: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$,

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;

– *поглощение*: $(A \cap B) \cup A = A$, $(A \cup B) \cap A = A$;

– *свойства нуля*: $A \cap \varnothing = \varnothing$;

– *свойства единицы*: $A \cup U = U$, $A \cap U = A$;

– *инволютивность*: $\overline{\overline{A}} = A$;

– *законы де Моргана*: $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$, $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$;

– *свойства дополнения*: $A \cup \overline{A} = U$, $A \cap \overline{A} = \varnothing$;

– *свойства разности*: $A \setminus B = A \cap \overline{B}$.

Для наглядного схематического изображения всех возможных операций над множествами используются **диаграммы Эйлера-Венна** и **круги Эйлера**, упомянутые в теме 1. Часто эти понятия не различают или ошибочно принимают одно за другое [3]. Однако круги Эйлера возникли для нужд силлогистики, а диаграммы **Эйлера-Венна –** для нужд математической логики. Подход кругов Эйлера оказался не применим для решения задач математической логики, более сложных, чем задачи силлогистики. В широком смысле дискретная математика охватывает математическую логику, поэтому мы будем пользоваться диаграммами Эйлера-Венна. При данном подходе универсальное множество изображается множеством точек некоторого прямоугольника, в котором располагаются в виде кругов или других простых фигур все остальные рассматриваемые множества.

2.2. Примеры решения задач

Задача 1. *Найдите объединение, пересечение, теоретико-множественную разность, симметрическую разность множеств:*

а) $A = \{1,2,3,4,5\}$ и $B = \{4,5,6,7,8\}$;

б) $A = \{1,2,3,4\}$ и $B = \{5,6,7,8\}$;

в) $A = B = \{1,2,3\}$.

Решение

а) Согласно определениям операций получаем:

$A \bigcup B = \{1,2,\ldots,8\}$, $A \bigcap B = \{4,5\}$,

$A \setminus B = \{1,2,3\}$, $A \Delta B = \{1,2,3,6,7,8\}$.

б) Аналогично предыдущему пункту находим:

$A \bigcup B = \{1,2,\ldots,8\}$, $A \bigcap B = \varnothing$,

$A \setminus B = A$, $A \Delta B = A \bigcup B$.

в) В этом случае, $A \bigcup B = A \bigcap B = A$, $A \setminus B = A \Delta B = \varnothing$.

Задача 2. *Дано универсальное множество* $U = \{1,2,\ldots,10\}$ *и его подмножества* $A = \{1,2,\ldots,6\}$, $B = \{2,3,\ldots,7\}$, $C = \{3,4,\ldots,8\}$ *и* $D = \{4,5,\ldots,9\}$. *Найдите:*

а) $(\overline{A} \bigcap \overline{B}) \setminus (C \bigcup D)$;

б) $(\overline{C \Delta D}) \bigcap (A \Delta B)$.

Решение

а) Дополнениями согласно определению операции дополнение являются: $\overline{A} = \{7,8,9,10\}$, $\overline{B} = \{1,8,9,10\}$, пересечением – $\overline{A} \bigcap \overline{B} = \{8,9,10\}$, объединением – $C \bigcup D = \{3,4,\ldots,9\}$. Итак,

$$(\overline{A} \bigcap \overline{B}) \setminus (C \bigcup D) = (\overline{A} \bigcap \overline{B}) \bigcap \overline{(C \bigcup D)} = \{10\}.$$

б) Найдем дополнения: $\overline{C}=\{1,2,9,10\}$, $\overline{D}=\{1,2,3,10\}$ и симметрические разности: $\overline{C}\Delta\overline{D}=\{3,9\}$, $A\Delta B=\{1,7\}$. Отсюда по определению операции пересечение получаем, что

$$(\overline{C}\Delta\overline{D})\cap(A\Delta B)=\varnothing.$$

Задача 3. *Докажите закон поглощения:*

$(A\cap B)\cup A=A.$

Доказательство

Пусть $x\in(A\cap B)\cup A$. Тогда $x\in(A\cap B)\cup A\vee x\in A$, откуда, $(x\in A\,\&\,x\in B)\vee x\in A$. Итак, $x\in A$ и $(A\cap B)\cup A\subseteq A$ (1).

Если теперь $x\in A$, то $x\in C\cup A$ для произвольного множества *C*. Пусть $C=A\cap B$. Тогда $x\in(A\cap B)\cup A$ и имеем $(A\cap B)\cup A\supseteq A$ (2).

Из условий (1) и (2) по определению равенства двух множеств следует заданное равенство.

Задача 4. Построить с помощью диаграмм Эйлера-Венна:

а) пересечение заданных множеств N={А, Н, Д, Р, Е, Й}, K={А, Л, Е, К, С, Е, Й} и M={Д, М, И, Т, Р, И, Й};

б) объединение заданных множеств A={0,8,9,10,11,12,13,14,15}, B={0,4,5,6,7,12,13,14,15}, C={0,2,3,6,7,10,11,14,15}, D={0,1,3,5,7,9,11,13,15}, универсум U={0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15}.

Решение

а) На рис. 1 заданные множества представлены так, что видно их пересечение – буква «Й», которая расположена в центре: $N\cap M\cap K=\{Й\}$.

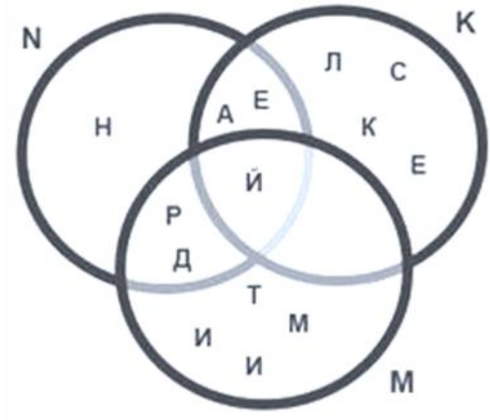


Рис. 1. Пример пересечения множеств на диаграмме Эйлера-Венна, задача 4а.

б) Диаграммы Эйлера-Венна для четырех множеств A, B, C, D представлены на рис. 2: $A \bigcup B \bigcup C \bigcup D = U$. U ограничено квадратом, цифра «0» поставлена так, чтобы было видно, что она входит во все заданные множества.

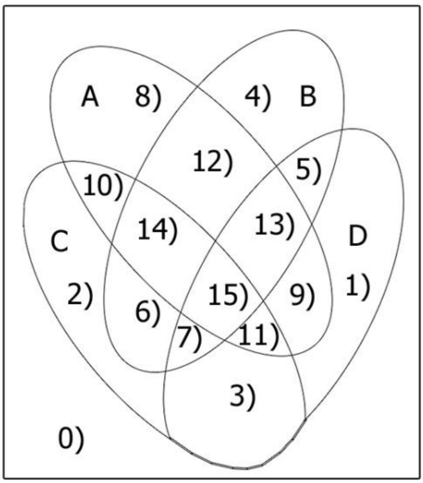


Рис. 2. Пример объединения множеств на диаграмме Эйлера-Венна, задача 4б.

Задача 5. *Пользуясь свойствами операций, докажите, что* $A = A \bigcup A$.

Доказательство

По свойствам нуля и дополнения, $A = A \cup \varnothing = A \cup (A \cap \overline{A})$, откуда по дистрибутивности, $A \cup (A \cap \overline{A}) = (A \cup A) \cap (A \cup \overline{A}) = (A \cup A) \cap U = A \cup A$. Итак, $A = A \cup A$, ч.т.д.

Задача 6. *Упростите выражение:*

$$(\overline{X} \cap Y \cap Z) \cup (X \cap Y \cap Z) \cup \overline{Y} \cup \overline{Z}.$$

Решение

Пользуясь дистрибутивностью, законом де Моргана, свойством единицы и дополнения, получаем:

$$(\overline{X} \cap Y \cap Z) \cup (X \cap Y \cap Z) \cup \overline{Y} \cup \overline{Z} =$$

$$= ((\overline{X} \cup X) \cap (Y \cap Z)) \cup \overline{Y \cap Z} =$$

$$(U \cap (Y \cap Z)) \cup \overline{Y} \cup \overline{Z} = (Y \cap Z) \cup \overline{Y \cap Z} = U.$$

2.3. Основные типовые задачи для практической работы

1. *Найдите объединение, пересечение, теоретико-множественную разность, симметрическую разность множеств:*

а) $A = \{3,4,5\}$ и $B = \{4,5,6,7\}$;

б) $C = \{3,6,9,\ldots\}$ и $D = \{5,10,15,\ldots\}$;

в) $E = \{1,2,\ldots,10\}$ и $F = \{1,2,\ldots,11\}$;

г) $G = \{x \in Z \mid x \vdots 7\}$ и $H = \{x \in Z \mid x \vdots 11\}$;

д) $K = \{1,2,3,\ldots\}$ и $L = \{0,-1,-2,-3,\ldots\}$;

е) $M = \{+,-,*\}$ и $P = \varnothing$.

2. *Дано универсальное множество* $U = \{1,2,\ldots,20\}$ *и его подмножества* $A = \{1,2,\ldots,17\}$, $B = \{2,3,\ldots,18\}$, $C = \{3,4,\ldots,19\}$ *и* $D = \{4,5,\ldots,20\}$. *Найдите:*

а) $(A \cap B) \setminus \overline{(C \cup D)}$;

б) $\overline{A}\setminus B$;

в) $(A\cup\overline{B})\Delta(C\cup D)$;

г) $((A\cup B\cup\overline{C})\Delta(C\cup D))\setminus D$;

д) $\overline{(A\Delta B)}\cap(C\Delta D)$;

е) $\overline{((A\setminus B)\setminus C)\setminus D}$.

3. *Докажите ассоциативность операции объединения.*

4. *Докажите коммутативность операции пересечения.*

5. *Докажите идемпотентность операции объединения.*

6. *Докажите коммутативность операции объединения.*

7. *Докажите закон поглощения:* $(A\cup B)\cap A=A$.

8. *Пользуясь свойствами операций, докажите:*

а) идемпотентность операции пересечения;

б) закон дополнения;

в) свойства нуля;

г) выражение для разности.

9. *Упростите выражение:*

а) $(X\cap\overline{Y})\cup Y$;

б) $(\overline{X}\cup Y\cup Z)\cap(X\cup Y\cup Z)\cap\overline{Y}\cap\overline{Z}$;

в) $((X\cap\overline{Y})\cup Z)\cap(X\cup Y)\cap\overline{Z}$;

г) $X\cap\{[(Y\cap\overline{Z})\cup\overline{(Z\cup Y)}]\cap Z\}\cap\overline{X}$.

10. *Докажите с помощью диаграмм Эйлера-Венна:*

а) свойства нуля;

б) свойства единицы;

в) закон поглощения;

г) закон дополнения;

д) $X\cup Y\subseteq X\cap Y$;

е) $\overline{(X\setminus Y)}\cup\overline{(Y\setminus X)}=U$;

ж) $(X\cap Y\cap Z)\cup(\overline{X}\cap Z)\cup(\overline{Y}\cap Z)=Z$;

з) $(X\setminus Y)\cap(Y\setminus X)=\varnothing$.

11. *Какими являются множества A и B, если* $A\setminus B=\varnothing=B\setminus A$.

12. *Докажите тождества:*

а) $X \cap (Y \setminus X) = \varnothing$;

б) $(X \setminus Y) \setminus Z = (X \setminus Z) \setminus (Y \setminus Z)$;

в) $X \setminus (Y \cup Z) = (X \setminus Y) \cap (X \setminus Z)$;

г) $\overline{\overline{X}} = X$.

13. *Докажите, что* $A \subseteq B$ *тогда и только тогда, когда* $\overline{B} \subseteq \overline{A}$.

14. *Проверьте, существуют ли множества A, B, C такие, что:*

а) $A \cap B \neq \varnothing$, $A \cap C = \varnothing$, $(A \cap B) \setminus C = \varnothing$;

б) $A \cup B \neq \varnothing$, $A \cap C = \varnothing$, $(A \cup B) \setminus C = \varnothing$.

15. *Найдите множество X, если известно:* $\begin{cases} A \cap X = B; \\ A \cup X = C. \end{cases}$

Установите условия существования решения.

2.4. Задания для самостоятельной работы

1. *Найдите объединение, пересечение, теоретико-множественную разность, симметрическую разность множеств.*

а) $A = \{1,3,5,7\}$ и $B = \{2,4,6,8\}$;

б) $C = \{2,4,6,\ldots\}$ и $D = \{7,14,21,\ldots\}$;

в) $E = \{1,2,\ldots,20\}$ и $F = \{2,\ldots,19\}$;

г) $G = \{x \in Z \mid x \vdots 13\}$ и $H = \{x \in Z \mid x \vdots 5\}$;

д) $K = \{0,-1,-2,-3,\ldots\}$ и N;

е) $M = P = \varnothing$.

2. *Дано универсальное множество* $U = \{1,2,\ldots,30\}$ *и его подмножества* $A = \{1,2,\ldots,28\}$, $B = \{2,3,\ldots,29\}$, $C = \{3,4,\ldots,30\}$ *и* $D = \{4,5,\ldots,30,1\}$. *Найдите:*

а) $(A \cup B) \Delta \overline{(C \cup D)}$;

б) $(B \setminus C) \cup \overline{D}$;

в) $(A \Delta \overline{B}) \cap (C \setminus D)$;

г) $((B\cap\overline{C})\setminus(C\cap\overline{D}))\Delta A$;

д) $\overline{(A\setminus B)}\cap\overline{(C\setminus D)}$;

е) $\overline{((A\Delta B)\cup C)\cap D}$.

3. *Докажите следующее свойство:*

а) ассоциативный закон операции пересечения;

б) коммутативный закон операции объединения;

в) идемпотентность операции пересечения;

г) коммутативный закон операции пересечения.

4. *Пользуясь свойствами операций, докажите:*

а) идемпотентность операции объединения;

б) закон инволютивности;

в) свойства нуля и единицы;

г) законы де Моргана.

5. *Упростить выражение:*

а) $(X\cup\overline{Y})\cap Y$;

б) $(X\cup Y\cup\overline{Z})\cap(X\cup Y\cup Z)\cap(\overline{X}\cap\overline{Y})$;

в) $(X\cup Y)\cap\overline{Y}\cap((X\cap\overline{Y})\cup Y)$;

г) $X\cup((Y\cap\overline{Y})\cup\overline{(X\cup Y)})\cup\overline{X}$.

6. *Докажите, что:*

а) $X\setminus(X\setminus Y)=Y\setminus(Y\setminus X)$;

б) $(X\cap Y)\subseteq X$;

в) $X\subseteq(X\cup Y)$;

г) $X\setminus Y\subseteq X$;

д) $X\cap(Y\setminus Z)=(X\cap Y)\setminus(X\cap Z)$;

е) $(X\cup Y)\setminus Z=(X\setminus Z)\cup(Y\setminus Z)$.

7. *Какими являются множества А и В, если*

а) $A\setminus B=B\setminus A$;

б) $A\setminus B=A$;

в) $A\cup B=A$;

г) $A\cap B=A$.

8. *Докажите с помощью диаграмм Эйлера-Венна:*

а) ассоциативность пересечения и объединения;

б) законы дистрибутивности:

$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C),$$

$$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C).$$

в) законы де Моргана.

9. *Покажите, что:*

а) из условия $A\cup B=A\cap B$ следует $A=B$;

б) из условия $A\subseteq B$ следует $(A\setminus C)\subseteq(B\setminus C)$.

2.5. Контрольные вопросы

1. Что называют объединением множеств?
2. Приведите пример двух множеств, объединение которых являются пустым множеством.
3. Любое ли множество можно представить объединением некоторых его подмножеств?
4. Что называют пересечением множеств?
5. Приведите пример двух множеств, пересечение которых является бесконечным множеством?
6. Существует ли множество, которое можно представить пересечением некоторых собственных его подмножеств?
7. Сформулируйте определение теоретико-множественной разности множеств.
8. Какими должны быть множества, теоретико-множественная разность которых равна пустому множеству?
9. Существуют ли множества, объединение которых совпадает с их теоретико-множественной разностью?
10. Что называют симметрической разностью множеств?
11. Чем отличается теоретико-множественная разность от симметрической разности множеств?
12. Приведите пример двух множеств, теоретико-множественная разность которых совпадает с их симметрической разностью.
13. Дайте определение дополнения к множествам.
14. Пересекается ли дополнение к множеству с самим множеством?

15. Являются ли объединение и пересечение множеств коммутативными операциями?

16. Дайте определение закону поглощения.

17. Сформулируйте свойства нуля и единицы.

18. Запишите законы де Моргана.

19. Являются ли операции объединение и пересечение множеств ассоциативными?

20. Дайте определение свойствам идемпотентности объединения и пересечения множества, инволютивности.

21. Что называют дистрибутивностью пересечения (объединения) множеств относительно их объединения (пересечения)?

Тема 3. Булеан. Прямое произведение множеств

Ключевые понятия: булеан (алгебра всех подмножеств), упорядоченная пара, декартово (прямое) произведение множеств, степень множеств, геометрическая интерпретация прямого произведения числовых множеств.

3.1. Краткие теоретические сведения

В теме 2 рассматривались способы конструирования новых множеств из двух наперед заданных, то есть способы задания бинарных операций. В этой теме рассматривается одна унарная операция, согласно которой каждому множеству ставится в соответствие так называемый булеан, а также одна бинарная операция, которая определяется в терминах упорядоченных пар.

Множество всех подмножеств X называется **булеаном** (или алгеброй всех подмножеств) и обозначается как $U(X)$ (либо 2^x). Таким образом,

$$U(X) = \{A \mid A \subseteq X\}.$$

Очевидно, что если два множества равномощны, то равномощны и их булеаны.

Справедливо следующее утверждение: число подмножеств конечного множества, состоящего из n элементов, равно 2^n. Результат доказывается методом математической индукции.

Пусть X – непустое множество и $a, b \in X$. Обозначение $(a;b)$ называют **упорядоченной парой**, при этом элемент a называют **первым компонентом** пары $(a;b)$, а элемент b – **вторым компонентом** этой пары.

Это означает, например, что $(a;b) \neq (b;a)$. Равенство двух произвольных упорядоченных пар определяется следующим образом:

$$(a;b) = (c;d) \Leftrightarrow a = c \,\&\, b = d.$$

Прямым (или **декартовым**) произведением двух множеств *A* и *B* называется множество всех упорядоченных пар, в каждой из которых первый компонент принадлежит *A*, а второй – *B*. Прямое произведение множеств *A* и *B* обозначается как $A\times B$. Следовательно,

$$A\times B=\{(a;b)\mid a\in A \,\&\, b\in B\}.$$

Понятие прямого произведения двух множеств естественно обобщается на любое ограниченное число множеств.

***n*-ой степенью** множества *A* называется его прямое произведение самого на себя *n* раз, то есть $A^n=\underbrace{A\times A\times\ldots\times A}_{n}$.

Если A, B – числовые множества, то прямому произведению $A\times B$ можно дать **геометрическую интерпретацию**, а именно: множество $A\times B$ можно изобразить на координатной плоскости, считая, что каждой паре $(x;y)\in A\times B$ отвечает точка плоскости с координатой $(x;y)$.

3.2. Примеры решения задач

Задача 1. *Постройте булеан множества:*

а) $A=\{10\}$;

б) $B=\{7,8,9\}$.

Решение

а) По определению булеана: $U(A)=\{A,\varnothing\}$.

б) В данном случае, имеем:

$U(B)=\{B,\varnothing,\{7\},\{8\},\{9\},\{7,8\},\{7,9\},\{8,9\}\}$.

Задача 2. *Найдите прямое произведение множеств:*

а) $A=\{1,2,3\}$ и $B=\{4,5\}$;

б) $C=\{1\}$ и $D=\{2,3,4,\ldots\}$;

в) $E=F=\{7,8\}$.

г) $A=\{1,2\}$ и $B=\{\{0,1,2\},5\}$;

д) $\{0,1\}^3$.

Решение

а) По определению прямого произведения множеств, получаем:

$$A\times B=\{(1;4),(1;5),(2;4),(2;5),(3;4),(3;5)\}.$$

б) В этом случае, имеем:

$$C\times D=\{(1;2),(1;3),(1;4),\ldots\}.$$

в) В этом случае, имеем:

$$E\times F=\{(7;7),(7;8),(8;7),(8;8)\}.$$

г) По определению прямого произведения множеств, получаем:

$$A\times B=\{(1;\{0,1,2\}),(1;5),(2;\{0,1,2\}),(2;5)\}.$$

д) Последовательное умножение даст:

$$\{0,1\}^3=(\{0,1\}\times\{0,1\})\times\{0,1\}=\{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}\times\{0,1\}=$$

$$=\{(0,0,0),(0,1,0),(1,0,0),(1,1,0),(0,0,1),(0,1,1),(1,0,1),(1,1,1)\}$$

Задача 3. *Докажите, что для всех A, B, C выполняется тождество:*

$$A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C).$$

Доказательство

Пусть, $(x;y)\in A\times(B\cap C)$. Тогда, $x\in A\,\&\,y\in(B\cap C)$, откуда, $x\in A\,\&\,y\in B\,\&\,y\in C$. Это означает, что $(x;y)\in A\times B$ и $(x;y)\in A\times C$. Следовательно, $(x;y)\in(A\times B)\cap(A\times C)$ и тогда $A\times(B\cap C)\subseteq(A\times B)\cap(A\times C)$ – выражение (1).

Наоборот, если $(x;y)\in(A\times B)\cap(A\times C)$, то $x\in A\,\&\,y\in B, y\in C$, отсюда $x\in A\,\&\,y\in(B\cap C)$.

Тогда, $(x;y)\in A\times(B\cap C)$ следовательно, $(A\times B)\cap(A\times C)\subseteq A\times(B\cap C)$ - выражение (2).

Из выражений (1) и (2) следует, что $A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$, ч.т.д.

Задача 4. *Докажите, что существуют множества A, B такие, что* $A\times B\neq B\times A$.

Доказательство

Пусть $A=\{+\infty\}$, $B=\{-\infty\}$. Тогда прямые произведения являются такими что :

$A\times B=\{(+\infty;-\infty)\}$, $B\times A=\{(-\infty;+\infty)\}$.

Поскольку $(+\infty;-\infty)\neq(-\infty;+\infty)$, то $A\times B\neq B\times A$, ч.т.д.

Задача 5. *Постройте на координатной плоскости прямое произведение* $R\times[-1;1]$.

Решение

Соответствующее множество представляет собой прямое произведение всей числовой оси *OX* на отрезок $[-1;1]$ по *OY*. На рис. 3 оно представлено заштрихованной областью.

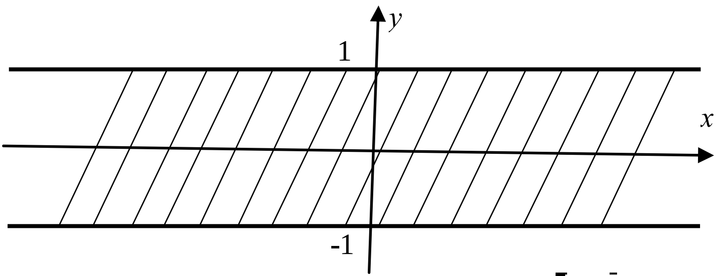


Рис. 3. Прямое произведение $R\times[-1;1]$

3.3. Основные типовые задачи для практической работы

1. *Постройте булеан множества:*

а) $A=\{\varnothing\}$;

б) $B=\varnothing$;

в) $C=\{4,5\}$;

г) $D=\{1,2,3,4\}$;

д) $E=\{\{a,b\},\{c,d\}\}$;

е) $F=\{1,\{2,3\},\{4\}\}$.

2. *Найдите прямое произведение множеств:*

а) $A=\{0,1\}$ и $B=\{3,4\}$;

б) $C=\{a,b,c,d\}$ и $D=\{+,-\}$;

в) $E=\{2,4,6,\ldots\}$ и $F=\{1,3,5,\ldots\}$;

г) $G=H=\{1,2,3\}$.

3. *Докажите, что для конечных множеств:*

а) $|A\times B|=|A|\times|B|$;

б) $|A^n|=|A|^n$;

в) $|A\times B|=|B\times A|$;

г) $|A_1\times A_2\times\ldots\times A_n|=|A_1|\times|A_2|\times\ldots\times|A_n|$.

4. *Найдите прямые произведения множеств* $A\times B$, $B\times A$, A^2, B^2 *если:*

а) $A=\{e,f,g,h\}$ и $B=\{1,2,3\}$;

б) $A=\{a,v\}$ и $B=\{\alpha,\beta,\delta,\lambda\}$;

в) $A=\{\{x\},\{y\}\}$ и $B=\{\{1,2\},\{3\}\}$;

г) $A=\{\{a\}\}$ и $B=\{\{b\}\}$.

5. *Существуют ли множества A, B, C такие, что:*

а) $B\times C\neq C\times B$;

б) $A\times(B\times C)\neq(A\times B)\times C$.

6. *Докажите, что для всех A, B, C имеет место следующее тождество:*

а) $A\times(B\setminus C)=(A\times B)\setminus(A\times C)$;

б) $(A\cap B)\times(C\cap D)=(A\times C)\cap(B\times D)$.

7. *Найдите 3-степень множества:*

а) $A=\{a\}$;

б) $B=\{1,2\}$;

в) $C=\{u,v,t\}$;

г) $D=\varnothing$.

8. *Какими должны быть множества A и B, если прямое произведение* $A\times B$*:*

а) содержит элементы вида $(a;a)$;

б) не содержит элементы вида $(a;a)$.

9. *Постройте на координатной плоскости прямое произведение множеств:*

а) $[3;5]\times[4;6]$;

б) $[-2;3]\times R$;

в) $(1,4)\times(2,6)$;

г) $R\times[1,5]$;

д) $(-2,3]\times[4,5)$;

е) $[a;b]\times[c;d]$.

10. *В группе из 25 учащихся 15 человек знают английский язык, 9 знают французский и 3 человека знают два языка. Сколько учащихся в группе не знают ни английского, ни французского языка?*

11. *Докажите, что:*

а) $A\times\varnothing=\varnothing$;

б) $(B\subseteq A)\,\&\,(C\subseteq A)\Rightarrow B\times C\subseteq A\times A$.

12. *Укажите истинные утверждения:*

а) существуют множества *A*, *B* такие, что $A\times B=\varnothing$;

б) для всех множеств *A*, *B* имеем $A\times B=B\times A$;

в) существуют множества *A*, *B* такие, что $A\times B=B\times A$;

г) для всех *A* существуют *B* такая, что $A\times B=B\times A$.

13. *Сколько элементов содержит* n-*степень множества:*

а) $A=\varnothing$;

б) $B=\{*\}$;

в) $C=\{\alpha,\beta\}$;

г) $D=\{1,2,3\}$.

14. *Найдите* $U(X\times Y)$, $U(Y\times X)$, $U(X^2)$, $U(Y^2)$ *и* $U(X)\times U(Y)$, $X\times U(Y)$, $U(X)\times Y$, *если:*

а) $X=Y=\varnothing$;

б) $X=\varnothing$, $Y=\{1\}$;

в) $X=\{2,3\}$, $Y=\varnothing$;

г) $X=\{4\}$, $Y=\{5\}$;

д) $X=\{6,7\}$, $Y=\{8\}$;

е) $X=\{0,1\}$, $Y=\{a,b\}$.

15. *Проверьте*, *равномощны ли множества:*

а) $A\times B$ и $B\times A$, если $A=\{1,2,3,4\}$ и $B=\{5,6,7\}$;

б) $A\times B$ и $C\times D$, если $A=\{1,2,\ldots,10\}$, $B=\{6,7,\ldots,10\}$ и $C=\{1,2,\ldots,25\}$, $D=\{26,27\}$;

в) $A\times B$ и $C\times D$, если $A=\{a\}$, $B=\varnothing$ и $C=\{\varnothing\}$, $D=\{a\}$;

г) $N\times 2N$ и $3N\times N$.

3.4. Задания для самостоятельной работы

1. *Постройте булеан множества:*

а) $A=\{k\}$;

б) $B=\{1,\varnothing\}$;

в) $C=\varnothing$;

г) $D=\{q,w,e,r\}$;

д) $E=\{\{1,2\},\{3,4\},\{5,6,7\}\}$;

е) $F=\{\{8\},\{a,b\},\{9,\{\}\}\}$.

2. *Найдите прямое произведение множеств:*

а) $A=\{1,2,3\}$ и $B=\{4,5\}$;

б) $C=\{e,f,g,h\}$ и $D=\{\alpha,\beta,\delta\}$;

в) $E=\{5,10,15,\ldots\}$ и $F=\{7,14,21,\ldots\}$;

г) $G=H=\{1,2,3,4\}$.

3. *Докажите, что:*

а) $\varnothing\times X=\varnothing$;

б) $|\varnothing\times\varnothing| = 0$;

в) $|\{\varnothing\}\times\{\varnothing\}| = 1$;

г) $|\{+\}\times\{-\}| \neq 0$.

4. *Постройте на координатной плоскости прямое произведение множеств:*

а) $[2;4]\times[1;7]$;

б) $R\times[-2;4]$;

в) $(3,4)\times[2,8)$;

г) $[-4;4)\times R\setminus\{0\}$;

д) $[-1,2]\times(-14,5]$;

е) $(a;b]\times[c;d)$.

5. *Какими должны быть множества A и B, если:*

а) из условия $(x;y)\in A\times B$ следует $(y;x)\in A\times B$;

б) из условия $(x;y)\in A\times B$ следует $(y;x)\notin A\times B$.

6. *Опровергните или докажите равенство:*

а) $(A\times B)\cap(B\times A)=(A\cap B)\times(A\cap B)$;

б) $(A\times B)\cup(C\times D)=(A\cup C)\times(B\cup D)$.

7. *Укажите истинные или ложные утверждения:*

а) для всех *A*, *B* имеем $A\subseteq B\Rightarrow A\times B=B\times A$;

б) для всех *A*, *B* имеем $A\times B=B\times A\Leftrightarrow A=B$;

в) существует *A* такое, что для всех *B* имеем $A\times B=B\times A$;

г) не существует множеств *A* и *B* таких, что $A\times B=\varnothing$.

8. *Найдите 2-степень множества:*

а) $A=\{a\}$;

б) $B=\{1;2\}$;

в) $C=\{u,v,t\}$;

г) $D=\varnothing$;

д) $E=(-5;5)$;

е) $F = \{a,b,c,d\}$.

9. *Найдите* $U(X\times Y)$, $U(Y\times X)$, $U(X^2)$, $U(Y^2)$ *и* $U(X)\times U(Y)$, $X\times U(Y)$, $U(X)\times Y$, *если:*

а) $X = Y = \{1,0\}$;

б) $X = \varnothing$, $Y = \{1,11\}$;

в) $X = \{2\}$, $Y = \varnothing$;

г) $X = \{4,4\}$, $Y = \{5,5\}$;

д) $X = \{6\}$, $Y = \{7,8\}$;

е) $X = \{e, f\}$, $Y = \{g,h\}$;

ж) $X = \{+,-\}$, $Y = \{a,b\}$;

з) $X = \varnothing$, $Y = \{8, 9, 10\}$;

е) $X = \{a,b,c\}$, $Y = \varnothing$;

и) $X = \{f\}$, $Y = \{1,2\}$;

к) $X = \{-1,1\}$, $Y = \{*,/\}$;

л) $X = \{2,4,6\}$, $Y = \{\otimes\}$.

10. *В группе 30 учащихся. Из них 16 человек знают английский язык, 12 – французский, 8 – немецкий, 6 – английский и французский, 4 – английский и немецкий, 3 – французский и немецкий. При этом 2 человека знают все языки. Сколько учащихся в группе не знают ни одного языка; знают только один язык?*

3.5. Контрольные вопросы

1. Что называют булеаном?
2. Как связаны между собой мощность булеана и множество, на котором оно определяется?
3. Является ли пустым множеством булеан, который рассматривается на пустом множестве?
4. Что называют упорядоченной парой?

5. Как называются элементы, которые составляют упорядоченную пару?
6. Сформулируйте определение прямого (декартова) произведения двух множеств.
7. Зависит ли прямое (декартово) произведение двух множеств от порядка, согласно которого берутся эти множества?
8. Дайте определение степени множества.
9. Может ли степень множества быть пустым множеством?
10. Дайте геометрическую интерпретацию декартовому произведению двух числовых множеств?
11. Как обозначается множество всех подмножеств данного множества?
12. Может ли прямое (декартово) произведение двух множеств быть бесконечным множеством?
13. Сформулируйте определение равности двух упорядоченных пар.
14. Могут ли быть конечными оба множества, прямое (декартово) произведение которых является бесконечным множеством?
15. Чему равна мощность прямого произведения двух конечных множеств?
16. Запишите формулу для вычисления мощности степени конечного множества.
17. Существуют ли два разных множества, прямые произведения которых совпадают?
18. Как вычисляют мощность булеана, заданного на прямом произведении двух конечных множеств?

Тема 4. Отношение. Задание отношений

Ключевые понятия: n-арное отношение, бинарное отношение, пустое отношение, тождественное отношение, универсальное отношение, обратное отношение, дополнение к отношению, способы задания бинарных отношений, композиция отношений, степень отношений.

4.1. Краткие теоретические сведения

***n*-арным отношением**, определенным на множествах $A_1, A_2, \ldots, A_n$ называется любое подмножество ρ прямого произведения $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$.

В случае, когда $A_1 = A_2 = \ldots = A_n = A$, то говорят, что ρ является n-арным отношением на множестве A.

Если $n = 1$, то отношение ρ называется **унарным**.

Если $n = 2$, то отношение ρ называется **бинарным**.

Если $(x; y) \in \rho \; (\rho \subseteq X \times Y)$, то часто записывают как $x\rho y$ и говорят, что элемент $x \in X$ находится в отношении ρ к элементу $y \in Y$.

Пусть $\rho \subseteq A \times A$. Если $\rho = \varnothing$, то такое отношение называют **пустым отношением**, если же $\rho = A \times A$, то – **универсальным отношением** (или полным отношением).

Универсальное отношение обозначают символом ω_A.

Тождественным отношением на множестве A называется отношение $\{(x; x) \mid x \in A\}$, которое обозначается через i_A.

Обратным отношением к отношению ρ называется отношение $\rho^{-1} = \{(y; x) \mid (x; y) \in \rho\}$.

Дополнением к отношению ρ называется отношение $\overline{\rho} = \{(x; y) \mid (x; y) \notin \rho\}$.

Бинарное отношение можно задать одним из следующих способов:

– **перечислением пар**, из которых состоит отношение;

– **характеристическим свойством**;

– **матричным** способом: каждому отношению $\rho \subseteq A \times B$, где $|A| = m$, $|B| = n$, отвечает матрица $X(\rho) = (x_{ij})$ размерности $m \times n$ такая, что $x_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ если } (a_i;b_j) \in \rho, \\ 0, \text{ если } (a_i;b_j) \notin \rho. \end{cases}$

– **графическим** способом – каждому бинарному отношению $\rho \subseteq A \times B$ отвечает геометрическая фигура (или граф), где элементы множества $A \bigcup B$ изображаются точками, при этом точки a_i, b_j соединяются линией, которая направляется от a_i к b_j только в том случае, когда $(a_i;b_j) \in \rho$.

Пусть $\alpha \subseteq A \times B$, $\beta \subseteq B \times C$.

Композицией отношений α и β называется отношение

$$\alpha \circ \beta = \{(x;z) \in A \times C \mid \exists y \in B : (x;y) \in \alpha \;\&\; (y;z) \in \beta\}.$$

n-ой степенью отношения $\rho \subseteq A \times B$ называется композиция ρ на себя n раз, то есть отношение ρ^n.

Ядром отношения $\rho \subseteq A \times B$ называется композиция $\rho \circ \rho^{-1}$, которое обозначается через $Ker\rho$, то есть $Ker\rho = \rho \circ \rho^{-1}$.

4.2. Примеры решения задач

Задача 1. *Задайте всеми перечисленными способами бинарное отношение* $\alpha = \{(1;2),(3;1)\}$ *на множестве* $A = \{1,2,3\}$.

Решение

В условии задачи бинарное отношение задано перечислением пар, поэтому остается представить его матричным и графическим способами.

Мощности множеств *A* и *B* совпадают и равны трем. Следовательно, заданному отношению будет соответствовать матрица размера 3х3. Согласно матричному способу задания бинарного отношения соответствующая матрица будет иметь вид $X(\alpha)=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}$.

Поскольку элементы матрицы, стоящие на пересечении первой строки и второго столбца (x_{12}) и на пересечении третьей строки и первого столбца (x_{31}), принадлежат заданному бинарному отношению α, то $x_{12}=x_{31}=1$, а другие элементы матрицы не принадлежат α и равны нулю.

Для того, чтобы представить заданное бинарное отношение α графическим способом, необходимо соединить точки (1;2) и (3;1), принадлежащие α, линиями, стрелки которых указывают на вторые координаты (см. рис. 4.1).

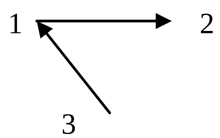


Рис. 4.1. Графический способ задания бинарного отношения α

Задача 2. *Найдите на множестве* $A=\{7,8,9\}$*:*

а) тождественное и универсальное отношения.

б) обратное отношение к отношению $\alpha=\{(7;8),(9;9),(7;9)\}$.

в) дополнение к отношению $\alpha=\{(7;8),(9;9),(7;9)\}$.

Решение.

а) По определению данных отношений, получаем: тождественное отношение – $i_A=\{(7;7),(8;8),(9;9)\}$, универсальное отношение –

$$\omega_A=\{(7;8),(8;7),(7;9),(9;7),(8;9),(9;8),(7;7),(8;8),(9;9)\}.$$

б) В этом случае по определению обратного отношения имеем $\alpha^{-1} = \{\langle 8;7\rangle, \langle 9;9\rangle, \langle 9;7\rangle\}$.

в) По определению дополнения к заданному отношению, имеем (все пары чисел, которые дополняют заданное отношение до универсального отношения):

$$\overline{\alpha} = \{\langle 8;7\rangle, \langle 9;7\rangle, \langle 8;9\rangle, \langle 9;8\rangle, \langle 7;7\rangle, \langle 8;8\rangle\}.$$

Задача 3. *Найдите композицию бинарных отношений* $\alpha \circ \beta$, $\beta \circ \alpha$, α^2, β^2 *на множестве N, если:*

а) $\alpha = \{\langle 1;1\rangle, \langle 4;5\rangle, \langle 2;3\rangle\}$ и $\beta = \{\langle 2;2\rangle, \langle 3;4\rangle\}$.

б) $\alpha = \varnothing$ и $\beta = i_N$.

Решение

а) По определению композиции отношений, имеем:

$\alpha \circ \beta = \{\langle 2;4\rangle\}$, $\beta \circ \alpha = \{\langle 2;3\rangle, \langle 3;5\rangle\}$,

$\alpha^2 = \{\langle 1;1\rangle\}$, $\beta^2 = \{\langle 2;2\rangle\}$.

б) По условию $\beta = i_N$ – тождественное отношение. В данном случае, $\alpha \circ \beta = \beta \circ \alpha = \alpha^2 = \varnothing$,

Например, тождественное отношение $\beta = 7,7$ в виде композиции $\beta^2 = 7,7 \times 7,7$ будет $7,7$, $\beta^2 = \beta$.

Задача 4. *Постройте 4-степень отношения* $\delta = \{\langle 5;5\rangle, \langle 6;7\rangle, \langle 7;8\rangle, \langle 9;5\rangle\}$ *на множестве N:*

Решение

Найдем δ^2, затем $\delta^4 = \delta^2 \circ \delta^2$. Таким образом,

$$\delta \circ \delta = 5;5 \ , \ 6;7 \ , \ 7;8 \ , \ 9;5 \ \times \ 5;5 \ , \ 6;7 \ , \ 7;8 \ , \ 9;5$$

Имеем $\delta^2 = \{\langle 5;5\rangle, \langle 6;8\rangle, \langle 9;5\rangle\}$.

Аналогично находим 4-ую степень отношения: $\delta^2 \circ \delta^2 = 5;5 \ , \ 6;8 \ , \ 9;5 \ \times \ 5;5 \ , \ 6;8 \ , \ 9;5$

Имеем $\delta^4 = \{\langle 5;5\rangle, \langle 9;5\rangle\}$.

Задача 5. *Определите, из каких пар состоит ядро отношения* $\mu = \{\langle 2;3\rangle, \langle 3;4\rangle, \langle 6;6\rangle\}$ *на множестве*

$A = \{2,3,4,5,6\}$.

Решение

Сначала найдем обратное отношение к отношению μ, то есть по определению обратное отношение к отношению μ является: $\mu^{-1} = \{(3;2),(4;3),(6;6)\}$.

Тогда

$Ker\mu = \mu \circ \mu^{-1} = \{(2;2),(3;3),(6;6)\}$.

4.3. Основные типовые задачи для практической работы

1. *Задайте всеми известными способами отношения* α *на множестве* $A = \{1,2,3,4\}$*, если:*

а) $\alpha = \{(1;2),(2;3),(3;4),(4;1)\}$;

б) $\alpha = \{(x;y) \mid x \vdots y\}$;

в) $\alpha = i_A$;

г) $\alpha = \omega_A$.

2. *Задайте матричным и графическим способами бинарное отношение* β *на множестве* $B = \{1,2,\ldots,7\}$*, если:*

а) $\beta = \{(6;5),(6;7),(6;6)\}$;

б) $\beta = \{(x;y) \in B \times B \mid x + y = 7\}$;

в) $\beta = \{(1;1),(3;3),(5;5),(7;7)\}$;

г) $\beta = \{(x;y) \in B \times B \mid x = y^2\}$.

3. *Постройте матричным способом и перечислением пар отношение, если оно задано следующим графом:*

а) б)

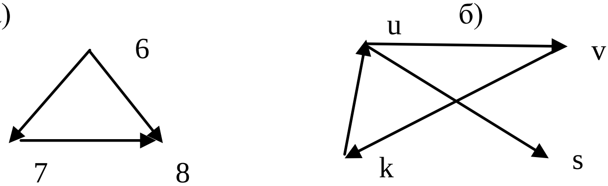


Рис. 4.2.

4. *Постройте графическим способом и перечислением пар отношение на множестве* $D=\{x,y,z\}$, *если оно задано следующей матрицей:*

а) $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, б) $A=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$, в) $A=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$,

г) $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$, д) $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$, е) $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&0\\1&1&1\end{pmatrix}$.

5. *Найдите дополнение и обратное отношение к отношению:*

а) $\alpha=\{(1;1),(2;2),(3;5)\}$ на множестве $\{1,2,\ldots,5\}$;

б) $\beta=\{(x;y)\in A\times A \mid y\,\vdots\,x\}$, $A=\{1,2,\ldots,5\}$;

в) $\delta=\{(x;y)\in N\times N \mid x+y=10\}$;

г) $\gamma=\{(x;y)\in Z\times Z \mid xy=12\}$;

д) $\lambda=\{(x;y)\in Q\times Q \mid x\le y^2\}$;

е) $\mu=\{(x;y)\in R\times R \mid 2x\ge 5y\}$.

6. *Для каждого непустого подмножества А множества* $X=\{1,3,5,7,9\}$ *постройте отношение* i_A *и* ω_A. *Найдите дополнение и обратное отношение к отношению* i_A, ω_A.

7. *Найдите композицию бинарных отношений* $\alpha\circ\beta$, $\beta\circ\alpha$, α^2, β^2 *на множестве 2N, если:*

а) $\alpha=\{(2;2),(4;6),(8;2)\}$ и $\beta=\{(4;4),(6;4)\}$;

б) $\alpha=\{(2;4),(4;10)\}$ и $\beta=\{(2;2),(8;8)\}$;

в) $\alpha=\varnothing$ и $\beta=\{(6;2),(6;4)\}$;

г) $\alpha=\{(20;20)\}$ и $\beta=i_{2N}$;

д) $\alpha=\{(8;8),(4;14)\}$ и $\beta=\{(x;y) \mid xy=8\}$;

е) $\alpha=\{(x;x+4) \mid x\in 2N\}$ и $\beta=\{(x;y) \mid x+y=16\}$.

8. *Постройте 4-степень и 5-степень отношения* ρ *на множества Z, если:*

а) $\rho = \varnothing$;

б) $\rho = \{(4;5)\}$;

в) $\rho = \{([illegible];1),(6;-5)\}$;

г) $\rho = \{([illegible];2),(2;3),([illegible];3),(-7;-7)\}$;

д) $\rho = \{(x;y) \mid xy = 2\}$;

е) $\rho = \{(x;y) \mid 0 < xy < 5\}$.

9. *Определите, из каких пар состоит ядро отношения* μ *на множестве* $A = \{0,1,\ldots,9\}$*, если:*

а) $\mu = \varnothing$;

б) $\mu = \{(0;0)\}$;

в) $\mu = i_A$;

г) $\mu = \omega_A$;

д) $\mu = \{(x;y) \mid x^2 = y^2\}$;

е) $\mu = \{(x;y) \mid x - y < 4\}$.

10. *Пусть* $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. *Докажите, что на множестве A может быть задано* 2^{n^2} *разных бинарных отношений. Сколько разных 3-арных отношений существует на множестве A?*

11. *Определите, из каких элементов состоит 3-арное отношение* μ *на множестве N, если:*

а) $\mu = \{(x;y;z) \mid 1 < x < y < z < 5\}$;

б) $\mu = \{(x;y;z) \mid 4 \geq x \geq y \geq z \geq 2\}$;

в) $\mu = \{(x;y;z) \mid x + y + z = 3\}$;

г) $\mu = \{(x;y;z) \mid xyz = 10\}$.

12. *Пусть* $A = \{a_1, \ldots, a_m\}$, $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$. *Сколько разных отношений может быть задано на множествах A и B?*

13. *Докажите, что для любых бинарных отношений* α, β *на множестве X выполняется равенство:*

а) $\alpha \cup \alpha = \alpha$;

б) $a \cap a = a$;

в) $\left(\alpha^{-1}\right)^{-1} = \alpha$;

г) $\left(\alpha \cup \beta\right)^{-1} = \alpha^{-1} \cup \beta^{-1}$;

д) $\left(\alpha \cap \beta\right)^{-1} = \alpha^{-1} \cap \beta^{-1}$;

е) $\overline{\alpha^{-1}} = \left(\overline{\alpha}\right)^{-1}$.

14. *Найдите* $\sigma \cup \rho$, $\sigma \cap \rho$, $\sigma \setminus \rho$, $\sigma \Delta \rho$*, если заданы на множестве 3N отношения* σ *и* ρ *являются следующими:*

а) $\sigma = \{(3;3),(3;9),(9;9)\}$ и $\rho = \{(6;6),(9;9),(12;12)\}$;

б) $\sigma = \{(x;3+x) \mid x \in 3N\}$ и $\rho = \{(x;6+x) \mid x \in 3N\}$;

в) $\sigma = \varnothing$ и $\rho = i_{3N}$;

г) $\sigma = \omega_{3N}$ и $\rho = \{(x;y) \mid x + y = 12\}$.

15. *Для каких бинарных отношений* $\rho \subseteq X^2$ *справедливо равенство:*

а) $\rho^{-1} = \overline{\rho}$;

б) $\rho = \rho^{-1}$;

в) $\rho \cup \rho^{-1} = \omega_A$;

г) $\rho \cap \rho^{-1} = \varnothing$.

4.4. Задания для самостоятельной работы

1. *Задайте всеми известными способами отношение* α *на множестве* $A = \{5,6,\ldots,10\}$*, если:*

а) $\alpha = \{(9;8),(8;7),(7;6),(6;5)\}$;

б) $\alpha = \{(x;y) \in A \times A \mid y \vdots x\}$;

в) $\alpha = i_A$;

г) $\alpha = \omega_A$.

2. *Задайте матричным и графическим способами бинарное отношение* β *на множестве* $B = \{1,2,\ldots,5\}$*, если:*

а) $\beta = \{(5;4),(4;2),(1;1)\}$;

б) $\beta = \{(x;y) \in B \times B \mid x + y = 5\}$;

в) $\beta = \{(\text{[illegible]};2),(3;5),(6;5)\}$;

г) $\beta = \{(x;y) \in B \times B \mid y = x^2\}$.

3. *Постройте матричным способом и перечислением пар отношение, если оно задано следующим графом:*

а) б)

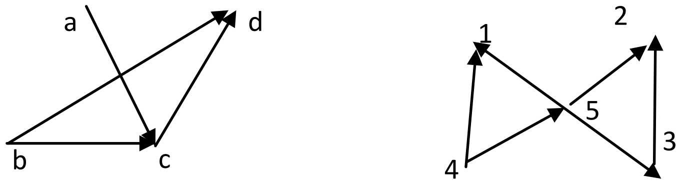


Рис. 4.3.

4. *Постройте графическим способом и перечислением пар отношение на множестве* $F = \{a,b,c,d,e\}$*, если оно задано следующей матрицей:*

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

в) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; г) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

д) $A=\begin{pmatrix}1&0&1&0&1\\0&1&1&1&0\\1&0&1&0&1\\0&1&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}$;   е) $A=\begin{pmatrix}0&0&0&0&0\\1&1&1&1&1\\0&0&1&0&0\\0&1&0&1&0\\1&0&1&0&1\end{pmatrix}$;

ж) $A=\begin{pmatrix}1&0&1&1&1\\1&1&0&1&1\\1&1&1&0&1\\1&1&1&1&0\\0&1&1&1&1\end{pmatrix}$;   з) $A=\begin{pmatrix}0&1&1&1&1\\1&0&1&1&1\\1&1&0&1&1\\1&1&1&0&1\\1&1&1&1&0\end{pmatrix}$.

5. *Найдите дополнение и обратное отношение к отношению:*

а) $\alpha=\{(a;b),(c;d),(f;g)\}$ на множестве $\{a,b,...,g\}$;

б) $\beta=\{(x;y)\in N\times N \mid x\,\vdots\,5y\}$;

в) $\delta=\{(x;y)\in N\times N \mid x+y=11\}$;

г) $\gamma=\{(x;y)\in Z\times Z \mid xy=15\}$;

д) $\lambda=\{(x;y)\in Q\times Q \mid x^2\le y\}$;

е) $\mu=\{(x;y)\in R\times R \mid 3x=7y\}$.

6. *Постройте 3-степень и 5-степень отношения* ρ *на множестве* $2Z+1$*, если:*

а) $\rho=\{(-3;-3),(3;5)\}$;

б) $\rho=\varnothing$;

в) $\rho=\{(1;11)\}$;

г) $\rho=\{(1;3),(3;7),(1;7),(-1;-1)\}$;

д) $\rho=\{(x;y) \mid xy=9\vee xy=-9\}$;

е) $\rho=\{(x;y) \mid -16<xy<16\}$.

7. *Найдите композицию бинарных отношений* $\alpha\circ\beta$, $\beta\circ\alpha$, α^2, β^2 *на множестве 5N, если:*

а) $\alpha = \{(5;5),(5;10),(15;5)\}$ и $\beta = \{(10;10),(20;5)\}$;

б) $\alpha = \{(25;5)\}$ и $\beta = \{(10;15),(5;5)\}$;

в) $\alpha = \varnothing$ и $\beta = \{(5;10),(10;15),(5;15)\}$;

г) $\alpha = \{(10;10),(30;30)\}$ и $\beta = i_{5N}$;

д) $\alpha = \{(35;45),(45;50)\}$ и $\beta = \{(x;y) \mid xy = 100\}$;

е) $\alpha = \{(x;x+5) \mid x \in 5N\}$ и $\beta = \{(x;y) \mid x+y = 25\}$.

8. *Определите, из каких пар состоит ядро отношения* μ *на множестве* $A = \{-3,-2,\ldots,2,3\}$*, если:*

а) $\mu = \varnothing$;

б) $\mu = \{(1;-1),(2;3)\}$;

в) $\mu = i_A \cap \omega_A$;

г) $\mu = i_A \cup \omega_A$;

д) $\mu = \{(x;y) \mid x^3 = y^3\}$;

е) $\mu = \{(x;y) \mid |x| = |y|\}$.

9. *Найдите* $\sigma \cup \rho$, $\sigma \cap \rho$, $\sigma \setminus \rho$, $\sigma \Delta \rho$*, если заданы на множестве Z отношения* σ *и* ρ *являются следующими:*

а) $\sigma = \{(0;-1),(-2;5),(4;4)\}$ и $\rho = \{(2;7),(-5;-6)\}$;

б) $\sigma = \{(x;2+x) \mid x \in Z\}$ и $\rho = \{(x;3-x) \mid x \in Z\}$;

в) $\sigma = \varnothing$ и $\rho = i_Z$;

г) $\sigma = \omega_Z$ и $\rho = \{(x;y) \mid x+y = -5\}$;

д) $\sigma = \{(0;1),(1;-4)\}$ и $\rho = \{(x;y) \mid xy = 0\}$;

е) $\sigma = \{(x;y) \mid 2 \le x+y \le 6, 0 \le x, 0 \le y\}$ и $\rho = \{(5;5)\}$.

10. *Определите, из каких элементов состоит 4-арное отношение* μ *на множестве N, если:*

а) $\mu = \{(a;b;c;d) \mid 1 < a < b < c < d < 7\}$;

б) $\mu = \{(a;b;c;d) \mid 3 \ge a \ge b \ge c \ge d \ge 2\}$;

в) $\mu = \{(a;b;c;d) \mid a+b+c+d < 8\}$;

г) $\mu = \{(a;b;c;d) \mid abcd = 6\}$;

д) $\mu = \{(a;b;c;d) \mid a+b+c+d = 0\}$;

е) $\mu = \{(a;b;c;d) \mid abcd \geq 1\}$.

4.5. Контрольные вопросы

1. Что называют *n*-арным отношением? Бинарным отношением?
2. Как записать, что элемент *x* находится в отношении ρ к элементу *y*?
3. Дайте определение пустого отношения.
4. Приведите пример универсального отношения.
5. Что называют тождественным отношением?
6. Сформулируйте определение обратного отношения к заданному отношению.
7. Будет ли отношение, обратное к тождественному, тождественным?
8. Какими способами можно задать произвольное бинарное отношение?
9. Дайте определение дополнения к отношению.
10. Чем отличается обратное отношение к данному от дополнения к тому же отношению?
11. Поясните в чем сущность матричного способа задания бинарного отношения.
12. Как задать бинарное отношение с помощью графического способа?
13. Будут ли одинаковыми графы тождественного, универсального и пустого отношений?
14. Сформулируйте определение композиции двух бинарных отношений?
15. Существуют ли бинарные отношения, композиция которых является пустым отношением?
16. Что называют степенью отношения?
17. Приведите пример отношения, вторая степень которого является универсальным отношением.
18. Дайте определение ядра бинарного отношения.
19. Как обозначается ядро отношения ρ?

20. Чему равно ядро отношения равенства на любом числовом множестве?

21. Запишите обозначение тождественного отношения.

Тема 5. Свойства бинарных отношений

Ключевые понятия: рефлексивное (антирефлексивное) отношение, симметричное (антисимметричное) отношение, асимметричное отношение, транзитивное (антитранзитивное) отношение, линейное (или связное) отношение, критериальные свойства отношений.

5.1. Краткие теоретические сведения

Пусть $A \neq \varnothing$ и $\rho = A \times A$.

Отношение ρ на множестве A называется **рефлексивным**, если для всех $x \in A$ имеем $(x; x) \in \rho$.

Например, рефлексивными отношениями являются: отношение включения на булеане непустого множества, отношение делимости на множестве целых чисел и т.д.

Отношение ρ на множестве A называется **антирефлексивным**, если для всех $x \in A$ имеем $(x; x) \notin \rho$.

Например, отношение перпендикулярности прямых на множестве прямых, отношение неравенства на некотором числовом множестве - являются антирефлексивными отношениями.

Отношение ρ на множестве A называется **симметричным**, если при любых $x, y \in A$ из условия $(x; y) \in \rho$ следует $(y; x) \in \rho$.

Например, отношение параллельности прямых на множестве прямых, отношение равенства на некотором числовом множестве - являются симметричными.

Отношение ρ на множестве A называется **асимметричным**, если при любых $x, y \in A$ с условия $(x; y) \in \rho$ следует $(y; x) \notin \rho$.

Например, отношение «быть младшим» на множестве всех людей, отношение «$<$» на числовом множестве - являются асимметричными отношениями.

Отношение ρ на множестве A называется **антисимметричным**, если при любых $x, y \in A$ из условий $(x; y) \in \rho$ и $(y; x) \in \rho$ следует, что $x = y$.

Например, отношение делимости на множестве натуральных чисел, отношения полного и частичного порядка ($>$, $<$, $\leq$, $\geq$ и другие) - являются антисимметричными.

Отношение ρ называется **транзитивным**, если при любых $x, y, z \in A$ из условий $(x; y) \in \rho$ и $(y; z) \in \rho$, следует, что $(x; z) \in \rho$.

Например, отношение включения на булеане непустого множества является транзитивным отношением.

Отношение ρ называется **антитранзитивным**, если при любых $x, y, z \in A$ из условий $(x; y) \in \rho$ и $(y; z) \in \rho$, следует, что $(x; z) \notin \rho$.

Например, отношение «несовпадение четности» на множестве целых чисел, отношение «быть отцом» на множестве всех людей - являются антитранзитивными отношениями.

Отношение ρ называется **линейным (связанным)**, если при любых $x, y \in A$ из условия $x \neq y$ следует, что $(x; y) \in \rho$ или $(y; x) \in \rho$.

Например, отношение «$\leq$» на множестве натуральных чисел является линейным отношением.

Критериальные свойства рассмотренных отношений являются следующими:

отношение ρ - рефлексивное $\Leftrightarrow i_A \subseteq \rho$;

отношение ρ - антирефлексивное $\Leftrightarrow i_A \bigcap \rho = \varnothing$;

отношение ρ - симметричное $\Leftrightarrow \rho = \rho^{-1}$;

отношение ρ - антисимметричное $\Leftrightarrow \rho \bigcap \rho^{-1} \subseteq i_A$;

отношение ρ - ассиметричное $\Leftrightarrow \rho \bigcap \rho^{-1} = \varnothing$;

отношение ρ - транзитивное $\Leftrightarrow \rho^2 \subseteq \rho$;

отношение ρ - линейное $\Leftrightarrow \rho \bigcup \rho^{-1} \bigcup i_A = \omega_A$.

5.2. Примеры решения задач

Задача 1. *Задайте на множестве* $A=\{1,2,3\}$ *по два разных отношения каждого типа.*

Решение

рефлексивное – i_A и $\{(1;1),(2;2),(3;3),(3;2),(1;3)\}$;

антирефлексивное – $\{(1;3)\}$ и $\{(3;2),(3;1)\}$;

симметричное – $\{(1;1),(3;3)\}$ и $\{(3;2),(2;3)\}$;

антисимметричное – $\{(2;2),(1;3),(3;3)\}$ и $\{(3;1)\}$;

асимметричное – $\{(2;3),(1;3)\}$ и $\{(1;2)\}$;

транзитивное – $\{(2;2),(3;3)\}$ и $\{(1;2),(2;3),(1;3)\}$;

линейное – $\{(1;2),(3;2),(1;3),(2;1)\}$ и $\{(2;3),(1;3),(1;2),(2;2)\}$.

Задача 2. *Определите, какие свойства имеет отношение:*

а) $\alpha=\{(4;4),(6;5),(6;7)\}$ на множестве $B=\{4,5,6,7\}$.

б) $\beta=\{(x;y)\in N\times N \mid (x-y)\vdots 3\}$.

Решение

а) Отношение α:

– не является рефлексивным, поскольку $(6;6),(7;7)\notin\alpha$,

– не является антирефлексивным, поскольку $(4;4),(6;5)\in\alpha$,

– не является симметричным, поскольку $(7;6)\notin\alpha$,

– является антисимметричным,

– не является асимметричным, поскольку, например, $(4;4)\in\alpha$,

– является транзитивным и не является линейным, поскольку, например, $(4;7)\notin\alpha$.

б) $\forall x\in N \quad x-x=0\vdots 3$, следовательно $(x;x)\in\beta$, тогда β - рефлексивное отношение. Очевидно, что отношение β не антирефлексивное.

$\forall x,y\in N$

$(x;y)\in\beta \Rightarrow (x-y)\,\vdots\,3 \Rightarrow -(x-y)\,\vdots\,3 \Rightarrow (y-x)\,\vdots\,3$.

Следовательно, $(y;x)\in\beta$ и β - симметричное отношение.

Очевидно, что β не является асимметричным отношением.

Отношение β не антисимметричное, поскольку, например, $(3;6)\in\beta$, $(6;3)\in\beta$, но $3\neq 6$.

$\forall x,y,z\in N$

$(x;y)\in\beta \,\&\, (y;z)\in\beta \Rightarrow (x-y)\,\vdots\,3 \,\&\, (y-z)\,\vdots\,3$.

Тогда $((x-y)+(y-z))\,\vdots\,3$, то есть $(x-z)\,\vdots\,3$. Следовательно, $(x;z)\in\beta$ и β - транзитивное отношение.

Отношение β не линейное, поскольку, например, $2\neq 3$ и $(2;3)\notin\beta \,\&\, (3;2)\notin\beta$.

Задача 3. *Докажите, если* α, β *антисимметричные отношения на множестве X, то антисимметричным также являются:*

а) отношение $\alpha\cap\beta$.

б) отношение α^{-1}.

Решение

а) Пусть $(x;y)\in\alpha\cap\beta \,\&\, (y;x)\in\alpha\cap\beta$. Тогда по определению пересечения множеств имеем:

$(x;y)\in\alpha \,\&\, (x;y)\in\beta \,\&\, (y;x)\in\alpha \,\&\, (y;x)\in\beta$, то есть $(x;y)\in\alpha \,\&\, (y;x)\in\alpha \,\&\, (x;y)\in\beta \,\&\, (y;x)\in\beta$, откуда $x=y$. Следовательно, $\alpha\cap\beta$ является антисимметричным.

б) Пусть $(x;y)\in\alpha^{-1} \,\&\, (y;x)\in\alpha^{-1}$. Тогда по определению обратного отношения имеем: $(y;x)\in\alpha \,\&\, (x;y)\in\alpha$, откуда $x=y$.

Таким образом, α^{-1} - антисимметричное отношение.

Задача 4. *Постройте (если это возможно) на множестве N отношение с соответствующими свойствами:*

а) рефлексивное, симметричное, нетранзитивное;

б) антирефлексивное, асимметричное, транзитивное.

Решение

а) Например, таким отношением будет $\alpha = i_N \cup \{(1;5), (5;1), (5;10), (10;5)\}$.

Отношение α нетранзитивно, поскольку $(1;10) \notin \alpha$.

б) Например, отношение $\beta = \{(3;4),(4;5),(3;5)\}$ – антирефлексивно, асимметрично и транзитивно.

Задача 5. *Докажите критериальное свойство симметрического отношения.*

Доказательство

Пусть $\rho \subseteq A \times A$ - симметричное отношение и $(x;y) \in \rho$. Тогда $(y;x) \in \rho$, откуда $(x;y) \in \rho^{-1}$. Следовательно, $\rho \subseteq \rho^{-1}$. Наоборот, если $(x;y) \in \rho^{-1}$, тогда $(y;x) \in \rho$. Отсюда, $(x;y) \in \rho$ и $\rho^{-1} \subseteq \rho$. Это означает, что $\rho = \rho^{-1}$.

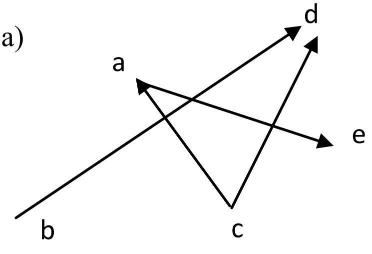
Пусть отношение $\rho \subseteq A \times A$ такое, что $\rho = \rho^{-1}$. Тогда для всех $x, y \in A$ из условия $(x;y) \in \rho$ следует $(y;x) \in \rho$, что и доказывает симметричность отношения ρ.

5.3. Основные типовые задачи для практической работы

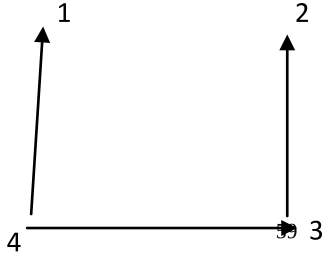
1. *Задайте на множестве* $X = \{a,b,c,d,e\}$ *по два разных отношения каждого типа.*

2. *Определите, какие свойства имеет отношение, которое задано графом:*

а)



б)



в)

о6 о7

о8 о9

г)

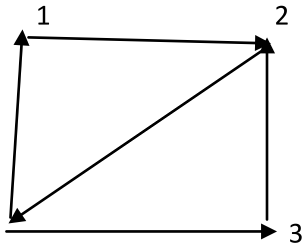


Рис.5.2

3. *Какие свойства имеет отношение, заданное следующей матрицей:*

а) $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$; б) $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$; в) $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&0\\1&1&1\end{pmatrix}$;

г) $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$; д) $A=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$; е) $A=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$;

ж) $A=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&0&1\\1&1&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}$; з) $A=\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&1&0\\0&1&1&0\\1&0&0&1\end{pmatrix}$.

4. *Определите, какие свойства имеет отношение:*

а) $\alpha=\{(1;a),(2;b),(c;3)\}$ на $A=\{1,2,3,a,b,c\}$;

б) $\beta=\{(x;y)\in Z\times Z \mid x\neq y\}$;

в) $\delta=\{(x;y)\in N\times N \mid xy=x+y\}$;

г) $\lambda=\{(x;y)\in Z\times Z \mid x\,\vdots\, y\}$;

д) $\rho=\{(x;y)\in N\times N \mid (x-y)\,\vdots\, 5\}$;

е) $\sigma=\{(x;y)\in R\times R \mid |x|\neq|y|\}$.

5. *Докажите, что когда* α, β *- рефлексивные отношения на множестве X, то рефлексивными являются также отношения:*

а) $\alpha \bigcap \beta$;

б) $\alpha \bigcup \beta$;

в) $\alpha^{-1} \bigcap \beta^{-1}$;

г) $\alpha^{-1} \bigcup \beta^{-1}$.

6. *Постройте (если это возможно) на множестве Q следующее отношение:*

а) рефлексивное, асимметричное, транзитивное;

б) антирефлексивное, симметричное, транзитивное;

в) линейное, асимметричное, нетранзитивное;

г) нерефлексивное, антисимметричное, транзитивное;

д) линейное, антирефлексивное, симметричное;

е) нетранзитивное, нелинейное, рефлексивное.

7. *Сколько существует бинарных отношений на множестве A, где* $|A| = n$, *которые имеет свойство:*

а) рефлексивности и симметричности;

б) симметричности;

в) антирефлексивности;

г) антисимметричности.

8. *Приведите пример бинарного отношения на Z, которое:*

а) является симметричным и антисимметричным;

б) не является ни симметричным, ни антисимметричным;

в) является симметричным, но не является антисимметричным;

г) не является симметричным, но является антисимметричным.

9. *Проверьте, будет ли отношение, которое является симметричным и антисимметричным, – транзитивным?*

10. *Докажите критериальное свойство:*

а) рефлексивного отношения;

б) асимметричного отношения;

в) транзитивного отношения;

г) антисимметричного отношения.

11. *Определите, какие свойства имеет отношение:*

а) параллельность прямых на плоскости;

б) перпендикулярность прямых на плоскости;

в) равенства множеств на булеане;

г) подобие треугольников.

12. *Пусть* ρ *– рефлексивное и транзитивное отношение. Для каких* $n \in N$ *выполняется равенство* $\rho^n = \rho$.

13. *Задайте графическим способом отношение, которое задано следующей матрицей:*

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; в) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$;

г) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; д) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

14. *Пусть отношения* $\rho, \sigma \subseteq X \times X$ *имеют свойства* $\Re$. *Определите, имеет ли свойство* $\Re$ *отношения* $\rho \bigcup \sigma$, $\rho \bigcap \sigma$, $\overline{\rho}$, σ^{-1}, $\rho \setminus \sigma$, $\rho \circ \sigma$, $\rho^n (n \in N)$, *если* $\Re$ *– это:*

а) свойство рефлективности;

б) свойство антирефлексивности;

в) свойство симметричности;

г) свойство асимметричности;

д) свойство антисимметричности;

е) свойство транзитивности.

15. *Проверьте правильность следующих рассуждений:*

Если ρ - симметричное и транзитивное отношение, то из условия $\langle x; y \rangle \in \rho$ по определению симметричности следует $\langle y; x \rangle \in \rho$. Отсюда, из транзитивности отношения ρ, из условий $\langle x; y \rangle \in \rho$ и $\langle y; x \rangle \in \rho$ получаем $\langle x; x \rangle \in \rho$. Следовательно, отношение ρ - рефлексивное отношение.

5.4. Задания для самостоятельной работы

1. *Определите, какие свойства имеет отношение ρ на множестве всех людей, если:*

а) $(x; y) \in \rho \Leftrightarrow x$ ниже ростом, чем y;

б) $(x; y) \in \rho \Leftrightarrow x$ и y родились в один день;

в) $(x; y) \in \rho \Leftrightarrow x$ и y являются знакомыми;

г) $(x; y) \in \rho \Leftrightarrow x$ тяжелее, чем y.

2. *Найдите на множестве* $X = \{2, 4, 6, \ldots, 30\}$ *по три разных отношения каждого типа.*

3. *Какие свойства имеет отношение, которое задано следующей матрицей:*

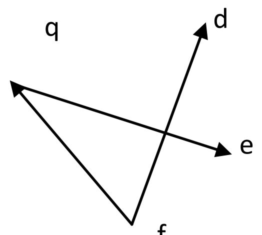
а) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; в) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$;

г) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; д) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; е) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;

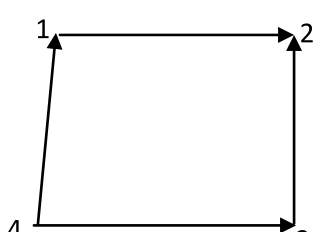
ж) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; з) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

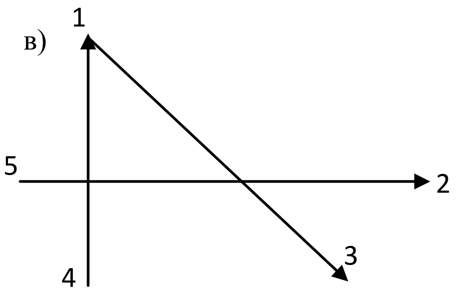
4. *Определите, какие свойства имеет отношение, заданное следующим графом:*

а)



б)





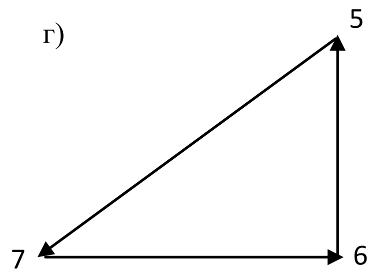


Рис.5.2

5. *Установите, какие свойства имеет отношение*:

а) $\alpha = \{(q;w),(e;r),(t;y)\}$ на $A = \{a,b,c,...,z\}$;

б) $\beta = \{(x;y) \in Z \times Z \mid x^3 = y^3\}$;

в) $\delta = \{(x;y) \in N \times N \mid НОД(x;y) = 1\}$;

г) $\lambda = \{(x;y) \in Z \times Z \mid |x - y| = 5\}$;

д) $\rho = \{(x;y) \in Q \times Q \mid (y - x) \vdots 7\}$;

е) $\sigma = \{(x;y) \in N \times N \mid НОК(x;y) = xy\}$;

ж) $\mu = \{(x;y) \in R \times R \mid xy > 1 \,\&\, y > 0\}$.

6. *Пусть отношения* $\rho, \sigma \subseteq X \times X$ *имеют свойства* $\Re$. *Определите, имеет ли свойство* $\Re$ *отношения* $\rho \bigcup \sigma$, $\rho \bigcap \sigma$, $\overline{\rho}$, σ^{-1}, $\rho \setminus \sigma$, $\rho \circ \sigma$, $\rho^n (n \in N)$, *если:*

а) $\Re$ – это свойство антитранзитивности;

б) $\Re$ – это свойство линейности.

7. Докажите критериальное свойство:

а) антирефлексивного отношения;

б) линейного отношения;

в) симметричного отношения.

8. *Постройте (если это возможно) на множестве Z следующее отношение:*

а) рефлексивное, нелинейное, транзитивное;

б) антирефлексивное, симметричное, антитранзитивное;

в) линейное, неасимметричное, нетранзитивное;

г) рефлексивное, неантисимметричное, транзитивное;

д) нелинейное, асимметричное, рефлексивное;

9. *Найдите композицию отношений* ρ *и* σ*, если они определены на множестве* $A = \{1,2,3,4,5\}$ *и заданы графически:*

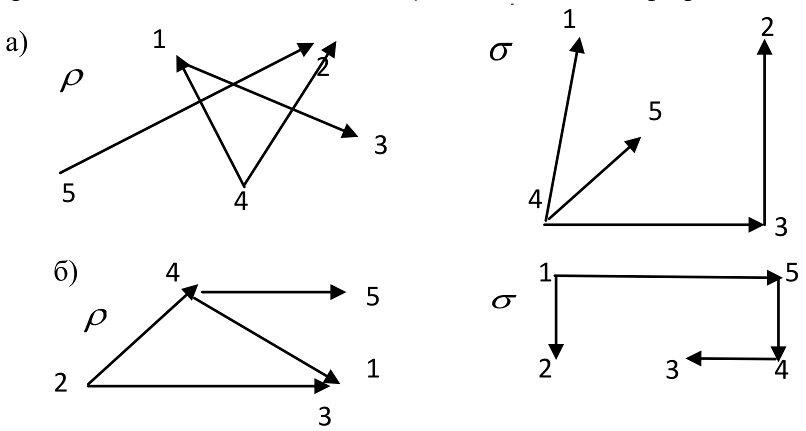


Рис.5.3

10. *Укажите необходимые и достаточные условия, по которым бинарное отношение* $\rho \subseteq X \times X$ *является антитранзитивным.*

5.5. Контрольные вопросы

1. Что называют рефлексивным бинарным отношением? Антирефлексивным отношением?

2. Чем отличаются рефлексивное отношение от антирефлексивного отношения?

3. Определите симметричное отношение.

4. Сформулируйте определения асимметричного и антисимметричного отношений. Чем они отличаются между собой и от симметричного отношения?

5. Приведите примеры рефлексивного, антирефлексивного, симметричного, асимметричного и антисимметричного отношений.

6. Существует ли бинарное отношение, которое является одновременно как рефлексивным, так и антирефлексивным?

7. Что называют транзитивным бинарным отношением? Что называют антитранзитивным отношением?

8. Приведите примеры транзитивного и антитранзитивного отношений.

9. Дайте определение линейного отношения. Приведите примеры линейных отношений.

10. Существует ли бинарное отношение, которое является одновременно транзитивным и антитранзитивным?

11. Поясните критериальные свойства бинарных отношений.

12. Будет ли отношение, обратное к рефлексивному отношению, рефлексивным?

13. Запишите пример бинарного отношения, которое одновременно является как симметричным, так и антисимметричным.

14. Сколько существует бинарных отношений на n-элементном множестве, которые имеют свойство симметричности; антирефлексивности?

15. Сформулируйте критериальное свойство для транзитивного отношения.

16. Каким является критериальное свойство для симметричного отношения?

Тема 6. Отношение эквивалентности и порядка

Ключевые понятия: отношение эквивалентности, класс эквивалентности, фактор-множество, разбиение, квазипорядок, частичный порядок, линейный порядок, квазиупорядоченное множество, цепь, максимальный (минимальный) элемент, наибольший (наименьший) элемент.

6.1. Краткие теоретические сведения

Бинарное отношение называется **отношением эквивалентности** (или **эквивалентностью**), если оно является рефлексивным, симметричным и транзитивным.

Разбиением множества *X* называется совокупность подмножеств X_i, $i \in I$ множества *X* таких, что $X_i \neq \varnothing$ для каждого $i \in I$, $X = \bigcup_{i \in I} X_i$ и $X_i \bigcap X_j = \varnothing$ для всех $i, j \in I$, $i \neq j$.

Пусть ρ – отношение эквивалентности на множестве *X* и $x \in X$. Подмножество элементов $y \in X$ таких, что $(x, y) \in \rho$ называют **классом эквивалентности** элемента *x* и обозначают через $[x]\rho$, то есть

$$[x]\rho = \{y \in X \mid (x; y) \in \rho\}.$$

Для эквивалентности ρ выполняются следующие свойства:

– $[x]\rho \neq \varnothing$ при любом $x \in X$;

– $(a;b) \in \rho \Rightarrow [a]\rho = [b]\rho$ для всех $a, b \in X$;

– $(a;b) \notin \rho \Rightarrow [a]\rho \bigcap [b]\rho = \varnothing$ для всех $a, b \in X$.

Из приведенных свойств, следует, что каждая эквивалентность ρ на множестве *X* определяет разбиение множества *X*.

Множество всех классов эквивалентности отношения ρ называется **фактор-множеством** множества *X* по эквивалентности ρ и обозначаются через X / ρ.

Таким образом, $X/\rho = \{\bar{x}_\rho \mid x \in X\}$.

Квазипорядком на множестве X называется бинарное отношение, которое является рефлексивным и транзитивным.

Множество X с определенным на нем квазипорядком $\lhd$ называется **квазиупорядоченным** и обозначается как $(X,\lhd)$.

Частичным порядком на множестве X называется отношение квазипорядка, которое является антисимметричным.

Квазиупорядоченное множество $(X,\lhd)$ называется **упорядоченным,** если отношение $\lhd$ является частичным порядком.

Пусть $(X,\lhd)$ – упорядоченное множество. Элемент $x \in X$ называется **минимальным (максимальным),** если не существует элементов $y \in X$ таких, что $y \neq x,\ \ y \lhd x$ $(y \neq x,\ \ x \lhd y)$.

Элемент $x \in X$ называется **наименьшим (наибольшим),** если для каждого $y \in X$ имеем $x \lhd y$ $(y \lhd x)$.

Упорядоченное множество $(X,\lhd)$ называется **цепью** (или **линейно упорядоченным**), если отношение порядка $\lhd$ является линейным.

Если отношение порядка $\lhd$ на множестве X не является связным, то систему $(X,\lhd)$ называют **нелинейно упорядоченным множеством.**

6.2. Примеры решения задач

Задача 1. *Будет ли эквивалентностью отношение:*

а) $\rho = \{(x;y) \in N \times N \mid (x-y) \vdots 2\}$.

б) $\sigma = \{(x;y) \in Z \times Z \mid x \neq 2y\}$.

Решение

а) По определению эквивалентности имеем:

$\forall x \in X \quad x - x = 0 \vdots 2,$ значит, $(x;x) \in \rho,$

$\forall x, y \in N \quad (x;y) \in \rho \Rightarrow (x-y) \vdots 2 \Rightarrow (y-x) \vdots 2 \Rightarrow (y,x) \in \rho,$

$\forall x, y, z \in N \quad (x;y) \in \rho \,\&\, (y;z) \in \rho \Rightarrow (x-y) \vdots 2 \,\&\, (y-z) \vdots 2.$

Тогда $((x-y)+(y-z)) \vdots 2 \Rightarrow (x-z) \vdots 2.$

Таким образом, $(x;z) \in \rho$.

б) Отношение σ не является рефлексивным, поскольку $(0;0)\notin\sigma$. Это означает, что σ не будет и эквивалентностью.

Задача 2. *Найдите все разбиения множества* $X=\{a,b,c\}$ *и соответствующие им эквивалентности.*

Решение

Согласно определению разбиения множества, имеем:

$D_1=\{\{a\},\{b\},\{c\}\}$, $D_2=\{\{a,b\},\{c\}\}$, $D_3=\{\{a\},\{b,c\}\}$,

$D_4=\{\{b\},\{a,c\}\}$, $D_5=\{X\}$.

Если $\rho(D_i)$ – отношение эквивалентности, которое соответствует разбиению D_i, $1\le i\le 5$, то $\rho(D_1)=i_x$, $\rho(D_2)=i_x\bigcup\{(a;b),(b;a)\}$, $\rho(D_3)=i_x\bigcup\{(c;b),(b;c)\}$, $\rho(D_4)=i_x\bigcup\{(a;c),(c;a)\}$, $\rho(D_5)=\omega_x$.

Задача 3. *Постройте фактор-множество множества Z по эквивалентности* $\alpha=\{(x;y)\in Z\times Z\,|\,x^2=y^2\}$.

Решение

Пусть $x=0$, тогда $[0]\rho=\{0\}$. Если $0\neq x\in Z$, то $[x]\rho=\{x,-x\}$. То есть, $Z/\alpha=\{\{0\}\}\bigcup\{\{x,-x\}\,|\,x\in Z,\ x\neq 0\}$.

Задача 4. *Докажите, что* $(U(X),\subseteq)$ *является упорядоченным множеством и найдите его наибольший (наименьший) элемент.*

Решение

Для всех $A,B,C\in U(X)$ имеем:

$A\subseteq A$, значит, $\subseteq$ - рефлексивное;

$A\subseteq B\,\&\,B\subseteq C\Rightarrow A\subseteq C$ – транзитивное;

$A\subseteq B\,\&\,B\subseteq A\Rightarrow A=B$ – антисимметричное.

Таким образом, $(U(X),\subseteq)$ является упорядоченным множеством.

Поскольку $\varnothing\subseteq D\subseteq X$ для каждого $D\in U(X)$, то пустое множество $\varnothing$ является наименьшим, а X – наибольшим элементом $(U(X),\subseteq)$.

Задача 5. *Убедитесь, что для любой эквивалентности* $\rho\subseteq X\times X$ *и всех* $a,b\in X$ *имеет место условие:*

$$(a;b)\notin\rho\Rightarrow[a]\rho\bigcap[b]\rho=\varnothing.$$

Решение

Допустим, что существуют $a,\ b\in X$ такие, что $(a;b)\notin\rho$ и $[a]\rho\bigcap[b]\rho\neq\varnothing$. Значит, найдется $x\in X$ для которого $x\in[a]\rho\bigcap[b]\rho$. Отсюда, $x\in[a]\rho$ и $x\in[b]\rho$, то есть $(x;a)\in\rho\,\&\,(x;b)\in\rho$. Тогда по симметричности ρ, $(a,x)\in\rho$, что вместе с условием $(x;b)\in\rho$ дает $(a;b)\in\rho$. Это противоречит предположению. Следовательно, $[a]\rho\bigcap[b]\rho=\varnothing$.

6.3. Основные типовые задачи для практической работы

1. *Постройте три эквивалентности на множестве:*

а) $X=\{1,2,3\}$;

б) $X=\{4,5,6,7\}$;

в) $X=\{a,b,c,...,z\}$;

г) $X=\{(u;v),+,\{t\}\}$.

2. *Докажите, что эквивалентностью есть отношение:*

а) $\alpha=\{(x;y)\in N\times N\,|\,(x-y)\vdots 13\}$;

б) $\beta=\{(x;y)\in Z\times Z\,|\,x^2=y^2\}$;

в) $\gamma=\{(x;y)\in N\times N\,\|\,x-5|=|y-5|\}$;

г) $\lambda=\{(x;y)\in Q\times Q\,|\,x=y\}$.

3. *Найдите все разбиения множества Y и соответствующие им эквивалентности, если:*

а) $Y=\{1,2,3\}$;

б) $Y=\{a,b,c,d\}$;

в) $Y=\{\{f,g\},h\}$;

г) $Y=\{5,4,3,2,1\}$.

4. *Постройте фактор-множество по эквивалентности:*

а) $\alpha=\{(x;y)\in N\times N\,|\,(x-y)\vdots 7\}$;

б) $\beta=\{(x;y)\in Z\times Z\,|\,x^3=y^3\}$;

в) $\gamma=\{(x;y)\in N\times N\,\|\,3-x|=|3-y|\}$;

г) $\lambda=\{(x;y)\in Q\times Q\,|\,-x=-y\}$.

5. *Докажите, что для каждой эквивалентности* $\rho \subseteq X \times X$ *и всех* $u, v \in X$ *имеют место условия:*

а) $[u]\rho \neq \varnothing$;

б) $(u;v) \in \rho \Rightarrow [u]\rho = [v]\rho$;

в) $[u]\rho \bigcap [v]\rho = \varnothing \Rightarrow (u;v) \notin \rho$;

г) $[u]\rho = [v]\rho \Rightarrow (u;v) \in \rho$.

6. *Постройте три примера отношения порядка на множестве X, если:*

а) $X = \{3, 2, 1\}$;

б) $X = \{4, 3, 2, 1\}$;

в) $X = \{z, y, x, ..., a\}$;

г) $X = \{(q;w), -, \{s\}\}$.

7. *Проверьте, являются ли частичным порядком отношения:*

а) $\alpha = \{(x;y) \in N \times N \mid x \vdots y\}$;

б) $\beta = \{(x;y) \in 2N \times 2N \mid x^2 = y^2\}$;

в) $\gamma = \{(x;y) \in Z \times Z \mid x \geq y\}$;

г) $\lambda = \{(x;y) \in Q \times Q \mid x + 10 = y + 10\}$.

8. *Пусть* α, β *– частичные порядки на множестве X. Являются ли частичным порядком отношения:*

а) $\overline{\alpha}$;

б) α^{-1};

в) $\alpha \bigcup \beta$;

г) $\alpha \bigcap \beta$.

9. *Проверьте, является ли цепью:*

а) $(N, \leq)$;

б) $(Z, \vdots)$;

в) $(U(X), \subseteq)$;

г) $(A = \{2^n \mid n \in N\}, \vdots)$.

10. *Приведите пример упорядоченного множества:*

а) с наименьшим и наибольшим элементом;

б) с наименьшим элементом, но без наибольшего;

в) без наименьшего элемента, но с наибольшим;

г) без наименьшего и наибольшего элемента.

11. *Пусть X – конечное множество. Какое отношение эквивалентности на X дает:*

а) наибольшее количество классов эквивалентности;

б) наименьшее количество классов эквивалентности.

12. *Определите количество классов эквивалентности* ρ *и мощности этих классов, если:*

а) ρ – отношение равенства на произвольном множестве;

б) ρ – универсальное отношение на произвольном множестве;

в) ρ – отношение подобия треугольников;

г) ρ – отношение «иметь один и тот же остаток при делении двух натуральных чисел на 5».

13. *Пусть* $A, B \subseteq \bigcup$ *такие, что* $A \cap B \neq \varnothing$. *Докажите, что разбиением универсума U является множество:*

а) $\{A, \overline{A}\}$;

б) $\{A \bigcup B, \overline{A} \bigcap \overline{B}\}$;

в) $\{A \setminus B, A \bigcap B, B \setminus A\}$;

г) $\{A \bigcap B, A \bigcap \overline{B}, \overline{A} \bigcap B, \overline{A} \bigcap \overline{B}\}$

14. *Приведите пример упорядоченного множества:*

а) с 2 максимальными и 2 минимальными элементами;

б) с 2 максимальными и без минимальных элементов;

в) без максимальных элементов и с 3 минимальными;

г) без максимальных и минимальных элементов.

15. *Какие из приведенных матриц задают отношение порядка или отношение эквивалентности:*

а) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; в) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$;

г) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; д) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; е) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;

ж) $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; з) $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

6.4. Задания для самостоятельной работы

1. *Постройте бинарное отношение на множестве $X=\{1,2,...,5\}$, которое:*

а) является эквивалентностью и частичным порядком;

б) является эквивалентностью, но не является частичным порядком;

в) является частичным порядком, но не является эквивалентностью;

г) не является ни эквивалентностью, ни частичным порядком.

2. *Определите, являются ли эквивалентностью отношения:*

а) $\alpha=\{(x;y)\in N\times N \mid (y-x)\,\vdots\,17\}$;

б) $\beta=\{(x;y)\in Z\times Z \mid x^5=y^5\}$;

в) $\gamma=\{((a;b),(c;d))\in R^2\times R^2 \mid a+d=b+c\}$;

г) $\lambda=\{((a;b),(c;d))\in R^2\times R^2 \mid ad=bc\}$.

3. *Найдите все разбиения множества Y и соответствующие им эквивалентности, если:*

а) $Y=\{1\}$;

б) $Y=\{\{a;b\},\{c;d\}\}$;

в) $Y=\{!,+,?,=\}$;

г) $Y=\{i,c,q\}$.

4. *Постройте фактор-множество по эквивалентности:*

а) $\alpha=\{(x;y)\in N\times N \mid (-y+x)\,\vdots\,23\}$;

б) $\beta=\{(x;y)\in Z\times Z \mid x^{10}=y^{10}\}$;

в) $\gamma=\{(x;y)\in N\times N \mid (x+1)^2=(y+1)^2\}$;

г) $\lambda=\{((a;b),(c;d))\in R^2\times R^2 \mid a+d=b+c\}$.

5. *Определите, является ли частичным порядком отношение:*

а) $\alpha = \{(x;y) \in N \times N \mid y \vdots x\}$;

б) $\beta = \{(x;y) \in Q \times Q \mid xy \geq 0\}$;

в) $\gamma = \{((a;b),(c;d)) \in R^2 \times R^2 \mid a+d \leq b+c\}$;

г) $\lambda = \{((a;b),(c;d)) \in R^2 \times R^2 \mid a \leq c \,\&\, b \leq d\}$.

6. *Пусть* α, β *– эквивалентности на множестве X. Является ли эквивалентностью отношения:*

а) $\overline{\alpha}$;

б) α^{-1};

в) $\alpha \bigcup \beta$;

г) $\alpha \bigcap \beta$.

7. *Докажите, что любому разбиению множества X соответствует отношение эквивалентности на X.*

8. *Какие из приведенных матриц задают отношение порядка или отношение эквивалентности:*

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; в) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$;

г) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; д) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; е) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

ж) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; з) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

9. *Проверьте, является ли цепью:*

а) (N, ρ), где $(x;y) \in \rho \Leftrightarrow x \geq y$;

б) (Z, σ), где $(x;y) \in \sigma \Leftrightarrow x \vdots y \,\&\, y \vdots x$;

в) $(U(X), \lambda)$, где $(A;B) \in \lambda \Leftrightarrow A \subseteq B, A \neq B$;

г) $(G = \{5^n \mid n \in N\}, \gamma)$, где $(5^x; 5^y) \in \gamma \Leftrightarrow 5^y \vdots 5^x$.

10. *Определите количество классов эквивалентности и мощности этих классов:*

а) $\alpha=\{(x;y)\in N\times N \mid (y-x)\vdots 5\}$;

б) $\beta=\{(x;y)\in Z\times Z \mid x^{2k}=y^{2k}\}, k\in N$;

в) $\gamma=\{(A;B)\in U(X)\times U(X) \mid |A|=|B|\}$;

г) $\lambda=\{((a;b),(c;d))\in R^2\times R^2 \mid a+d=b+c\}$.

6.5. Контрольные вопросы

1. Что такое эквивалентность? Приведите примеры эквивалентностей.
2. Как определяется класс эквивалентности, который порождается некоторым элементом?
3. Может ли класс эквивалентности быть пустым множеством?
4. Определите разбиение множества.
5. Сколько разных разбиений имеет множество, которое состоит из четырех элементов?
6. Существует ли множество, мощность которого совпадает с мощностью всех разбиений этого множества?
7. Какая связь существует между множеством всех эквивалентностей и множеством всех разбиений заданного множества?
8. Что такое фактор-множество?
9. Как определяется фактор-множество?
10. Приведите примеры фактор-множеств.
11. Сформулируйте определение отношения квазипорядка.
12. Что такое квазиупорядоченное множество?
13. Как определяется частичный порядок? Частично упорядоченное множество?
14. Приведите примеры отношений квазипорядка, частичного порядка.
15. Существует ли отношение квазипорядка, которое не является частичным порядком?
16. Определите понятие минимального и максимального элементов упорядоченного множества.

17. Что такое наименьший и наибольший элемент упорядоченного множества?

18. Чем отличается минимальный (максимальный) элемент от наименьшего (наибольшего)?

19. Сформулируйте определение цепи и нелинейно упорядоченного множества. Приведите примеры.

Тема 7. Функциональные отношения, отображения

Ключевые понятия: функциональное отношение, область определения, область значений, отображение, образ множества, прообраз множества, обратное отображение, график отношения, инъекция, сюръекция, биекция, критериальные свойства отображений, композиция отображений.

7.1. Краткие теоретические сведения

Областью определения отношения $\rho \subseteq A \times B$ называется множество

$$Dom\rho = \{x \in A \mid \exists y \in B : (x; y) \in \rho\},$$

а **областью значений –**

$$\mathrm{Im}\,\rho = \{y \in B \mid \exists x \in A : (x; y) \in \rho\}.$$

Отношение $\rho \subseteq A \times B$ называется **функциональным,** если для каждого элемента $x \in Dom\rho$ существует единственный $y \in B$, такой, что $(x; y) \in \rho$.

Функциональное отношение $\rho \subseteq A \times B$ называется **функцией** (или **отображением**), если $Dom\rho = A$.

С другой стороны, считается, что задано **отображение** *f* из множества *A* во множество *B,* если по некоторому правилу каждому $x \in A$ поставлен в соответствие однозначно определенный элемент $y \in B$. Обозначение – $f : A \to B$.

Множество всех функциональных отношений на множествах *A* и *B* обозначается через $Fun(A; B)$, а множество всех отображений из *A* во множество *B* – через $Map(A; B)$.

Если элементу $x \in A$ поставлено в соответствие $y \in B$ при отображении *f*, то это обозначают как $f(x) = y$.

Для $X \subseteq A$ множество $f(X) = \{b \in B \mid \exists a \in X : f(a) = b\}$ называется **образом множества** *X*. Очевидно, что $f(A) = \mathrm{Im}\, f$.

Если $Y \subseteq B,$ то множество $f^{-1}(B) = \{a \in A \mid f(a) \in B\}$ называется **прообразом множества** *B*. Понятно, что

$f^{-1}\ \ B\ \ = Domf$.

Графиком отображения $f:A\to B$ называется совокупность упорядоченных пар $(a;f(a))$ в декартовом произведении $A\times B$ множеств A и B.

Отображение $f:A\to B$ называется **инъективным** (или **инъекцией**), если для всех $x,y\in A$ из условия $x\neq y$ следует, что $f(x)\neq f(y)$.

Отображение $f:A\to B$ называется **сюръективным** (или **сюръекцией**), если для каждого $y\in B$ существует $x\in A$ такой, что $f(x)=y$.

Отображение $f:A\to B$ называется **биективным** (или **биекцией**), если f является инъективным и сюръективным.

Пусть A, B – конечные множества. **Критериальные условия** инъективности, сюръективности и биективности отображений:

отображение $f:A\to B$ – инъекция $\Rightarrow |A|\leq|B|$;

отображение $f:A\to B$ – сюръекция $\Rightarrow |A|\geq|B|$;

отображение $f:A\to B$ – биекция $\Rightarrow |A|=|B|$.

Обратным отображением к инъекции $f:A\to B$ называется отображение $f^{-1}:\operatorname{Im}f\to A$, которое определяется условием: $f^{-1}(b)=a\Leftrightarrow f(a)=b$ для каждого $b\in\operatorname{Im}f$.

Композицией отображений $f:A\to B$ и $g:B\to C$ называется отображение $fg:A\to C:x\mapsto x(fg)=(xf)g$.

7.2. Примеры решения задач

Задача 1. *Найдите область определения и область значений отношения:*

а) $\alpha=\{(1;2),(2;3),(1;4)\}$ на множестве $X=\{1,2,...,9\}$.

б) $\beta=\{(x;y)\in N\times N\mid x\,\vdots\,y\ \&\ y=5\}$.

Решение

а) Очевидно, что $Dom\alpha=\{1,2\}$, $\operatorname{Im}\alpha=\{2,3,4\}$.

б) В этом случае, $Dom\alpha = 5N$, $\mathrm{Im}\alpha = \{5\}$.

Задача 2. *Определите, является ли функциональным отношение:*

а) $\alpha = \{(3;2),(5;3),(3;4)\}$ на множестве $X = \{1,2,...,9\}$.

б) $\beta = \{(x;y) \in N \times N \mid y - x = 3\}$.

Решение

а) Нет, поскольку для $3 \in Dom\alpha = \{3;5\}$ существуют два разных элемента $2,4 \in \mathrm{Im}\alpha = \{2,3,4\}$ таких, что $(3;2),(3;4) \in \alpha$.

б) Да, потому что для всех $x \in Dom\beta = N$ существует единственный элемент $(x+3) \in N$, для которого $(x+3) - x = 3$.

Задача 3. *Постройте множество* $Fun(A;B)$, *если:*

а) $A = \{1\}, B = \{2\}$.

б) $A = \{1,2\}, B = \{3;4\}$.

Решение

а) Очевидно, $Fun(A;B) = \{\alpha\}$, где $\alpha = \{(1;2)\}$.

б) Функциональными являются отношения:

$\rho_1 = \{(1;3)\}$, $\rho_2 = \{(1;4)\}$, $\rho_3 = \{(2;3)\}$, $\rho_4 = \{(2;4)\}$,

$\rho_5 = \{(1;3),(2;3)\}$, $\rho_6 = \{(1;3),(2;4)\}$,

$\rho_7 = \{(1;4),(2;3)\}$, $\rho_8 = \{(1;4),(2;4)\}$.

То есть, $Fun(A;B) = \{\rho_1, \rho_2, ..., \rho_8\}$.

Задача 4. *Из каких элементов состоит множество* $Map(X;Y)$, *если:*

а) $X = \{a\}$, $Y = \{b\}$.

б) $X = \{a,b\}$, $Y = \{c,d\}$.

Решение

а) Очевидно, $Map(X;Y) = \{\rho\}$, где $\rho = \{(a;b)\}$.

б) Отображения задают такие отношения:

$\rho_1 = \{(a;c),(b;c)\}$, $\rho_2 = \{(a;c),(b;d)\}$,

$\rho_3 = \{(a;d),(b;c)\}$, $\rho_4 = \{(a;d),(b;d)\}$.

То есть, $Map(X;Y) = \{\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4\}$.

Задача 5. *Установите, являются ли инъекцией, сюръекцией или биекцией отображения:*

а) $\varphi: R \to R:\ x \mapsto x\varphi = x^2$.

б) $\psi: N \to N:\ x \mapsto x\psi = x+1$.

в) $f: Z \to N:\ x \mapsto xf = |x|+1$.

г) $g: Z \to 2Z:\ x \mapsto xg = 2x$.

Решение

а) Отображение φ не является инъекцией, поскольку $\varphi\ \ -1\ \ =1$ и $\varphi\ \ 1\ \ =1$, а также не является сюръекцией, потому что для – 5 не существует $x \in R$ такого, что $\varphi\ \ x\ \ =-5$.

б) Отображение ψ является инъекцией, поскольку для всех $a,\ b \in N$ из условия $a \neq b$ следует, что $a+1 \neq b+1$.

При этом, ψ не является сюръекцией, поскольку для 1 не существует $x \in N$ такого, что $\psi(x)=1$.

в) Отображение f не является инъекцией, потому что $f\ \ -3\ \ =4$, $f\ \ 3\ \ =4$. Но f является сюръекцией, поскольку для всех $x \in N$ существует $(x-1) \in Z$ такой, что $f(x-1) = |x-1| + 1 = x-1+1 = x$.

г) В этом случае, для всех $x, y \in Z$ и $t \in 2Z$ получаем: $x \neq y \Rightarrow g(x) = 2x \neq 2y = g(y)$ и $g(0{,}5 \cdot t) = 2 \cdot 0{,}5 \cdot t = t$. Тогда g является инъекцией и сюръекцией, то есть, биекцией.

Задача 6. *Найдите композицию отображений:*

а) $\varphi: R \to R: x \mapsto x\varphi = x^2$ и $\psi: R \to R^+: x \mapsto x\psi = x^4+5$.

б) $\varphi: R^+ \to R: x \mapsto x\varphi = \ln x$ и $\psi: R \to R: x \mapsto x\psi = e^x$.

Решение

а) Согласно определению композиции отображений, имеем:

$\forall y \in R\ \ y(\varphi\psi) = (y\varphi)\psi = y^2\psi = (y^2)^4 + 5 = y^8 + 5$. Таким образом,

$$\varphi\psi: R \to R^+: x \mapsto x(\varphi\psi) = x^8 + 5.$$

б) Здесь $\forall t \in R^+\ \ t(\varphi\psi) = (t\varphi)\psi = \ln t\psi = (e)^{\ln t} = t$. Тогда $\varphi\psi: R^+ \to R: x \mapsto x(\varphi\psi) = x$.

7.3. Основные типовые задачи для практической работы

1. *Найдите область определения и область значения отношений:*

а) $\alpha=\{(1;-1),(5;6),(7;8),(-2;9)\}$;

б) $\beta=\{(x;y)\in N\times N \mid x\vdots y\}$;

в) $\delta=\{(x;y)\in Z\times Z \mid x+y\geq 100\}$;

г) $\gamma=\{(x;y)\in Q\times Q \mid xy\leq 0\}$;

д) $\lambda=\{(x;y)\in R\times R \mid x-6=y\}$;

е) $\mu=\{(x;y)\in N\times N \mid y=x^2\}$.

2. *Определите, является ли функциональным отношением на множестве* $A=\{0,\pm 1,\pm 2,...,\pm 10\}$.

а) $\alpha=\{(2;-1),(9;6),(7;4),(-2;5)\}$;

б) $\beta=\{(x;y) \mid x\vdots y\}$;

в) $\delta=\{(x;y) \mid x+y=10\}$;

г) $\gamma=\{(x;y) \mid xy=12\}$;

д) $\lambda=\{(x;y) \mid x+8=y\}$;

е) $\mu=\{(x;y) \mid x=y^2\}$.

3. *Постройте множество* $Fun(A;B)$*, если:*

а) $A=\varnothing$, $B=\{1,2\}$;

б) $A=\{1\}$, $B=\{2,3\}$;

в) $A=\{3,5\}$, $B=\{4\}$;

г) $A=\{6,7\}$, $B=\{8,9\}$;

д) $A=\{a,b,c\}$, $B=\{x,y\}$;

е) $A=\{a,b\}$, $B=\{x,y,z\}$.

4. *Докажите, что равномощными являются множества:*

а) $A=\{2,3,4\}$ и $B=\{x,+,?\}$;

б) N и $2N$;

в) kZ и lZ, где $k,l\in Z$ – фиксированные ненулевые числа;

г) N и Z;

д) $P = \{2^n \mid n \in N^0\}$ и N;

е) $X \times \varnothing$ и $\varnothing \times Y$, где X, Y – произвольные множества.

5. *Постройте множество* $Map(X;Y)$, *если:*

а) $X = \{1,2\}$, $Y = \varnothing$;

б) $X = \{1\}$, $Y = \{2,3\}$;

в) $X = \{6,7\}$, $Y = \{5\}$;

г) $X = \{+,-\}$, $Y = \{a,b\}$;

д) $X = \{\{a,b,c\}\}$, $Y = \{\{u,v\}\}$;

е) $X = \{s,t\}$, $Y = \{b,r,a\}$.

6. *Пусть A, B – такие множества, что* $|A|=3$, $|B|=4$. *Найдите мощность множества:*

а) $Map(A;B)$;

б) $Fun(B;B)$;

в) $Map(B;A)$;

г) $Fun(A;A)$;

д) $Map(B;B)$;

е) $Fun(A;B)$.

7. *Установите, является ли инъекцией, сюръекцией или биекцией отображение* φ, *если:*

а) $\varphi : R \to R : x \mapsto x\varphi = x^3$;

б) $\varphi : N \to N : x \mapsto x\varphi = 2^x$;

в) $\varphi : R^+ \to R : x \mapsto x\varphi = \ln x$;

г) $\varphi : Z \to R : x \mapsto x\varphi = x^2 + 3x - 5$;

д) $\varphi : N \to Z : x \mapsto x\varphi$, где $x\varphi$ – последняя цифра x;

е) $\varphi : Z \to Q : x \mapsto x\varphi$, где $x\varphi$ – сумма цифр x.

8. *Докажите, что произведение двух:*

а) функциональных отношений является функциональным;

б) инъекций является инъекцией;

в) сюръекций является сюръекцией;

г) биекций является биекцией.

9. *Найдите композицию отображений:*

а) $\varphi: R \to R: x \mapsto x,\ \psi: R \to R^+$ – произвольное;

б) $\varphi: N \to N: x \mapsto 10x^2,\ \psi: N \to 2N: x \mapsto 2x;$

в) $\varphi: Z \to Z: x \mapsto x-3,\ \psi: Z \to N: x \mapsto |x|+7;$

г) $\varphi: Q^+ \to R: x \mapsto \sqrt{x},\ \psi: R \to R: x \mapsto x^4+2x^3-9;$

д) $\varphi: R \to R^+: x \mapsto \log_3 x,\ \psi: R^+ \to R: x \mapsto \sin(2x);$

е) $\varphi: N \to R: x \mapsto (5^x - \sqrt[5]{x}),\ \psi: R \to R^+: x \mapsto |x|+2.$

10. *Пусть A, B – такие множества, что |A|=m, |B|=n. Найдите мощность множества:*

а) $Map(A;A);$

б) $Fun(A;B);$

в) $Map(B;B);$

г) $Fun(B;A);$

д) $Map(A;B);$

г) $Fun(B;B).$

11. *Постройте график отношения:*

а) $\alpha = \{(1;1),(5;3),(4;3),(2;1)\};$

б) $\beta = \{(x;y) \in N \times N \mid x \vdots y \ \&\ y = 5\};$

в) $\delta = \{(x;y) \in Z \times Z \mid 0 \le x^2 + y^2 \le 10\};$

г) $\gamma = \{(x;y) \in Q \times Q \mid xy = 0\};$

д) $\lambda = \{(x;y) \in R \times R \mid x - 23 = y\};$

е) $\mu = \{(x;y) \in N \times N \mid x^2 = y^2\}.$

12. *Пусть f – функциональное отношение. Будет ли* f^{-1}:

а) функциональным отношением;

б) задавать инъекцию, если *f* – инъекция;

в) задавать сюръекцию, если *f* – сюръекция;

г) задавать биекцию, если *f* – биекция.

13. *При каких значениях параметра t отображение:*

а) $\varphi: [0,1] \to [0,3]: x \mapsto tg(0,25tx)$ является инъекцией;

б) $\psi: [0,1] \to [0,3]: x \mapsto 12(x-t)^{4t}$ является сюръекцией;

в) $f: [0,1] \to [0,3]: x \mapsto 3\sin(tx)$ является биекцией.

14. *Докажите критериальное свойство:*

а) инъективного отображения;
б) сюръективного отображения;
в) биективного отображения.

7.4. Задания для самостоятельной работы

1. *Задайте на множестве N отображение, которое:*
а) является инъекцией и сюръекцией;
б) является инъекцией, но не сюръекцией;
в) является сюръекцией, но не инъекцией;
г) не является ни инъекцией, ни сюръекцией.

2. *Найдите область определения и область значений отображения:*
а) $\alpha = \{(1;10),(2;3),(3;2),(4;4),(7;9)\}$;
б) $\beta = \{(x;y) \in N \times N \mid x \vdots y \,\&\, y \vdots x\}$;
в) $\delta = \{(x;y) \in Z \times Z \mid 5 \le x + y \le 25\}$;
г) $\gamma = \{(x;y) \in Q \times Q \mid xy = 1\}$;
д) $\lambda = \{(x;y) \in R \times R \mid x^2 + y^2 = 1\}$;
е) $\mu = \{(x;y) \in N \times N \mid x = y^5\}$.

3. *Определите, является ли функциональным отношение на множестве* $A = \{0, \pm 1, \pm 2, ..., \pm 15\}$:
а) $\alpha = \{(2;-15),(0;7),(6;-3),(-12;6),(-5;-5)\}$;
б) $\beta = \{(x;y) \mid (x+3) \vdots y\}$;
в) $\delta = \{(x;y) \mid x + y = 10 \,\&\, x - y = 6\}$;
г) $\gamma = \{(x;y) \mid xy = 12 \vee xy = 18\}$;
д) $\lambda = \{(x;y) \mid x = y^2 \,\&\, y = x^2\}$;
е) $\mu = \{(x;y) \mid x + 8 = y \vee x = y + 8\}$.

4. *Постройте все инъекции, сюръекции и биекции из множества X на множество Y, если:*
а) $X = \{p, q\}$, $Y = \{0\}$;
б) $X = \{1\}$, $Y = \{2\}$;
в) $X = \{3\}$, $Y = \{4, 5\}$;
г) $X = \{+, -\}$, $Y = \{6, 7\}$;
д) $X = \{a, b, c\}$, $Y = \{u, v\}$;

е) $X=\{s,t,o\}$, $Y=\{p,a,t\}$.

5. *Докажите, что равномощными являются множества:*

а) $A=\{12,34,56\}$ и $B=\{(1;2),(3;4),(5;6)\}$;

б) $5N$ и $7N$;

в) Q и Z;

г) $2N$ и Z;

д) $P=\{5^n \mid n\in N\}$ и $3N$;

е) $A_1\times A_2\times\ldots\times A_{n-1}\times\varnothing$ и $\varnothing\times B_2\times\ldots\times B_m$, где A_1, A_2, ..., A_{n-1} и B_2, ..., B_m – произвольные множества.

6. *Установите, является ли инъекцией, сюръекцией или биекцией отображение* φ*, если:*

а) $\varphi: R\to R: x\mapsto x\varphi=\sqrt{1-x^2}$;

б) $\varphi: N\to N: x\mapsto x\varphi=7^x(3x+2)$;

в) $\varphi: R^+\to R: x\mapsto x\varphi=10\cdot\log_5 x$;

г) $\varphi: Z\to R: x\mapsto x\varphi=2^{6x+4}$;

д) $\varphi: N\to Z: x\mapsto x\varphi$, где $x\varphi$ – первая цифра *x;*

е) $\varphi: Z\to Q: x\mapsto x\varphi$, где $x\varphi$ – произведение цифр *x*.

7. *Найдите композицию отображений:*

а) $\varphi: R\to R^+$ – произвольное, $\psi: R^+\to R^+: x\mapsto x$;

б) $\varphi: N\to 3N: x\mapsto 3(x^3+4)$, $\psi: 3N\to 5N: 3x\mapsto 5x$;

в) $\varphi: Z\to Z: x\mapsto x+9$, $\psi: Z\to N: x\mapsto |x+100|+1$;

г) $\varphi: Q\to R: x\mapsto \sqrt[4]{x-5}$, $\psi: R\to R: x\mapsto x^5-6x^2$;

д) $\varphi: R^+\to R^+: x\mapsto \dfrac{1}{x}$, $\psi: R^+\to R: x\mapsto |\cos x|+1$;

е) $\varphi: N\to R: x\mapsto 3^x$, $\psi: R\to R: x\mapsto \sin^2 x+\cos^2 x$.

8. *Определите, из каких элементов состоят множества* $\varphi\ \ A$, $\varphi^{-1}(B)$, $\mathrm{Im}\varphi$, *если:*

а) $\varphi: N\to N: x\mapsto 3x$ и $A=\{1,3,5,7\}$, $B=\{6,12,234\}$;

б) $\varphi: Z\to R: x\mapsto x^2+3x-5$ и $A=\{1,8\}$, $B=\{\pm5,13\}$.

9. *Найдите* $f^2,\ g^2,\ fg,\ gf$, *если* $f,\ g$ – *преобразования, такие, что* $f=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&3&1\end{pmatrix}$ *и* $g=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&2&2\end{pmatrix}$.

10. *Пусть* $|A|=s$, $|B|=t$. *Докажите, что* $|Map(A;B)|=t^s$.

7.5. Контрольные вопросы

1. Что такое функциональное отношение? Приведите примеры функциональных отношений.
2. Каким символом обозначается множество всех функциональных отношений на множествах *A* и *B*?
3. Как определяется область определения отношения? Область значений отношения?
4. Может ли область определения отношения не совпадать с областью его значений?
5. Определите понятие отображения.
6. Каким символом обозначается множество всех отображений из множества *A* на множество *B*.
7. Что такое образ множества при заданном отображении? Прообраз множества?
8. Сформулируйте определение образа и прообраза элемента при заданном отображении.
9. Как записать, что *x* является образом элемента *y*, а элемент *u* – прообразом элемента *v* при отображении *f*.
10. Дайте определение графика отображения. Как строится график отображения?
11. Что такое инъективное отображение? Что такое сюръективное отображение?
12. Может ли инъекция быть сюръекцией и наоборот?
13. Как определяется биективное отображение?
14. Приведите примеры инъективного, сюръективного и биективного отображений.
15. Определите понятие обратного отображения.
16. Как определяется обратное отображение к отображению *f*.
17. Что такое композиция отображений?

18. Существуют ли такие отображения, композиция которых не является отображением?

19. Сформулируйте критериальные условия инъективности, сюръективности и биективности отображений.

Тема 8. Алгебраические структуры. Изоморфизм

Ключевые понятия: n-арная операция, бинарная операция, алгебраическая структура, подструктура, алгебра, модель, гомоморфизм, изоморфизм, идемпотентность, ассоциативность, коммутативность, поглощение, дистрибутивность.

8.1. Краткие теоретические сведения

***n*-арной операцией,** определенной на множествах $A_1, A_2, ..., A_{n+1}$ называется любое отображение $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n \to A_{n+1}$.

Если $A_1 = A_2 = \ldots = A_{n+1} = A,$ то говорят, что *n*-арная операция определена на множестве *A*.

Операция называется **унарной (бинарной, тернарной),** если $n=1$ ($n=2$, $n=3$).

n-арная операция * на множестве *A* называется **замкнутой** на множестве $X \subseteq A$, если $x_1 * \ldots * x_n \in X$ для всех $x_1,\ ...,\ x_n \in X$.

Пусть $A \neq \varnothing$, $\{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m\}$ – множество, определенных на *A* операций; $\{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_k\}$ - множество, определенных на *A* отношений, $\{a_1, a_2, ..., a_s\}$ – множество фиксированных в *A* элементов. Тогда упорядоченную четверку

$$(A, \{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m\}, \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_k\}, \{a_1, a_2, ..., a_s\})$$

называют **алгебраической четверкой (**или **системой).**

Множество *A* называется **носителем** алгебраической системы.

Если $\{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_k\} = \varnothing$, то алгебраическую структуру $(A, \{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m\}, \{a_1, a_2, ..., a_s\})$ называют **алгеброй.**

Если $\{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m\} = \varnothing$, то алгебраическую структуру $(A, \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_k\}, \{a_1, a_2, ..., a_s\})$ называют **моделью.**

Подмножество *C* алгебраической структуры *A* называется ее **подструктурой,** если все операции из *A* замкнуты на *C*.

Две структуры $(A, \{\alpha_1, ..., \alpha_m\}, \{\omega_1, ..., \omega_k\}, \{a_1, ..., a_s\})$ и $(B, \{\beta_1, ..., \beta_n\}, \{\delta_1, ..., \delta_l\}, \{b_1, ..., b_t\})$ называются **однотипными,** если выполняются условия:

– $m = n,\ k = l,\ s = t;$
– операции α_j и β_j имеют одинаковую арность для всех j;
– отношения α_i и β_i имеют одинаковую арность для всех i.
– Пусть *A* и *B* – однотипные алгебраические системы. Если существует отображение $f: A \to B$ такое, что:
– $\forall x_1,...,x_p \in A,\ \forall j\ \ f\alpha_j(x_1,...,x_p) = \beta_j(f(x_1),..., f(x_p));$
– $\forall y_1,...,y_q \in A,\ \forall i\ \ (y_1;...;y_q) \in \omega_i \Leftrightarrow (f(y_1),..., f(y_q)) \in \delta_i;$
– $\forall \lambda \in \{1,...,s\}\ \ f(a_\lambda) = b_\lambda,$
– то структуры *A* и *B* называют **гомоморфными,** а *f* – **гомоморфизмом**.
– Если гомоморфизм *f* является биективным, то его называют **изоморфизмом**, а структуры *A* и *B* – **изоморфными.**
– Для двух произвольных бинарных операций *, ∘ на множестве *A* имеют место такие их **свойства** ($x,\ y,\ z \in A$ – произвольные):
– $x * x = x$ **- идемпотентность;**
– $x*(y*z) = (x*y)*z$ – **ассоциативность;**
– $x*y = y*x$ – **коммутативность;**
– $(x*y)\circ x = x$ – **поглощение;**
– $(x*y)\circ z = (x\circ z)*(y\circ z)$ – **правая дистрибутивность;**
– $x\circ(y*z) = (x\circ y)*(x\circ z)$ – **левая дистрибутивность.**

8.2. Примеры решения задач

Задача 1. *Определите, является ли замкнутой операция:*

а) вычитание на множестве *N*;

б) сложение на множестве 2*N;*

Решение

а) Нет, поскольку, например, $3 \in N,\ 5 \in N$, но $3 - 5 = -2 \notin N.$

б) Да, потому что $\forall 2x, 2y \in 2N;\ 2x + 2y = 2(x + y) \in 2N.$

Задача 2. *Постройте все унарные операции на множестве:*

а) $A=\{1\}$.

б) $B=\{u,v\}$.

Решение

а) В данном случае будет только одна унарная операция: $\varphi=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$.

б) В данном случае, унарных операций будет четыре:

$$f_1=\begin{pmatrix}u & v\\ u & v\end{pmatrix},\ f_2=\begin{pmatrix}u & v\\ v & u\end{pmatrix},\ f_3=\begin{pmatrix}u & v\\ u & u\end{pmatrix},\ f_4=\begin{pmatrix}u & v\\ v & v\end{pmatrix}.$$

Задача 3. *Определите, существует ли гомоморфизм из алгебраической структуры* $(N, +, \vdots, 1)$ *на структуру* $(5N, +, \geq, 5)$.

Решение

Зададим отображение из множества N в $5N$ условием:

$$f: N\to 5N: n\mapsto 5n.$$

Для всех $x,y\in N$ имеем

$$f(x+y)=5(x+y)=5x+5y=f(x)+f(y),$$

при этом $f(1)=5\cdot 1=5.$

Если $x,y\in N$ такие, что $x\vdots y$, то $f(x)=5x\vdots 5y=f(y)$, откуда $f(x)\geq f(y)$. Однако из того, что 15≥10 не следует $f^{-1}(15)=3\vdots 2=f^{-1}(10)$. То есть, f не является гомоморфизмом.

Задача 4. *Докажите, что изоморфными являются алгебраические структуры* $(R^+, \cdot, \leq, 1)$ и $(R, +, \leq, 0)$.

Решение

Определим отображение из структуры R^+ в структуру R условием:

$$\varphi: R^+\to R: x\mapsto \ln x.$$

Отображение φ является гомоморфизмом, поскольку

$$\forall x,y\in R^+\quad \varphi(x\cdot y)=\ln(x\cdot y)=\ln x+\ln y=\varphi(x)+\varphi(y),$$

при этом, $\varphi(1)=\ln 1=0$.

Более того, условие $x \le y$ имеет место тогда и только тогда, когда $\varphi(x) = \ln x \le \ln y = \varphi(y)$.

Далее, $\forall x, y \in R^{+}$ $x \ne y \Rightarrow \ln x \ne \ln y$ и для каждого $a \in R$ существует $e^{a} \in R^{+}$, такой, что $\varphi(e^{a}) = \ln e^{a} = a \ln e = a$. Это означает, что φ – биекция и, значит, изоморфизм.

Задача 5. *Установите свойства операции:*

а) $x * y = y$; где $x, y \in N$.

б) $x * y = 2xy$, где $x, y \in Z$.

Решение

а) Для всех $x,\ y,\ z \in N$ имеем:

$x * x = x,$

$(x * y) * z = y * z = z = x * z = x * (y * z);$

$x * y = y \ne x = y * x.$

Следовательно, операция * является идемпотентной, ассоциативной, но не коммутативной.

б) При любых $x, y, z \in Z$ получаем:

$x * x = 2x^{2} \ne x,$

$(x * y) * z = 2xy * z = 4xyz = 2x2yz = 2x(y * z) = x * (y * z);$

$x * y = 2xy = 2yx = y * x.$

Таким образом, операция * не является идемпотентной, является ассоциативной и коммутативной.

Задача 6. *Проверьте свойства дистрибутивности и поглощения для обычных операций сложения и умножения на множестве Z.*

Решение

Множество является дистрибутивным относительно сложения, потому что для всех $a, b, c \in Z$ $(a + b)c = ac + bc \,\&\, a(b + c) = ab + ac$.

Однако сложение относительно умножения не дистрибутивное, поскольку, например, $(2 \cdot 3) + 4 = 10 \ne 42 = (2 + 4) \cdot (3 + 4)$ и $2 + (3 \cdot 4) = 14 \ne 30 = (2 + 3) \cdot (2 + 4)$.

Кроме того, сложение не поглощает умножение и наоборот:

$$(2+3)\cdot 2=10\neq 2 \text{ и } (2\cdot 3)+2=8\neq 2.$$

8.3. Основные типовые задачи для практической работы

1. *Докажите, что отношение изоморфизма на множестве всех однотипных алгебраических систем является эквивалентностью.*

2. *Сколько существует* n*-арных операций на множестве A, если:*

а) $n=1,\ A=\{1,2,...,10\}$;

б) $n=2,\ A=\{1,3,5,...,99\}$;

в) $n=3,\ A=\{2,3,5,7,11,...,31\}$;

г) n – произвольное натуральное число, $A=\{1,2,...,m\}$.

3. *Определите, является ли замкнутой операция:*

а) вычитание на множестве *Z;*

б) сложение на множестве *5N;*

в) умножение на множестве R^{-};

г) деление на множестве *Q*;

д) возведение в степень на множестве *N;*

е) вычисление квадратного корня на множестве Q^{-}.

4. *Постройте все унарные операции на множестве:*

а) $A=\varnothing$;

б) $B=\{b\}$;

в) $C=\{t,s\}$;

г) $D=\{x,y,z\}$.

5. *Задайте таблицами умножения следующие операции:*

а) $x*y=y$, где $x,y\in A=\{1,2,3,4,5\}$;

б) $x*y=9$, где $x,y\in B=\{6,7,8,9\}$;

в) $x*y=x+y+2$, где $x,y\in 2N$;

г) $x*y=xy-10$, где $x,y\in 5Z$.

6. *Определите, существует ли гомоморфизм из алгебры A на алгебру B, если:*

а) $A=(N,+,1)$ и $B=(Z,\cdot,0)$;

б) $A=B=(R,+,\cdot,1)$;

в) $A=(3N,+,3)$ и $B=(5Z,+,5)$;

г) $A=(Z,+)$ и $B=(\{1,-1\},\cdot)$.

7. *Докажите, что изоморфными являются алгебраические системы:*

а) $(R,+,\leq,0)$ и $(R^+,\cdot,\leq,1)$;

б) $(2N,+,\geq,2)$ и $(7N,+,\geq,7)$;

в) $(A=\{a\in R\,|\,a>1\},\cdot,\leq\}$ и $(B=\{b\in R\,|\,0<b<1\},\cdot,\geq)$;

г) $(R^*,\cdot,1),(R^*,\circ,1/3)$, где $R^*=R\setminus\{0\}$ и $x\circ y=3xy$.

8. *Установите свойства операций:*

а) $x*y=\max\{x,y\}$, где $x,y\in Z$;

б) $x*y=НОК(x;y)$, где $x,y\in N$;

в) $x*y=1$, где $x,y\in Q$;

г) $x*y=x$, где $x,y\in R$;

д) $x*y=x^y$, где $x,y\in N$;

е) $x*y=|x-y|$, где $x,y\in R^+$.

9. *Проверьте свойства дистрибутивности и поглощения операций * и $\circ$ на множестве A, если:*

а) $A=U(X)$, $*=\bigcup$ и $\circ=\bigcap$;

б) $A=N$, $x*y=xy$ и $x\circ y=x^y$;

в) $A=R^+$, $x*y=\sqrt{xy}$ и $x\circ y=\ln(xy)$;

г) $A=3Z$, $x*y=x+y$ и $x\circ y=xy$.

10. *Постройте все бинарные операции на множестве:*

а) $A=\varnothing$;

б) $B=\{b\}$;

в) $C=\{1,2\}$.

11. *Найдите алгебру* $(A,\oplus)$ *такую, что любое ее непустое множество является подструктурой A.*

12. *Установите, являются ли однотипными структуры:*

а) A и B;

б) $(Q,+,\geq,0)$ и $(11N,\geq)$;

в) $(A,\cdot,\vdots)$ и $(B,>,=)$;

г) $(U(X),\bigcap,\bigcup,\varnothing)$ и $(U(Y),\setminus,\Delta,Y)$;

д) $(C,+)$ и $(U(X),\bar{\ })$;

е) $(R,+,\cdot,\leq,0)$ и $(R^{+},\cdot,-,\leq,1)$.

13. *Докажите, что:*

а) когда носители двух алгебраических структур имеют разные мощности, тогда эти структуры не изоморфные;

б) когда носители двух алгебраических структур имеют одинаковые мощности, тогда эти структуры могут быть не изоморфными.

14. *Проверьте, являются ли изоморфными модели:*

а) $(R,>)$ и $(R^{+},<)$;

б) $(3N,\geq)$ и $(13N,\geq)$;

в) $(C=\{b\in R\,|\,0<b<1\},\leq)$ и $(D=\{a\in R\,|\,a>1\},\geq)$;

г) $(U(X),\subseteq)$ и $(A,\prec)$, где $A=\{0,1\}^{3}$ и $(x_1;x_2;x_3)\prec(y_1;y_2;y_3)\Leftrightarrow x_1\leq y_1, x_2\leq y_2, x_3\leq y_3$.

8.4. Задания для самостоятельной работы

1. *Определите, является ли замкнутой операция:*

а) деление на множестве Q;

б) сложение на множестве $2N\text{-}1$;

в) $x-y$, где $x,y\in 5N$;

г) $x*y=|x+y|$, где $x,y\in Z$;

д) $x*y=\max\{x,y\}$, где $x,y\in R$;

е) $x*y=x^{y}-y^{x}$, где $x,y\in 3N$.

2. *Задайте таблицей умножения операцию:*

а) $x*y=x,$ где $x,y\in A=\{3,4,...,8\}$;

б) $x*y=10,$ где $x,y\in B=\{\pm 8,\pm 9,\pm 10\}$;

в) $x*y=xy-7,$ где $x,y\in 7Z$;

г) $x*y=4(x+y),$ где $x,y\in Q$;

д) $x*y=\min\{x,y\},$ где $x,y\in\{0,2,4,6,8\}$;

е) $x*y=(x-y)^2$, где $x,y\in N^\circ$.

3. *Определите, существует ли гомоморфизм из алгебры A на алгебру B, если:*

а) $A=(N,\cdot,1)$ и $B=(Z,\cdot,0)$;

б) $A=B=(2Z,+,0)$;

в) $A=(\{0,1,-1\},\cdot)$ и $B=(3Z,+,3)$;

г) $A=(Q,+,\cdot)$ и $B=(Q^+,\cdot,+)$;

д) $A=(U(X),\setminus)$ и $B=(U(X),\Delta)$;

е) $A=(R,\cdot,0)$ и $B=(U(R\times R),\bigcap,\varnothing)$.

4. *Проверьте, задает ли изоморфизм алгебраических систем отображения φ, если:*

а) $(3N,+,\leq,3)$ и $(5N,+,\geq,5)$, $\varphi:3N\to 5N:3n\mapsto 5n$;

б) $(R^+,\cdot,\leq,1)$ и $(R,+,\leq,0)$, $\varphi:R^+\to R:x\mapsto \log_2 x$;

в) $(A=\{a\in R\,|\,0<a<1\},\cdot,\leq)$ и $(B=\{b\in R\,|\,b>1\},\cdot,\geq)$,

$\varphi:A\to B:x\mapsto x^{-1}$;

г) $(R^*,\circ,1/5)$ и $(R^*,\cdot,1)$, где $(R^*=R\setminus\{0\},\cdot,1)$,

$x\circ y=5xy$, $\varphi:R^*\to R^*:x\mapsto 5x$;

д) $A=(U(X),\bigcup,\bigcap)$ и $B=(U(X),\bigcap,\bigcup)$, $\varphi:U(X)\to U(X):A\mapsto \overline{A}$;

е) $A=(U(X),\bigcup,\bigcap)$ и $B=(Y,\wedge,\vee)$, где $X=\{a,b,c\}$, $Y=\{0,1\}^3$, при этом

$\varphi(\varnothing)=(0;0;0)$, $\varphi(\{a\})=(1;0;0)$, $\varphi(\{b\})=(0;1;0)$, ...,

$\varphi(\{a,c\})=(1;0;1)$, ..., $\varphi(X)=(1;1;1)$.

5. *Установите свойства операции:*

а) $x*y=\min\{x,y\}$, где $x,y\in Z$;

б) $x*y=НОД(x;y)$, где $x,y\in N$;

в) $x*y=25$, где $x,y\in Q$;

г) $x*y=x+2y+3$, где $x,y\in R$;

д) $x*y=y^x$, где $x,y\in N$;

е) $x*y=|x+y-4|$, где $x,y\in R^+$.

6. *Проверьте, поглощают ли одна другую операции:*

а) сложение и умножение на множестве N;

б) сложение и деление на множестве R^+;

в) объединение и пересечение на булеане $U(X)$;

г) $HOD(x;y)$ и $HOK(x;y)$ на множестве N;

д) умножение и $x*y=y^x$ на множестве Z;

е) $\min\{x;y\}$ и $\max\{x;y\}$ на множестве N.

7. *Найдите все подалгебры алгебры* $(A,\oplus)$, *если A задано следующей таблицей:*

а)

$\oplus$	1	2
1	2	2
2	2	2

б)

$\oplus$	3	4	5
3	4	3	5
4	3	5	4
5	5	4	3

в)

$\oplus$	e	f	g	h
e	e	f	e	f
f	g	f	h	g
g	f	f	g	h
h	h	f	e	h

8. *Установите, являются ли однотипными структуры:*

а) Z и $(R,+)$;

б) $(Q,\geq,1)$ и $(2N,\vdots)$;

в) $(A,\cdot,+)$ и $(B,\neq,=)$;

г) $(U(X),\bigcap,\varnothing)$ и $(U(Y),\Delta,Y)$;

д) $(N,\cdot)$ и $(A\times A,\oplus)$;

е) $(R,-,\vdots,=,0)$ и $(Q^+,\cdot,+,\neq,1)$.

9. *Проверьте свойство дистрибутивности операции * относительно* $\circ$ *на множестве A, если:*

а) $A=Z,\ x*y=xy+1$ и $x\circ y=y^x$;

б) $A = U(X)$, $* = \bigcap$ и $\circ = \setminus$;

в) $A = Q$, $x * y = y\sqrt{x}$ и $x \circ y = x\ln(y)$;

г) $A = U(Y)$, $* = \bigcup$ и $\circ = \bigcap$;

д) $A = 5N$, $x \circ y = xy$ и $x * y = x + y$;

е) $A = U(X \times X)$, $* = \Delta$ и $\circ$ – композиция отношений.

10. *Определите, существует ли алгебра с одной операцией, такая, что она изоморфна некоторой своей подалгебры.*

8.5. Контрольные вопросы

1. Что такое n-арная операция?
2. Как называется n-арная операция, когда n=1? Когда n=2? Когда n=3?
3. При каких условиях говорят, что n-арная операция определена на одном множестве?
4. Приведите примеры унарных, бинарных и тернарных операций.
5. Дайте определение замкнутой n-арной операции на некотором своем подмножестве.
6. Как определяется алгебраическая структура?
7. Чем отличается понятие алгебраической структуры от понятия алгебраической системы?
8. Определите понятие носителя алгебраической структуры.
9. Можно ли на одном носителе определить разные алгебраические структуры?
10. Что такое алгебра? Что такое модель?
11. Приведите примеры алгебр и моделей.
12. Дайте определение подструктуры алгебраической структуры.
13. При каких условиях две алгебраические структуры называются однотипными?
14. Сформулируйте определение гомоморфизма алгебраических структур.
15. Что такое изоморфизм алгебраических структур?

16. Каким символом обозначают изоморфные алгебраические структуры?

17. Какая бинарная операция называется ассоциативной? Коммутативной?

18. Определите свойство идемпотентности операции.

19. Приведите примеры ассоциативных, коммутативных и идемпотентных операций.

20. Как записать свойство поглощения?

21. Дайте определение дистрибутивности для двух произвольных бинарных операций.

Тема 9. Структуры с одной операцией

Ключевые понятия: полугруппа, левый (правый) нейтральный элемент, двусторонний нейтральный элемент, моноид, левый (правый) нулевой элемент, двусторонний нулевой элемент, полугруппа с нулем, обратный элемент, группа, коммутативная группа.

9.1. Краткие теоретические сведения

Пусть S – произвольное непустое множество, * – бинарная операция на S. Результат применения операции * к элементам a и b обозначается $a*b$.

Бинарную операцию на конечном множестве можно задавать таблицей умножения, которую называют еще **таблицей Кели**.

Алгебраическая система $(S,*)$ называется **полугруппой**, если операция * является ассоциативной.

Полугруппа $(S,*)$ называется **коммутативной**, если операция * является коммутативной.

Элемент $e \in S$ называется **левой единицей (правой единицей)**, если для всех $a \in S$ имеем: $ea = a (ae = a)$.

Если $e \in S$ является как левой, так и правой единицей, то его называют **единицей** (или **нейтральным элементом**).

Полугруппа с единицей называется **моноидом**.

Элемент $\theta \in S$ называется **левым нулем (правым нулем)**, если для всех $a \in S$ имеем: $\theta a = \theta (a\theta = \theta)$.

Если $\theta \in S$ является как левым, так и правым нулем, то его называют **двусторонним нулем** (или просто **нулем**).

Полугруппа $(S,*)$ называется **сократимая слева (справа)**, если для всех $a, b, c \in S$ из условия $c*a = c*b$ $(a*c = b*c)$ следует, что $a = b$. Если $(S,*)$ является сократимой слева и справа, то ее называют просто **сократимой**.

Элемент a' (или a^{-1}) моноида $(S,*)$ называется **обратным элементом** к элементу $a \in S$, если $a*a' = a'*a = e$.

Если для элемента a моноида $(S,*)$ существует обратный, то a называется **обратимым элементом**.

Группой называется моноид, в котором каждый элемент является обратимым элементом.

Пусть $(S,*)$ и $(T,\circ)$ – произвольные полугруппы. Биективное отображение $\varphi : S \to T : x \mapsto x\varphi$ называется **изоморфизмом** полугрупп, если $\varphi(x * y) = \varphi(x) \circ \varphi(y)$ для всех $x, y \in S$.

При этом полугруппы $(S,*)$ и $(T,\circ)$ называют **изоморфными**, и обозначают $(S,*) \cong (T,\circ)$.

9.2. Примеры решения задач

Задача 1. *Докажите, что полугруппой является алгебраическая система* $(R,\circ)$*, где* $x \circ y = \max\{x, y\}$.

Решение

Рассмотрим четыре случая:

1) если $a \le b \le c$, то $(a \circ b) \circ c = b \circ c = c = a \circ c = a \circ (b \circ c)$;

2) если $a > b > c$, то $(a \circ b) \circ c = a \circ c = a = a \circ b = a \circ (b \circ c)$;

3) если $a \le b > c$, то $(a \circ b) \circ c = b \circ c = b = a \circ b = a \circ (b \circ c)$;

4) если $a > b \le c$, то $(a \circ b) \circ c = a \circ c = a \circ (b \circ c)$.

Задача 2. *Является ли сократимой полугруппа:*

а) $(N, +)$.

б) $(Q, \cdot)$.

Решение

а) Да, поскольку для всех $a, b, c \in N$ из условий $c + a = c + b$ и $a + c = b + c$ следует, что $a = b$.

б) Нет, поскольку для элементов $5, 0, 0 \in Q$ имеем $5 \cdot 0 = 0 \cdot 0$, но $5 \ne 0$.

Задача 3. *Какие среди полугрупп* $(S = \{s \in R \mid 0 < s < 1\}, \cdot)$, $(T = \{t \in R \mid 0 < t \le 1\}, \cdot)$, $(F = \{f \in R \mid f > 1\}, \cdot)$, *а также* $(G = \{g \in R \mid g > 2\}, \cdot)$ *являются изоморфными.*

Решение

Полугруппы S и T, F и T, G и T не являются изоморфными, поскольку T имеет нейтральный элемент, а все другие – нет. Нетрудно проверить, что отображение $\varphi: x \mapsto \frac{1}{x}$ задает изоморфизм между полугруппами S и F.

Допустим, что существует изоморфизм $\varphi: S \to G$. Каждый элемент $x \in S$ раскладывается в произведение $\sqrt{x}\sqrt{x}$, где $\sqrt{x} \in S$. Отсюда $\varphi(x) = \varphi(\sqrt{x}\sqrt{x}) = \varphi(\sqrt{x})\varphi(\sqrt{x})$.

Из условия $\varphi(\sqrt{x}) > 2$ следует $\varphi(x) > 4$, что противоречит сюръективности φ. Следовательно, S и G не являются изоморфными. Поскольку S и F изоморфны, то F и G не изоморфны.

Задача 4. *Выясните, является ли группой алгебраическая система:*

а) $(G, +)$, где $G = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in Q\}$.

б) $(Z, \cdot)$.

Решение

а) Сначала покажем, что операция + на G является замкнутой.

Действительно, для всех $a + b\sqrt{2},\ c + d\sqrt{2} \in G$ имеем:

$$(a + b\sqrt{2}) + (c + d\sqrt{2}) = (a + c) + (b + d)\sqrt{2} \in G.$$

Сложение на множестве G является ассоциативным, поскольку:

$$\forall a + b\sqrt{2},\ c + d\sqrt{2},\ e + f\sqrt{2} \in G$$

$$((a + b\sqrt{2}) + (c + d\sqrt{2})) + (e + f\sqrt{2}) =$$

$$= ((a + c) + (b + d)\sqrt{2}) + (e + f\sqrt{2}) =$$

$$= ((a + c) + e) + ((b + d) + f)\sqrt{2} =$$

$$= (a + (c + e)) + (b + (d + f))\sqrt{2} =$$

$$= (a + b\sqrt{2}) + ((c + d\sqrt{2}) + (e + f\sqrt{2})).$$

Единицей полугруппы $(G, +)$ является $0 = 0 + 0\sqrt{2} \in G$.

При этом, для каждого $a + b\sqrt{2} \in G$ существует обратный элемент $-(a + b\sqrt{2}) = (-a) + (-b)\sqrt{2} \in G$, где $-a, -b \in Q$.

Следовательно, $(G, +)$ является группой.

б) Множество Z является моноидом, но не группой, поскольку для каждого $x \in Z \setminus \{1, -1\}$ не существует обратного элемента.

Задача 5. *Докажите, что в каждой группе однозначно решается уравнение* $ax = b$.

Решение

Пусть a, x, b такие элементы группы, что $ax = b$. Это уравнение умножим слева на a^{-1}:

$$a^{-1}(ax) = a^{-1}b \Rightarrow (a^{-1}a)x = a^{-1}b \Rightarrow ex = a^{-1}b \Rightarrow x = a^{-1}b .$$

Поскольку обратный элемент для элемента a – единственный, то решение $x = a^{-1}b$ тоже единственное.

9.3. Основные типовые задачи для практической работы

1. *Выясните, является ли полугруппой (если да, то является ли эта полугруппа группой) алгебраическая система:*

а) $(N, \circ)$, где $x \circ y = \max\{x, y\}$;

б) $(R, \circ)$, где $x \circ y = y$;

в) $(\Theta, +)$, где $\Theta \in \{N, Z, Q, R\}$;

г) $(\Theta, \cdot)$, где $\Theta \in \{N, Z, Q, R\}$;

д) $(R, \circ)$, где $x \circ y = \ln(e^x + e^y)$;

е) $(A, \cdot)$, где $A = \{5^n \mid n \in N\}$.

2. *Определите, является ли сократимой полугруппа:*

а) $(Q, \cdot)$;

б) $(Z, +)$;

в) $(N, \circ)$, где $x \circ y = \min\{x, y\}$;

г) $(R, \circ)$, где $x \circ y = 5xy$;

д) $(N, \circ)$, где $x \circ y = НОД(x; y)$;

е) $(A, \circ)$, где $x \circ y = x$.

3. *Докажите, что в любой группе:*

а) $(a^{-1})^{-1} = a$;

б) $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$;

в) операция является сократимой слева;

г) операция является сократимой справа.

4. *Постройте таблицу Кели для операции, заданной на множестве* $A=\{1,2,3,4,5\}$:

а) $x\circ y=\min\{x,y\}$;

б) $x\circ y=x$;

в) $x\circ y=НОД(x;y)$;

г) $x\circ y=3$;

д) $x\circ y=z$, где z – остаток от деления $x+y$ на 3;

е) $x\circ y=z$, где z – остаток от деления xy на 3.

5. *Найдите левые, правые и двусторонние нейтральные элементы и нулевые элементы (если они есть) полугрупп, заданных таблицей Кели:*

а)

*	1	2	3
1	1	1	1
2	2	2	2
3	3	3	3

б)

*	1	2	3
1	1	2	3
2	1	2	3
3	1	2	3

в)

*	1	2	3
1	1	1	1
2	1	1	1
3	1	1	1

г)

*	1	2	3	4
1	3	3	4	4
2	3	3	4	4
3	4	4	4	4
4	4	4	4	4

д)

*	1	2	3	4

1	2	2	1	1
2	2	2	2	2
3	1	2	4	3
4	1	2	3	4

е)

*	1	2	3	4
1	1	2	1	2
2	1	2	1	2
3	1	2	3	4
4	1	2	3	4

6. *Выясните, является ли группой:*

а) множество всех $n\times n$ действительных матриц относительно операции сложения;

б) множество всех $n\times n$ действительных матриц относительно операции умножения;

в) множество всех $n\times n$ действительных невырожденных матриц относительно операции сложения;

г) множество всех $n\times n$ действительных невырожденных матриц относительно операции умножения;

д) множество всех $n\times n$ действительных скалярных матриц относительно операции сложения;

е) множество всех $n\times n$ действительных диагональных матриц относительно операции умножения.

7. *Какие среди данных полугрупп являются изоморфными:*
$(S_1=\{s\in R\,|\,0<s<1\},\cdot)$, $(S_2=\{s\in R\,|\,0\le s\le 1\},\cdot)$,
$(S_3=\{s\in R\,|\,s\ge 1\},\cdot)$, $(S_4=\{s\in R\,|\,s\ge 2\},\cdot)$,
$(S_5=\{s\in R\,|\,s\ge 3\},\cdot)$, $(S_6=\{s\in R\,|\,s>3\},\cdot)$.

8. *Найдите все обратимые элементы моноида:*

а) $(N,\cdot)$;

б) $(Z,+)$;

в) $(N,\circ)$, где $x\circ y=\max\{x,y\}$;

г) $(S=\{s\in R\,|\,0<s\le 1\},\cdot)$;

д) $(N,\circ)$, где $x\circ y=НОК(x;y)$;

е) $(A,+)$, где $A=\{x+y\sqrt{7}\,|\,x,y\in Z\}$.

9. *Сколькими способами можно определить ассоциативную операцию на:*

а) одноэлементном множестве;

б) двухэлементном множестве.

10. *Докажите, что булеан U(X) множества X является группой относительно операции симметричной разницы Δ.*

11. *Постройте таблицу Кели для множества движений прямоугольника.*

12. *Сколько существует неизоморфных между собой полугрупп второго порядка?*

13. *Установите, являются ли изоморфными полугруппы:*

а) $(U(X),\bigcup)$ и $(U(X),\bigcap)$;

б) (A, min) и (A, max), где $A=\{1,2,\ldots,1000\}$;

в) (N, min) и (N, max);

г) $(Z^+,+)$ и $(-Z^+,+)$;

д) (N, *НОД*) и (N, *НОК*);

е) $(R,\cdot)$ и $(S=\{s\in R\,|\,0\le s\le 1\},\cdot)$.

14. *Для каких значений параметров* $a,b,c\in R$ *операция* $x*y=ax+by+c$ *на множестве R:*

а) будет ассоциативной;

б) будет содержать нейтральный элемент.

15. *Докажите, что моноид S, в котором для всех a,* b *уравнения* $ax=b$, $ya=b$ *имеют по крайней мере одно решение, является группой.*

9.4. Задания для самостоятельной работы

1. *Выясните, является ли полугруппой (если да, то является ли эта полугруппа группой) алгебраическая система:*

а) $(N,\circ)$, где $x\circ y=\min\{x,y\}$;

б) $(R,\circ)$, где $x\circ y=10$;

в) $(\Theta,-)$, где $\Theta\in\{N,Z,Q,R\}$;

г) $(\Theta\setminus\{0\},\cdot)$, где $\Theta\in\{Z,Q,R\}$;

д) $(A,\cdot)$, где $A=\{3^z\mid z\in Z\}$;

е) $(B,+)$, где $B=\{x+y\sqrt{5}\mid x,y\in Q\}$.

2. *Определите, является ли сократимой полугруппа:*

а) $(Z^{+},\cdot)$;

б) $(R, +)$;

в) $(N,\circ)$, где $x\circ y=\max\{x,y\}$;

г) $(R,\circ)$, где $x\circ y=13xy$;

д) $(N,\circ)$, где $x\circ y=НОК(x;y)$;

е) $(Q,\circ)$, где $x\circ y=x+y+8$.

3. *Постройте таблицу Кели для операции, заданной на множестве* $A=\{1,2,\dots,7\}$:

а) $x\circ y=\max\{x,y\}$;

б) $x\circ y=y$;

в) $x\circ y=НОК(x;y)$;

г) $x\circ y=2$;

д) $x\circ y=z$, где z – остаток от деления $x+y$ на 7;

е) $x\circ y=z$, где z – остаток от деления xy на 7.

4. *Найдите левые, правые и двусторонние единицы и нули (если они есть) алгебраических систем, заданных таблицей Кели:*

а)

*	a	b	c
a	c	c	a
b	a	b	c
c	c	c	a

б)

*	a	b	c
a	a	c	a
b	b	b	b
c	c	a	c

в)

*	a	b	c
a	b	b	c
b	b	b	c
c	a	a	c

г)

*	a	b	c	d
a	a	b	a	b
b	b	b	b	b
c	c	b	c	b
d	d	b	d	b

д)

*	a	b	c	d
a	a	c	d	b
b	b	c	a	c
c	a	a	d	b
d	d	a	a	c

е)

*	a	b	c	d
a	d	d	b	b
b	d	d	b	b
c	c	c	a	a
d	c	c	a	a

5. *Выясните, является ли группой:*

а) множество всех $m \times n$ действительных матриц относительно операции сложения;

б) множество всех $m \times n$ действительных матриц относительно операции умножения;

в) множество всех $n \times n$ действительных симметрических матриц относительно операции сложения;

г) множество всех $n \times n$ действительных кососимметрических матриц относительно операции умножения;

д) множество всех $n \times n$ действительных верхнетреугольных матриц относительно операции сложения;

е) множество всех $n \times n$ действительных нижнетреугольных матриц относительно операции умножения.

6. *Найдите все обратимые элементы моноидов:*

а) $(N^0, +)$;

б) $(Z, \cdot)$;

в) $(Q, \circ)$, где $x \circ y = 8xy$;

г) $(S = \{s \in R \mid 0 \le s \le 0,5\} \bigcup \{1\}, \cdot)$;

д) $(U(X),\Delta)$, где $A\Delta B=(A\bigcup B)\setminus(A\bigcap B)$;

е) $(A,\cdot)$, где $A=\{x+y\sqrt{3}\mid x,y\in R\ \&\ x^2+y^2\neq 0\}$.

7. *Пусть* X = $\{1, 2, \ldots, n\}$. *Установите, является ли ассоциативной операция композиции на множестве всех:*

а) преобразований множества X;

б) инъективных преобразований множества X;

в) сюръективных преобразований множества X;

г) биективных преобразований множества X.

8. *Как по таблице Кели можно определить является ли:*

а) операция коммутативной;

б) элемент обратимый слева (справа);

в) левые (правые) нули;

г) левые (правые) единицы.

9. *Пусть на множестве* $T\times T$ *определена операция таким образом:* $(a;b)\circ(c;d)=(a;d)$. *Является ли* $(T^2,\circ)$ *полугруппой?*

10. *Выясните, является ли полугруппой, моноидом или группой множество* $T=\{e,f,g,h\}$ *с операцией, заданной таблицей:*

а)

∘	e	f	g	h
e	e	e	e	e
f	e	e	e	e
g	e	e	g	g
h	e	e	g	g

б)

∘	e	f	g	h
e	f	g	g	h
f	g	f	h	g
g	g	h	f	g
h	h	g	g	f

9.5. Контрольные вопросы

1. Дайте определение полугруппы.
2. Приведите примеры разных полугрупп.
3. Какая полугруппа называется коммутативной?

4. Что такое левый и правый нейтральный элемент полугруппы?

5. Как определяется двусторонний нейтральный элемент в полугруппе?

6. Может ли в полугруппе существовать два разных двусторонних нейтральных элемента?

7. Сформулируйте определение моноида. Приведите примеры различных моноидов.

8. Существует ли полугруппа, которая не является моноидом?

9. Какая полугруппа называется сократимой слева? Сократимой справа? Двусторонне сократимой?

10. Приведите примеры сократимых полугрупп.

11. Что такое левый и правый нулевой элемент полугруппы?

12. Как определяется двусторонний нулевой элемент?

13. Могут ли нейтральный и нулевой элементы полугруппы совпасть?

14. Определите понятие обратного элемента моноида к заданному элементу.

15. Как обозначается обратный элемент моноида к элементу x?

16. Что такое обратимый элемент моноида?

17. Каждый ли элемент любого моноида является обратимым?

18. Сформулируйте определение групп. Приведите примеры разных групп.

19. Как определяется гомоморфизм полугруппы?

20. При каком условии гомоморфизм полугруппы называется изоморфизмом?

21. Каким символом обозначают изоморфные полугруппы? Укажите примеры изоморфных полугрупп и групп.

Тема 10. Структуры с двумя операциями

Ключевые понятия: полукольцо, кольцо, коммутативное кольцо, кольцо с единицей, левый (правый) делитель нуля, левый (правый) делитель единицы, область целостности, поле.

10.1. Краткие теоретические сведения

Пусть K – произвольное непустое множество, $\oplus$ и $\otimes$ – произвольные бинарные операции на K, которые для удобства называют сложением и соответственно умножением.

Алгебраическая система $(K,\oplus,\otimes)$ называется **полукольцом**, если $(K,\oplus)$ – абелева полугруппа, $(K,\otimes)$ – полугруппа и операция $\otimes$ является дистрибутивной относительно операции $\otimes$.

Полукольцо $(K,\oplus,\otimes)$ называется **кольцом**, если $(K,\oplus)$ является группой.

Коммутативным кольцом называется кольцо $(K,\oplus,\otimes)$, в котором операция $\otimes$ является коммутативной.

Кольцо $(K,\oplus,\otimes)$ называется **кольцом с единицей**, если в K существует нейтральный элемент относительно операции умножения $\otimes$.

Если в кольце $(K,\oplus,\otimes)$ существуют ненулевые элементы x и y такие, что $x\otimes y=0$, то x называется **левым**, а y – **правым делителем нуля.**

Коммутативное кольцо с единицей без делителей нуля называется **областью целостности.**

Если в кольце $(K,\oplus,\otimes)$ с единицей e существуют неединичные элементы x и y такие, что $x\otimes y=e$, то x называется **левым**, а y – **правым делителем единицы.**

В коммутативном кольце понятия левого и правого делителей нуля (единицы) совпадают.

Полем называется коммутативное кольцо с единицей, в котором для каждого ненулевого элемента существует обратный к нему элемент.

Пусть $(K,+,\cdot)$ и $(K^{'},\oplus,\otimes)$ – произвольные кольца. Биективное отображение $\varphi : K \to K^{'}$ называется **изоморфизмом** колец, если $\varphi(x+y)=\varphi(x)\oplus\varphi(y),\ \varphi(x\cdot y)=\varphi(x)\otimes\varphi(y)$ для всех $x,y\in K$. Кольца K и $K^{'}$ при этом называют **изоморфными**, обозначая $K\cong K^{'}$.

10.2. Примеры решения задач

Задача 1. *На множестве* $K = Z\times Z$ *определены две бинарные операции* $\oplus$ *и* $\otimes$ *по правилу:*

$$(a;b)\oplus(c;d)=(a+c;b+d),$$

$$(a;b)\otimes(c;d)=(ac-bd;ad+bc).$$

Докажите, что $(K,\oplus,\otimes)$ *– полукольцо.*

Решение

Пусть $(a;b),(c;d),(x;y)\in K$ – произвольные элементы.

Поскольку $a+c, b+d\in Z$ и $ac-bd, ad+bc\in Z$, то $(a+c;b+d)\in K$ и $(ac-bd;ad+bc)\in K$, следовательно, операции $\oplus$ и $\otimes$ замкнутые.

Благодаря ассоциативности обычного сложения и умножения на множестве Z, обе операции являются ассоциативными.

$$((a;b)\oplus(c;d))\oplus(x;y)=(a+c;b+d)\oplus(x;y)=$$
$$=((a+c)+x;\ (b+d)+y)=(a+(c+x);\ b+(d+y))=$$
$$=(a;b)\oplus(c+x;d+y)=(a;b)\oplus((c;d)\oplus(x;y)),$$

$$((a;b)\otimes(c;d))\otimes(x;y)=(ac-bd;\ ad+bc)\otimes(x;y)=$$
$$=((ac-bd)x-(ad+bc)y;\ (ac-bd)y+(ad+bc)x)=$$
$$=(acx-bdx-ady-bcy;\ acy-bdy+adx+bcx),$$

$$(a;b)\otimes((c;d)\otimes(x;y))=(a;b)\otimes(cx-dy,cy+dx)=$$
$$=(a(cx-dy)-b(cy+dx),\ a(cy+dx)+b(cx-dy))=$$
$$=(acx-ady-bcy-bdx,\ acy+adx+bcx-bdy).$$

Справедливость правого дистрибутивного закона умножения относительно сложения следует из уравнений.

$$((a,b)\oplus(c,d))\otimes(x,y)=(a+c,b+d)\otimes(x,y)=$$
$$=((a+c)x-(b+d)y,(a+c)y+(b+d)x)=$$
$$=(ax+cx-by-dy,ay+cy+bx+dx),$$
$$((a,b)\otimes(x,y))\oplus((c,d)\otimes(x,y))=$$
$$=(ax-by,ay+bx)\oplus(cx-dy,cy+dx)=$$
$$=(ax-by+cx-dy,ay+bx+cy+dx).$$

Аналогично доказывается левый дистрибутивный закон.

Таким образом, $(K,\oplus,\otimes)$ – полукольцо.

Задача 2. *Найдите все делители единицы в кольце целых гауссовых чисел* $(Z[i]=\{a+bi\,|\,a,b\in Z\},+,\cdot)$.

Решение

В кольце $Z[i]$ единицей является число $1=1+0i\in Z[i]$. Пусть $a+bi,\ c+di\in Z[i]$ такие, что $(a+bi)(c+di)=1$.

Тогда $|(a+bi)(c+di)|=|1|$, отсюда $|(a+bi)||(c+di)|=|1|$. Это означает, что $(a^2+b^2)(c^2+d^2)=1$.

Поскольку $a,b,c,d\in Z$, то $a^2+b^2=1$ и $c^2+d^2=1$. Тогда $a=0,\ b=\pm1$ или $a=\pm1,\ \ b=0$. Аналогично, $c=0,\ d=\pm1$ или $c=\pm1,\ d=0$.

Следовательно, делителями единицы являются лишь числа: 1, -1, *i*, -*i*.

Задача 3. *Проверьте, является ли полем алгебра:*

а) (*K*,+,·), где $K=\{m/n\,|\,m,n\in Z\}$.

б)(*N*,+,·).

Решение

а) Да, алгебра (*K*, +) является коммутативной группой, в которой 0 – нейтральный элемент, а для каждого $m/n\in K$ обратным является элемент $-m/n\in K$.

Коммутативной группой является также алгебра $(K\setminus\{0\},\cdot)$, в которой 1 – нейтральный элемент, а для каждого $m/n\in K\setminus\{0\}$ обратным является $n/m\in K\setminus\{0\}$.

Очевидно, что умножение является дистрибутивным относительно сложения. Следовательно, $(K,+,\cdot)$ – поле.

б) Нет, поскольку $(N,+)$ не является группой.

Задача 4. *Пусть* $(P,\oplus,\otimes)$ *– поле и* $a\in P,\ a\neq 0$. *Докажите, что в поле P единственным образом решается уравнение* $b\oplus x\otimes a=0$.

Решение

Пусть $a,\ x,\ b\in P$ такие, что $b\oplus x\otimes a=0$. Прибавив слева к этому уравнению $-b$, получим:

$$-b\oplus(b\oplus x\otimes a)=-b\oplus 0\Rightarrow(-b\oplus b)\oplus x\otimes a=-b\Rightarrow$$
$$0\oplus x\otimes a=-b\Rightarrow\Rightarrow x\otimes a=-b.$$

Поскольку $(P\setminus\{0\},\otimes)$ – группа и $a\neq 0$, то в P существует обратный к нему элемент a^{-1}. Умножим на этот элемент справа последнее уравнение:

$$(x\otimes a)\otimes a^{-1}=-b\otimes a^{-1}\Rightarrow x\otimes(a\otimes a^{-1})=-b\otimes a^{-1}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow x\otimes e=-b\otimes a^{-1}\Rightarrow x=-b\otimes a^{-1}.$$

Полученное решение является единственным, потому что однозначно определяется обратный элемент a^{-1} к элементу a.

Задача 5. *Пусть* $(K,\oplus,\otimes)$ *– произвольная область целостности. Докажите, что отношение* $a\rho b\Leftrightarrow a\vdots b\,\&\,b\vdots a$ *является транзитивным на множестве K.*

Решение

При любых $a,\ b,\ c\in K$ из условий $(a;b)\in\rho\,\&\,(b;c)\in\rho$ следует $a\vdots b\,\&\,b\vdots a$ и $b\vdots c\,\&\,c\vdots b$. Поскольку отношения делимости транзитивное, то $a\vdots c\,\&\,c\vdots a$, то есть $(a;c)\in\rho$. Следовательно, ρ – транзитивное.

10.3. Основные типовые задачи для практической работы

1. *Проверьте, является ли полукольцом алгебраическая система $(A,+,\cdot)$, если:*

а) $A=\varnothing$;

б) $A=\{0\}$;

в) $A=\{1\}$;

г) $A=\{0,1\}$;

д) $A=\{a\}$, где $a\in N$;

е) $A=\{a\}$, где $a\in R,\ a\neq 0$.

2. *Приведите пример кольца, которое:*

а) имеет мультипликативную единицу;

б) не имеет мультипликативную единицу;

в) содержит лишь один элемент;

г) содержит бесконечное количество элементов;

д) не содержит отрицательных чисел;

е) не содержит положительных чисел.

3. *Докажите, что кольцом относительно обычных операций сложения и умножения является множество:*

а) Z;

б) R;

в) $K=\{n/z\mid n\in N, z\in Z\}$;

г) $K=\{a+bi\mid a,b\in Z\}$, где $i=\sqrt{-1}$;

д) $K=\{a/2^k\mid a\in Z, k\in N\}$;

е) $K=\{a+b\sqrt{5}\mid a,b\in Q\}$.

4. *Найдите делители единицы (если они есть) в полукольце:*

а) $(\{0\},+,\cdot)$;

б) $(N,+,\cdot)$;

в) $(K=\{a+bi\mid a,b\in R\},+,\cdot)$;

г) $(Z,+,\cdot)$;

д) $(K=\{a+b\sqrt{5}\mid a,b\in Q\},+,\cdot)$;

е) $(R,+,\cdot)$.

5. *Докажите, что в любом кольце К выполняются такие условия:*

а) $x\cdot 0=0$ при любом $x\in K$;

б) $x\cdot(-y)=-(x\cdot y)$ при любых $x,y\in K$;

в) $(-x)\cdot(-y)=x\cdot y$ при любых $x,y\in K$.

6. *Приведите пример:*

а) области целостности, которая является полем;

б) области целостности, которая не является полем;

в) полукольца, которое является кольцом;

г) полукольца, которое не является кольцом;

д) кольца, которое является областью целостности;

е) кольца, которое не является областью целостности.

7. *Найдите делители нуля (если они есть) в полукольце:*

а) $(\{0\},+,\cdot)$;

б) $(5N,+,\cdot)$;

в) $(7Z,+,\cdot)$;

г) $(Q^{+},+,\cdot)$;

д) $(K=\{a+bi\,|\,a,b\in R\},+,\cdot)$;

е) $(K=\{a+b\sqrt{5}\,|\,a,b\in Q\},+,\cdot)$.

8. *Пусть A – множество всех колец. Докажите, что:*

а) $K_1\cong K_2 \Rightarrow K_2\cong K_1$ для всех $K_1,\ K_2\in A$;

б) $K_1\cong K_2\ \&\ K_2\cong K_3 \Rightarrow K_1\cong K_3$ для всех $K_1,K_2,K_3\in A$.

9. *Пусть* $(P,\oplus,\otimes)$ *– поле и* $a\in P$, $a\neq 0$. *Покажите, что в поле P единственным образом решается уравнение* $a\otimes x\oplus b=0$.

10. *Докажите, что полем является алгебра:*

а) $(E=\{0,1\},\oplus,\cdot)$, где $1\oplus 1=0,\ 1\oplus 0=0\oplus 1=1,\ 0\oplus 0=0,\ \cdot$ – обычное умножение;

б) $(K=\{n/z\,|\,n\in N, z\in Z\},+,\cdot)$;

в) $(3Q,+,\cdot)$;

г) $(R,+,*)$, где $x*y=5xy$.

11. *Проверьте, является ли кольцом алгебра* $(B,\oplus,\otimes)$, *если:*

а) $B=U(X),\ \oplus=\Delta$ и $\otimes=\bigcup$;

б) $B=U(X),\ \oplus=\Delta$ и $\otimes=\bigcap$;

г) $B=U(X),\ \oplus=\bigcup$ и $\otimes=\setminus$;

д) $B=U(X),\ \oplus=\setminus$ и $\otimes=\bigcap$.

12. *Докажите, что в любом поле* $(P,\oplus,\otimes)$ *выполняются такие условия:*

а) $(-x)=x\otimes(-1)$;

б) $-(x\oplus y)=(-x)\oplus(-y)$;

в) $x\neq 0\Rightarrow(x^{-1})^{-1}=x$;

г) $x\oplus y=0\Rightarrow(x=0\vee y=0)$.

13. *Пусть* $(K,\oplus,\otimes)$ *– произвольная область целостности. Покажите, что:*

а) отношение $a\rho b\Leftrightarrow a\vdots b\,\&\,b\vdots a$ является эквивалентностью на множестве *К*;

б) полугруппа $(K,\otimes)$ является сократимой тогда и только тогда, когда $x\neq 0\,\&\,y\neq 0\Rightarrow x\otimes y\neq 0$ для всех $x,y\in K$.

14. *Установите, является ли полукольцом, кольцом или полем алгебра:*

а) $(K=\{a/5^{l}\mid a\in Z,l\in N\},+,\cdot)$;

б) $(Q,+,*)$, где $x*y=9xy$;

в) $(P=\{0,1\},+,\cdot)$;

г) $(E=\{-1,1,0\},\oplus,\cdot)$, где $1\oplus 1=-1$, $(-1)\oplus(-1)=1$, другие случаи сложения и умножения – обычные.

15. *Является ли изоморфизмом колец отображение:*

а) $\varphi: C\to C: a+bi\mapsto a-bi$, где $(C,+,\cdot)$ – кольцо всех комплексных чисел;

б) $\varphi: K\to K: a+b\sqrt{2}\mapsto a-b\sqrt{2}$, где $(K,+,\cdot)$ – кольцо всех чисел вида $x+y\sqrt{2}$, x, $y\in R$.

10.4. Задания для самостоятельной работы

1. *Проверьте, является ли кольцом алгебра* $(B,+,\cdot)$*, если:*

а) $B=\varnothing$;

б) $B=\{0\}$;

в) $B=\{-1,1\}$;

г) $B=\{0,1,-1\}$;

д) $B=\{b\}$, где $b\in Z^{-}$;

е) $B=\{b\}$, где $b\in R$, $b\neq 0$.

2. *Докажите, что в любом кольце* $(K,\oplus,\otimes)$ *выполняются такие условия:*
а) $0\otimes x=0$ при любом $x\in K$;
б) $(-x)\otimes y=-(x\otimes y)$ при любых $x,y\in K$.
3. *Найдите делители нуля (если они есть) в полукольце:*
а) $(\{0\},+,\cdot)$;
б) $(11N,+,\cdot)$;
в) $(K=\{a+bi\,|\,a,b\in Q\},+,\cdot)$;
г) $(13Z,+,\cdot)$;
д) $(K=\{a+b\sqrt{5}\,|\,a,b\in 2Z\},+,\cdot)$;
е) $(4R,+,\cdot)$.
4. *Приведите пример полукольца, которое:*
а) имеет мультипликативный нуль;
б) не имеет мультипликативный нуль;
в) содержит лишь два элемента;
г) содержит больше, чем два элемента;
д) содержит отрицательные целые числа;
е) содержит положительные целые числа.
5. *Выясните, является ли полем относительно обычных матричных операций сложения и умножения множество:*
а) всех $n\times n$ действительных матриц;
б) всех $n\times n$ действительных невырожденных матриц;
в) всех $n\times n$ действительных симметричных матриц;
г) всех $n\times n$ действительных косимметричных матриц;
д) всех $n\times n$ действительных скалярных матриц;
е) всех $n\times n$ действительных диагональных матриц.
6. *Пусть* $(K,\oplus,\otimes)$ *– область целостности. Докажите, что для всех* $x,y,z\in K$ *выполняются условия:*
а) $x\,\vdots\,1$;
б) $0\,\vdots\,x$;
в) $x\,\vdots\,y \Rightarrow xz\,\vdots\,y$;
г) $x\,\vdots\,y\ \&\ y\,\vdots\,z \Rightarrow (x\oplus y)\,\vdots\,z$;
д) $x\,\vdots\,z\ \&\ y\,\vdots\,z \Rightarrow (x-y)\,\vdots\,z$;

г) $x \vdots y \,\&\, y \vdots x \Leftrightarrow x = y\varepsilon$, где ε – делитель единицы.

7. *Найдите делители единицы (если они есть) в полукольце:*

а) $(\{0\},+,\cdot)$;

б) $(17N,+,\cdot)$;

в) $(19Z,+,\cdot)$;

г) $(R^{+},+,\cdot)$;

д) $(K=\{x+yi \mid x,y\in Z\},+,\cdot)$;

е) $(K=\{x+y\sqrt{3} \mid x,y\in R\},+,\cdot)$.

8. *Докажите, что:*

а) делитель единицы кольца с единицей не может быть делителем нуля;

б) поле не содержит делителей нуля;

в) множество всех делителей единицы кольца с единицей образует мультипликативную группу;

г) кольцо K – коммутативное, если $x^2 = x$ для каждого элемента $x \in K$.

9. *Пусть* $(K,\oplus)$ – *произвольная абелева группа. Проверьте, будет ли* $(K,\oplus,\otimes)$ – *кольцом, если для всех* $x,y\in K$ *положить:*

а) $x\otimes y=0$;

б) $x\otimes y=x+y$;

в) $x\otimes y=y-x$;

г) $x\otimes y=y$;

д) $x\otimes y=x$;

е) $x\otimes y=-x-y$.

10. *Установите, является ли полукольцом, кольцом или полем множество* $Z\times Z$ *относительно операций:*

а) $e;f \;\oplus\; g;h \;=\; e+g;\, f+h$,

$e;f \;\otimes\; g;h \;=\; eg;\, fh$;

б) $e;f \;\oplus\; g;h \;=\; eg;\, fh$,

$e;f \;\otimes\; g;h \;=\; e+g;\, f+h$;

в) $e; f \;\oplus\; g; h \;=\; e+f; g+h$,

$e; f \;\otimes\; g; h \;=\; ef; gh$;

г) $e; f \;\oplus\; g; h \;=\; e+g; f+h$,

$e; f \;\otimes\; g; h \;=\; 0; 0$;

д) $e; f \;\oplus\; g; h \;=\; e+g; f+h$,

$e; f \;\otimes\; g; h \;=\; eg+fh; eh+fg$;

е) $e; f \;\oplus\; g; h \;=\; 0; 0$,

$e; f \;\otimes\; g; h \;=\; 1; 1$;

10.5. Контрольные вопросы

1. Что такое полукольцо?
2. Приведите примеры разных полуколец.
3. Сколько операций задано в полукольце? Какую арность имеют эти операции?
4. Какое полукольцо называют кольцом?
5. Дайте определение кольца.
6. Существует ли такое полукольцо, которое не является кольцом? Если существует, то укажите пример такого полукольца.
7. При каком условии кольцо называется коммутативным?
8. Укажите примеры коммутативных колец.
9. Какое кольцо называется кольцом с единицей?
10. Существуют ли числовые кольца с единицей? Нечисловые кольца с единицей?
11. Определите понятия левого и правого делителей нуля в кольце.
12. Как определяется понятие двустороннего делителя нуля в кольце?
13. Приведите примеры колец с делителями нуля и без делителей нуля.
14. Что такое область целостности?
15. Дайте определения левого и правого делителей единицы в кольце с единицей.

16. Как определяется понятие двустороннего делителя единицы в кольце с единицей?

17. Существует ли такое кольцо с единицей, в котором нуль кольца совпадает с его единицей?

18. Сформулируйте определение поля. Приведите примеры числовых и нечисловых полей.

19. При каком условии кольцо называется полем?

20. Определите понятие поля.

21. Приведите пример кольца, которое не является полем.

22. Что такое изоморфизм колец? Укажите примеры изоморфных колец.

23. Каким символом обозначаются изоморфные кольца?

Индивидуальные задания

Одной из точек контроля качества усвоения знаний является аудиторная, для студентов очной формы обучения, или домашняя котрольная работа для студентов заочной формы обучения. Для студентов, находящихся на индивидуапльном графике – это индивидуальное задание. В случае, если в нагрузке контрольная работа не предусмотена, студенты выполняют индивидуальное задание. Вариант берется согласно номеру по списку в журнале. Каждому варианту соответствует ряд заданий по темам учебно-методического пообия.

Студентам предлагается выполнить три индивидуальных задания.

Индивидуальное задание №1

Вариант	Задание			
	№1	№2	№3	№4
1	1.4.4.а	2.4.2.а	2.4.3.а	3.4.9.а
2	1.4.4.б	2.4.2.б	2.4.3.б	3.4.9.б
3	1.4.4.в	2.4.2.в	2.4.3.в	3.4.9.в
4	1.4.4.г	2.4.2.г	2.4.3.г	3.4.9.г
5	1.4.7.а	2.4.2.д	2.4.4.а	3.4.9.д
6	1.4.7.б	2.4.2.е	2.4.4.б	3.4.9.е
7	1.4.7.в	2.4.1.а	2.4.4.в	3.4.9.ж
8	1.4.7.г	2.4.1.б	2.4.4.г	3.4.9.з
9	1.4.10.а	2.4.1.в	2.4.6.б	3.4.9.и
10	1.4.10.б	2.4.1.г	2.4.6.г	3.4.9.к
11	1.4.10.в	2.4.1.д	2.4.6.д	3.4.9.л
12	1.4.10.г	2.4.1.е	2.4.6.е	3.4.9.м

Индивидуальное задание №2

Вариант	Задание						
	№1	№2	№3	№4	№5	№6	№7
1	4.4.1.а	4.4.7.а	5.4.5.а	6.4.8.а	6.4.4.а	7.4.4.а	7.3.10.д
2	4.4.1.б	4.4.7.б	5.4.5.б	6.4.8.б	6.4.4.б	7.4.4.б	7.3.10.е
3	4.4.1.в	4.4.7.в	5.4.5.в	6.4.8.в	6.4.4.в	7.4.4.в	7.3.3.д
4	4.4.1.г	4.4.7.г	5.4.5.г	6.4.8.г	6.4.4.г	7.4.4.г	7.3.3.е
5	4.4.2.а	4.4.7.д	5.4.5.д	6.4.8.д	6.4.3.а	7.4.4.д	7.3.5.д
6	4.4.2.б	4.4.7.е	5.4.5.е	6.4.8.е	6.4.3.б	7.4.4.е	7.3.5.е
7	4.4.2.в	4.4.9.а	5.4.5.ж	6.4.8.ж	6.4.3.в	7.4.6.а	7.3.6.д
8	4.4.2.г	4.4.9.б	5.4.3.ж	6.4.8.з	6.4.3.г	7.4.6.б	7.3.1.д
9	4.4.4.д	4.4.9.в	5.4.3.з	6.4.2.а	6.4.5.а	7.4.6.в	7.4.2.е
10	4.4.4.е	4.4.9.г	5.4.4.а	6.4.2.б	6.4.5.б	7.4.6.г	7.3.1.е
11	4.4.4.ж	4.4.9.д	5.4.4.б	6.4.2.в	6.4.5.в	7.4.6.д	7.4.2.д
12	4.4.4.з	4.4.9.е	5.4.4.в	6.4.2.г	6.4.5.г	7.4.6.е	7.3.6.е

Индивидуальное задание №3

Вариант	Задание				
	№1	№2	№3	№4	№5
1	8.4.3.а	8.4.5.а	9.4.3.а	9.4.2.а	10.4.9.а
2	8.4.3.б	8.4.5.б	9.4.3.б	9.4.2.б	10.4.9.б
3	8.4.3.в	8.4.5.в	9.4.3.в	9.4.2.в	10.4.9.в
4	8.4.3.г	8.4.5.г	9.4.3.г	9.4.2.г	10.4.9.г
5	8.4.3.д	8.4.5.д	9.4.3.д	9.4.2.д	10.4.9.д
6	8.4.3.е	8.4.5.е	9.4.3.е	9.4.2.е	10.4.9.е
7	8.4.4.а	8.4.9.а	9.4.4.а	9.4.6.а	10.4.10.а
8	8.4.4.б	8.4.9.б	9.4.4.б	9.4.6.б	10.4.10.б
9	8.4.4.в	8.4.9.в	9.4.4.в	9.4.6.в	10.4.10.в
10	8.4.4.г	8.4.9.г	9.4.4.г	9.4.6.г	10.4.10.г
11	8.4.4.д	8.4.9.д	9.4.4.д	9.4.6.д	10.4.10.д
12	8.4.4.е	8.4.9.е	9.4.4.е	9.4.6.е	10.4.10.е

Заключение

Для детального и более эффективного изучения курса «Дискретная математика» в учебно-методическом пособии «Дискретная математика. Часть 1» представлены необходимые краткие теоретические сведения, методика решения типовых задач, а также задачи, предназначенные для коллективного решения в аудитории и для самостоятельной работы.

Структура учебно-методического пособия позволяет организовать последовательную самостоятельную проработку студентами теоретического и практического материала.

В учебно-методическом пособии представлен материал, который соответствует разделам учебной дисциплины «Дискретная математика»: множества, отношения, алгебраические структуры. Для более углубленного изучения теории множеств и отношений рекомендуется использовать литературу – [2, 4,5 ,7 9, 10]; для изучения свойств алгебраических структур - [1, 6, 8, 14-21].

Список рекомендованной литературы

1. Асанов М.О. Дискретная математика: графы, матроиды, алгоритмы : учебное пособие / М.О. Асанов, В.А. Баранский, В.В. Расин. – СПб.: Лань, 2010. – 368 с.
2. Бабичева И.В. Дискретная математика. Контролирующие материалы к тестированию : учебное пособие / И.В. Бабичева. – СПб.: Лань, 2013. – 160 с.
3. Баврин И.И. Дискретная математика для педагогических вузов: Учебник и задачник для прикладного бакалавриата / И.И. Баврин. – Люберцы: Юрайт, 2015. – 208 с.
4. Баврин И.И. Дискретная математика: Учебник и задачник для СПО / И.И. Баврин. – Люберцы: Юрайт, 2016. – 209 с.
5. Вороненко, А.А. Дискретная математика. Задачи и упражнения с решениями: Учебно-методическое пособие / А.А. Вороненко. – М.: НИЦ ИНФРА-М, 2013. – 104 с.
6. Галкина В.А. Дискретная математика: комбинаторная оптимизация на графах / В.А. Галкина. – М.: Гелиос АРВ, 2003. – 232 с.
7. Гладков Л.А. Дискретная математика / Л.А. Гладков, В.В. Курейчик, В.М. Курейчик. – М.: Физматлит, 2014. – 496 с.
8. Дмитриевский В.Н. Дискретная математика: графы, матроиды, алгоритмы: Учебное пособие / В.Н. Дмитриевский. – СПб.: Лань КПТ, 2016. – 368 с.
9. Иванов А.А. Дискретная математика для инженера: Учебник / А.А. Иванов, Г.И. Пронина, Н.Ю. Корягина. - СПб. : Лань, 2016. – 400 с.
10. Калмыкова М.С. Дискретная математика для бакалавра: множества, отношения, функции, графы: Учебное пособие / М.С. Калмыкова, М.В. Калмыков, Р.В. Белоусова. – СПб. : Лань, 2012. – 192 с.
11. Коростелёва Л.А. Дискретная математика: Учебное пособие / Л.А. Коростелёва, А.Г. Кощаев. – СПб. : Лань, 2016. – 592 с.
12. Кузичев А.С. Диаграммы Венна. История и применения. – М. : Наука, 1968. – 249 с.
13. Кузнецов О.П. Дискретная математика для инженера : учебник 2014 год. / О.П. Кузнецов. – СПб. : Лань,

2014. – 400 с.
14. Куликов В.В. Дискретная математика : учебное пособие / В.В. Куликов. – М. : ИД РИОР, 2013. – 174 с.
15. Мальцев И.А. Дискретная математика: Учебное пособие / И.А. Мальцев. – СПб. : Лань, 2011. – 304 с.
16. Микони С.В. Дискретная математика для бакалавра: множества, отношения, функции, графы : учебное пособие / С.В. Микони. – СПб. : Лань, 2012. – 192 с.
17. Новиков Ф.А. Дискретная математика: Учебник для вузов. Стандарт третьего поколения / Ф.А. Новиков. – СПб. : Питер, 2013. – 432 с.
18. Окулов С.М. Дискретная математика. Теория и практика решения задач по информатике : учебное пособие / С.М. Окулов. – М. : Бином, 2014. – 422 с.
19. Окулов С.М. Дискретная математика.Теория и практика решения задач по информатике / С.М. Окулов. – М. : Бином. Лаборатория знаний, 2011. – 422 с.
20. Просветов Г.И. Дискретная математика: задачи и решения : учебное пособие / Г.И. Просветов. – М. : БИНОМ. ЛЗ, 2011. – 222 с.
21. Просветов Г.И. Дискретная математика: задачи и решения : учебно-практическое пособие / Г.И. Просветов. – М. : Альфа-Пресс, 2013. – 240 с.
22. Прудникова, И.В. Дискретная математика: Практическая дискретная математика и математическая логика. Учеб.пособие / И.В. Прудникова и др. - М.: Финансы и статистика, 2012. - 384 с.
23. Тишин В.В. Дискретная математика в примерах и задачах / В.В. Тишин. – СПб. : BHV, 2012. – 352 с.
24. Хаггард Г. Дискретная математика для программистов : учебное пособие / Г. Хаггард, Д. Шлипф, С. Уайтсайдс ; Пер. с англ. Н.А. Шихова ; Под ред. А.А. Сапоженко. – М. : БИНОМ. ЛЗ, 2012. – 627 с.
25. Хаггарти Р. Дискретная математика для программистов / Р. Хаггарти ; Пер. с англ. С.А. Кулешов. – М. : Техносфера, 2012. – 400 с.
26. Шевелев Ю.П. Дискретная математика: Учебное пособие / Ю.П. Шевелев. – СПб. : Лань, 2016. – 592 с.

Учебное издание

ДАВЫСКИБА Оксана Викторовна
ИЕ Ольга Николаевна
СКРИННИКОВА Анна Владимировна
КИРИЧЕВСКИЙ Ростислав Викторович
ТЕМНИКОВА Светлана Владимировна

Дискретная математика. Часть 1

В авторской редакции
Редактор – Темникова С.В.
Дизайн обложки – Ие О.Н.
Компьютерный макет – Давыскиба О.В.
Корректор – Скринникова А.В.

Подписано в печать 00.00.2019. Бумага офсетная.
Гарнитура Times New Roman.
Печать ризографическая. Формат $60 \times 84/16$. Усл. печ. л. 7.90.
Тираж 100 экз. Заказ № 00.

Издатель
ГОУ ВПО ЛНР «Луганский национальный университет имени
Тараса Шевченко
«Книта»
ул. Оборонная, 2, г. Луганск, ЛНР, 91011. Т/ф: (0642) 58-03-20
e-mail: knitaizd@mail.ru