

**Межвузовский сборник  
научных работ студентов**



**Выпуск 6**



**Луганск 2020**

Рекомендовано к печати Ученым советом Луганского  
национального университета имени Владимира Даля  
(протокол № 10 от 25. 05. 2020 г.)

**Редакционный совет:**

Председатель д.т.н., проф. Ю.И. Гутько  
Заместитель председателя д.т.н., проф. Л.А. Рябичева  
Ответственный секретарь к.т.н., проф. Коваленко А.А.

*Витренко В.А.*, д.т.н., профессор.  
*Коваленко А.А.*, к.т.н., профессор.  
*Сумбатьян М.А.* д-р физ.-мат. наук профессор.  
*Гусенцова Я.А.*, д.т.н., профессор.  
*Недопекин Ф.В.*, д.ф-м. н., профессор.  
*Белоусов В.В.*, д.ф-м-н., профессор.

С 232 *Межвузовский сборник научных работ студентов.* –  
Луганск: Издательство Луганского национального университета им  
В. Даля, 2020. – 167 с.

Перед вами шестой выпуск межвузовского сборника научных работ студентов, традиционно выпускаемый кафедрой «Гидрогазодинамика» Луганского национального университета имени Владимира Даля (ЛНУ им. В. Даля), начиная с 2015 года. Материалы научных статей получены в результате участия студентов в научных кружках, участия в выполнении хоздоговорных и бюджетных кафедральных работ.

В выпусках сборника принимали участие студенты ЛНУ им. В. Даля, Южного Федерального Университета (Россия), Белорусского политехнического университета (Республика Беларусь), Донецкого национального и технического университетов (Донецкая Народная Республика).

Материалы публикуются языком оригинала.

© Луганский национальный университет имени Владимира Даля

**Балицкий А.Ю.**

научный руководитель к.т.н., доцент Малый В.В.

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В СТРАТЕГИЧЕСКОМ  
УПРАВЛЕНИИ ПРЕДПРИЯТИЕМ РЫНОЧНОГО ТИПА**

*Луганский национальный университет имени Владимира Даля*

*Кафедра прикладной математики ..... 87*

**Калайдо Ю.Н.**

научный руководитель к.т.н., доцент Таращанский М.Т.

**ИСПОЛЬЗОВАНИЕ КОНФОРМНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ  
В РАСЧЕТЕ ПОЛЯ СКОРОСТЕЙ ВОЗДУШНОГО ПОТОКА  
В УСЛОВИЯХ ВЫТЕСНЯЮЩЕЙ ВЕНТИЛЯЦИИ**

*Луганский национальный университет имени Владимира Даля*

*Кафедра прикладной математики ..... 97*

**Карягин В.С.**

научный руководитель к.т.н., доцент Таращанский М.Т.

**АНАЛИЗ ДИНАМИКИ ПОПУЛЯЦИЙ**

*Луганский национальный университет имени Владимира Даля*

*Кафедра прикладной математики ..... 107*

**Владимиров В. Ю.**

научный руководитель к. т. н., доцент Таращанский М. Т.

**ОПТИМАЛЬНАЯ СТРАТЕГИЯ ИГРЫ В ГОМОКУ С  
ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПОИСКА НА ОСНОВЕ ЗАВИСИМОСТЕЙ**

*Луганский национальный университет имени Владимира Даля*

*Кафедра прикладной математики ..... 117*

**Полищук Н.А.,**

научный руководитель к.т.н., доцент Таращанский М.Т.

**ПРИМЕНЕНИЕ ПОЛИНОМОВ ЛЕЖАНДРА ПРИ РЕШЕНИИ  
ЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА ВТОРОГО  
РОДА**

*Луганский национальный университет имени Владимира Даля*

*Кафедра прикладной математики ..... 128*

**Лебедев А.В.**

научный руководитель к.т.н., доцент Таращанский М.Т.

**ОПТИМАЛЬНАЯ СТРАТЕГИЯ УБЕГАЮЩЕГО  
ПРИ СБЛИЖЕНИИ С ДОГОНЯЮЩИМ  
В ЗАДАЧЕ ПРЕСЛЕДОВАНИЯ**

*Луганский национальный университет имени Владимира Даля*

*Кафедра прикладной математики ..... 136*

УДК 517.7

Калайдо Ю.Н.,  
научный руководитель к.т.н., доцент Таращанский М.Т.

## ИСПОЛЬЗОВАНИЕ КОНФОРМНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ В РАСЧЕТЕ ПОЛЯ СКОРОСТЕЙ ВОЗДУШНОГО ПОТОКА В УСЛОВИЯХ ВЫТЕСНЯЮЩЕЙ ВЕНТИЛЯЦИИ

Луганский национальный университет имени Владимира Даля  
Кафедра прикладной математики

*Аннотация.* В работе рассмотрены особенности использования конформных преобразований в задачах вытесняющей вентиляции помещений, которая на сегодняшний день наиболее перспективна.

Для условий плоскопараллельного стационарного течения построены модели движения воздушного потока в помещениях, содержащих различные препятствия (перегородки, ступени). С использованием интеграла Кристоффеля-Шварца получены функции, отображающие многоугольники заданной формы, построена визуализация полей скоростей воздушных потоков, обтекающих заданные препятствия.

*Ключевые слова:* конформное отображение, гармоническая функция, комплексный потенциал, функция тока, многоугольник, вытесняющая вентиляция.

*Summary.* The paper considers the features of using conformal transformations in the problems of displacing ventilation of premises, which is currently the most promising.

For the conditions of a plane-parallel stationary flow, models of air flow into rooms containing various barriers (partitions, steps) are constructed. Using the Kristoffel-Schwartz integral, functions that display polygons of a given shape are obtained, and visualization of air flow velocity fields that flow around given obstacles is constructed.

*Keywords:* conformal mapping, harmonic function, complex potential, current function, polygon, exhaust ventilation.

### Введение

Качественный воздухообмен является одной из главных потребностей человека. Все помещения, в которых люди находятся длительные промежутки времени должны быть оснащены системами вентиляции. Отсутствие качественной вентиляции, которая

обеспечивает приток и отведение воздушных потоков, приводит к снижению работоспособности и ухудшению общего состояния человека.

Один из видов таких систем – система вытесняющей вентиляции (Displacement Ventilation, DV, и их модификации – Cooled Beam, UFAD и т. п.). Основное преимущество вытесняющей вентиляции – существенное повышение качества воздуха. При неизменных объемах подаваемого воздуха и эмиссии загрязняющих веществ и равных прочих условиях качество воздуха в обслуживаемой зоне будет лучше, если в помещении используется вытесняющая вентиляция, а не традиционная перемешивающая (MV).

Равномерная подача и удаление воздуха при низкой скорости – основной признак вытесняющей вентиляции. Ее эффективность повышается при увеличении стационарности воздушного потока.

Несмотря на то, что на сегодняшний день широко распространена вытесняющая вентиляция производственных и общественных помещений, как один из способов организации воздухообмена, методы расчета и проектирования таких систем еще не достаточно разработаны.

Расчет таких систем вентиляции (определение линий тока и величины скорости воздушного потока) затрудняется многоуровневым устройством и присутствием перегородок в помещении. Традиционное описание процессов газовой динамики, основанное на использовании численных методов, включает в себя большой объем расчетов. Использование аналитического метода – метода конформных отображений более целесообразно. Данный метод позволяет перейти от сложных заданных областей, включающих в себя препятствия, к областям более простого вида.

### **Постановка задачи**

Рассмотрим установившееся (стационарное) движение потока воздуха, при котором его основные параметры (скорость, давление, плотность) в данной точке пространства не изменяются с течением времени. Также будем считать данный поток плоскопараллельным, без источников и стоков, без турбулентности. Все эти условия соблюдаются с достаточной точностью в случае вытесняющей вентиляции. Именно эти условия позволяют перейти к рассмотрению поставленной задачи на плоскости.

Плоскопараллельным принято считать такой поток, у которого все частицы газа, лежащие в какой-либо плоскости остаются в ней в течение всего времени движения. Движения во всех плоскостях параллельных данной плоскости совпадают. Как и любое течение

плоскопараллельное течение газа задается полем скоростей  $\vec{V} = \vec{V}(x, y, t)$  частиц. Если движение стационарное и проекции скоростей равны соответственно  $u = u(x, y)$  и  $v = v(x, y)$ , то для идеального газа должны выполняться условия несжимаемости и отсутствие вихрей:

$$\operatorname{div} \vec{V} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0; \quad (1)$$

$$\operatorname{rot} \vec{V} = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = 0. \quad (2)$$

Из условий (1) и (2) следует, что в случае идеального газа выражение  $u dx + v dy$  является полным дифференциалом, то есть существует функция  $\varphi(x, y)$  – потенциал скоростей:

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}; \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}.$$

Она является гармонической функцией, для которой выполняется:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0.$$

Кривые  $\varphi(x, y) = \text{const}$  – эквипотенциальные линии потока или линии уровня.

Сопряженная функция для потенциала скоростей – функция тока:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}; \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Кривые  $\psi(x, y) = \text{const}$  – линии тока или траектории потока.

Эта функция также является гармонической функцией, следовательно можно составить аналитическую функцию комплексного переменного:

$$\Omega(z) = \varphi(z) + i\psi(z). \quad (3)$$

Функция (3) является комплексным потенциалом течения.

Производная от комплексного потенциала – комплексная скорость:

$$\frac{d\Omega}{dz} = u - i v,$$

То есть всякому безвихревому течению идеальной жидкости или газа в некоторой области  $D$  соответствует аналитическая в этой области функция – комплексный потенциал течения. Аналитические функции полностью описывают кинематику движения идеального газа.

В ходе решения многих задач вентиляции возникает необходимость преобразования сложной заданной области в область более простого вида. Отображение окрестности  $z_0$  на окрестность точки  $w_0$ , осуществляемое функцией  $w = f(z)$  – конформное отображение, если в точке  $z_0$  оно обладает свойством постоянства углов, как по величине, так и по ориентации, между кривыми линиями и постоянством растяжений. Отображение  $w = f(z)$  называется в конформным в области  $D$ , если оно конформно в каждой точке этой области.

Перегородки и ступени при расчете можно представить в виде многоугольников. Если  $\Pi$  – ограниченный многоугольник на плоскости  $S$ , то по теореме Римана существует конформное отображение верхней полуплоскости на внутренность  $\Pi$ . Такое отображение определяется неоднозначно. Все подобные отображения для заданного многоугольника  $\Pi$  описывает теорема Кристоффеля-Шварца. Пусть функция  $w = f(z)$  конформно отображает верхнюю полуплоскость  $\{z: \text{Im } z > 0\}$  на внутренность ограниченного многоугольника с углами  $\alpha_k \pi$  ( $0 < \alpha_k, k = 1, 2, \dots, n$ ) при вершинах, причем известны точки  $a_k$  действительной оси, являющиеся прообразами вершин многоугольника при отображении  $f$  (рис. 1).

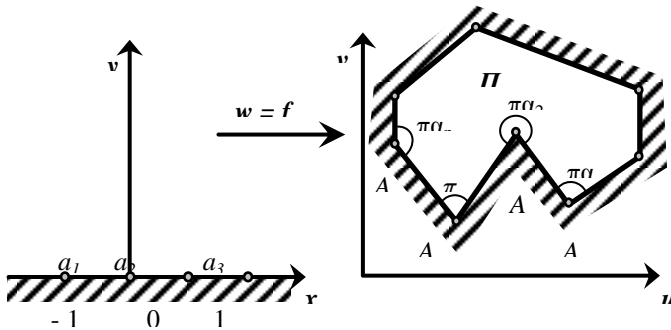


Рис. 1. Отображение верхней полуплоскости на внутренний многоугольник.

Тогда

$$f(z) = c \int_0^z (\xi - a_1)^{\alpha_1 - 1} (\xi - a_2)^{\alpha_2 - 1} \dots (\xi - a_n)^{\alpha_n - 1} d\xi + c_1, \quad (4)$$

где  $c, c_1$  – комплексные константы и интеграл берется по произвольной кривой в верхней полуплоскости, соединяющей точки 0 и  $z$ .

В формуле Кристоффеля, задающей функцию  $w = f(z)$ , предполагается, что известны  $a_1, \dots, a_n$  – прообразы вершин многоугольника. Однако в задачах на конформные отображения обычно задаются лишь вершины  $A_1, \dots, A_n$  многоугольника, а точки  $a_k$  остаются неизвестными. Три из них (например,  $a_1, a_2, a_3$ ) можно выбрать произвольно. Тогда будет выполняться одно из условий нормировки конформного отображения односвязной области, и искомое отображение  $f$  будет единственным. Следовательно, оставшиеся точки  $a_k$  и константы  $c, c_1$  должны единственным образом определяться из условий задачи.

#### Реализация.

Расчет обтекания перегородки и препятствия ступенчатой формы был реализован на основе теоремы Кристоффеля-Шварца. Визуализация поля скоростей стационарного потока построена с использованием математического пакета Maple.

Пример 1. Расчет обтекания перегородки стационарным потоком.

Используя интеграл Кристоффеля-Шварца (4), конформно отобразим верхнюю полуплоскость  $\text{Im } z > 0$  на верхнюю полуплоскость, содержащую перегородку. Перегородка высотой  $h$  расположена параллельно мнимой оси (рис.2)

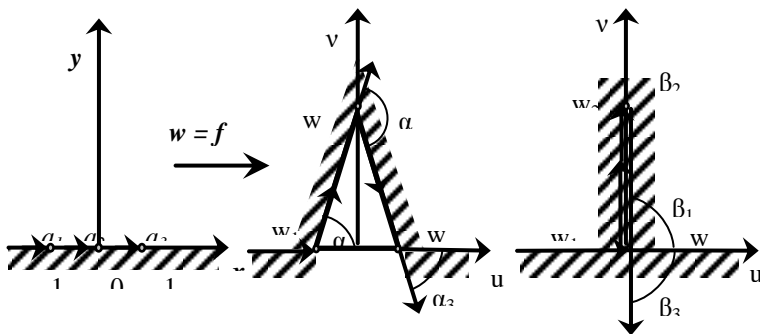


Рис.2. Конформное отображение полуплоскости с перегородкой.



Представим перегородку как многоугольник (треугольник) с вершинами  $AA_1A_2A_3B$ . Пусть вершины на плоскости  $w$  расположены в точках  $A$  ( $w = -\infty$ ),  $B$  ( $w = \infty$ ),  $A_1$  ( $w = -d$ ),  $A_2$  ( $w = ih$ ),  $A_3$  ( $w = -d$ ). Положим, что  $d$  стремится к нулю, следовательно, треугольник превращается в перегородку. Тогда

$$\frac{dw}{dz} = A(z-x_1)^{\beta_1-1} \cdot (z-x_2)^{\beta_2-1} \cdot (z-x_3)^{\beta_3-1}.$$

Точка  $A_1$  отображается в точку  $x_1 = -1$ , внешний угол при вершине  $\beta_1 = \frac{1}{2}$ ; точка  $A_2$  отображается в точку  $x_2 = 0$ , внешний угол при вершине  $\beta_2 = 2$ ; точка  $A_3$  отображается в точку  $x_3 = 1$ , внешний угол при вершине  $\beta_3 = \frac{1}{2}$ .

$$\frac{dw}{dz} = A(z-(-1))^{\frac{1}{2}-1} \cdot (z-0)^{2-1} \cdot (z-1)^{\frac{1}{2}-1},$$

$$\frac{dw}{dz} = A((z+1) \cdot (z-1))^{\frac{1}{2}} \cdot z,$$

$$\frac{dw}{dz} = A \frac{z}{\sqrt{z^2-1}}.$$

Проинтегрировав, получим:

$$w(z) = A \int \frac{z}{\sqrt{z^2-1}} dz + B = A\sqrt{z^2-1} + B.$$

Определяем константы при условии, что  $w(\pm 1) = 0$  и  $w(0) = ih$ :

$$A\sqrt{(\pm 1)^2-1} + B = 0, \quad A\sqrt{(0)^2-1} + B = ih,$$

$$A = h, \quad B = 0.$$

Окончательно, функция имеет вид:

$$w(z) = h\sqrt{z^2-1}. \quad (5)$$

Найдем комплексный потенциал для потока воздуха, обтекающего вертикальную перегородку. Вдали от перегородки скорость воздушного потока направлена параллельно горизонтальной оси и имеет постоянное значение  $U_0$ . Полученная функция (5) конформно отображает верхнюю полуплоскость с перегородкой высотой  $h$  на плоскость  $z$  без этой перегородки. То есть поле скоростей над перегородкой в плоскости  $w$  преобразуется в

однородный поток плоскости  $z$  с комплексной потенциалом  $\Omega(z) = U_0 z = U_0(x + iy)$  и постоянной скоростью  $U_0$ .

Линии тока однородного потока в плоскости  $z$  соответствуют уравнению  $y = c$  ( $c > 0$ ), так как комплексный потенциал  $\Omega(z) = \varphi(z) + i\psi(z)$ , где  $\varphi(z)$  – потенциал – скорости и  $\psi(z)$  – функция тока соответственно. Поле потока на плоскости  $w$  можно описать с помощью следующего комплексного потенциала:

$$\Omega(w) = U_0 w = U_0 \sqrt{\frac{w^2}{h^2} + 1}.$$

Изображение линии тока  $y = c$  на плоскости  $w$  будет определяться следующим уравнением:

$$w(z) = h\sqrt{(x+ic)^2 - 1}.$$

Значения постоянной  $c = 0$  и  $c \rightarrow \infty$  соответствуют значениям  $v = 0$  и  $v \rightarrow \infty$ . Функция тока  $\psi(z) = 0$  когда  $v = 0$  и  $\Omega'(w) \rightarrow \frac{U_0}{h}$  при  $|w| \rightarrow \infty$ . Таким образом, поток обтекает перегородку со скоростью  $u_0 = \frac{U_0}{h}$ .

В математическом пакете Maple строим визуализацию обтекания перегородки с заданными параметрами ( $h = 4$ ). В результате получаем наглядную картину распределения потенциала скоростей и линий тока вблизи перегородки (рис.3)

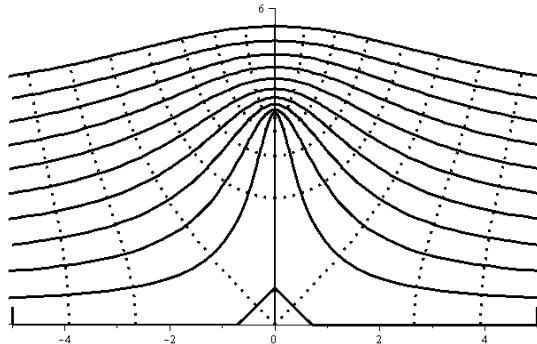


Рис. 3. Поле скоростей воздушного потока, обтекающего перегородку заданной высоты.

Пример 2. Расчет обтекания ступеньки высотой  $h$  стационарным потоком со скоростью  $(U_0, 0)$  на бесконечности.

Отобразим верхнюю полуплоскость на ступень следующего вида ( $u < 0$  при  $v = 0$ ;  $u > 0$  при  $v = -i$ ). Точка  $A_1$  ( $w_1 = 0$ ) отображается в точку  $x_1 = -1$ , точка  $A_2$  ( $w_2 = -i$ ) отображается в точку  $x_2 = 1$  (рис.4).

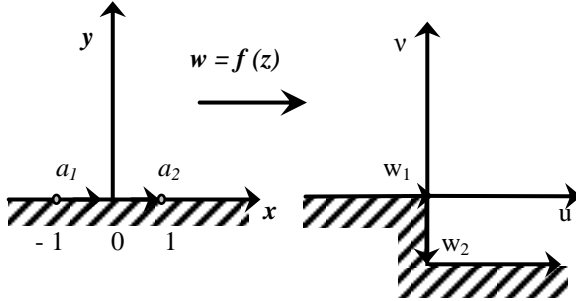


Рис.4. Конформное отображение полуплоскости со ступенью.

Углы при вершинах соответственно  $\beta_1 = \frac{3}{2}$  и  $\beta_2 = \frac{1}{2}$ . Тогда интеграл Кристоффеля-Шварца имеет вид:

$$\frac{dw}{dz} = A(z+1)^{\frac{1}{2}} \cdot (z-1)^{-\frac{1}{2}} = A \frac{\sqrt{z+1}}{\sqrt{z-1}},$$

$$\frac{dw}{dz} = A \frac{\sqrt{z+1} \cdot \sqrt{z+1}}{\sqrt{z-1} \cdot \sqrt{z+1}} = A \frac{z+1}{\sqrt{z^2-1}} = A \left( \frac{z}{\sqrt{z^2-1}} + \frac{1}{\sqrt{z^2-1}} \right).$$

Проинтегрировав, получим:

$$w(z) = A \left( \int \frac{z}{\sqrt{z^2-1}} dz + \int \frac{1}{\sqrt{z^2-1}} dz \right) + B,$$

$$w(z) = A \left( \sqrt{z^2-1} + \ln \left( z + \sqrt{z^2-1} \right) \right) + B.$$

Используя условия  $w(-1) = 0$  и  $w(1) = -ih$ , находим значение констант:

$$\begin{cases} A \left( \sqrt{(-1)^2-1} + \ln \left( -1 + \sqrt{(-1)^2-1} \right) \right) + B = 0 \\ A \left( \sqrt{1^2-1} + \ln \left( 1 + \sqrt{1^2-1} \right) \right) + B = -ih \end{cases},$$

$$\begin{cases} A \cdot i\pi + B = 0 \\ B = -ih \end{cases}; \begin{cases} A = \frac{h}{\pi} \\ B = -ih \end{cases}.$$

Окончательно, функция имеет вид:

$$w(z) = \frac{h}{\pi} \left( \sqrt{z^2 - 1} + \ln(z + \sqrt{z^2 - 1}) \right) - ih.$$

Найдем комплексный потенциал потока над ступенью. На бесконечности  $w(z) \sim \frac{z}{\pi}$ , поэтому указанный равномерный поток  $\Omega(z) \sim U_0 z \Rightarrow \Omega(w) \sim \frac{U_0 z}{\pi}$ . Следовательно, комплексной потенциал на плоскости  $z$  равен:  $\Omega(z) = \frac{U_0 z}{\pi}$ . Тогда

$$w(z) = \frac{h}{\pi} \left( \sqrt{\left( \frac{\pi w}{U_0} \right)^2 - 1} + \ln \left( \frac{\pi w}{U_0} + \sqrt{\left( \frac{\pi w}{U_0} \right)^2 - 1} \right) \right) - ih.$$

Компоненты скорости можно найти из условия  $\frac{dw}{dz} = u - iv$ :

$$u - iv = U_0 \sqrt{\frac{z-1}{z+1}}.$$

Поэтому скорость равна нулю в точке 1 ( $z=1$ ) и равна бесконечности в точке 2 ( $z=-1$ ). При произвольном значении внутреннего угла больше  $\pi$  скорость равна нулю, а при значении внутреннего угла меньше  $\pi$  скорость равна бесконечности.

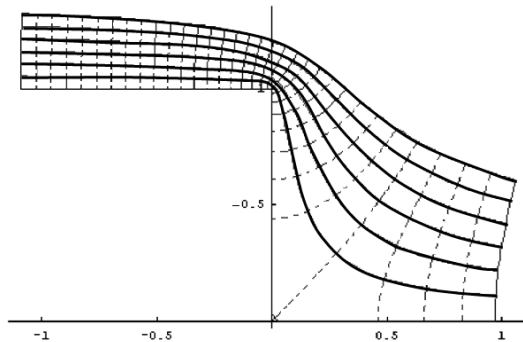


Рис. 5. Поле скоростей воздушного потока, обтекающего ступень заданной высоты.

В математическом пакете Maple строим визуализацию обтекания ступени ( $h = 1$ ). В результате получаем наглядную картину распределения потенциала скоростей и линий тока вблизи ступени (рис.5).

### Заключение

В данной работе рассмотрены особенности применения методов конформного отображения в задачах вытесняющей вентиляции при наличии преград. Использование данной методики расчета полей скоростей воздушного потока позволяет упростить вычисления, конформно отобразив исследуемую область на область с известными границами. Зачастую такими областями выступают полуплоскость, плоскость или единичный круг.

Рассмотренные примеры расчета позволяют визуализировать поле скоростей при различных заданных начальных условиях, а также построить их комплексный потенциал.

Таким образом, можно сделать вывод, что наличие перегородок и ступеней для стационарного плоскопараллельного потока значительно влияют на распределение скоростей лишь вблизи препятствий, а на расстояниях соизмеримых с размерами препятствий сохраняется стационарный поток.

### Литература

1. Иванов В.И. Конформные отображения и их приложения / В.И. Иванов, В.Ю. Попов. – М.: Едиториал УРСС, 2002. – 324 с.
2. Коппенфельс В. Практика конформных отображений / В. Коппенфельс, Ф. Штальман / Под ред. Л.И. Волковыского. – М.: Издательство иностранной литературы, 1953. – 407с.
3. Лаврентьев М.А. Методы теории функций комплексного переменного / М.А Лаврентьев, Б.В. Шабат – 4-е изд., перераб. и доп. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит. 1973. – 749 с.
4. Лунц Г.Л. Функции комплексного переменного: Учебник для вузов. / Г.Л. Лунц, Л.Э. Эльсгольц. – 2-е изд. – СПб.: Издательство «Лань», 2002. – 304 с.
5. Mark J. Ablowitz. Complex Variable Introduction and Application. / Mark J. Ablowitz, Athanassios S. Fokas/ – New York: Cambridge University Press, 2003. – 647 p.