МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
ЛУГАНСКОЙ НАРОДНОЙ РЕСПУБЛИКИ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
ЛУГАНСКОЙ НАРОДНОЙ РЕСПУБЛИКИ
«ЛУГАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Я. П. Кривко
О. В. Давыскиба

МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ
для студентов очной и заочной форм обучения
по направлению подготовки
01.03.01 Математика

Допущено Министерством образования и науки
Луганской Народной Республики
к использованию в образовательных организациях (учреждениях)
высшего образования
(приказ МОН ЛНР от 16 апреля 2021 года № 280-од)

КНИГА

Луганск
2021

УДК [519.8:330](075.8)
ББК 22.183я73+65в631
К 82

Рекомендовано Ученым советом
ГОУ ВО ЛНР «Луганский государственный педагогический университет»
(протокол № 6 от 18 декабря 2020 г.)

Кривко, Я. П. Методы оптимизации и исследование операций: учебно-методическое пособие / Я. П. Кривко, О. В. Давыскиба; ГОУ ВО ЛНР «Луганский государственный педагогический университет». – Луганск : Книта, 2021. – 112 с.

Рецензенты:

Бранспиз М.Ю., кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры прикладной математики Государственного образовательного учреждения высшего образования Луганской Народной Республики «Луганский государственный университет имени Владимира Даля»

Капустин Д.А., кандидат технических наук, доцент, и. о. заведующего кафедрой информационных образовательных технологий и систем Государственного образовательного учреждения высшего образования Луганской Народной Республики «Луганский государственный педагогический университет»

Савельев В.М., кандидат физико-математических наук, доцент кафедры фундаментальной математики Государственного образовательного учреждения высшего образования Луганской Народной Республики «Луганский государственный педагогический университет»

Данное пособие является дополнительным учебно-методическим сопровождением дисциплины «Исследование операций в экономике»; содержит краткие теоретические сведения, примеры выполнения заданий, задания для самостоятельного выполнения, контрольные вопросы.

Учебно-методическое пособие предназначено для студентов очной и заочной форм обучения по направлению подготовки 01.03.01 Математика.

УДК [519.8:330](075.8)
ББК 22.183я73+65в631

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Решение разного рода прикладных задач в науке, технике, экономике и производстве невозможно без знания методов вычислительной математики, а решение главной задачи экономико-математического моделирования (создание конструкций, обладающих оптимальными свойствами, или синтез оптимального процесса и технологии) − без умения применять на практике различные методы оптимизации. Овладение студентами методами математического моделирования отдельных компонентов будущей профессиональной деятельности и анализа экономико-математических моделей имеет практическую значимость, поскольку эти методы широко используются в реальной практике предприятий.

Поэтому главной целью подготовки будущих специалистов в области применения математических методов в экономике является изучение различных экономических ситуаций, приобретение навыков по их моделированию на языке математики, выбора того или иного численного метода в зависимости от типа и сложности решаемой задачи.

Настоящее учебно-методическое пособие предназначено для студентов высших учебных заведений по направлению подготовки 01.03.01 Математика, является дополнительным учебно-методическим сопровождением дисциплины «Исследование операций в экономике».

В ходе изучения дисциплины студентам предлагается самостоятельная практическая работа под руководством преподавателя, состоящая в моделировании учебного задания и поиска её оптимального решения.

Учебно-методическое пособие предназначено для оказания помощи студентам в изучении методов оптимизации и исследования операций при подготовке к практическим занятиям, контрольным работам, зачету, экзамену, при выполнении домашних работ. Внимание студентов акцентировано на основные разделы математического программирования, позволяющие решать экономико-производственные задачи. Цель учебно-методического пособия «Методы оптимизации и исследование операций» − подготовить студентов к самостоятельному изучению литературы по методам оптимизации и исследованию операций, математическим методам в экономике; научить логически и аналитически мыслить; активизировать познавательную, самостоятельную и творческую деятельности студентов.

Данное учебно-методическое пособие включает 7 тем, каждая из которых имеет следующую логическую структуру:

– краткие теоретические сведения: приведены основные понятия, утверждения, которые необходимы для решения практических задач;

– пример выполнения задания;

– индивидуальные задания для самостоятельной работы: номер варианта определяется преподавателем. Задачи, которые необходимо выполнить с помощью программных средств предоставляются преподавателю в электронном виде: документ Excel с необходимыми расчетами, и документ Word с комментариями к выполнению задания;

– контрольные вопросы: приведены вопросы для проверки и самопроверки усвоения полученных знаний соответствующей темы.

Тема 1. Предмет математического программирования. Классификация задач

1.1. Краткие теоретические сведения

Математическое программирование – это раздел математики, занимающийся анализом многомерных экстремальных задач управления, планирования, разработкой теории и численных методов их решения. Другими словами, математическое программирование занимается решением задач нахождения максимума или минимума функции многих переменных с ограничениями на область изменения этих переменных.

Задачи линейного программирования – это задачи математического программирования, в которых целевая функция и функции ограничений линейные. В настоящее время является наиболее разработанной частью математического программирования, для таких задач разработаны точные методы решений.

Транспортные задачи – задачи линейного программирования специального вида, имеющие более эффективные методы решений.

Задачи о назначениях – задачи о распределении работы между исполнителями с целью достижения максимальной эффективности.

Задачи нелинейного программирования – задачи математического программирования, в которых хотя бы одна из функций нелинейна (не имеют точных аналитических методов решений, основные методы их решения – приближенные).

Задачи выпуклого программирования – задачи нелинейного программирования, имеющие вогнутую функцию цели и выпуклую область допустимых значений.

Задачи квадратичного программирования – задачи выпуклого программирования, имеющие квадратичную целевую функцию с линейными ограничениями.

Задачи дискретного программирования – задачи математического программирования, имеющие дискретную область допустимых решений.

Задачи динамического программирования – задачи, в которых применяются пошаговые методы решения.

Задачи стохастического программирования – задачи, в которых используются функции случайных величин.

Векторная (многокритериальная) оптимизация – задачи исследования операций, где требуется обеспечить наибольшее (наименьшее) значение нескольким показателям эффективности в одной и той же области допустимых решений.

Теория игр – задачи принятия решений в конфликтных ситуациях.

Теория управления запасами – задачи определения объемов поставки и сроков хранения продукции.

Сетевое планирование и управление предлагает методы планирования работ, связанных сетевыми графиками.

Теория расписаний или *теория календарного планирования* – методы планирования работ во времени.

Имитационное моделирование – моделирование систем с помощью электронной вычислительной техники.

При всем многообразии содержания реальных экономико-производственных задач решение каждой из них включает последовательно основные этапы:

1. Постановка задачи.
2. Построение математической модели.
3. Выбор метода решения и решение задачи.
4. Проверка полученного решения на его адекватность изучаемому явлению и корректировка модели в случае необходимости.
5. Реализация найденного решения на практике.

При построении математической модели выделяют следующие моменты:

– выбор неизвестных величин $X = \left(x_1, \ldots, x_n\right)$, воздействуя на которые можно изменять поведение изучаемого процесса; такие переменные называют управляемыми параметрами, планом, стратегией и т. д.

– выделить цель (максимизация прибыли, минимизация затрат и др.) функционирования изучаемого процесса и записать ее в виде математической функции от выбранных переменных; такая функция называется целевой $Z = f\left(X\right)$ (функция цели, критерий оптимальности, критерий качества, показатель эффективности и т.д.). Процесс изменения значений управляемых параметров $x_1, \ldots, x_n$, позволяет выбрать наилучший вариант из множества возможных.

– запись в виде математических соотношений (уравнений, неравенств), условий, налагаемых на переменные; эти соотношения называют ограничениями; совокупность всех ограничений составляет область допустимых решений $D\ (X \in D)$.

Модель задачи математического программирования примет следующий вид:

$$\begin{gathered} \mathrm{Z} = \mathrm{f}\left(X\right) \to \max\ (\min) \\ X \in D \end{gathered},$$

где необходимо найти план $X = (x_1, ..., x_j, ..., x_n)$, доставляющий экстремальное значение целевой функции *Z*.

Задача линейного программирования является простейшим и наиболее полно исследованным частным случаем задач математического программирования:

$$\mathrm{Z} = \mathrm{f}\left(\mathrm{X}\right) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max\ (\min) \tag{1.1}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i,\ (i = \overline{1, k}) \tag{1.2}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i,\ (i = \overline{k+1, m}) \tag{1.3}$$

$$x_j \ge 0 \quad (j = \overline{1, s},\ s \le n) \tag{1.4}$$

Функция (1.1) называется целевой функцией задачи (1.1)-(1.4). Условия (1.2) и (1.3) называются системой ограничений, условия (1.4) – условиями неотрицательности данной задачи.

Стандартной формой задачи линейного программирования называется задача, в которой отсутствуют ограничения-равенства:

$$\mathrm{Z} = \mathrm{f}\left(\mathrm{X}\right) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max\ (\min)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, (i = \overline{1, m})$$

$$x_j \ge 0 \quad (j = \overline{1, n}).$$

Канонической формой задачи линейного программирования называется задача, в которой отсутствуют ограничения-неравенства:

$$\mathrm{Z} = \mathrm{f}\left(\mathrm{X}\right) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max\ (\min)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, (i = \overline{1, m})$$

$$x_j \ge 0 \quad (j = \overline{1, n}).$$

Система ограничений канонической формы математической модели представляет собой систему линейных алгебраических уравнений. Одним из способов решения полученной математической задачи является метод Жордана-Гаусса (метод последовательного исключения неизвестных), который также используется для преобразований системы уравнений в симплекс-методе при поиске оптимального решения задачи линейного программирования. Метод Жордана-Гаусса базируется на эквивалентных преобразованиях, переводящих систему в эквивалентную.

Алгоритм решения систем линейных алгебраических уравнений методом Жордана-Гаусса:

1) выписать расширенную матрицу системы;

2) выбрать ведущий элемент (любой ненулевой элемент) в любой строке и в любом столбце, кроме последнего. При этом строка и столбец, в которых он находится называют ведущими;

3) выполнить жорданово исключение с выбранным ведущим элементом. Отметить ведущую строку и все строки, помеченные ранее;

4) если хотя бы одна строка имеет вид:

$(0\,0 \ldots 0 : b), b \ne 0$, то система решений не имеет – система несовместна;

5) если все ненулевые строки матрицы помечены, то выписать систему и найти ее общее решение;

6) выбрать ведущий элемент в любой непомеченной строке и в любом столбце, кроме последнего, перейти к пункту 3.

Выполнить жорданово исключение с ведущим элементом a_{qp} означает выполнить следующие действия:

– разделить ведущую строку на ведущий элемент;

– заполнить свободные места в ведущем столбце нулями;

– остальные элементы матрицы пересчитать по формуле, называемой «правилом прямоугольника». Для того, чтобы найти a'_{ij} необходимо построить прямоугольник, у которого две противоположные вершины занимают исходный элемент a_{ij} и ведущий элемент a_{qp}. При этом две другие вершины занимают элемент a_{qj} из ведущей строки и элемент a_{ip} из ведущего столбца.

$$a'_{ij} = \frac{a_{ij}a_{qp} - a_{ip}a_{qj}}{a_{qp}},$$

где a_{qp} –ведущий элемент.

Свободные члены вычисляются по следующей формуле:

$$b'_i = \frac{b_i a_{qp} - b_q a_{ip}}{a_{qp}}.$$

1.2. Пример выполнения задания

Пример. Решить систему линейных алгебраических уравнений методом Жордана-Гаусса в табличной форме и выполнить проверку.

$$\begin{cases} -x_1 + 7x_2 - x_3 + x_4 = 7, \\ 7x_1 - 2x_2 + x_3 - 7x_4 = 1, \\ x_1 + 7x_2 - x_3 - x_4 = -2 \end{cases}$$

Решение.

На каждой итерации появляется новая базисная переменная. Процесс решения по итерациям приведен в таблицах.

Таблица 1.1

Баз.перем.	x_1	x_2	x_3	x_4	b_i
-	-1	7	-1	1	7
-	7	-2	1	-7	1
-	1	7	-1	-1	-2

Таблица 1.2

Баз.перем.	x_1	x_2	x_3	x_4	b_i
x_1	1	-7	1	-1	-7
-	0	47	-6	0	50
-	0	14	-2	0	5

Таблица 1.3

Баз.перем.	x_1	x_2	x_3	x_4	b_i
x_1	1	0	$\frac{5}{47}$	-1	$\frac{21}{47}$
x_2	0	1	$-\frac{6}{47}$	0	$\frac{50}{47}$
-	0	0	$-\frac{10}{47}$	0	$-\frac{465}{47}$

Таблица 1.4

Баз.перем.	x_1	x_2	x_3	x_4	b_i
x_1	1	0	0	-1	$-\frac{9}{2}$
x_2	0	1	0	0	7
x_3	0	0	1	0	$\frac{93}{2}$

Итак, система линейных алгебраических уравнений линейно зависима, неопределенна.

Базисные переменные x_1, x_2, x_3 создают единичный базис, x_4 – свободная переменная.

1.3. Задания для самостоятельного выполнения

Решить задачи методом Жордана-Гаусса в табличной форме и выполнить проверку.

Варианты заданий

1. $$\begin{cases} (N-10)x_1 - 3x_2 + x_3 - 4x_4 = 2 \\ x_1 + Kx_2 + x_3 + 2x_4 = 6 \\ 2x_1 - x_2 + (N-8)x_3 + x_4 = -3 \\ 4x_1 - 3x_2 + 3x_3 - x_4 = 5 \end{cases}$$

2. $$\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 + 4x_3 + x_4 = K \\ (N-15)x_1 + x_2 + 7x_3 + x_4 = 6 \\ 3x_1 + Kx_2 + x_3 + 5x_4 = 8 \end{cases}$$

где значения N и K – назначаются преподавателем.

1.4. Контрольные вопросы

1.Что такое математическое программирование?

2. Сформулируйте задачу линейного программирования.

3. Дайте характеристику особенностям задач математического программирования?

4. Модель задачи математического программирования.

5. Приведите алгоритм решения систем линейных алгебраических уравнений методом Жордана-Гаусса.

6. Приведите алгоритм решения систем линейных алгебраических уравнений методом Гаусса.

7. Приведите основные этапы решения задачи математического программирования.

8. Процесс построения математической модели.

Тема 2. Общая задача линейного программирования и некоторые методы её решения

2.1. Краткие теоретические сведения

Общая форма модели задачи линейного программирования (ЗЛП) характеризуется следующим образом:

найти совокупность значений n переменных $x_1, x_2, ..., x_n$, удовлетворяющих системе ограничений:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \ (i = \overline{1, k});$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \ (i = \overline{k+1, m});$$

и условиям неотрицательности:

$$x_j \ge 0 \quad (j = \overline{1, s}, s \le n),$$

для которых линейная функция (целевая функция):

$$Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + ... + c_n x_n$$

достигает экстремума (максимума или минимума).

Стандартная форма модели. Найти совокупность значений n переменных $x_1, x_2, ..., x_n$, удовлетворяющих системе ограничений:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \ (i = \overline{1, m})$$

и условиям неотрицательности:

$$x_j \ge 0, \ (j = \overline{1, n}),$$

для которых целевая функция:

$$Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

достигает максимума.

Пусть дана матрица:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

и векторы:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}, \qquad C = (c_1, \dots, c_n),$$

тогда стандартная форма модели примет вид:

$$AX \le b,$$

$$X \ge 0,$$

$$Z = CX \to (\max)$$

Задачу линейного программирования в стандартной форме удобно решать графически, если число переменных равно двум (*n=2*).

Каноническая форма модели. Найти совокупность значений *n*переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$ удовлетворяющих системе уравнений:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \text{ , } (i = \overline{1, m})$$

и условиям неотрицательности:

$$x_j \ge 0 \text{ , } (j = \overline{1, n})$$

для которых целевая функция:

$$Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

достигает максимума. Тогда стандартная форма модели:

$$AX = b,$$

$$X \ge 0,$$

$$Z = CX \to (\max)$$

Определение 2.1. Вектор *X*, удовлетворяющий системе ограничений задачи линейного программирования (ЗЛП), в том числе и условиям неотрицательности, если они имеются, называется допустимым решением задачи линейного программирования (ЗЛП).

Определение 2.2. Совокупность всех допустимых решений образует область допустимых решений (ОДР) задачи линейного программирования (ЗЛП).

Определение 2.3. Допустимое решение, для которого целевая функция достигает максимума (минимума), называется оптимальным решением. Обозначение оптимального решения: X^*.

Задача минимизации целевой функции *Z* может быть сведена к задаче максимизации функции Z_1 при тех же ограничениях путем введения функции

$$Z_1 = -Z .$$

Обе задачи имеют одно и то же решение X^*, при этом

$$\min Z = -\max Z_1 .$$

Переход к канонической форме модели.

Пусть исходная задача линейного программирования (ЗЛП) задана в стандартной форме

$$Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{2.1}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \ (i = \overline{1, m}), \tag{2.2}$$

$$x_j \ge 0, \ (j = \overline{1, n}), \tag{2.3}$$

Преобразуем данную задачу линейного программирования (ЗЛП) к каноническому виду. Для того чтобы неравенства типа ≤ преобразовать в равенства, к их левым частям прибавим дополнительные (балансовые) неотрицательные переменные $x_{n+1} \ge 0 \quad (i = \overline{1, m})$, после чего система ограничений примет вид:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + x_{n+1} = b_i , \ (i = \overline{1, m})$$

Дополнительные (балансовые) переменные x_{n+1} $(i=\overline{1,m})$ вводятся в целевую функцию с коэффициентами, равными нулю $c_{n+1}=0$. Каноническая форма модели примет вид:

$$Z=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j+\sum_{i=1}^{m}0\cdot x_{n+1}\to\max, \tag{2.4}$$

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j+x_{n+1}=b_i,\ (i=\overline{1,m}) \tag{2.5}$$

$$x_j\ge 0,\ (j=\overline{1,n+m}), \tag{2.6}$$

Переход от канонической формы модели задачи линейного программирования к стандартной.

Пусть задача линейного программирования (ЗЛП) задана в канонической форме:

$$Z=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j\to\max,$$

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j+x_{n+1}=b_i,\ (i=\overline{1,m})$$

$$x_j\ge 0,\ (j=\overline{1,n}).$$

1. Каждое ограничение-равенство может быть заменено эквивалентной системой неравенств:

$$\begin{cases}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\le b_i,\\ \sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\ge b_i,\end{cases}\quad (i=\overline{1,m})$$

Неравенства $\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\ge b_i$ $(i=\overline{1,m})$ путем умножения обеих частей на –1 преобразуются в неравенства

$$-\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le -b_i \quad (i = \overline{1, m}).$$

2. Пусть в системе ограничений:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \quad (i = \overline{1, m})$$

канонической формы модели $m < n$ и все m уравнений линейно независимы (ранг системы $r = m$).

Тогда система имеет бесчисленное множество решений. Ее можно разрешить относительно m переменных $x_1, x_2, ..., x_m$, например, методом Жордана-Гаусса, если векторы-столбцы коэффициентов при этих неизвестных линейно независимы.

$$x_i = \beta_i - \sum_{j=m+1}^{n} \alpha_{ij} x_j \quad (i = \overline{1, m})$$

где: переменные $x_1, x_2, ..., x_m$ называются базисными, а – $x_{m+1}, x_{m+2}, ..., x_n$ называются свободными переменными.

В этом случае целевую функцию выражаем через свободные переменные.

В результате преобразований получим:

$$Z = \sum_{j=m+1}^{n} \gamma_j x_j + \gamma_0 \to \max,$$

учитывая условие неотрицательности $x_j \ge 0$, получим:

$$\sum_{j=m+1}^{n} \alpha_{ij} x_j \le \beta_i \quad (i = \overline{1, m}).$$

Тогда стандартная форма задачи линейного программирования (ЗЛП) примет следующий вид:

$$Z = \sum_{j=m+1}^{n} \gamma_j x_j + \gamma_0 \to \max,$$

$$\sum_{j=m+1}^{n} \alpha_{ij} x_j \le \beta_i \,, (i = \overline{1, m})$$

$$x_j \ge 0 \,, (j = \overline{m+1, n}) \,.$$

Графический метод решения задачи линейного программирования (ЗЛП) в стандартной форме с двумя переменными, т.е. задачи следующего вида:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + & a_{12}x_2 & \le b_{1,} \\ a_{21}x_1 + & a_{22}x_2 & \le b_2 \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}x_1 + & a_{m2}x_2 & \le b_m \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, \;\; x_2 \ge 0$$

Найти вектор $(x_1,\, x_2)^T$, удовлетворяющий данной системе ограничений, для которого функция цели $Z = c_1x_1 + c_2x_2$ достигает максимума.

Задачу линейной оптимизации с двумя переменными можно решить графически, используя геометрическую интерпретацию элементов данной математической модели.

Каждое неравенство этой системы геометрически определяет полуплоскость с предельной прямой

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i \,, (i = 1,\; 2,\; \dots, m) \,.$$

Условия неотрицательности переменных определяют полуплоскости с предельными прямыми $x_1 = 0$ и $x_2 = 0$.

Система совместна, поэтому полуплоскости как выпуклые множества, пересекаясь, образуют общую часть, которая является выпуклым множеством и представляет собой совокупность точек, координаты каждой из которых является решением данной системы.

*Графический метод решения задачи линейного программирования(ЗЛП)*условно разбивают на следующие этапы:

1. Построение области допустимых решений задачи линейного программирования (ЗЛП).

2. Нахождение среди всех точек области допустимых решений такой точки $(x_1^*, x_2^*)^T$, в которой целевая функция Z принимает максимальное (минимальное) значение.

Итак, геометрически задача линейного программирования представляет собой отыскание координат такой точки многогранника решений, при подстановке которых в целевую линейную функцию Z последняя достигает максимального (минимального) значения, причем допустимыми решениями являются все точки многогранника решений.

2.2. Пример выполнения задания

Пример 1. Найти минимальное значение функции

$$Z = -2x_1 + x_2 \to \min$$

при ограничениях

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 \le 12, \\ -x_1 + 2x_2 \le 8, \\ 2x_1 + 3x_2 \ge 6; \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Решение.

I этап. *Построение области допустимых решений*

1. Каждому неравенству ставим в соответствие уравнение, геометрическим образом которого является прямая линия.

$3x_1 - 2x_2 = 12$ – прямая пройдет через точки (4; 0) и (0; -6).

$-x_1 + 2x_2 = 8$ – прямая пройдет через точки (-8; 0) и (0; 4).

$2x_1 + 3x_2 = 6$ – прямая пройдет через точки (3; 0) и (0; 2).

2. Каждая прямая делит плоскость на две полуплоскости, в одной из которых будет выполняться соответствующее неравенство.

В нашем случае областью допустимых значений являются точки пятиугольника *ABCDE* (рис. 2.1).

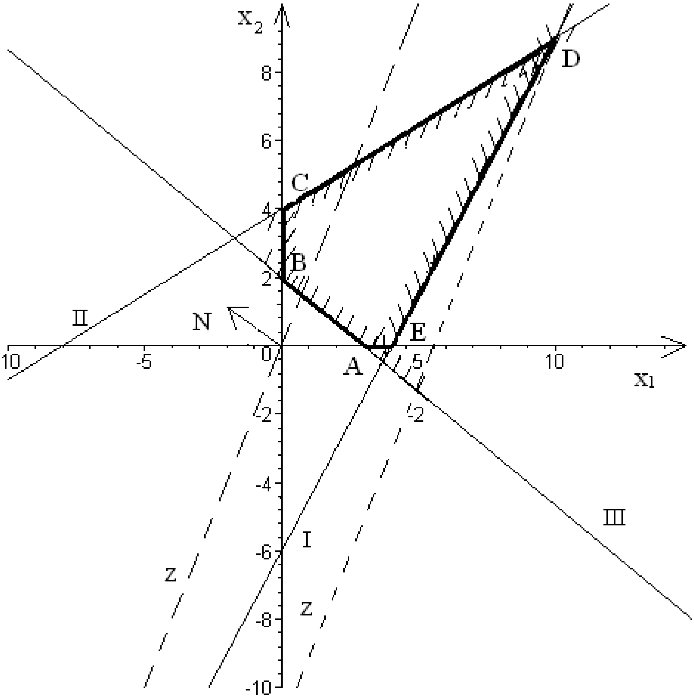

Рис. 2.1. Область допустимых значений

II этап. *Определение оптимальных точек*

1. Направленный вектор проводят из начала координат в точку с координатами, которые равняются коэффициентам целевой функции, то есть в точку $N\ (-2;1)$.

2. Перпендикулярно направленному вектору на области допустимых значений проводят прямую Z (она показана пунктиром).

3. Если в задаче требуется найти минимум, то прямую Z перемещают параллельно в сторону, противоположную стрелке направленного вектора до последней точки области – эта точка и будет точкой минимума. В рассматриваемой задаче, наименьшее значение достигается в вершине D.

III этап. *Определение оптимальных точек*

Чтобы найти переменные, которые обеспечивают экстремум, необходимо решить систему уравнений тех прямых, на пересечении которых располагается точка экстремума.

$$D:\begin{cases}-x_1+2x_2=8\\3x_1-2x_2=12\end{cases}$$

$$\Delta=\begin{vmatrix}-1 & 2\\3 & -2\end{vmatrix}=2-6=-4$$

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}8 & 2\\12 & -2\end{vmatrix}=-16-24=-40$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}-1 & 8\\3 & 12\end{vmatrix}=-12-24=-36$$

$$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{-40}{-4}=10 \quad x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{-36}{-4}=9 \quad D=(10;9)$$

$$Z_{\min}=-2\cdot10+9=-20+9=-11$$

Таким образом, найдено минимальное значение функции.

2.3. Задания для самостоятельного выполнения

Построить на плоскости область допустимых решений системы линейных неравенств и геометрически найти наименьшее и наибольшее значение целевой функции, полагая

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0.$$

Варианты заданий

1. $\begin{cases} 7x_1 + x_2 \geq 7 \\ x_1 + 6x_2 \geq 6 \\ 6x_1 + 5x_2 \leq 30 \\ 5x_1 + 7x_2 \leq 35 \\ -x_1 + x_2 \leq 4 \end{cases}$

$Z = 2x_1 + 5x_2$

2. $\begin{cases} x_1 + 6x_2 \geq 6 \\ 6x_1 + x_2 \geq 6 \\ x_1 + x_2 \leq 5 \\ 4x_1 - 3x_2 \leq 12 \\ -3x_1 + 4x_2 \leq 12 \end{cases}$

$Z = 5x_1 + 2x_2$

3. $\begin{cases} x_1 + 6x_2 \geq 6 \\ 4x_1 + x_2 \geq 4 \\ 5x_1 + 4x_2 \leq 20 \\ 6x_1 + 5x_2 \leq 30 \\ -x_1 + x_2 \leq 3 \end{cases}$

$Z = 3x_1 + x_2$

4. $\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 5 \\ 3x_1 + 5x_2 \geq 15 \\ 5x_1 + 3x_2 \geq 15 \\ x_1 \leq 4 \\ x_2 \leq 6 \end{cases}$

$Z = 4x_1 + 5x_2$

5. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 12 \\ 3x_1 + 2x_2 \le 12 \\ x_1 + 5x_2 \ge 5 \\ 4x_1 + x_2 \ge 4 \\ x_2 \le 6 \end{cases}$

$Z = 5x_1 + 4x_2$

6. $\begin{cases} 3x_1 + 8x_2 \ge 24 \\ 8x_1 + 3x_2 \ge 24 \\ x_1 + x_2 \le 8 \\ x_1 \le 7 \\ x_2 \le 6 \end{cases}$

$Z = 7x_1 + 2x_2$

7. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 6 \\ x_1 + 2x_2 \le 6 \\ 2x_1 + 6x_2 \ge 12 \\ 6x_1 + 2x_2 \ge 12 \\ 2x_1 + 3x_2 \le 6 \end{cases}$

$Z = 5x_1 + 4x_2$

8. $\begin{cases} x_1 + 6x_2 \ge 6 \\ 7x_1 + x_2 \ge 7 \\ 5x_1 + 6x_2 \le 30 \\ 7x_1 + 5x_2 \le 35 \\ x_2 \le 4 \end{cases}$

$Z = 2x_1 + 3x_2$

9. $\begin{cases} 5x_1 + 8x_2 \le 40 \\ 6x_1 + 5x_2 \le 30 \\ x_1 + x_2 \ge 2 \\ x_1 - x_2 \le 5 \\ -x_1 + x_2 \le 4 \end{cases}$

$Z = 5x_1 + 2x_2$

10. $\begin{cases} 5x_x + 2x_2 \ge 10 \\ x_1 + 6x_2 \ge 6 \\ x_1 - x_2 \le 4 \\ -2x_1 + 3x_2 \le 6 \\ 5x_1 + 6x_2 \le 30 \end{cases}$

$Z = 5x_1 + 3x_2$

11. $\begin{cases} 6x_1 + 5x_2 \le 30 \\ -3x_1 + 2x_2 \le 6 \\ 2x_1 - 3x_2 \le 6 \\ x_1 + 6x_2 \ge 6 \\ 3x_1 + x_2 \ge 3 \end{cases}$

$Z = 4x_1 + x_2$

12. $\begin{cases} 5x_1 + 7x_2 \le 35 \\ 4x_1 - x_2 \ge 4 \\ x_1 - 2x_2 \le 6 \\ 5x_1 + 2x_2 \ge 10 \\ x_2 \le 3 \end{cases}$

$Z = -5x_1 + x_2$

13. $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 \le 24 \\ 4x_1 + 3x_2 \le 24 \\ -2x_1 + x_2 \le 4 \\ x_1 + 3x_2 \ge 3 \\ 3x_1 + x_2 \ge 3 \end{cases}$

$Z = 4x_1 + 2x_2$

14. $\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 2 \\ 5x_1 + x_2 \ge 5 \\ x_1 + 5x_2 \ge 5 \\ 5x_1 + 6x_2 \le 30 \\ 7x_1 + 5x_2 \le 35 \end{cases}$

$Z = 3x_1 + 4x_2$

15. $\begin{cases} x_1 + x_2 \le 5 \\ 2x_1 - 3x_2 \le 6 \\ 3x_1 + x_2 \ge 3 \\ x_1 + x_2 \ge 2 \\ -x_1 + x_2 \le 3 \end{cases}$

$Z = 7x_1 - 2x_2$

16. $\begin{cases} 6x_1 + x_2 \ge 6 \\ x_1 + 6x_2 \ge 6 \\ 5x_1 + 6x_2 \le 30 \\ 7x_1 + 5x_2 \le 35 \\ -x_1 + x_2 \le 4 \end{cases}$

$Z = x_1 + 4x_2$

17. $\begin{cases} x_1 + 5x_2 \ge 5 \\ 5x_1 + x_2 \ge 5 \\ x_1 + x_2 \le 6 \\ 3x_1 - 4x_2 \le 12 \\ -4x_1 + 3x_2 \le 12 \end{cases}$

$Z = 4x_1 + x_2$

18. $\begin{cases} x_1 + 5x_2 \ge 5 \\ 4x_1 + x_2 \ge 4 \\ 4x_1 + 5x_2 \le 20 \\ 5x_1 + 4x_2 \le 20 \\ -x_1 + x_2 \le 3 \end{cases}$

$Z = 3x_1 - x_2$

19. $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \ge 10 \\ 5x_1 + 2x_2 \ge 10 \\ x_1 + x_2 \le 7 \\ 3x_1 - 4x_2 \le 12 \\ -4x_1 + 3x_2 \le 12 \end{cases}$

$Z = 5x_1 + 4x_2$

20. $\begin{cases} x_1 + 4x_2 \ge 4 \\ 5x_1 + x_2 \ge 5 \\ 5x_1 + 8x_2 \le 40 \\ 7x_1 + 5x_2 \le 35 \\ 4x_1 - 3x_2 \le 12 \end{cases}$

$Z = 4x_1 + 3x_2$

21. $\begin{cases} 6x_1 + x_2 \geq 6 \\ x_1 + 5x_2 \geq 5 \\ 6x_1 + 7x_2 \leq 42 \\ 8x_1 + 5x_2 \leq 40 \\ -x_1 + x_2 \leq 4 \end{cases}$

$Z = 5x_1 + x_2$

22. $\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 7 \\ 3x_1 + 5x_2 \geq 15 \\ 5x_1 + 3x_2 \geq 15 \\ x_1 \leq 5 \\ x_2 \leq 5 \end{cases}$

$Z = 5x_1 + 4x_2$

23. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 18 \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 18 \\ x_1 + 5x_2 \geq 5 \\ 4x_1 + x_2 \geq 4 \\ x_2 \leq 5 \end{cases}$

$Z = 6x_1 + 7x_2$

24. $\begin{cases} 3x_1 + 7x_2 \geq 21 \\ 7x_1 + 3x_2 \geq 21 \\ x_1 + x_2 \leq 9 \\ x_1 \leq 6 \\ x_2 \leq 6 \end{cases}$

$Z = 8x_1 + 3x_2$

25. $\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 \geq 14 \\ 7x_1 + 2x_2 \geq 14 \\ 3x_1 + 5x_2 \leq 15 \\ -x_1 + x_2 \leq 4 \\ 3x_1 + 4x_2 \leq 24 \end{cases}$

$Z = 3x_1 - 5x_2$

26. $\begin{cases} -2x_1 + x_2 \leq 4 \\ 3x_1 - 4x_2 \leq 12 \\ 2x_1 + 5x_2 \geq 10 \\ 5x_1 + 2x_2 \geq 10 \\ x_1 + x_2 \leq 6 \end{cases}$

$Z = 5x_1 - 2x_2$

27. $\begin{cases} 5x_1 + 8x_2 \leq 40 \\ 7x_1 + 5x_2 \leq 35 \\ x_1 + x_2 \geq 2 \\ x_1 - x_2 \leq 3 \\ -x_1 + x_2 \leq 4 \end{cases}$

$Z = 2x_1 + 4x_2$

28. $\begin{cases} x_1 + 6x_2 \geq 6 \\ 4x_1 + x_2 \geq 4 \\ 4x_1 + 3x_2 \leq 24 \\ 3x_1 + 4x_2 \leq 24 \\ x_1 \leq 5 \end{cases}$

$Z = 7x_1 + 5x_2$

29. $\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 4 \\ 2x_1 + x_2 \ge 4 \\ 4x_1 + 5x_2 \le 40 \\ 3x_1 + 2x_2 \le 18 \\ x_1 - x_2 \le 5 \end{cases}$

$Z = 4x_1 + 4x_2$

30. $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 \ge 12 \\ 4x_1 + 3x_2 \ge 12 \\ 7x_1 + 5x_2 \le 35 \\ 2x_1 + 3x_2 \le 18 \\ x_1 - x_2 \le 3 \end{cases}$

$Z = 8x_1 + 5x_2$

31. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 \ge 3 \\ x_1 + 7x_2 \ge 7 \\ 3x_1 - 2x_2 \le 6 \\ -2x_1 + 3x_2 \le 6 \\ 5x_1 + 8x_2 \le 40 \end{cases}$

$Z = 2x_1 - 3x_2$

32. $\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 \ge 10 \\ 4x_1 - x_2 \ge 4 \\ x_1 - 2x_2 \le 4 \\ x_1 \le 6 \\ x_2 \le 6 \end{cases}$

$Z = 8x_1 + x_2$

33. $\begin{cases} 7x_1 + x_2 \ge 7 \\ x_1 + 7x_2 \ge 7 \\ 2x_1 + 5x_2 \ge 10 \\ 5x_1 + 6x_2 \le 30 \\ 7x_1 + 5x_2 \le 35 \end{cases}$

$Z = 2x_1 + 3x_2$

34. $\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 \ge 14 \\ 7x_2 + 2x_2 \ge 14 \\ 5x_1 + 6x_2 \le 30 \\ 6x_1 + 5x_2 \le 30 \\ x_2 \le 4 \end{cases}$

$Z = -2x_1 + 6x_2$

35. $\begin{cases} x_1 + 7x_2 \ge 7 \\ 7x_1 + x_2 \ge 7 \\ 5x_1 + 4x_2 \le 20 \\ 4x_1 + 5x_2 \le 20 \\ x_1 \le 3 \end{cases}$

$Z = 2x_1 + 5x_2$

36. $\begin{cases} x_1 + 5x_2 \ge 5 \\ 4x_1 + x_2 \ge 4 \\ 4x_1 + 5x_2 \le 20 \\ 5x_1 + 4x_2 \le 20 \\ -3x_1 + 2x_2 \le 6 \end{cases}$

$Z = 2x_1 + 4x_2$

37. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 8 \\ x_1 + 2x_2 \le 8 \\ 2x_1 + 5x_2 \ge 10 \\ 5x_1 + 2x_2 \ge 10 \\ 2x_1 + 3x_2 \le 6 \end{cases}$

$Z = 6x_1 + 4x_2$

38. $\begin{cases} x_1 + 7x_2 \ge 7 \\ 7x_1 + x_2 \ge 7 \\ 5x_1 + 6x_2 \le 30 \\ 7x_1 + 5x_2 \le 42 \\ x_2 \le 3 \end{cases}$

$Z = 5x_1 + 3x_2$

39. $\begin{cases} 5x_1 + 8x_2 \le 40 \\ 7x_1 + 5x_2 \le 35 \\ x_1 + x_2 \ge 2 \\ x_1 - x_2 \le 3 \\ -x_1 + x_2 \le 4 \end{cases}$

$Z = 2x_1 + 3x_2$

40. $\begin{cases} x_1 + x_2 \le 7 \\ 2x_1 - 3x_2 \le 6 \\ 3x_1 + x_2 \ge 6 \\ x_1 + x_2 \ge 4 \\ -x_1 + x_2 \le 3 \end{cases}$

$Z = 4x_1 + 2x_2$

2.4. Контрольные вопросы

1. Запишите основную задачу линейного программирования (ЗЛП) в общем виде.
2. Запишите модель задачи линейного программирования (ЗЛП) в стандартной и канонической формах.
3. Каким образом сводится задача минимизации целевой функции к задаче максимизации?
4. Какова геометрическая интерпретация решения линейных неравенств с одной, двумя, тремя переменными?
5. Что называется допустимым решением задачи математического программирования?
6. Чем определяется направление скорейшего возрастания целевой функции?
7. Что называется оптимальным решением задачи линейного программирования (ЗЛП)?
8. Какие случаи возможны при решении задачи линейного программирования (ЗЛП)?
9. Что называется областью допустимых решений (ОДР) задачи математического программирования?

Тема 3. Симплекс-метод решения задач линейного программирования. Понятие двойственности

3.1. Краткие теоретические сведения

Наиболее распространенной схемой решения задач линейного программирования является *симплекс-метод*, в основе которого лежит метод эквивалентных преобразований систем уравнений, обеспечивающий переход от одного *опорного плана* (неотрицательного базисного решения) к другому, лучшему с точки зрения значения целевой функции.

Алгоритм симплекс-метода при поиске максимума целевой функции включает следующие основные пункты:

1. Построение канонической формы математической модели с помощью дополнительных неотрицательных переменных.

2. Определение исходного опорного плана:

– если исходного опорного плана нет, то переходим к пункту 3 алгоритма;

– если исходный опорный план существует, то переходим к пункту 4 алгоритма;

3. Построение исходного опорного плана с помощью *искусственных базисных* переменных. Строится вспомогательная задача (*M-задача*):

$$\overline{Z} = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j - M \sum_{i=1}^{m} x_{n+i} \to \max,$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + x_{n+i} = b_i \,, \ (i = \overline{1, m}),$$

$$x_j \ge 0 \,, \ \ (j = \overline{1, n+m}) \,,$$

где M – произвольная сколь угодно большая константа; $x_{n+i} > 0$, $(i = \overline{1, m})$ – искусственные базисные переменные.

Вспомогательная задача решается симплекс-методом (пункт 4). Анализ полученного решения вспомогательной задачи:

– если в полученном оптимальном опорном плане

$\overline{X^*} = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*, 0, ..., 0)$ все искусственные переменные $x_{n+i} = 0$ $(i = \overline{1, m})$, то опорный план $X^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$ является оптимальным решением исходной задачи;

– если в полученном оптимальном опорном плане хотя бы одна искусственная переменная не равна нулю $x_{n+i} > 0$, $(i = \overline{1, m})$, то исходная задача не имеет допустимых решений.

4. Построение исходной симплекс-таблицы с оценками оптимальности, вычисленными по следующей формуле:

$$\Delta_j = \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij} - c_j, \quad j = m+1, ..., n;$$

и значение целевой функции: $Z = \sum_{i=1}^{m} c_i b_i$,

где: c_i – коэффициенты целевой функции базисных переменных; c_j – коэффициенты целевой функции свободных переменных.

5. Выбор ведущего столбца по наименьшей отрицательной оценке свободной переменной:

$$\Delta_k = \min\left\{ \Delta_j < 0, \quad j = m+1, ..., n \right\}.$$

Опорный план $X^* = (b_1, b_2, ..., b_m, 0, ..., 0)$ задачи является оптимальным, если все оценки $\Delta_j \geq 0,\ j = 1, ..., n$.(Признак *оптимальности опорного плана)*.

Если опорный план X^* оптимальный и хотя бы одна оценка свободной переменной $\Delta_j = 0$, то оптимальный план не однозначен. (Признак *альтернативности оптимального решения*).

6. Выбор ведущей строки согласно условию:

$$a_{rk} = \min\left\{ \frac{b_i}{a_{ik}}, a_{ik} > 0 \right\}.$$

Если некоторая оценка $\Delta_k < 0,$ и все $a_{ik} \le 0, i = 1,..., m,$ то целевая функция $Z_{\max} \to \infty$ на множестве допустимых решений. (Признак *разомкнутости области допустимых решений).*

7. Преобразование симплекс-таблицы по формулам Жордана-Гаусса относительно ведущего элемента a_{rk} .

Каждая итерация симплекс-метода включает пункты 5-7рассмотренного алгоритма. При поиске *минимума* целевой функции задача сводится к поиску максимума. Для этого вводится новая целевая функция $Z^{'} \to -Z$.

На основе общей идеи симплекс-метода и теории двойственности разработан эффективный метод решения задач линейного программирования – двойственный симплекс-метод.

Каждая задача линейного программирования (*прямая)* тесно связана с другой задачей *–двойственной*.

Пусть *прямая* задача имеет вид:

$$Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max \qquad (3.1)$$

при условиях:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \;, (i = \overline{1, m}) \qquad (3.2)$$

$$x_j \ge 0, \; j = \overline{1, n} \qquad (3.3)$$

Тогда задача поиска минимального значения целевой функции вида:

$$F = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \to \min \qquad (3.4)$$

при условиях:

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij} y_i \ge c_j \;, (j = \overline{1, n}) \qquad (3.5)$$

$$y_i \ge 0, i = \overline{1, m} \qquad (3.6)$$

называется *двойственной задачей* по отношению к прямой (3.1-3.3).

Из сравнения пары двойственных задач (3.1-3.3) и (3.4-3.6) следуют *правила построения двойственной задачи*:

1. Для построения двойственной задачи необходимо свести прямую задачу к стандартному виду.

– если задача на максимизацию целевой функции, то все неравенства системы ограничений приводятся к неравенствам вида «≤»;

– если задача на отыскание минимального значения – к виду «≥».

2. Введение двойственных переменных $y_i \geq 0, i = \overline{1, m}$ по количеству неравенств прямой задачи: каждому ограничению прямой задачи отвечает переменная двойственной задачи.

3. Построение целевой функции двойственной задачи:

– если целевая функция прямой задачи задается на поиск наибольшего значения (*max*), то целевая функция двойственной задачи – на определение наименьшего значения (*min*), и наоборот;

– коэффициентами при переменных в целевой функции двойственной задачи являются свободные члены системы ограничений прямой задачи.

4. Построение системы ограничений двойственной задачи:

– главная матрица, которая состоит из коэффициентов при переменных в системе ограничений прямой задачи

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

и главная матрица коэффициентов в системе ограничений двойственной задачи:

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

образовываются одна из одной путем транспонирования.

– свободными членами являются коэффициенты целевой функции прямой задачи.

Симметричность двух таких задач очевидна:

– в прямой и в двойственной задаче используют один набор начальных данных: $b_i, (i = \overline{1, m})$; $a_{ij}, (i = \overline{1, m};\ j = \overline{1, n})$; $c_j, (j = \overline{1, n})$;

– вектор ограничений начальной задачи становится вектором коэффициентов целевой функции двойственной задачи и наоборот;

– строки матрицы *A* (матрицы коэффициентов при переменных из ограничений прямой задачи) становятся столбцами матрицы коэффициентов при переменных в ограничениях двойственной задачи;

– каждому ограничению начальной задачи отвечает переменная двойственной и наоборот.

В случае несимметричных двойственных задачах уравнению системы ограничений одной задачи соответствует произвольная переменная другой.

Рассмотрим *алгоритм двойственного симплекс-метода*:

1. Построение канонической формы математической модели так, чтобы коэффициенты базисных переменных в совокупности определяли единичную матрицу.

2. Построение симплекс-таблицы.

Первый этап (построение опорного плана):

3. Выбор ведущей строки. Выбирается по наименьшему отрицательному значению базисной переменной. Если в строке с отрицательной базисной переменной нет ни одного отрицательного элемента, то задача не имеет допустимых решений (признак *пустой области допустимых решений*).

4. Выбор ведущего столбца. Выбирается по наибольшему отношению элементов оценочной строки к отрицательным элементам ведущей строки.

5. Преобразование симплекс-таблицы по формулам Жордана-Гаусса относительно выбранного ведущего элемента.

В алгоритме пункты 3-5 повторяются до получения опорного плана или решение прекращается из-за отсутствия допустимых решений.

Второй этап (поиск оптимального опорного плана):

6. Выбор ведущего столбца по наименьшей отрицательной оценке свободной переменной:

$$\Delta_k = \min\left\{ \Delta_j < 0, \quad j = m+1,..., n\right\}.$$

7. Выбор ведущей строки согласно условию:

$$a_{rk} = \min\left\{ \frac{b_i}{a_{ik}}, a_{ik} > 0\right\}.$$

8. Преобразование симплекс-таблицы по формулам Жордана-Гаусса относительно ведущего элемента a_{rk}.

Второй этап рассмотренного алгоритма полностью совпадает с алгоритмом симплекс-метода.

Содержанием теории двойственности является изучение связей между взаимодвойственными задачами. Рассмотрим основные теоремы двойственности и их экономическое содержание.

Первая теорема двойственности. *Если одна из пары сопряженных задач имеет оптимальный план, то вторая задача также имеет решение, причем для оптимальных решений значения целевых функций обеих задач совпадают, т.е.*

$$\max F = \min Z$$

Если целевая функция одной из задач неограниченная, то сопряженная задача также не имеет решения.

Экономическое содержание первой теоремы двойственности. Максимальную прибыль (F_{max}) предприятие получает при условии производства продукции согласно оптимальному плану $X^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$, однако такую же сумму денег ($Z_{\min} = F_{\max}$) оно может иметь, реализовав ресурсы по оптимальным ценам $Y^* = (y_1^*, y_2^*, ..., y_m^*)$. При условиях использования других планов $X \neq X_{opt}, Y \neq Y_{opt}$ на основании теории двойственности можно утверждать, что прибыли от реализации продукции всегда меньшие, чем затраты на ее производство.

Оценки выступают как инструмент сбалансирования затрат и результатов. Двойственные оценки обладают свойством: гарантируют рентабельность оптимального плана, т.е. равенство общей стоимости продукции и ресурсов обуславливает убыточность всякого другого плана, отличающегося от оптимального. Двойственные оценки позволяют сопоставлять и сбалансировать затраты и результаты производства.

Вторая теорема двойственности для симметричных задач. *Для оптимальности опорных планов* X^* *и* Y^* *соответствующих сопряженных задач, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия дополнительной нежесткости:*

$$x_j^*(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* - c_j) = 0, \quad j = \overline{1, n} \tag{3.7}$$

$$y_i^*(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* - b_i) = 0, \quad i = \overline{1, m} \tag{3.8}$$

Экономическое содержание второй теоремы двойственности относительно оптимального плана X^* прямой задачи. Если для изготовления всей продукции в объеме, который определяется оптимальным планом X^*, затраты одного *i-того* ресурса строго меньше его общего объема b_i (ресурс расходуется не полностью $\sum_{j=1}^{n} a_{i\,j} x_j^* < b_i$), то соответствующая оценка такого ресурса y_i^* (компонента оптимального плана двойственной задачи) будет равняться нулю, т.е. такой ресурс при данных условиях для производства не является «ценным» (изменение ресурса не влияет на доход).

Если же затраты ресурса равняются его имеющемуся объему b_i, т.е. ресурс расходуется полностью $\sum_{j=1}^{n} a_{i\,j} x_j^* = b_i$, то он является «ценным» для производства (изменение ресурса увеличивает доход), и его оценка y_i^* будет строго больше нуля.

Экономический смысл второй теоремы двойственности относительно оптимального плана Y^* двойственной задачи: в случае, если некоторое *j-тое* ограничение выполняется как неравенство

$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* > c_j$, т.е. все затраты на производство единицы *j-го* вида продукции превышают его цену c_j, то производство такого вида продукции является нецелесообразным, и в оптимальном плане прямой задачи объем такой продукции x_j^* равен нулю (продукция не производится).

Если затраты на производство *j-го* вида продукции равняются цене единицы продукции c_j ($\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* = c_j$), то ее необходимо изготовлять в объеме, который определяется оптимальным планом прямой задачи $x_j^* > 0$ (технология производства эффективна и потерь нет).

Существование двойственных переменных дает возможность сопоставления затрат на производство и цен на продукцию, на основании этого можно сделать обоснованный вывод о целесообразности или нецелесообразности производства каждого вида продукции.

Третья теорема двойственности. *Компоненты оптимального плана двойственной задачи* y_i^* $(i = \overline{1, m})$ *равняются значениям частных производных от целевой функции* $F(b_1, b_2, ..., b_m)$ *по соответствующим аргументам* b_i, $(i = \overline{1, m})$ *или*

$$\frac{\partial F}{\partial b_i} = y_i^*, \; i = 1, 2, ..., m \qquad (3.9)$$

Экономическое содержание третьей теоремы двойственности. Двойственные оценки являются мерой влияния ограничений задачи на экстремальное значение целевой функции (определить влияние увеличения или уменьшение объемов отдельных ресурсов на смену значения целевой функции).

Числовые значения оценок показывают на какую величину изменяется целевая функция при изменении объема соответствующего данной оценке ресурса $y_i^* = \dfrac{\Delta F}{\Delta b_i}$.

Итак, при условии незначительных изменений b_i вместо задачи линейного программирования, представленной в канонической форме имеем новую задачу, где b_i заменено на $b_i' = b_i + \Delta b_i$. Обозначим через X' оптимальный план новой задачи. Для определения $F(X')$ не нужно решать новую задачу линейного программирования, достаточно воспользоваться формулой $F(X') - F(X^*) = y_i^* \Delta b_i$, где X^* – оптимальный план задачи представленной в каноническом виде.

3.2. Пример выполнения задания

Пример. Найти $z = x_1 + 2x_2 \to \max$, при следующих ограничениях

$$\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 \le 12, \\ -x_1 + 3x_2 \le 6, \\ 2x_1 + 4x_2 \ge 16; \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \ge 0$$

Решение.

Приводим задачу к каноническому виду:

$$\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 + x_3 = 12, \\ -x_1 + 3x_2 + x_4 = 6, \\ 2x_1 + 4x_2 - x_5 = 16; \end{cases}$$

$$x_i \ge 0, \quad i = 1,\ldots 5$$

$$(-z) = -x_1 - 2x_2 \to \min$$

В ограничения, где дополнительные переменные вычитаются, добавляют искусственные переменные со следующими номерами:

$$\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 + x_3 = 12, \\ -x_1 + 3x_2 + x_4 = 6, \\ 2x_1 + 4x_2 - x_5 + x_6 = 16; \end{cases}$$

$$x_i \ge 0, \quad i = 1,\ldots 6$$

Строим вспомогательную задачу:

$$(-z) = -x_1 - 2x_2 + Mx_6 \to \min$$

Выписывают векторы коэффициентов при неизвестных и векторы свободных членов.

$$P_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad P_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad P_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad P_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$P_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad P_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad P_0 = \begin{pmatrix} 12 \\ 6 \\ 16 \end{pmatrix}$$

Строят первую симплексную таблицу следующего вида:

Таблица 3.1

Базис	C	P_0	-1	-2	0	0	0	M	С.В.
			P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	
P_3	0	12	4	-2	1	0	0	0	
P_4	0	6	-1	3*	0	1	0	0	2
P_6	M	16	2	4	0	0	-1	1	4
Z-строка		0	1	2	0	0	0	0	
M-строка		16	2	4	0	0	-1	0	

После того, как составлена симплекс-таблица, необходимо записать решение.

$$x_6 = 16,\ x_5 = 0,\ x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 = 12,\ x_4 = 6,\ Z = 0.$$

Построение нового решения (таблицы 3.2-3.5).

Таблица 3.2

Базис	C	P_0	-1	-2	0	0	0	M	С.В.
			P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	
P_3	0	12	4	-2	1	0	0	0	
P_4	0	6	-1	3	0	1	0	0	2
P_6	M	16	2	4	0	0	-1	1	4
Z-строка		0	1	2	0	0	0	0	
M-строка		16	2	4	0	0	-1	0	

Таблица 3.3

Базис	C	P_0	-1	-2	0	0	0	M	С.В.
			P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	
P_3	0	16	3 1/3	0	1	2/3	0	0	4 4/5
P_2	-2	2	- 1/3	1	0	1/3	0	0	
P_6	M	8	3 1/3	0	0	-1 1/3	-1	1	2 2/5
Z-строка		-4	1 2/3	0	0	- 2/3	0	0	
M-строка		8	3 1/3	0	0	-1 1/3	-1	0	

Таблица 3.4

Базис	C	P_0	-1	-2	0	0	0	С.В.
			P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	
P_3	0	8	0	0	1	2	1	8
P_2	-2	2 4/5	0	1	0	1/5	- 1/10	
P_1	-1	2 2/5	1	0	0	- 2/5	- 3/10	
Z-строка		-8	0	0	0	0	1/2	

Таблица 3.5

Базис	C	P_0	-1	-2	0	0	0	С.В.
			P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	
P_5	0	8	0	0	1	2	1	
P_2	-2	3 3/5	0	1	1/10	2/5	0	
P_1	-1	4 4/5	1	0	3/10	1/5	0	
Z-строка		-12	0	0	- 1/2	-1	0	

В Z-строке среди элементов, начиная со второго, нет положительных чисел, следовательно, в таблице 3.5 условие оптимальности выполняется.

Оптимальное решение имеет следующий вид:

$$x_1 = 4\frac{4}{5};\ x_2 = 3\frac{3}{5};\ \min(-Z) = -12;\ \max Z = 12.$$

Дадим геометрическую интерпретацию симплексному решению. Для этого построим область допустимых решений и проанализируем, каким точкам соответствует каждая симплекс-таблица. В расчет берем только значения основных переменных x_1 и x_2 (рис. 3.1).

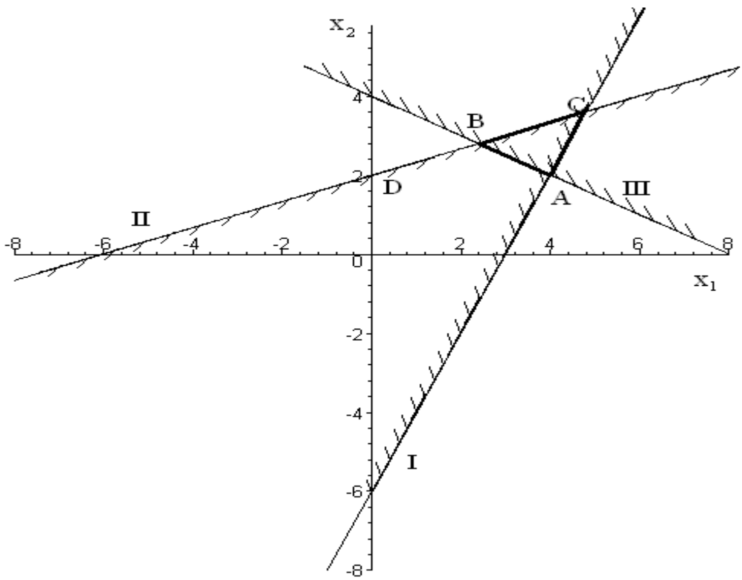

Рис. 3.1. Область допустимых решений

Первой и второй симплекс-таблицам соответствуют значения $x_1 = 0; x_2 = 0$, это точка O – она не лежит в области решений, потому что в таблице присутствуют искусственные переменные.

Третьей таблице соответствуют $x_1 = 0; x_2 = 2$ – это координаты точки D, она так же находится вне области решений.

В четвертой таблице искусственные переменные исключены, поэтому решение уже принадлежит области решений:

$$x_1 = 2\frac{2}{5};\ \ x_2 = 2\frac{4}{5}$$ – это координаты точки *B*.

Данная вершина является оптимальной, переходим к пятой таблице:

$$x_1 = 4\frac{4}{5},\ \ x_2 = 3\frac{3}{5}$$ – это координаты точки *C*.

Для задачи, решенной симплексным методом, составим двойственную

$$\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 \le 12, \\ -x_1 + 3x_2 \le 6, \\ -2x_1 - 4x_2 \le -16 \end{cases}$$

$$z = x_1 + 2x_2 \to \max$$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 3 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} \qquad A^T = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \\ -2 & 3 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 4y_1 - y_2 - 2y_3 \ge 1, \\ -2y_1 + 3y_2 - 4y_3 \ge 2. \end{cases}$$

$$f = 12y_1 + 6y_2 - 16y_3 \to \min$$

Решение двойственной задачи с обратным знаком находится в Z-строке последней симплексной таблицы в дополнительных столбцах.

	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
Z-строка	-12	0	0	- 1/2	-1	0

Дополнительными являются столбцы P_3, P_4, P_5, поэтому получаем:

$$y_1 = \frac{1}{2};\;\; y_2 = 1;\;\; y_3 = 0;\;\; \min f = 12.$$

Целесообразность рассмотрения двойственной задачи заключается в том, что задачи (прямая и двойственная) имеют самостоятельное экономическое содержание и позволяют изучать экономический процесс с разных сторон.

3.3. Задания для самостоятельного выполнения

Решить задачи симплексным методом, дать решению геометрическую интерпретацию, записать двойственную задачу и её решение. Во всех заданиях иметь в виду, что переменные неотрицательные.

Варианты заданий

1. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 \ge 4 \\ x_1 + 5x_2 \ge 5 \\ x_1 + x_2 \le 6 \end{cases}$

$\min: Z = 4x_1 + 2x_2$

2. $\begin{cases} x_1 + 4x_2 \ge 8 \\ x_1 + 6x_2 \ge 6 \\ 4x_1 + 5x_2 \le 20 \end{cases}$

$\min: Z = x_1 + 2x_2$

3. $\begin{cases} -x_1 + x_2 \le 4 \\ 3x_1 + 2x_2 \ge 6 \\ x_1 + x_2 \le 6 \end{cases}$

$\max: Z = 3x_1 + 4x_2$

4. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 \ge 6 \\ x_1 + x_2 \le 5 \\ x_1 + 3x_2 \ge 6 \end{cases}$

$\min: Z = 3x_1 + 4x_2$

5. $\begin{cases} 6x_1 + x_2 \ge 6 \\ x_1 + x_2 \le 5 \\ x_1 + 4x_2 \ge 4 \end{cases}$

$\max: Z = 5x_1 + x_2$

6. $\begin{cases} -4x_1 + 3x_2 \le 12 \\ x_1 + x_2 \ge 2 \\ 5x_1 + 6x_2 \le 30 \end{cases}$

$\max: Z = 2x_1 + 3x_2$

7. $\begin{cases} 7x_1 + 6x_2 \le 42 \\ 3x_1 + 4x_2 \ge 12 \\ 5x_1 + 2x_2 \ge 10 \end{cases}$

$\min: Z = 2x_1 + 5x_2$

8. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 \ge 3 \\ 3x_1 + 2x_2 \le 12 \\ 4x_1 + x_2 \ge 4 \end{cases}$

$\min: Z = 5x_1 + 4x_2$

9. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 \ge 3 \\ x_1 - x_2 \le 3 \\ 4x_1 + 5x_2 \le 20 \end{cases}$

$\max: Z = 4x_1 + 2x_2$

10. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 \ge 3 \\ 2x_1 + 3x_2 \le 12 \\ x_1 + 4x_2 \ge 4 \end{cases}$

$\min: Z = x_1 + 5x_2$

11. $\begin{cases} x_1 + x_2 \le 6 \\ x_1 + 5x_2 \ge 5 \\ 4x_1 + x_2 \ge 4 \end{cases}$

$\max: Z = 5x_1 + x_2$

12. $\begin{cases} x_1 + x_2 \le 4 \\ 3x_1 + x_2 \ge 4 \\ x_1 + 5x_2 \ge 4 \end{cases}$

$\min: Z = 6x_1 + 7x_2$

13. $\begin{cases} 7x_1 + x_2 \ge 7 \\ x_1 - x_2 \le 2 \\ x_1 + x_2 \le 4 \end{cases}$

$\max: Z = 5x_1 + 2x_2$

14. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 \ge 3 \\ x_1 + x_2 \ge 3 \\ x_1 + 5x_2 \ge 5 \end{cases}$

$\min: Z = 5x_1 + 7x_2$

15. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 \ge 4 \\ x_1 + x_2 \ge 3 \\ x_1 + 5x_2 \ge 5 \end{cases}$

$\min: Z = 3x_1 + 2x_2$

16. $\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 2 \\ 2x_1 + 3x_2 \le 12 \\ 3x_1 + 2x_2 \le 12 \end{cases}$

$\max: Z = 2x_1 + 3x_2$

17. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 \geq 4 \\ -x_1 + x_2 \leq 3 \\ 5x_1 + 4x_2 \leq 20 \end{cases}$

$\max : Z = 2x_1 + 4x_2$

18. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 \geq 4 \\ x_1 + 2x_2 \geq 4 \\ x_1 - x_2 \leq 2 \end{cases}$

$\min : Z = 4x_1 + 3x_2$

19. $\begin{cases} x_1 + 5x_2 \geq 5 \\ x_1 + x_2 \leq 6 \\ 7x_1 + x_2 \geq 7 \end{cases}$

$\max : Z = x_1 + 4x_2$

20. $\begin{cases} 5x_1 + 4x_2 \leq 20 \\ 4x_1 + x_2 \geq 4 \\ -3x_1 + 4x_2 \leq 12 \end{cases}$

$\max : Z = 2x_1 + 5x_2$

21. $\begin{cases} 6x_1 + 7x_2 \leq 42 \\ 4x_1 + 3x_2 \geq 12 \\ 2x_1 + 5x_2 \geq 10 \end{cases}$

$\min : Z = 5x_1 + 2x_2$

22. $\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \geq 12 \\ -3x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ 2x_1 - 3x_2 \leq 6 \end{cases}$

$\min : Z = 4x_1 + x_2$

23. $\begin{cases} x_1 + 7x_2 \geq 7 \\ x_1 + x_2 \leq 6 \\ 5x_1 + x_2 \geq 5 \end{cases}$

$\min : Z = 4x_1 + 5x_2$

24. $\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 \leq 12 \\ x_1 + 4x_2 \geq 4 \\ 4x_1 + 5x_2 \leq 20 \end{cases}$

$\max = Z = 5x_1 + 2x_2$

25. $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \geq 10 \\ -3x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ x_1 + x_2 \leq 6 \end{cases}$

$\max : Z = x_1 + 4x_2$

26. $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 \geq 12 \\ 4x_1 + 3x_2 \geq 12 \\ -x_1 + x_2 \leq 2 \end{cases}$

$\min : Z = 3x_1 - x_2$

27. $\begin{cases} x_1 - x_2 \le 2 \\ 3x_1 + 5x_2 \ge 15 \\ -2x_1 + 3x_2 \end{cases}$

$\min: Z = 4x_1 + 2x_2$

28. $\begin{cases} 3x_1 + 7x_2 \ge 21 \\ x_1 + x_2 \le 6 \\ 7x_1 + 3x_2 \ge 21 \end{cases}$

$\max: Z = 3x_1 + x_2$

29. $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \ge 10 \\ 7x_1 + 4x_2 \le 28 \\ 6x_1 + x_2 \ge 6 \end{cases}$

$\max: Z = 4x_1 + 2x_2$

30. $\begin{cases} 6x_1 + 5x_2 \le 30 \\ x_1 + 2x_2 \ge 4 \\ 2x_1 + x_2 \ge 4 \end{cases}$

$\min: Z = 4x_1 + 5x_2$

31. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 \ge 6 \\ x_1 + 5x_2 \ge 5 \\ x_1 + x_2 \le 4 \end{cases}$

$\min: Z = 3x_1 + 4x_2$

32. $\begin{cases} 4x_1 + x_2 \ge 8 \\ x_1 + 4x_2 \ge 8 \\ 5x_1 + 4x_2 \le 20 \end{cases}$

$\min: Z = 2x_1 + 3x_2$

33. $\begin{cases} -x_1 + x_2 \le 3 \\ 2x_1 + 3x_2 \ge 6 \\ x_1 + x_2 \le 5 \end{cases}$

$\max: Z = 2x_1 + 5x_2$

34. $\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 3 \\ 4x_1 + 3x_2 \le 12 \\ 3x_1 + 4x_2 \le 12 \end{cases}$

$\max: Z = 2x_1 + 5x_2$

35. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 \ge 6 \\ -x_1 + x_2 \le 4 \\ 4x_1 + 5x_2 \le 20 \end{cases}$

$\max: Z = 3x_1 + 5x_2$

36. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 \ge 6 \\ x_1 + 2x_2 \ge 6 \\ x_1 - x_2 \le 3 \end{cases}$

$\min: Z = 5x_1 + 2x_2$

37. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 \geq 9 \\ x_1 + x_2 \leq 7 \\ x_1 + 3x_2 \geq 9 \end{cases}$

$\min: Z = 2x_1 + 5x_2$

38. $\begin{cases} x_1 + 6x_2 \geq 6 \\ x_1 + x_2 \leq 5 \\ 4x_1 + x_2 \geq 4 \end{cases}$

$\min: Z = x_1 + 3x_2$

39. $\begin{cases} -3x_1 + 4x_2 \leq 12 \\ x_1 + x_2 \geq 3 \\ 6x_1 + 5x_2 \leq 30 \end{cases}$

$\max: Z = 3x_1 + 5x_2$

40. $\begin{cases} x_1 + 7x_2 \geq 7 \\ x_1 + x_2 \leq 5 \\ 6x_1 + x_2 \geq 6 \end{cases}$

$\min: Z = 4x_1 + x_2$

3.4. Контрольные вопросы

1. Алгоритм симплекс-метода.
2. Сформулируйте прямую и двойственную ей задачу.
3. Понятие двойственности в задачах линейного программирования (ЛП).
4. Правило построения математической модели двойственной задачи.
5. Первая теорема двойственности.
6. Вторая теорема двойственности.
7. Третья теорема двойственности.
8. Алгоритм двойственного симплекс-метода.

Тема 4. Элементы теории игр

4.1. Краткие теоретические сведения

Математическая теория игр является одним из ключевых инструментов построения экономических моделей. Так как при решении экономических задач часто возникает необходимость анализировать ситуации, в которых сталкиваются интересы двух или более сторон, преследующих различные цели. *Игра* – это идеализированная математическая модель коллективного поведения нескольких лиц (игроков), интересы которых различны.

Наиболее разработанной в теории игр является конечная парная игра с нулевой суммой (антагонистическая игра двух лиц или двух коалиций), которая называется *матричной игрой*.

Игра состоит из *ходов* (личные, случайные), выполняемых игроками одновременно или последовательно.

Совокупность ходов, предпринятых игроками от начала до окончания игры, называется *партией*.

Конечная игра с нулевой суммой определяется матрицей

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ .. & .. & .. & .. \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

которая называется *платежной матрицей* (или матрицей выигрышей), где строки соответствуют стратегиям первого игрока, а столбцы – стратегиям второго игрока.

Стратегия игрока – совокупность правил, определяющих выбор варианта действий при каждом личном ходе в зависимости от ситуации, сложившейся в процессе игры.

Оптимальной стратегией игрока в матричной игре называется такая стратегия, которая обеспечивает ему максимальный выигрыш. Если игра повторяется неоднократно, то оптимальная стратегия должна обеспечивать максимальный средний выигрыш.

Для выбора оптимальной стратегии используют *принцип максимина*: выбор той стратегии, при которой минимальный выигрыш игрока для различных стратегий максимален. Это принцип крайне осторожного игрока и является основным принципом теории матричных игр.

Пусть первый игрок выбирает i-тую стратегию (i-тая строка матрицы A), тогда второй игрок выбирает такую стратегию j, которая обеспечит ему наибольший выигрыш (столбец j матрицы A), в котором платеж a_{ij} минимален.

Величина

$$\alpha = \max_i \min_j a_{ij}$$

называется *нижней ценой* игры, а соответствующая ей стратегия первого игрока – максиминной.

Аналогичные рассуждения (с точки зрения второго игрока) определяют *верхнюю цену* игры

$$\beta = \min_i \max_j a_{ij}$$

и соответствующую ей минимаксную стратегию второго игрока.

Признак устойчивости (равновесности) пары стратегии – это равенство нижней и верхней цены игры.

Стратегии A_i и B_j, при которых выполняется равенство нижней и верхней цены игры, называются *оптимальными чистыми стратегиями*, а их совокупность *–решением игры*. В этом случае говорят, что игра решается в чистых стратегиях.

Величина $\nu = \alpha = \beta$, называется *ценой игры*.

Таким образом, если матрица игры содержит седловую точку, то ее решение находится по принципу максимина. если матричная игра не имеет седловой точки, то игрок должен использовать оптимальную смешанную стратегию, которая обеспечит максимальный выигрыш ν .

Основная теорема матричных игр. *Любая матричная игра имеет, по крайней мере, одно оптимальное решение, в общем случае, в смешанных стратегиях и соответствующую цену* ν .

Чистую стратегию можно рассматривать как частный случай смешанной стратегии, когда одна вероятность имеет единичное значение, а все остальные – нулевое.

Смешанная стратегия игрока– случайная величина, значениями которой являются чистые стратегии игрока.

Смешанные стратегии игроков *A* и *B* соответственно обозначим:

$$S_A = (p_1, p_2, \ldots, p_m), \quad \sum_{i=1}^{m} p_i = 1;$$

$$S_B = (q_1, q_2, \ldots, q_n), \quad \sum_{j=1}^{n} q_j = 1$$

где p_i и q_j – вероятности выбора стратегий A_i и B_j игроками *A* и *B*соответственно.

Если игрок *A* применяет смешанную стратегию $S_A = (p_1, p_2, \ldots, p_m)$, а игрок *B* смешанную стратегию $S_B = (q_1, q_2, \ldots, q_n)$, то средний выигрыш (математическое ожидание) игрока *A* (проигрыш игрока *B*) определяется соотношением

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_i q_j ,$$

может рассматриваться в качестве характеристики выбранных стратегий S_A и S_B.

Решением игры в данном случае является пара оптимальных смешанных стратегий (S_A^*, S_B^*), максимизирующих математическое ожидание цены игры (средний выигрыш)игрока *A*, соответственно, ожидаемый проигрыш игрока *B*.

Количественный результат игры задается числами a_{ij}, равными выигрышу игрока *A* и проигрышу игрока *B* при реализации стратегии A_i, B_j.

Необходимо определить оптимальные стратегии игроков.

$$S_A^* = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \ldots & A_m \\ p_1^* & p_2^* & \ldots & p_m^* \end{pmatrix}, \quad S_B^* = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & \ldots & B_n \\ q_1^* & q_2^* & \ldots & q_n^* \end{pmatrix}$$

Применяя оптимальную стратегию P^* против любой чистой стратегии B_j игрока *B*, игрок *A* получает средний выигрыш или математическое ожидание выигрыша:

$$a_j = a_{1j} p_1 + a_{2j} p_2 + ... + a_{mj} p_m \geq v$$

А игрок *B*, применяя оптимальную стратегию Q^* против любой чистой стратегии A_i игрока *A*, получает средний проигрыш или математическое ожидание проигрыша:

$$a_i = a_{i1} q_1 + a_{i2} q_2 + ... + a_{in} q_n \leq v$$

То есть в соответствии с общей постановкой задачи оптимальная стратегия S_B^* гарантирует игроку *B* средний проигрыш, не больший, чем цена игры v при произвольной стратегии игрока *A*, и проигрыш, равный цене игры v при оптимальной стратегии S_A^* игрока *A*. Без ограничения общности можно считать $v > 0$.

Действительно, всегда можно преобразовать матрицу игр так, чтобы все ее элементы стали неотрицательны: $a_{ij} \geq 0 \ \forall i, j$.

Выбирая в качестве стратегий игрока *B* его чистые стратегии, получим:

$$\begin{cases} a_{11} p_1 + a_{21} p_2 + ... + a_{m1} p_m \leq v \\ a_{12} p_1 + a_{22} p_2 + ... + a_{m2} p_m \leq v \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{1n} p_1 + a_{2n} p_2 + ... + a_{mn} p_m \leq v \end{cases}$$

Введем вместо неизвестного $p_1, p_2, \ldots, p_m$ новые неизвестные:

$$x_1 = \frac{p_1}{v}, \ x_2 = \frac{p_2}{v}, ..., \ x_m = \frac{p_m}{v}$$

Тогда получим следующую систему:

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + a_{21} x_2 + ... + a_{m1} x_m \leq 1 \\ a_{12} x_1 + a_{22} x_2 + ... + a_{m2} x_m \leq 1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{1n} x_1 + a_{2n} x_2 + ... + a_{mn} x_m \leq 1 \end{cases}$$

Условие нормировки вероятностей $p_i: p_1 + p_2 + \dots p_m = 1$ означает, что новые неизвестные $x_1, x_2, \dots, x_m$ должны удовлетворять условию:

$$x_1 + x_2 + ... + x_m = \frac{1}{v}$$

Поскольку цель игрока *B* состоит в минимизации своего гарантированного проигрыша, то величина

$$Z_1(x) = x_1 + x_2 + ... + x_m,$$

должна достигать на оптимальной стратегии S_B^* своего наибольшего значения, т. е.:

$$Z_1 = x_1 + x_2 + ... + x_m \to \max$$

Таким образом, задача нахождения неизвестных $x_i > 0 \ (i = 1, 2, \dots, m)$, удовлетворяющих системе ограничений и доставляющих наибольшее значение целевой функции, является задачей линейного программирования. Ее решение определяет оптимальную смешанную стратегию S_B^* игрока *B*.

Аналогично, средний выигрыш игрока *A* не меньше цены игры v при любой чистой стратегии игрока *B*. Поэтому вероятности $q_1, q_2, \dots, q_n$, определяющие смешанную стратегию S_A^*, удовлетворяют системе неравенств:

$$\begin{cases} a_{11}q_1 + a_{12}q_2 + ... + a_{1n}q_n \ge v \\ a_{21}q_1 + a_{22}q_2 + ... + a_{2n}q_n \ge v \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}q_1 + a_{m2}q_2 + ... + a_{mn}q_n \ge v \end{cases}$$

Вводим новые переменные $y_j = \dfrac{q_j}{v}, \ (j = 1, 2, ..., n)$.

В силу условия нормировки $q_1 + q_2 + \dots + q_n = 1$, получим:

$$y_1 + y_2 + ... + y_n = \frac{1}{v}.$$

Оптимальной стратегии S_A^* игрока A соответствует максимизация его выигрыша. В результате получаем задачу линейного программирования:

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + ... + a_{1n}y_n = 1 \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + ... + a_{2n}y_n = 1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}y_1 + a_{m2}y_2 + ... + a_{mn}y_n = 1 \end{cases}$$

$$y_j \geq 0,\ j = 1, 2, ..., n$$

$$Z_2 = y_1 + y_2 + ... + y_n \to \min$$

Решение рассмотренной задачи определяет оптимальную стратегию S_A^*. Цена игры, соответствующая полученным оптимальным стратегиям S_A^*, S_B^*, следующая:

$$v = \frac{1}{\max Z_1} = \frac{1}{\min Z_2}$$

Задачи линейного программирования являются взаимно двойственными. Это позволяет в конкретной ситуации нахождения оптимальных стратегий выбрать ту из взаимно двойственных задач, численное решение которой проще. Решение второй задачи определяется по оптимальному плану двойственной задачи. При этом необходимо учитывать основные правила построения двойственных задач и теоремы двойственности.

4.2. Пример выполнения задания

Пример. Проанализировать игру, используя принцип минимакса. Найти решение в смешанных стратегиях методом линейного программирования.

Таблица 4.1

K \ *C*	C_1	C_2	C_3
K_1	8	4	9
K_2	6	7	9
K_3	7	5	8

Решение.

В игре два участника – сторона *K* и сторона *C*, у каждого из участников по 3 стратегии.

Будем считать, что матрица характеризует выигрыш стороны *K* (и, соответственно, проигрыш стороны *C*).

Решить игру – значит дать рекомендации каждой из сторон по использованию их соответствующих стратегий. Предварительно игру анализируют по «принципу минимакса». Он состоит в выборе наиболее осторожной стратегии, исходя из наихудшего способа действий другой стороны.

1. Анализируем игру с позиции стороны *K*.

Очевидно, что из этих гарантированных выигрышей сторона *K* пытается выбрать наибольшее значение – это 6. Данную величину называют *нижней ценой игры* или *максимином* и обозначают $V_{нц} = 6$.

2. Анализируем игру с позиции стороны *C*.

Эту величину называют *верхней ценой игры* или *минимаксом* и обозначают $V_{вц} = 7$.

3. Цены игры *V* – это величина, которая отображает объективное соотношение сил, она всегда удовлетворяет условию $V_{нц} \le V \le V_{вц}$. В данном примере: $6 < V < 7$.

$$S_c = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 & C_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \qquad S_k = \begin{pmatrix} K_1 & K_2 & K_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}$$

где:

x_1, x_2, x_3 – вероятности соответствующих стратегий стороны *C*;

y_1, y_2, y_3 – вероятности соответствующих стратегий стороны *K*.

Каждой матричной игре можно поставить в соответствие две двойственные задачи линейного программирования, которые отображают интересы сторон:

– для стороны *C* задачу записывают по строкам;

– для стороны *K* – по столбцам.

В этих задачах переменными являются вероятности, измененные на одну и ту же величину.

1. Запишем двойственные задачи на основе приведенной платежной матрицы:

а) для участника *C*;

б) для участника *K*;

$$\begin{cases} 8x_1' + 4x_2' + 9x_3' \le 1 \\ 6x_1' + 7x_2' + 9x_3' \le 1 \\ 7x_1' + 5x_2' + 8x_3' \le 1 \end{cases}$$
$$\max : Z = x_1' + x_2' + x_3'$$

$$\begin{cases} 8y_1' + 6y_2' + 7y_3' \ge 1 \\ 4y_1' + 7y_2' + 5y_3' \ge 1 \\ 9y_1' + 9y_2' + 8y_3' \ge 1 \end{cases}$$
$$\min : f = y_1' + y_2' + y_3'$$

Симплексное решение удобно проводить для первой задачи, так как в ней не будет искусственных переменных.

Данная задача принимает вид:

$$\begin{cases} 8x_1' + 4x_2' + 9x_3' + x_4' = 1, \\ 6x_1' + 7x_2' + 9x_3' + x_5' = 1, \\ 7x_1' + 5x_2' + 8x_3' + x_6' = 1; \end{cases}$$
$$\min : \ (-\mathrm{Z}) = -x_1' - x_2' - x_3'$$

В результате использования симплекс-метода получаем:

Таблица 4.2

Базис	C	P_0	–1	–1	–1	0	0	0	СО
			P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
P_4	0	1	8	4	9	1	0	0	0,13
P_5	0	1	6	7	9	0	1	0	0,17
P_6	0	1	7	5	8	0	0	1	0,14
Z-строка		0	1	1	1	0	0	0	
P_1	–1	$\frac{1}{8}$	1	$\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	0	0	0,25
P_5	0	$\frac{1}{4}$	0	4	$2\frac{1}{4}$	$-\frac{3}{4}$	1	0	0,06
P_6	0	$\frac{1}{8}$	0	$1\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	$-\frac{7}{8}$	0	1	0,08
Z-строка		$-\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{8}$	0	0	
P_1	–1	$\frac{3}{32}$	1	0	$\frac{27}{32}$	$\frac{7}{32}$	$-\frac{1}{8}$	0	
P_2	–1	$\frac{1}{16}$	0	1	$\frac{9}{16}$	$-\frac{3}{16}$	$\frac{1}{4}$	0	
P_6	0	$\frac{1}{32}$	0	0	$-\frac{23}{32}$	$-\frac{19}{32}$	$-\frac{3}{8}$	1	
Z-строка		$-\frac{5}{32}$	0	0	$-\frac{13}{32}$	$-\frac{1}{32}$	$-\frac{1}{8}$	0	

Решение будет иметь вид:

а) $x_1' = \frac{3}{32}; x_2' = \frac{1}{16}; x_3' = 0, \max Z = \frac{5}{32}$

б) $y_1' = \frac{1}{32}; y_2' = \frac{1}{8}; y_3' = 0; \min f = \frac{5}{32}$

$$\nu = \frac{1}{z} = \frac{32}{5}$$

$$x_1 = \frac{32}{5} \cdot \frac{3}{32} = \frac{3}{5},\ x_2 = \frac{32}{5} \cdot \frac{1}{16} = \frac{2}{5},\ x_3 = 0$$

$$y_1 = \frac{32}{5} \cdot \frac{1}{32} = \frac{1}{5},\ y_2 = \frac{32}{5} \cdot \frac{1}{8} = \frac{4}{5},\ y_3 = 0$$

в) составим оптимальные стратегии для участников:

$$S_c = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 & C_3 \\ \frac{3}{5} & \frac{2}{5} & 0 \end{pmatrix} \quad S_k = \begin{pmatrix} K_1 & K_2 & K_3 \\ \frac{1}{5} & \frac{4}{5} & 0 \end{pmatrix}$$

Как видим, для достижения оптимального результата стороне C рекомендуется из 5 раз стратегию C_3 использовать 0 раз, стратегию C_2 – 2 раза, стратегию C_1 – наиболее часто, а именно 3 раза.

Для стороны K стратегию K_3 рекомендуется не использовать, наиболее часто необходимо использовать стратегию K_2 – 4 раза из 5, а стратегию K_1 – один раз.

Если кто-то из участников отклониться от этих рекомендаций, то он ухудшит только свое собственное положение.

4.3. Задания для самостоятельного выполнения

Проанализировать игру, используя принцип минимакса. Найти решение в смешанных стратегиях методом линейного программирования.

Варианты заданий

1.

К \ С	C_1	C_2	C_3
K_1	5	4	3
K_2	3	6	7
K_3	8	3	2

2.

К \ С	C_1	C_2	C_3
K_1	5	7	4
K_2	2	6	6
K_3	8	3	5

3.

К \ С	C_1	C_2	C_3
K_1	2	6	4
K_2	3	7	3
K_3	8	1	5

6.

К \ С	C_1	C_2	C_3
K_1	3	7	3
K_2	8	1	5
K_3	2	6	4

7.

К \ С	C_1	C_2	C_3
K_1	7	6	4
K_2	5	3	9
K_3	8	9	5

8.

К \ С	C_1	C_2	C_3
K_1	5	8	10
K_2	1	7	2
K_3	9	6	3

4.

К \ С	C_1	C_2	C_3
K_1	3	7	2
K_2	5	9	4
K_3	6	2	5

9.

К \ С	C_1	C_2	C_3
K_1	4	3	5
K_2	6	7	3
K_3	3	2	8

5.

К \ С	C_1	C_2	C_3
K_1	5	4	6
K_2	4	6	3
K_3	2	7	4

10.

К \ С	C_1	C_2	C_3
K_1	6	3	4
K_2	3	7	5
K_3	8	2	5

11.

К \ С	C_1	C_2	C_3
K_1	2	7	4
K_2	5	4	6
K_3	4	6	3

16.

К \ С	C_1	C_2	C_3
K_1	7	3	6
K_2	2	8	3
K_3	3	5	4

12.

К \ С	C_1	C_2	C_3
K_1	4	7	6
K_2	9	5	3
K_3	5	8	9

17.

К \ С	C_1	C_2	C_3
K_1	3	7	3
K_2	5	1	8
K_3	4	6	2

13.

К \ С	C_1	C_2	C_3
K_1	5	7	4
K_2	2	6	6
K_3	8	3	5

14.

К \ С	C_1	C_2	C_3
K_1	5	4	3
K_2	3	6	7
K_3	8	3	2

15.

К \ С	C_1	C_2	C_3
K_1	2	7	4
K_2	5	4	6
K_3	4	6	3

21.

К \ С	C_1	C_2	C_3
K_1	4	6	3
K_2	2	7	4
K_3	5	4	6

18.

К \ С	C_1	C_2	C_3
K_1	8	1	5
K_2	2	6	4
K_3	3	7	3

19.

К \ С	C_1	C_2	C_3
K_1	1	7	2
K_2	9	6	3
K_3	5	8	10

20.

К \ С	C_1	C_2	C_3
K_1	9	5	3
K_2	4	7	6
K_3	5	8	9

26.

К \ С	C_1	C_2	C_3
K_1	2	7	1
K_2	8	4	5
K_3	3	6	4

22.

К \ С	C_1	C_2	C_3
K_1	7	3	3
K_2	1	8	5
K_3	6	2	4

23.

К \ С	C_1	C_2	C_3
K_1	9	6	3
K_2	1	7	2
K_3	5	8	10

24.

К \ С	C_1	C_2	C_3
K_1	3	5	4
K_2	7	3	6
K_3	2	8	3

25.

К \ С	C_1	C_2	C_3
K_1	7	4	2
K_2	4	6	5
K_3	6	34	

27.

К \ С	C_1	C_2	C_3
K_1	5	8	9
K_2	9	5	3
K_3	4	7	6

28.

К \ С	C_1	C_2	C_3
K_1	4	2	7
K_2	6	5	4
K_3	3	4	6

29.

К \ С	C_1	C_2	C_3
K_1	4	6	3
K_2	2	7	4
K_3	5	4	6

30.

К \ С	C_1	C_2	C_3
K_1	6	7	4
K_2	3	5	9
K_3	9	8	5

31.

К \ С	C_1	C_2	C_3
K_1	4	5	6
K_2	6	4	3
K_3	7	2	4

32.

К \ С	C_1	C_2	C_3
K_1	3	5	9
K_2	6	7	4
K_3	9	8	5

33.

К \ С	C_1	C_2	C_3
K_1	1	5	8
K_2	6	4	2
K_3	3	7	3

34.

К \ С	C_1	C_2	C_3
K_1	4	7	6
K_2	5	8	9
K_3	9	5	3

36.

К \ С	C_1	C_2	C_3
K_1	3	7	2
K_2	5	3	8
K_3	4	6	3

37.

К \ С	C_1	C_2	C_3
K_1	7	1	6
K_2	3	8	2
K_3	3	5	4

38.

К \ С	C_1	C_2	C_3
K_1	4	2	5
K_2	6	7	4
K_3	3	4	6

39.

К \ С	C_1	C_2	C_3
K_1	2	8	3
K_2	7	4	6
K_3	1	5	4

35.

К \ С	C_1	C_2	C_3
K_1	5	3	8
K_2	4	6	3
K_3	3	7	2

40.

К \ С	C_1	C_2	C_3
K_1	6	3	8
K_2	3	7	2
K_3	4	5	5

4.4. Контрольные вопросы

1. Сформулируйте общий вид матричной игры.
2. Что означает решить игру.
3. Дайте определение стратегии игры.
4. Что такое седловая точка.
5. Поясните принцип сведения матричной игры к задаче линейного программирования.
6. Сформулируйте принцип минимакса.
7. Применение теории двойственности при решении матричной игры.
8. Дайте определение чистые стратегии, смешанные стратегии, оптимальная стратегия.
9. Решение матричных игр графическим методом. Особенности его применения.

Тема 5. Транспортная задача. Постановка, методы решения и анализа

5.1. Краткие теоретические сведения

Транспортная задача представляет собой распределительную задачу линейной оптимизации.

Оптимизация транспортных перевозок. Имеется m поставщиков определенного вида продукции. Максимальные объемы возможных поставок заданы и равны, соответственно, a_i, $(i = 1, 2, ..., m)$.

Эта продукция используется n потребителями. Объемы потребностей заданы и равны, соответственно, b_j, $(j = 1, 2, ..., n)$.

Стоимость перевозок единицы продукции от i-го поставщика к j-му равна c_{ij}.

Требуется установить такие объемы перевозок x_{ij} от каждого поставщика к каждому потребителю, чтобы суммарные затраты на перевозки были минимальными и потребности всех потребителей были удовлетворены.

Математическая постановка задачи. Общие затраты на перевозки определяется как сумма затрат по всем возможным маршрутам. Суммарные затраты должны быть минимальными:

$$f(\bar{x}) = \sum_{i-1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min$$

По условиям задачи все грузы должны быть вывезены:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \ (i = 1, 2, ..., m)$$

потребности всех потребителей должны быть удовлетворены:

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_i, \ (j = 1, 2, ..., n).$$

Кроме того, обратные перевозки исключаются.

Наиболее распространенным на практике является *метод потенциалов.*

Аналитическая форма модели имеет следующий вид:

$$Z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \min \qquad (5.1)$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, i = 1,..., m \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_i, j = 1,..., n \end{cases} \qquad (5.2)$$

$$x_{ij} \geq 0, i = 1, ..., m; \ j = 1, ..., n \qquad (5.3)$$

где: a_i – запас продукта на *i*-м складе, $a_i > 0$ $(i = 1, ..., m)$; b_j – потребность в j-м пункте, $b_j > 0$ $(i = 1, ..., n)$; c_{ij} – стоимость перевозки единичного количества продукта с *i*-го склада в *j*-ый пункт, $c_{ij} > 0$.

Если выполняется условие:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j ,$$

то транспортная задача называется *закрытой.*

Если данное условие нарушается, то транспортная задача называется *открытой.*

Решение открытой транспортной задачи сводится к решению закрытой с помощью введения *фиктивного поставщика (*или *фиктивного потребителя)*.

Опорный план транспортной задачи может иметь не более $(m+n-1)$ отличных от нуля переменных. Если в опорном плане число отличных от нуля компонент равно в точности $(m+n-1)$, то план называется *невырожденным*, а если меньше, то *вырожденным*.

Для решения транспортной задачи методом потенциалов используется табличная форма математической модели.

Алгоритм метода потенциалов

1. Построение исходного опорного плана. Для этого используется одно из правил (правило *северо-западного угла,* правило *минимальной стоимости* или др.).

2. Определение потенциалов строк u_i и столбцов v_j транспортной таблицы в соответствии с условием $u_i + v_j = 0$ для базисных переменных (загруженных клеток).

3. Вычисление оценок оптимальности s_{ij} свободных переменных по формуле $s_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_j)$.

Если отрицательных оценок нет, то получен оптимальный опорный план транспортной задачи.

Если есть хотя бы одна отрицательная оценка, решение можно улучшить.

4. Выбор *перспективной* клетки по наименьшей отрицательной оценке и преобразование опорного плана по *циклу пересчета* перспективной клетки.

5. Проверка опорного плана на оптимальность, т. е. переход к п. 2 алгоритма.

Рассмотрим правила построения исходного опорного плана.

Правило северо-западного угла. Заполнение таблицы начинается с левой верхней клетки переменной x_{11} и заканчивается клеткой для переменной x_{mn}. На каждом шаге остаток по строке (или по столбцу) помещается в соседнюю клетку, но так, чтобы не нарушались условия (5.2).

Если на некотором шаге (но не на последнем) остаток оказался равным нулю, то в соседнюю клетку (вниз или вправо) записывается *базисный нуль* и клетка считается заполненной, а опорный план – вырожденным.

Правило минимальной стоимости. Построение начинается с клетки с минимальным тарифом (единичной стоимостью).

Остаток по строке (или по столбцу) помещается в клетки с минимальной стоимостью без нарушения условия (5.2).

5.2. Пример выполнения задания

Пример. Три пункта поставки A_1, A_2, A_3 должны обеспечивать однородным грузом пять пунктов B_1, B_2, B_3, B_4 потребления этого груза. В пунктах A_1, A_2, A_3 находится груз соответственно в количестве a_1, a_2 и a_3 т. В пункты B_1, B_2, B_3, B_4 необходимо доставить соответственно $\mathrm{b}_1, \mathrm{b}_2, \mathrm{b}_3, \mathrm{b}_4$ т. груза. Транспортные тарифы (d_{ik}) приведены в следующей матрице-таблице:

Таблица 5.1

Пункты поставки	*Пункты потребления*			
	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	d_{11}	d_{12}	d_{13}	d_{14}
A_2	d_{21}	d_{22}	d_{23}	d_{24}
A_3	d_{31}	d_{32}	d_{33}	d_{34}
A_4	d_{41}	d_{42}	d_{43}	d_{44}

Найти такой план закрепления поставщиков однородного груза за потребителями, чтобы общие расходы на перевозку были минимальными методом потенциалов.

$$a_1 = 45 \qquad a_2 = 110 \qquad a_3 = 95$$

$$b_1 = 20 \qquad b_2 = 100 \qquad b_3 = 40 \qquad b_4 = 90$$

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 6 & 8 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 5 & 7 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

Решение.

Метод потенциалов совершается в три этапа:

1. Построение первоначального опорного плана (начальное распределение грузов).

2. Оценка оптимального распределение грузов с помощью системы потенциалов.

3. Улучшение плана перевозок, если это возможно.

Второй и третий этапы повторяются до тех пор, пока решение не станет оптимальны.

I этап. Построение начального опорного плана

Таблица 5.2

Поставщики	Мощность	B_1	B_2	B_3	B_4	
		20	100	40	90	U_i
A_1	45	3	5 45	6	8	**0**
A_2	110	1 20	+ 3	1 40	- 2 50	**0**
A_3	95	5	- 7 55	5	+ 4 40	**2**
	Vк	**1**	**5**	**1**	**2**	

Z_1= 930

II этап. Оценка оптимальности решения

Теперь необходимо проверить выполнение второго условия оптимальности решения: сумма потенциалов для незаполненной клетки не должна превышать величину тарифа в ней.

$$u_1 + v_2 = 5; \quad u_2 + v_1 = 1; \quad u_2 + v_3 = 1;$$

$$u_2 + v_4 = 2; \quad u_3 + v_2 = 7; \quad u_3 + v_4 = 4.$$

Полагая, $u_1 = 0$ последовательно находим значение всех потенциалов.

На основании потенциалов строк и столбцов вычисляем оценки клеток

$$s_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_j):$$

2	0	5	6
0	-2	0	0
2	0	2	0

Условие оптимальности не выполняется. Стоит улучшить решение.

III этап. Построение нового распределения

Таблица 5.3

Поставщики	Мощность	B_1	B_2	B_3	B_4	
		20	100	40	90	U_i
A_1	45	3	5 45	6	8	**0**
A_2	110	1 20	3 50	1 40	2	**-2**
A_3	95	5	7 5	5	4 90	**2**
	Vк	**3**	**5**	**3**	**2**	

Z_3 830

0	0	3	6
0	0	0	2
0	0	0	0

Таким образом получен оптимальный план.

5.3. Задания для самостоятельного выполнения

Три пункта поставки A_1, A_2, A_3 должны обеспечивать однородным грузом пять пунктов B_1, B_2, B_3, B_4 потребления этого груза.

В пунктах A_1, A_2, A_3 находится груз соответственно в количестве a_1, a_2 и a_3 т. В пункты B_1, B_2, B_3, B_4 необходимо доставить соответственно b_1, b_2, b_3, b_4 т. груза. Транспортные тарифы (d_{ik}) приведены в следующей матрице-таблице:

Таблица 5.4

Пункты поставки	*Пункты потребления*				
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	d_{11}	d_{12}	d_{13}	d_{14}	d_{15}
A_2	d_{21}	d_{22}	d_{23}	d_{24}	d_{25}
A_3	d_{31}	d_{32}	d_{33}	d_{34}	d_{35}
A_4	d_{41}	d_{42}	d_{43}	d_{44}	d_{45}

Найти такой план закрепления поставщиков однородного груза за потребителями, чтобы общие расходы на перевозку были минимальными методом потенциалов.

Варианты заданий

1.

$$a_1 = 330 \quad a_2 = 180 \quad a_3 = 320 \quad a_4 = 170$$

$$b_1 = 200 \quad b_2 = 200 \quad b_3 = 200 \quad b_4 = 200 \quad b_5 = 200$$

$$D = \begin{pmatrix} 29 & 53 & 39 & 29 & 22 \\ 15 & 33 & 16 & 3 & 3 \\ 16 & 27 & 16 & 3 & 5 \\ 35 & 50 & 39 & 20 & 23 \end{pmatrix}$$

2.

$a_1 = 130 \quad a_2 = 270 \quad a_3 = 160 \quad a_4 = 140$

$b_1 = 140 \quad b_2 = 140 \quad b_3 = 140 \quad b_4 = 140 \quad b_5 = 140$

$$D = \begin{pmatrix} 12 & 6 & 29 & 19 & 21 \\ 14 & 3 & 30 & 10 & 10 \\ 15 & 27 & 28 & 11 & 24 \\ 1 & 23 & 25 & 15 & 13 \end{pmatrix}$$

3.

$a_1 = 250 \quad a_2 = 200 \quad a_3 = 200$

$b_1 = 100 \quad b_2 = 130 \quad b_3 = 100 \quad b_4 = 160 \quad b_5 = 140$

$$D = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 4 & 2 & 5 \\ 7 & 1 & 3 & 1 & 10 \\ 2 & 3 & 6 & 8 & 7 \end{pmatrix}$$

4.

$a_1 = 350 \quad a_2 = 330 \quad a_3 = 270$

$b_1 = 210 \quad b_2 = 170 \quad b_3 = 220 \quad b_4 = 150 \quad b_5 = 200$

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 12 & 9 & 1 & 7 \\ 2 & 4 & 11 & 2 & 10 \\ 7 & 14 & 12 & 5 & 8 \end{pmatrix}$$

5.

$a_1 = 300 \quad a_2 = 250 \quad a_3 = 300$

$b_1 = 130 \quad b_2 = 130 \quad b_3 = 150 \quad b_4 = 190 \quad b_5 = 250$

$$D = \begin{pmatrix} 17 & 21 & 24 & 32 & 24 \\ 23 & 10 & 15 & 20 & 26 \\ 20 & 27 & 29 & 23 & 25 \end{pmatrix}$$

6.

$a_1 = 200 \quad a_2 = 300 \quad a_3 = 250$

$b_1 = 120 \quad b_2 = 140 \quad b_3 = 160 \quad b_4 = 180 \quad b_5 = 150$

$$D = \begin{pmatrix} 16 & 25 & 26 & 26 & 23 \\ 25 & 30 & 30 & 32 & 33 \\ 34 & 25 & 23 & 26 & 32 \end{pmatrix}$$

7.

$a_1 = 150 \quad a_2 = 250 \quad a_3 = 50 \quad a_4 = 150$

$b_1 = 70 \quad b_2 = 80 \quad b_3 = 130 \quad b_4 = 120 \quad b_5 = 200$

$$D = \begin{pmatrix} 20 & 5 & 27 & 10 & 26 \\ 7 & 17 & 18 & 21 & 28 \\ 27 & 21 & 9 & 23 & 26 \\ 1 & 13 & 17 & 23 & 7 \end{pmatrix}$$

8.

$a_1 = 320 \quad a_2 = 80 \quad a_3 = 130 \quad a_4 = 270$

$b_1 = 150 \quad b_2 = 150 \quad b_3 = 150 \quad b_4 = 150 \quad b_5 = 200$

$$D = \begin{pmatrix} 17 & 29 & 2 & 8 & 18 \\ 14 & 8 & 25 & 15 & 21 \\ 29 & 11 & 15 & 13 & 20 \\ 27 & 15 & 19 & 8 & 14 \end{pmatrix}$$

9.

$a_1 = 200 \quad a_2 = 250 \quad a_3 = 200$

$b_1 = 190 \quad b_2 = 100 \quad b_3 = 120 \quad b_4 = 110 \quad b_5 = 130$

$$D = \begin{pmatrix} 28 & 27 & 18 & 27 & 24 \\ 18 & 26 & 27 & 32 & 21 \\ 27 & 33 & 23 & 31 & 34 \end{pmatrix}$$

10.

$a_1 = 230 \quad a_2 = 250 \quad a_3 = 170$

$b_1 = 140 \quad b_2 = 90 \quad b_3 = 160 \quad b_4 = 110 \quad b_5 = 150$

$$D = \begin{pmatrix} 40 & 19 & 25 & 25 & 35 \\ 49 & 26 & 27 & 18 & 38 \\ 46 & 27 & 36 & 40 & 45 \end{pmatrix}$$

11.

$a_1 = 330 \quad a_2 = 330 \quad a_3 = 330 \quad a_4 = 110$

$b_1 = 220 \quad b_2 = 220 \quad b_3 = 220 \quad b_4 = 220 \quad b_5 = 220$

$$D = \begin{pmatrix} 30 & 20 & 27 & 15 & 26 \\ 25 & 6 & 28 & 20 & 5 \\ 19 & 24 & 11 & 29 & 23 \\ 1 & 4 & 6 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

12.

$a_1 = 160 \quad a_2 = 150 \quad a_3 = 240 \quad a_4 = 150$

$b_1 = 150 \quad b_2 = 150 \quad b_3 = 150 \quad b_4 = 150 \quad b_5 = 100$

$$D = \begin{pmatrix} 11 & 10 & 15 & 8 & 7 \\ 12 & 14 & 29 & 20 & 20 \\ 18 & 7 & 5 & 25 & 28 \\ 24 & 4 & 30 & 24 & 26 \end{pmatrix}$$

13.

$a_1 = 200 \quad a_2 = 300 \quad a_3 = 250$

$b_1 = 210 \quad b_2 = 150 \quad b_3 = 120 \quad b_4 = 135 \quad b_5 = 135$

$$D = \begin{pmatrix} 20 & 10 & 13 & 13 & 18 \\ 27 & 19 & 20 & 16 & 22 \\ 26 & 17 & 19 & 21 & 23 \end{pmatrix}$$

14.

$a_1 = 200 \quad a_2 = 350 \quad a_3 = 300$

$b_1 = 270 \quad b_2 = 130 \quad b_3 = 190 \quad b_4 = 150 \quad b_5 = 110$

$$D = \begin{pmatrix} 24 & 50 & 55 & 27 & 16 \\ 50 & 47 & 23 & 17 & 21 \\ 35 & 59 & 55 & 27 & 41 \end{pmatrix}$$

15.

$a_1 = 150 \quad a_2 = 200 \quad a_3 = 100$

$b_1 = 90 \quad b_2 = 150 \quad b_3 = 75 \quad b_4 = 60 \quad b_5 = 75$

$$D = \begin{pmatrix} 15 & 23 & 28 & 19 & 17 \\ 17 & 13 & 14 & 12 & 20 \\ 13 & 21 & 24 & 16 & 12 \end{pmatrix}$$

16.

$a_1 = 300 \quad a_2 = 350 \quad a_3 = 200$

$b_1 = 145 \quad b_2 = 195 \quad b_3 = 200 \quad b_4 = 140 \quad b_5 = 170$

$$D = \begin{pmatrix} 18 & 31 & 35 & 25 & 13 \\ 16 & 25 & 21 & 9 & 9 \\ 45 & 30 & 25 & 33 & 41 \end{pmatrix}$$

17.

$$a_1 = 200 \quad a_2 = 175 \quad a_3 = 225$$

$$b_1 = 100 \quad b_2 = 130 \quad b_3 = 80 \quad b_4 = 190 \quad b_5 = 100$$

$$D = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 4 & 2 & 5 \\ 7 & 1 & 3 & 1 & 10 \\ 2 & 3 & 6 & 8 & 7 \end{pmatrix}$$

18.

$$a_1 = 200 \quad a_2 = 450 \quad a_3 = 250$$

$$b_1 = 100 \quad b_2 = 125 \quad b_3 = 325 \quad b_4 = 250 \quad b_5 = 100$$

$$D = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 7 & 10 & 3 \\ 4 & 2 & 2 & 5 & 16 \\ 7 & 3 & 5 & 9 & 2 \end{pmatrix}$$

19.

$$a_1 = 300 \quad a_2 = 300 \quad a_3 = 250$$

$$b_1 = 150 \quad b_2 = 140 \quad b_3 = 115 \quad b_4 = 225 \quad b_5 = 220$$

$$D = \begin{pmatrix} 20 & 23 & 20 & 15 & 24 \\ 29 & 15 & 16 & 19 & 29 \\ 6 & 11 & 10 & 9 & 8 \end{pmatrix}$$

20.

$$a_1 = 300 \quad a_2 = 230 \quad a_3 = 320$$

$$b_1 = 190 \quad b_2 = 150 \quad b_3 = 130 \quad b_4 = 180 \quad b_5 = 200$$

$$D = \begin{pmatrix} 25 & 20 & 22 & 31 & 32 \\ 11 & 19 & 18 & 18 & 20 \\ 26 & 30 & 17 & 19 & 20 \end{pmatrix}$$

21.

$a_1 = 300 \quad a_2 = 250 \quad a_3 = 200$

$b_1 = 210 \quad b_2 = 150 \quad b_3 = 120 \quad b_4 = 135 \quad b_5 = 135$

$$D = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 13 & 2 & 7 \\ 9 & 4 & 11 & 9 & 17 \\ 3 & 16 & 10 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

22.

$a_1 = 350 \quad a_2 = 200 \quad a_3 = 300$

$b_1 = 170 \quad b_2 = 140 \quad b_3 = 200 \quad b_4 = 195 \quad b_5 = 145$

$$D = \begin{pmatrix} 22 & 14 & 16 & 28 & 30 \\ 19 & 17 & 26 & 36 & 36 \\ 37 & 30 & 31 & 39 & 41 \end{pmatrix}$$

23.

$a_1 = 270 \quad a_2 = 450 \quad a_3 = 330$

$b_1 = 190 \quad b_2 = 210 \quad b_3 = 200 \quad b_4 = 230 \quad b_5 = 220$

$$D = \begin{pmatrix} 37 & 30 & 15 & 19 & 37 \\ 16 & 19 & 13 & 19 & 21 \\ 10 & 20 & 19 & 29 & 26 \end{pmatrix}$$

24.

$a_1 = 210 \quad a_2 = 450 \quad a_3 = 290$

$b_1 = 200 \quad b_2 = 220 \quad b_3 = 170 \quad b_4 = 210 \quad b_5 = 150$

$$D = \begin{pmatrix} 19 & 27 & 32 & 32 & 20 \\ 39 & 21 & 12 & 21 & 41 \\ 15 & 14 & 28 & 27 & 20 \end{pmatrix}$$

25.

$a_1 = 150 \quad a_2 = 150 \quad a_3 = 200$

$b_1 = 100 \quad b_2 = 70 \quad b_3 = 130 \quad b_4 = 110 \quad b_5 = 90$

$$D = \begin{pmatrix} 17 & 3 & 6 & 12 & 32 \\ 14 & 10 & 2 & 10 & 36 \\ 14 & 11 & 5 & 8 & 37 \end{pmatrix}$$

26.

$a_1 = 330 \quad a_2 = 270 \quad a_3 = 250$

$b_1 = 220 \quad b_2 = 170 \quad b_3 = 210 \quad b_4 = 150 \quad b_5 = 90$

$$D = \begin{pmatrix} 10 & 12 & 24 & 50 & 42 \\ 13 & 22 & 49 & 66 & 32 \\ 26 & 27 & 35 & 67 & 63 \end{pmatrix}$$

27.

$a_1 = 300 \quad a_2 = 250 \quad a_3 = 250 \quad a_4 = 170$

$b_1 = 330 \quad b_2 = 110 \quad b_3 = 110 \quad b_4 = 110 \quad b_5 = 340$

$$D = \begin{pmatrix} 14 & 25 & 18 & 19 & 23 \\ 2 & 17 & 16 & 24 & 2 \\ 29 & 3 & 7 & 15 & 22 \\ 5 & 20 & 17 & 23 & 10 \end{pmatrix}$$

28.

$a_1 = 180 \quad a_2 = 230 \quad a_3 = 170 \quad a_4 = 220$

$b_1 = 210 \quad b_2 = 210 \quad b_3 = 90 \quad b_4 = 90 \quad b_5 = 200$

$$D = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 19 & 1 & 15 \\ 8 & 27 & 30 & 7 & 7 \\ 10 & 20 & 19 & 26 & 20 \\ 18 & 28 & 25 & 7 & 22 \end{pmatrix}$$

29.

$a_1 = 240 \quad a_2 = 270 \quad a_3 = 160 \quad a_4 = 130$

$b_1 = 160 \quad b_2 = 160 \quad b_3 = 160 \quad b_4 = 160 \quad b_5 = 160$

$$D = \begin{pmatrix} 28 & 26 & 12 & 22 & 11 \\ 20 & 23 & 25 & 22 & 9 \\ 23 & 15 & 11 & 22 & 7 \\ 1 & 26 & 10 & 1 & 19 \end{pmatrix}$$

30.

$a_1 = 140 \quad a_2 = 140 \quad a_3 = 140 \quad a_4 = 180$

$b_1 = 120 \quad b_2 = 120 \quad b_3 = 120 \quad b_4 = 120 \quad b_5 = 120$

$$D = \begin{pmatrix} 29 & 4 & 7 & 6 & 16 \\ 21 & 13 & 25 & 21 & 7 \\ 20 & 10 & 12 & 6 & 2 \\ 17 & 7 & 4 & 6 & 19 \end{pmatrix}$$

31.

$a_1 = 200 \quad a_2 = 200 \quad a_3 = 250$

$b_1 = 120 \quad b_2 = 120 \quad b_3 = 100 \quad b_4 = 150 \quad b_5 = 140$

$$D = \begin{pmatrix} 6 & 7 & 4 & 2 & 5 \\ 8 & 2 & 3 & 1 & 11 \\ 1 & 3 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

32.

$a_1 = 250 \quad a_2 = 230 \quad a_3 = 170$

$b_1 = 110 \quad b_2 = 170 \quad b_3 = 120 \quad b_4 = 150 \quad b_5 = 100$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 11 & 9 & 3 & 8 \\ 3 & 4 & 11 & 1 & 10 \\ 8 & 11 & 14 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

33.

$$a_1 = 210 \quad a_2 = 230 \quad a_3 = 230 \quad a_4 = 110$$

$$b_1 = 120 \quad b_2 = 120 \quad b_3 = 200 \quad b_4 = 120 \quad b_5 = 220$$

$$D = \begin{pmatrix} 26 & 20 & 21 & 15 & 22 \\ 21 & 6 & 24 & 15 & 5 \\ 11 & 24 & 12 & 19 & 13 \\ 10 & 4 & 6 & 9 & 10 \end{pmatrix}$$

34.

$$a_1 = 180 \quad a_2 = 150 \quad a_3 = 140 \quad a_4 = 150$$

$$b_1 = 150 \quad b_2 = 100 \quad b_3 = 170 \quad b_4 = 100 \quad b_5 = 100$$

$$D = \begin{pmatrix} 6 & 10 & 15 & 8 & 7 \\ 4 & 14 & 19 & 20 & 20 \\ 15 & 7 & 5 & 15 & 18 \\ 21 & 14 & 30 & 24 & 25 \end{pmatrix}$$

35.

$$a_1 = 200 \quad a_2 = 200 \quad a_3 = 200$$

$$b_1 = 100 \quad b_2 = 140 \quad b_3 = 115 \quad b_4 = 125 \quad b_5 = 120$$

$$D = \begin{pmatrix} 18 & 21 & 20 & 15 & 14 \\ 19 & 15 & 17 & 19 & 15 \\ 6 & 10 & 5 & 9 & 8 \end{pmatrix}$$

36.

$$a_1 = 200 \quad a_2 = 130 \quad a_3 = 220$$

$$b_1 = 140 \quad b_2 = 100 \quad b_3 = 130 \quad b_4 = 80 \quad b_5 = 100$$

$$D = \begin{pmatrix} 15 & 18 & 12 & 31 & 26 \\ 6 & 19 & 18 & 14 & 21 \\ 16 & 20 & 17 & 7 & 10 \end{pmatrix}$$

37.

$a_1 = 200 \quad a_2 = 180 \quad a_3 = 200$

$b_1 = 120 \quad b_2 = 80 \quad b_3 = 130 \quad b_4 = 110 \quad b_5 = 140$

$$D = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 6 & 12 & 22 \\ 11 & 10 & 2 & 10 & 26 \\ 15 & 9 & 5 & 8 & 27 \end{pmatrix}$$

38.

$a_1 = 230 \quad a_2 = 170 \quad a_3 = 150$

$b_1 = 120 \quad b_2 = 120 \quad b_3 = 110 \quad b_4 = 100 \quad b_5 = 90$

$$D = \begin{pmatrix} 6 & 12 & 24 & 22 & 12 \\ 9 & 22 & 19 & 24 & 22 \\ 16 & 17 & 15 & 17 & 13 \end{pmatrix}$$

39.

$a_1 = 250 \quad a_2 = 240 \quad a_3 = 160 \quad a_4 = 130$

$b_1 = 130 \quad b_2 = 150 \quad b_3 = 170 \quad b_4 = 160 \quad b_5 = 170$

$$D = \begin{pmatrix} 18 & 16 & 12 & 11 & 18 \\ 10 & 13 & 15 & 22 & 9 \\ 12 & 11 & 7 & 19 & 7 \\ 1 & 15 & 10 & 1 & 19 \end{pmatrix}$$

40.

$a_1 = 150 \quad a_2 = 140 \quad a_3 = 160 \quad a_4 = 170$

$b_1 = 120 \quad b_2 = 130 \quad b_3 = 110 \quad b_4 = 140 \quad b_5 = 120$

$$D = \begin{pmatrix} 9 & 4 & 3 & 6 & 12 \\ 21 & 13 & 18 & 11 & 7 \\ 14 & 10 & 12 & 6 & 2 \\ 17 & 7 & 5 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

5.4. Контрольные вопросы

1. Какие задачи линейного программирования называются транспортными?
2. Каковы особенности математической модели транспортной задачи?
3. В чем состоит метод минимального элемента решения транспортной задачи?
4. Как используется распределительный метод?
5. Приведите алгоритм нахождения опорного плана методом «северо-западного угла».
6. Сформулируйте алгоритм метода потенциалов.
7. Какие транспортные задачи называются закрытыми?
8. Какие транспортные задачи называются открытыми?
9. Какие условия должны выполняться в транспортных задачах?
10. Укажите методы нахождения опорного решения.

Тема 6. Задачи дробно-линейного программирования

6.1. Краткие теоретические сведения

Дробно-линейное программирование относится к нелинейному программированию, так как имеет целевую функцию, заданную в нелинейном виде.

Математическая модель задачи

Задача дробно-линейного программирования в общем виде записывается следующим образом:

$$L = \frac{c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_jx_j}{d_1x_1 + d_2x_2 + \ldots + d_jx_j} = \frac{\sum_{j=1}^{n} c_jx_j}{\sum_{j=1}^{n} d_jx_j} \to \max(\min)$$

при ограничениях:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i$$

$$x_j \ge 0,\ i = \overline{1,\ m},\ j = \overline{1, n}$$

где c_j, d_j, b_i, a_{ij} – постоянные коэффициенты и

$$\sum_{j=1}^{n} d_jx_j \ne 0.$$

Рассмотрим задачу дробно-линейного программирования в виде:

$$L = \frac{c_1x_1 + c_2x_2}{d_1x_1 + d_2x_2} \to \max(\min) \tag{6.1}$$

при ограничениях:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \le b_i,\ i = \overline{1, m} \tag{6.2}$$

$$x_{1,2} \ge 0$$

Полагая, что $d_1x_1 + d_2x_2 \neq 0$.

Для решения данной задачи найдем область допустимых решений, определяемую ограничениями (6.2). Пусть эта область не является пустым множеством.

Из выражения (6.1) найдем x_2:

$$Ld_1x_1 + Ld_2x_2 = c_1x_1 + c_2x_2,$$

$$x_2(Ld_2 - c_2) = x_1(c_1 - Ld_1),$$

$$x_2 = \frac{x_1(c_1 - Ld_1)}{(Ld_2 - c_2)},$$

$$x_2 = kx_1,$$

где $k = \dfrac{(c_1 - Ld_1)}{(Ld_2 - c_2)}$.

Прямая $x_2 = kx_1$ проходит через начало координат. При некотором фиксированном значении L угловой коэффициент k прямой тоже фиксирован и прямая займет определенное положение. При изменении значений L прямая $x_2 = kx_1$ будет поворачиваться вокруг начала координат.

$$\frac{\partial k}{\partial L} = k' = \frac{-d_1(Ld_2 - c_2) - d_2(c_1 - Ld_1)}{(Ld_2 - c_2)^2} = \frac{d_1c_2 - d_2c_1}{(Ld_2 - c_2)^2}.$$

Заметим, знаменатель производной всегда положителен, а числитель от L не зависит. Следовательно, производная имеет постоянный знак и при увеличении L угловой коэффициент будет только возрастать или только убывать, а прямая будет поворачиваться в одну сторону. Если угловой коэффициент прямой имеет положительное значение, то прямая вращается против часовой стрелки, при отрицательном значении k – по часовой стрелке. Установив направление вращения, получим вершину или вершины многогранника, в которых функция принимает $max(min)$ значение, либо устанавливаем неограниченность задачи.

При этом возможны следующие случаи:

а) область допустимых решений ограничена, максимум и минимум достигаются в ее угловых точках;

б) область допустимых решений неограничена, но существуют угловые точки, в которых целевая функция принимает максимальное и минимальное значения;

в) область допустимых решений неограничена, имеется один из экстремумов;

г) область допустимых решений неограничена, максимум и минимум являются асимптотическими.

Алгоритм решения

1. Находим область допустимых решений.

2. Определяем угловой коэффициент k и устанавливаем направление поворота целевой функции.

3. Находим точку $max(min)$ целевой функции или устанавливаем неразрешимость задачи.

Экономическая интерпретация задач дробно-линейного программирования

Математическая модель задачи дробно-линейного программирования может быть использована для определения рентабельности затрат на производство изделий, рентабельности продаж, затрат в расчете на рубль выпускаемой продукции, себестоимости изделий.

Обозначим:

r_j – прибыль предприятия от реализации единицы изделия *j-го* вида;

x_j – количество выпущенной продукции *j-го* вида;

s_j – цена единицы продукции *j-го* вида;

c_j – себестоимость производства единицы изделия *j-го* вида;

d_j – затраты на производство одного изделия *j-го* вида.

Задача рентабельности затрат на производство изделий имеет вид:

$$\frac{\sum_{j=1}^{n} r_j x_j}{\sum_{j=1}^{n} c_j x_j} \to \max$$

Задача рентабельности продаж имеет вид:

$$\frac{\sum_{j=1}^{n} r_j x_j}{\sum_{j=1}^{n} s_j x_j} \to \max$$

Задача определения затрат в расчете на рубль товарной продукции записывается в виде:

$$\frac{\sum_{j=1}^{n} c_j x_j}{\sum_{j=1}^{n} s_j x_j} \to \min$$

Задача нахождения себестоимости изделия записывается как

$$c_j = \frac{\sum_{j=1}^{n} d_j}{\sum_{j=1}^{n} x_j} \to \min$$

Указанные математические модели имеют системы ограничений в зависимости от условий задачи.

6.2. Пример решения задания

Пример. Решить задачу дробно-рационального программирования

$$\begin{cases} 2x_1 + 8x_2 \le 26\,, \\ x_1 + x_2 \ge 4\,, \\ 12x_1 + 3x_2 \le 39, \\ x_1 \ge 0,\ \ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

$$\min : Z = \frac{2x_1 + 3x_2}{x_1 + x_2}$$

Решение.

1. Систему ограничений приводят к каноническому виду:

$$\begin{cases} 2x_1 + 8x_2 + x_3 = 26\,, \\ x_1 + x_2 - x_4 + x_6 = 4\,, \\ 12x_1 + 3x_2 + x_5 = 39, \end{cases}$$

2. Знаменатель целевой функции обозначают через – $\frac{1}{y_0}$, это приводит к следующему:

3. Все ограничения умножают на y_0 и к ним прибавляют дополнительное соотношение.

$$\begin{cases} 2x_1y_0 + 8x_2y_0 + x_3y_0 = 26y_0\,, \\ x_1y_0 + x_2y_0 - x_4y_0 + x_6y_0 = 4y_0\,, \\ 12x_1y_0 + 3x_2y_0 + x_5y_0 = 39y_0, \\ x_1y_0 + x_2y_0 = 1. \end{cases}$$

4. Вводят обозначения:

$$y_1 = x_1 y_0; \qquad y_2 = x_2 y_0; \qquad y_3 = x_3 y_0;$$
$$y_4 = x_4 y_0; \qquad y_5 = x_5 y_0; \qquad y_6 = x_6 y_0.$$

$$\min : Z = 2y_1 + 3y_2 + My_6 + My_7$$

$$\begin{cases} -26y_0 + 2y_1 + 8y_2 + y_3 = 0, \\ -4y_0 + y_1 + y_2 - y_4 + y_6 = 0, \\ -39y_0 + 12y_1 + 3y_2 + y_5 = 0, \\ y_1 + y_2 + y_7 = 1. \end{cases}$$

5. Задача приобрела каноническую форму, её решение может быть выполнено симплексным методом.

Таблица 6.1

Б	С	P_0'	0	2	3	0	0	0	M	M	С.В.
			P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	
P_3	0	0	-26	2	8	1	0	0	0	0	0
P_6	M	0	-4	1	1	0	-1	0	1	0	0
P_5	0	0	-39	12	3	0	0	1	0	0	0
P_7	M	1	0	1	1	0	0	0	0	1	1
Z-ряд		0	0	-2	-3	0	0	0	0	0	
M-ряд		1	-4	2	2	0	-1	0	0	0	

Данной таблице соответствуют такие значения переменных:

$y_0 = 0,\ y_1 = 0,\ y_2 = 0,\ y_3 = 0,\ y_4 = 0,\ y_5 = 0,\ y_6 = 0,\ y_7 = 1.$

Это решение не оптимальное.

В таблице 6.1 получено три одинаковых симплексных отношения – все они равны нулю. При выборе ключевого ряда руководствуются правилом: берут тот, что отвечает большему элементу ключевого столбца. В данном случае выбирают третий ряд и генеральный элемент равен 12.

Таблица 6.2

Б	С	P_0'	0	2	3	0	0	0	M	M	С.В.
			P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	
P_3	0	0	$-{}^{234}\!/_{12}$	0	${}^{90}\!/_{12}$	1	0	$-{}^{2}\!/_{12}$	0	0	–
P_6	M	0	$-{}^{9}\!/_{12}$	0	${}^{9}\!/_{12}$	0	-1	$-{}^{1}\!/_{12}$	1	0	–
P_1	2	0	$-{}^{39}\!/_{12}$	1	${}^{3}\!/_{12}$	0	0	${}^{1}\!/_{12}$	0	0	–
P_7	M	1	${}^{39}\!/_{12}$	0	${}^{9}\!/_{12}$	0	0	$-{}^{1}\!/_{12}$	0	1	${}^{12}\!/_{39}$
Z-ряд		0	$-{}^{78}\!/_{12}$	0	$-{}^{30}\!/_{12}$	0	0	${}^{2}\!/_{12}$	0	0	
М-ряд		1	${}^{30}\!/_{12}$	0	${}^{18}\!/_{12}$	0	-1	$-{}^{2}\!/_{12}$	0	0	

Другое решение выглядит так:

$$y_0 = 0,\ y_1 = 0,\ y_2 = 0,\ y_3 = 0,\ y_4 = 0,\ y_5 = 0,\ y_6 = 0,\ y_7 = 1.$$

Оно не оптимальное.

Переход к третьей таблице осуществляется по привычным правилам с учетом комментария к выбору ключевого ряда, сделанного после таблицы 6.1.

Таблица 6.3

Б	С	P_0'	0	2	3	0	0	0	M	С.В.
			P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	
P_3	0	${}^{234}\!/_{39}$	0	0	${}^{468}\!/_{39}$	1	0	$-{}^{26}\!/_{39}$	0	0,5
P_6	M	${}^{9}\!/_{39}$	0	0	${}^{36}\!/_{39}$	0	-1	$-{}^{4}\!/_{39}$	1	0,25
P_1	2	${}^{39}\!/_{39}$	0	1	${}^{39}\!/_{39}$	0	0	0	0	1
P_0	0	${}^{12}\!/_{39}$	1	0	${}^{9}\!/_{39}$	0	0	$-{}^{1}\!/_{39}$	0	${}^{12}\!/_{9}$
Z-ряд		2	0	0	–1	0	0	0	0	
М-ряд		${}^{9}\!/_{39}$	0	0	${}^{36}\!/_{39}$	0	-1	$-{}^{4}\!/_{39}$	0	

Третье решение:

$$y_0 = \frac{12}{39},\ y_1 = 1,\ y_2 = 0,\ y_3 = 6,\ y_4 = 0,\ y_5 = 0,\ y_6 = \frac{9}{39}$$

Условие оптимальности все еще не выполняется, переходят к следующей таблице.

Таблица 6.4

Б	С	P_0'	0	2	3	0	0	0	С.В.
			P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	
P_3	0	$108/36$	0	0	0	1	$468/36$	$24/36$	
P_2	3	$9/36$	0	0	1	0	$-39/36$	$-4/36$	
P_1	2	$27/36$	0	1	0	0	$39/36$	$4/36$	
P_0	0	$9/36$	1	0	0	0	$9/36$	0	
Z-ряд		$81/36$	0	0	0	0	$-39/36$	$-4/36$	

В таблице 6.4 получено решение, что удовлетворяет условию оптимальности:

$$y_0 = \frac{9}{36}, \qquad y_1 = \frac{27}{36}, \qquad y_2 = \frac{9}{36}, \qquad \min Z = \frac{81}{36}.$$

6. Определяют значение исходных переменных:

$$x_1 = \frac{y_1}{y_0} = 3, \; x_2 = \frac{y_2}{y_0} = 1.$$

Таким образом, решение задачи дробно-линейного программирования будет следующим:

$$x_1 = 3, \; x_2 = 1, \; \min Z = \frac{9}{4}.$$

7. Делают, если возможно, геометрическую интерпретацию задачи:

– находят область допустимых значений;

– определяют точки, которые отвечают симплекс-таблицам.

Областью решений является треугольник *ABC*. Первые реальные значения переменных y_i появились в четвертой симплексной таблице, им соответствуют такие значения неизвестных $x_1 = 3,\; x_2 = 1.$

На графике – это вершина *C*, она является оптимальной.

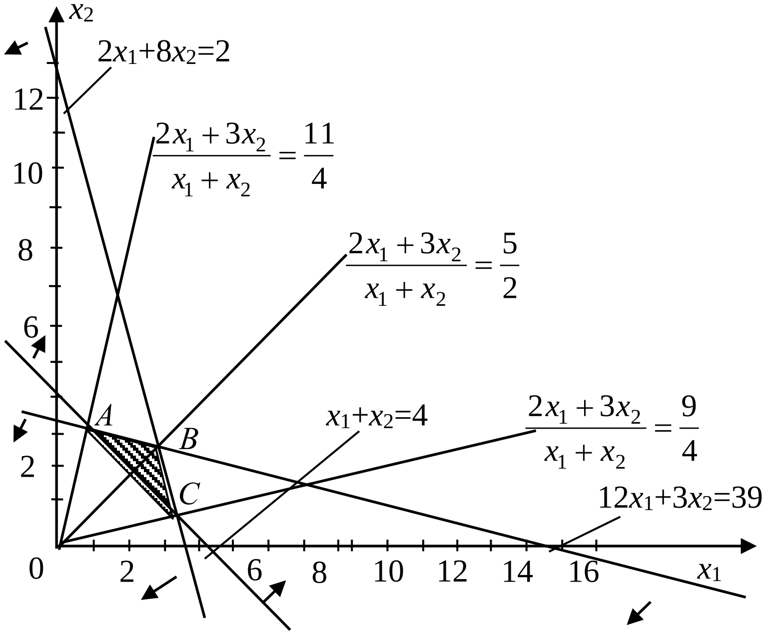

Рис. 6.1. Геометрическая интерпретация задачи

6.3. Задания для самостоятельного выполнения

Решить задачи дробно-рационального программирования

Варианты заданий

1. $\begin{cases} x_1 + 4x_2 \geq 8 \\ 4x_1 + x_2 \geq 8 \\ x_1 + x_2 \leq 5 \end{cases}$

$\max : Z = \dfrac{3x_1 + 4x_2}{2x_1 + 3x_2}$

2. $\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 \geq 14 \\ 2x_1 + 7x_2 \geq 14 \\ x_1 + x_2 \leq 5 \end{cases}$

$\min : Z = \dfrac{4x_1 + 3x_2}{3x_1 + 2x_2}$

3. $\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \geq 12 \\ x_1 + 2x_2 \geq 6 \\ x_1 - x_2 \leq 2 \end{cases}$

$\min : Z = \dfrac{x_1 + 4x_2}{3x_1 + 2x_2}$

4. $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 \geq 12 \\ 2x_1 + x_2 \leq 6 \\ -x_1 + x_2 \leq 2 \end{cases}$

$\max : Z = \dfrac{4x_1 + x_2}{2x_1 + 3x_2}$

5. $\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 \geq 10 \\ x_1 + 6x_2 \geq 6 \\ 4x_1 + 5x_2 \leq 20 \end{cases}$

$\min : Z = \dfrac{2x_1 + 3x_2}{5x_1 + 2x_2}$

6. $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \geq 10 \\ 6x_1 + x_2 \geq 6 \\ 5x_1 + 4x_2 \leq 20 \end{cases}$

$\max : Z = \dfrac{4x_1 + 2x_2}{3x_1 + 6x_2}$

7. $\begin{cases} x_1 + 5x_2 \geq 5 \\ 5x_1 + x_2 \geq 5 \\ x_1 + x_2 \leq 4 \end{cases}$

$\max : Z = \dfrac{3x_1 + 2x_2}{4x_1 + x_2}$

8. $\begin{cases} x_1 + 6x_2 \geq 6 \\ 6x_1 + x_2 \geq 6 \\ x_1 + x_2 \leq 5 \end{cases}$

$\min : Z = \dfrac{2x_1 + 3x_2}{x_1 + x_2}$

9. $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \geq 10 \\ 5x_1 + 2x_2 \geq 10 \\ x_1 + x_2 \leq 4 \end{cases}$

$\max : Z = \dfrac{4x_1 + 2x_2}{5x_1 + x_2}$

10. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 \geq 6 \\ 3x_1 + x_2 \geq 6 \\ x_1 + x_2 \leq 5 \end{cases}$

$\min : Z = \dfrac{5x_1 + x_2}{4x_1 + 2x_2}$

11. $\begin{cases} x_1 + 5x_2 \geq 5 \\ 5x_1 + 3x_2 \leq 15 \\ -3x_1 + x_2 \leq 3 \end{cases}$

$\max : Z = \dfrac{3x_1 + 2x_2}{5x_1 + 3x_2}$

12. $\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 6 \\ x_1 + 7x_2 \geq 7 \\ 7x_1 + x_2 \geq 7 \end{cases}$

$\min : Z = \dfrac{4x_1 - x_2}{3x_1 + 2x_2}$

13. $\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 \geq 14 \\ 5x_1 + 2x_2 \geq 10 \\ x_1 + x_2 \leq 4 \end{cases}$

$\max : Z = \dfrac{3x_1 - x_2}{4x_1 + 5x_2}$

14. $\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 \geq 14 \\ 2x_1 + 5x_2 \geq 10 \\ x_1 + x_2 \leq 4 \end{cases}$

$\min : Z = \dfrac{4x_1 + 3x_2}{6x_1 + x_2}$

15. $\begin{cases} 3x_1 + 7x_2 \le 21 \\ 4x_1 + 3x_2 \ge 12 \\ x_1 - x_2 \le 2 \end{cases}$

$\max : Z = \dfrac{2x_1 + 3x_2}{5x_1 + 4x_2}$

16. $\begin{cases} 7x_1 + 3x_2 \le 21 \\ 3x_1 + 4x_2 \le 21 \\ -x_1 + x_2 \le 2 \end{cases}$

$\min : Z = \dfrac{3x_1 + 2x_2}{4x_1 + 5x_2}$

17. $\begin{cases} x_1 + 4x_2 \ge 8 \\ 6x_1 + x_2 \ge 6 \\ x_1 + x_2 \le 5 \end{cases}$

$\min : Z = \dfrac{x_1 + 3x_2}{2x_1 + 5x_2}$

18. $\begin{cases} 4x_1 + x_2 \ge 8 \\ x_1 + 6x_2 \ge 6 \\ x_1 + x_2 \le 5 \end{cases}$

$\max : Z = \dfrac{3x_1 + x_2}{5x_1 + 2x_2}$

19. $\begin{cases} 5x_1 + x_2 \ge 5 \\ 3x_1 + 5x_2 \le 15 \\ x_1 - 3x_2 \le 3 \end{cases}$

$\min : Z = \dfrac{3x_1 + 4x_2}{5x_1 + 7x_2}$

20. $\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 \le 15 \\ x_1 + 4x_2 \ge 4 \\ 6x_1 + x_2 \ge 6 \end{cases}$

$\max : Z = \dfrac{3x_1 + 5x_2}{5x_1 + 4x_2}$

21. $\begin{cases} 5x_1 + x_2 \ge 5 \\ x_1 + 6x_2 \ge 6 \\ x_1 + x_2 \le 4 \end{cases}$

$\min : Z = \dfrac{5x_1 + 4x_2}{7x_1 + 2x_2}$

22. $\begin{cases} 6x_1 + x_2 \ge 6 \\ x_1 + 5x_2 \ge 5 \\ x_1 + x_2 \le 4 \end{cases}$

$\max : Z = \dfrac{7x_1 + 3x_2}{5x_1 + 4x_2}$

23. $\begin{cases} 5x_1 + 4x_2 \le 20 \\ x_1 + 5x_2 \ge 5 \\ 6x_1 + x_2 \ge 6 \end{cases}$

$\max : Z = \dfrac{5x_1 + 3x_2}{4x_1 + 5x_2}$

24. $\begin{cases} 4x_1 + 5x_2 \le 20 \\ 5x_1 + x_2 \ge 5 \\ x_1 + 6x_2 \ge 6 \end{cases}$

$\min : Z = \dfrac{2x_1 + 5x_2}{5x_1 + 3x_2}$

25. $\begin{cases} 4x_1 - x_2 \ge 4 \\ 2x_1 + 5x_2 \ge 10 \\ 3x_1 + 2x_2 \le 12 \end{cases}$

$\max : Z = \dfrac{x_1 + 3x_2}{3x_1 + 2x_2}$

26. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 \ge 6 \\ 3x_1 + x_2 \ge 6 \\ x_1 + x_2 \le 5 \end{cases}$

$\min : Z = \dfrac{3x_1 + 4x_2}{2x_1 + 5x_2}$

27. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 \ge 6 \\ x_1 + 5x_2 \ge 5 \\ x_1 + x_2 \le 4 \end{cases}$

$\min : Z = \dfrac{4x_1 + 3x_2}{2x_1 + x_2}$

28. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 \ge 6 \\ 5x_1 + x_2 \ge 5 \\ x_1 + x_2 \le 4 \end{cases}$

$\max : Z = \dfrac{3x_1 + 4x_2}{x_1 + 2x_2}$

29. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \le 12 \\ 2x_1 + 5x_2 \ge 10 \\ -x_1 + 3x_2 \le 3 \end{cases}$

$\min : Z = \dfrac{4x_1 + 5x_2}{5x_1 + 2x_2}$

30. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 12 \\ 5x_1 + 2x_2 \ge 10 \\ 3x_1 - x_2 \le 3 \end{cases}$

$\max : Z = \dfrac{3x_1 + 2x_2}{2x_1 + 3x_2}$

31. $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \geq 10 \\ x_1 + 7x_2 \geq 7 \\ 5x_1 + 4x_2 \leq 20 \end{cases}$

$\min : Z = \dfrac{2x_1 + 3x_2}{5x_1 + x_2}$

32. $\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 \geq 10 \\ x_1 + 6x_2 \geq 6 \\ 4x_1 + 6x_2 \leq 24 \end{cases}$

$\max : Z = \dfrac{5x_1 + 2x_2}{x_1 + 6x_2}$

33. $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \geq 10 \\ 5x_1 + 2x_2 \geq 10 \\ x_1 + x_2 \leq 6 \end{cases}$

$\min : Z = \dfrac{5x_1 + 3x_2}{4x_1 + x_2}$

34. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 \geq 6 \\ 3x_1 + x_2 \geq 6 \\ x_1 + x_2 \leq 4 \end{cases}$

$\max : Z = \dfrac{5x_1 + 2x_2}{4x_1 + x_2}$

35. $\begin{cases} 7x_1 + 3x_2 \leq 21 \\ 3x_1 + 4x_2 \geq 12 \\ x_1 - x_2 \leq 3 \end{cases}$

$\min : Z = \dfrac{2x_1 + 4x_2}{5x_1 + 3x_2}$

36. $\begin{cases} 6x_1 + 3x_2 \leq 18 \\ 3x_1 + 4x_2 \leq 12 \\ -x_1 + x_2 \leq 2 \end{cases}$

$\max : Z = \dfrac{x_1 + 2x_2}{3x_1 + 5x_2}$

37. $\begin{cases} 5x_1 + x_2 \geq 5 \\ 4x_1 + 5x_2 \leq 20 \\ x_1 - 4x_2 \leq 4 \end{cases}$

$\max : Z = \dfrac{3x_1 + 5x_2}{3x_1 + 6x_2}$

38. $\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 \leq 15 \\ x_1 + 5x_2 \geq 5 \\ 7x_1 + x_2 \geq 7 \end{cases}$

$\min : Z = \dfrac{x_1 + 4x_2}{4x_1 + 5x_2}$

39. $\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 \geq 15 \\ x_1 + 2x_2 \geq 8 \\ x_1 - x_2 \leq 4 \end{cases}$

$$\max : Z = \frac{2x_1 + 5x_2}{3x_1 + x_2}$$

40. $\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \geq 12 \\ x_1 + 3x_2 \leq 6 \\ -x_1 + 2x_2 \leq 4 \end{cases}$

$$\min : Z = \frac{4x_1 + 3x_2}{x_1 + 3x_2}$$

6.4. Контрольные вопросы

1. Что представляют собой задачи дробно-линейного программирования?
2. Математическая модель задачи дробно-линейного программирования.
3. Математическая модель задачи рентабельности затрат на производство изделий.
4. Математическая модель задачи рентабельности продаж.
5. Алгоритм решения задачи дробно-линейного программирования.
6. Математическая модель задачи определения затрат в расчете на рубль товарной продукции.
7. Математическая модель задачи нахождения себестоимости изделия.
8. Какой вид имеет целевая функция?

7. Задачи параметрического программирования

7.1. Краткие теоретические сведения

Задачи линейной оптимизации, в которых коэффициенты целевой функции и (или) свободные члены системы ограничений зависят от некоторого параметра, называются *задачами параметрической оптимизации.*

Математическую модель такой задачи можно представить в следующем виде:

$$z = \sum_{j=1}^{n} (c_j + c_j^{'} t) x_j \to \max$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = (b_i + b_i^{'} t),\ i = (\overline{1, m})$$

$$x_j \geq 0,\quad j = (\overline{1, n})$$

$$t \in \left[t_1 ; t_2 \right]$$

Решение параметрической задачи заключается в определении окончательных решений на всем интервале изменения параметра t. Для решения используется двойственный симплекс-метод.

Алгоритм метода

1. Определение оптимального опорного плана (или установление неразрешимости задачи) при некотором фиксированном значении $t_0 \in \left[t_1 ; t_2 \right]$. Для этого применяется двойственный симплекс-метод.

2. Определение множества значений параметра, содержащее t_0. Для выделения этого множества (интервала) используются условия оптимальности и условия допустимости опорного плана. Из дальнейшего рассмотрения исследованные множества параметров исключаются. Задается новое фиксированное значение параметра t и решение продолжается, начиная с пункта 1.

Этот процесс продолжается до тех пор, пока не будут исследованы решения задачи при всех значениях параметра $t \in [t_1; t_2]$.

7.2. Пример выполнения задания

Пример. Найти решение задачи параметрического программирования

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 \le 16, \\ x_1 \quad + x_2 \le 11, \\ 2x_1 + x_2 \le 12, \\ x_1 \ge 0, \;\; x_2 \ge 0. \end{cases}$$

$$\max Z = (2+t)x_1 + \left(13-t\right)x_2, \; 0 \le t \le 10 .$$

Решение.

Подготовим задачу к решению:

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 + x_3 \qquad\qquad = 16, \\ x_1 \quad + x_2 \qquad + x_4 \qquad = 11, \\ 2x_1 + x_2 \qquad\qquad + x_5 = 12, \end{cases}$$

$$\min\left(-Z\right) = -(2+t)x_1 + \left(t-13\right)x_2 ,$$

где:

x_1, x_2 – основные переменные,

x_3, x_4, x_5 – дополнительные переменные.

Для решения применяется алгоритм двойственного симплекс-метода.

Придадим параметру t наименьшее значение из его интервала $t = 0$.

Сформируем первую симплекс-таблицу с дополнительными строками:

Таблица 7.1

Базис	C	P_0	$-2-t$	$t-13$	0	0	0	С.в.
			P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	
P_3	0	16	4	1	1	0	0	16
P_4	0	11	1	1	0	1	0	11
P_5	0	12	2	1	0	0	1	12
Z-ряд		0	$2+t$	$13-t$	0	0	0	
p-ряд		0	2	13	0	0	0	
q-ряд		0	1	–1	0	0	0	

Критерий оптимальности не выполняется.

В таблице 7.1 ключевым будет столбец P_2 и второй ряд. В базис входит вектор P_2, выходит вектор P_4. Генеральный элемент равен 1.

Таблица 7.2

Базис	C	P_0	$-2-t$	$t-13$	0	0	0	С.в.
			P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	
P_3	0	5	3	0	1	–1	0	$5/3$
P_2	$t-13$	11	1	1	0	1	0	11
P_5	0	1	1	0	0	–1	1	1
Z-ряд		$11t-143$	$2t-11$	0	0	$t-13$	0	
p-ряд		–143	–11	0	0	–13	0	
q-ряд		11	2	0	0	1	0	

В таблице 7.2 достигнут минимум $(-Z)$ и максимум Z. Оптимальные значения основных переменных такие:

$$x_1 = 0,\ x_2 = 11.$$

Полученное решение определяет вершину $A_1(0;11)$. Оно будет сохраняться для некоторых значений t. Поскольку все q_i положительные, то имеем:

$$\alpha_1 = -\infty, \qquad \alpha_2 = \min\left(-\frac{-11}{2}; -\frac{-13}{1}\right) = \min\left(\frac{11}{2}; 13\right) = \frac{11}{2}.$$

Таким образом, вершина A_1 обеспечивает максимум для $t \in \left(-\infty, 11/2\right]$.

Данный интервал не перекрывает отрезок [0; 10], поэтому решение необходимо продолжить.

Ключевым столбцом будет P_1, потому что именно в нем получено значение α_2.

В новый базис включаем P_1, исключаем P_5, генеральный элемент равен 1. Все расчеты выполняем в соответствии с правилами симплексного метода. Получаем таблицу 7.3.

Таблица 7.3

Базис	C	P_0	$-2-t$	$t-13$	0	0	0	С.в.
			P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	
P_3	0	2	0	0	1	2	–3	1
P_2	$t-13$	10	0	1	0	2	–1	5
P_1	$-2-t$	1	1	0	0	–1	1	–
Z-ряд		$9t-132$	0	0	0	$3t-24$	$11-2t$	
p-ряд		–132	0	0	0	–24	11	
q-ряд		9	0	0	0	3	–2	

В таблице 7.3 получено новое решение:

$$x_1 = 1, \; x_2 = 10.$$

Полученное решение определяет вершину $A_2(1;10)$. Эта вершина будет обеспечивать оптимальность для других значений *t*, так как величины q_i имеют разные знаки:

$$\alpha_1 = \max\left(-\frac{11}{-2}\right) = \frac{11}{2}, \quad \alpha_2 = \min\left(-\frac{-24}{3}\right) = 8.$$

Таким образом, в точке A_2 достигается максимум, если $t \in \left[{}^{11}\!/_2; 8\right]$.

Данный интервал также не охватывает отрезок $[0;10]$, поэтому необходимо искать решение для значений t, которые остались.

Ключевым станет столбец P_4, вектор P_4 войдет в базис, выйдет из базиса вектор P_3, генеральный элемент равен 2. Получаем таблицу 7.4.

Таблица 7.4

Базис	C	P_0	$-2-t$	$t-13$	0	0	0	С.в.
			P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	
P_4	0	1	0	0	$1/2$	1	$-3/2$	
P_2	$t-13$	8	0	1	$-2/2$	0	$4/2$	
P_1	$-2-t$	2	1	0	$1/2$	0	$-1/2$	
Z-ряд		$6t-108$	0	0	$12-3/2\,t$	0	$5/2\,t-25$	
p-ряд		–108	0	0	12	0	–25	
q-ряд		6	0	0	$-3/2$	0	$5/2$	

В таблице 7.4 получено следующее решение: $x_1 = 2$, $x_2 = 8$, которое соответствует вершине $A_3(2;8)$. Поскольку величины q_i имеют разные знаки, то вершина A_3, будет оптимальной для следующих значений *i:*

$$\alpha_1 = \max\left(-\frac{12}{-3/2}\right) = 8, \quad \alpha_2 = \min\left(-\frac{-25}{5/2}\right) = 10.$$

Подводя итоги, конкретизируем выводы:

– если t принадлежит интервалу $[0;5,5]$, то целевая функция достигает максимума в точке A_1;

– если t принимает значения из интервала $[5,5;8]$, то максимум будет в вершине A_2;

– если t меняется от 8 до 10, то максимум достигается в точке A_3.

7.3. Задания для самостоятельного выполнения

Определить оптимальные значения целевой функции, разбив весь интервал изменения параметра на частичные.

Варианты заданий

1. $$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 10 \\ 2x_1 + 7x_2 - x_4 = 14 \\ x_1 - 4x_2 + x_5 = 0 \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, \ldots, 5 \end{cases}$$
$$\min : Z = (t-1)x_1 + (5-t)x_2$$
$$1 \leq t \leq 5$$

2. $$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_4 = 6 \\ -2x_1 + 3x_2 + x_5 = 6 \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, \ldots, 5 \end{cases}$$
$$\max : Z = (2t-4)x_1 + x_2$$
$$1 \leq t \leq 4$$

3. $$\begin{cases} x_1 + 4x_2 - x_3 = 4 \\ 4x_1 + x_2 - x_4 = 4 \\ x_1 + x_2 + x_5 = 3 \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, \ldots, 5 \end{cases}$$
$$\min : Z = (2t-2)x_1 + (1-2t)x_2$$
$$0 \leq t \leq 3$$

4. $$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 = 3 \\ x_1 + 5x_2 - x_4 = 5 \\ 7x_1 + 4x_2 + x_5 = 28 \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, \ldots, 5 \end{cases}$$
$$\min : Z = (t-2)x_1 + (3-t)x_2$$
$$0 \leq t \leq 5$$

5. $\begin{cases} x_1 + 4x_2 + x_3 = 12 \\ 4x_1 + 3x_2 + x_4 = 12 \\ x_1 - x_2 + x_5 = 3 \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, ..., 5 \end{cases}$

$\max: Z = (t-1)x_1 + (6-t)x_2$

$2 \leq t \leq 5$

6. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 6 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_4 = 6 \\ -x_1 + x_2 + x_5 = 1 \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, ..., 5 \end{cases}$

$\max: Z = (5-t)x_1 + (t+1)x_2$

$1 \leq t \leq 4$

7. $\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + x_3 = 14 \\ 5x_1 + 2x_2 + x_4 = 10 \\ x_1 + x_2 - x_5 = 1 \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, ..., 5 \end{cases}$

$\max: Z = (3-t)x_1 + (2t+1)x_2$

$-1 \leq t \leq 5$

8. $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 3 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_4 = 12 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_5 = 12 \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, ..., 5 \end{cases}$

$\max: Z = (7-2t)x_1 + tx_2$

$1 \leq t \leq 3$

11. $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ 4x_1 + x_2 - x_4 = 4 \\ 4x_1 + 5x_2 + x_5 = 20 \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, ..., 5 \end{cases}$

$\min: Z = (3-t)x_1 + (2t-5)x_2$

$2 \leq t \leq 4$

12. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 4 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_4 = 12 \\ 7x_1 + 5x_2 + x_5 = 35 \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, ..., 5 \end{cases}$

$\max: Z = (8-t)x_1 + (t-1)x_2$

$0 \leq t \leq 6$

15. $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - x_3 = 10 \\ 4x_1 + x_2 - x_4 = 4 \\ x_1 + x_2 + x_5 = 6 \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, ..., 5 \end{cases}$

$\max: Z = (t-1)x_1 + 2x_2$

$0 \leq t \leq 3$

16. $\begin{cases} x_1 + 5x_2 - x_3 = 5 \\ 6x_1 + x_2 - x_4 = 6 \\ 5x_1 + 4x_2 + x_5 = 20 \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, ..., 5 \end{cases}$

$\max: Z = (t-2)x_1 + (4-t)x_2$

$2 \leq t \leq 6$

19. $\begin{cases} 4x_1 + 7x_2 + x_3 = 28 \\ 6x_1 + 5x_2 + x_4 = 30 \\ -2x_1 + x_2 + x_5 = 2 \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, ..., 5 \end{cases}$

$\max : Z = (2t-5)x_1 + (7-t)x_2$

$2 \leq t \leq 5$

20. $\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + x_3 = 15 \\ -x_1 + x_2 + x_4 = 1 \\ 2x_1 + 7x_2 + x_5 = 14 \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, ..., 5 \end{cases}$

$\max : Z = (3-t)x_1 + tx_2$

$0 \leq t \leq 4$

23. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 4 \\ x_1 + 2x_2 - x_4 = 4 \\ x_1 + x_2 + x_5 = 5 \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, ..., 5 \end{cases}$

$\min : Z = (6-t)x_1 + tx_2$

$1 \leq t \leq 5$

24. $\begin{cases} 4x_1 + x_2 - x_3 = 4 \\ x_1 + 5x_2 - x_4 = 5 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_5 = 12 \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, ..., 5 \end{cases}$

$\min : Z = (t-1)x_1 + (4-t)x_2$

$0 \leq t \leq 5$

29. $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - x_3 = 10 \\ 5x_1 + 2x_2 - x_4 = 10 \\ x_1 + x_2 + x_5 = 4 \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, ..., 5 \end{cases}$

$\min : Z = (t-2)x_1 + (5-t)x_2$

$1 \leq t \leq 6$

30. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 12 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_4 = 12 \\ x_1 + x_2 - x_5 = 2 \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, ..., 5 \end{cases}$

$\max : Z = (t+1)x_1 + (6-t)x_2$

$1 \leq t \leq 4$

31. $\begin{cases} x_1 + 4x_2 + x_3 = 16 \\ 4x_1 + 3x_2 + x_4 = 12 \\ x_1 - x_2 + x_5 = 4 \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, ..., 5 \end{cases}$

$\max : Z = (t-3)x_1 + (7-t)x_2$

$1 \leq t \leq 7$

32. $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + x_3 = 8 \\ 4x_1 + 2x_2 + x_4 = 8 \\ -x_1 + x_2 + x_5 = 2 \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, ..., 5 \end{cases}$

$\max : Z = (6-t)x_1 + (t+2)x_2$

$3 \leq t \leq 7$

33. $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\ 5x_1 + x_2 - x_4 = 5 \\ 5x_1 + 4x_2 + x_5 = 20 \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, ..., 5 \end{cases}$

$\min : Z = (4-t)x_1 + (2t-6)x_2$

$0 \leq t \leq 4$

34. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = 6 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_4 = 12 \\ 5x_1 + 7x_2 + x_5 = 35 \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, ..., 5 \end{cases}$

$\max : Z = (7-t)x_1 + (2t-1)x_2$

$1 \leq t \leq 7$

35. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 = 6 \\ x_1 + 3x_2 - x_4 = 6 \\ x_1 + x_2 + x_5 = 4 \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, ..., 5 \end{cases}$

$\min : Z = (7-2t)x_1 + 3tx_2$

$1 \leq t \leq 5$

36. $\begin{cases} 5x_1 + x_2 - x_3 = 5 \\ x_1 + 4x_2 - x_4 = 4 \\ 4x_1 + 3x_2 + x_5 = 12 \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, ..., 5 \end{cases}$

$\min : Z = (2t-1)x_1 + (5-t)x_2$

$1 \leq t \leq 7$

37. $\begin{cases} 2x_1 + 6x_2 + x_3 = 12 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_4 = 6 \\ -3x_1 + x_2 - x_5 = -3 \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, ..., 5 \end{cases}$

$\max : Z = (3+t)x_1 + (5-2t)x_2$

$0 \leq t \leq 5$

38. $\begin{cases} 7x_1 + 3x_2 + x_3 = 21 \\ -3x_1 + 2x_2 + x_4 = 6 \\ x_1 - x_2 + x_5 = 5 \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, ..., 5 \end{cases}$

$\max : Z = (-4+2t)x_1 + (3t+2)x_2$

$2 \leq t \leq 7$

39. $\begin{cases} 2x_1 + 8x_2 + x_3 = 16 \\ 5x_1 + 3x_2 + x_4 = 15 \\ x_1 + x_2 - x_5 = 2 \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, ..., 5 \end{cases}$

$\max : Z = (3-2t)x_1 + (2t+3)x_2$

$-1 \leq t \leq 6$

40. $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 4 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_4 = 12 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_5 = 12 \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, ..., 5 \end{cases}$

$\max : Z = (5-t)x_1 + tx_2$

$1 \leq t \leq 5$

7.4. Контрольные вопросы

1. Что называется задачами параметрической оптимизации?
2. Приведите математическую модель задачи параметрической оптимизации.
3. Двойственный симплекс-метод.
4. В чем заключается решение параметрической задачи?
5. Сформулируйте общую форму математической модели задачи параметрической оптимизации.
7. Приведите алгоритм метода решения задач параметрической оптимизации.
8. Приведите алгоритм симплексного метода.

Библиографический список

1. Аттетков А.В. Методы оптимизации: учебное пособие / А.В. Аттетков, В.С. Зарубин, А.Н. Канатников. – М. : Риор, 2016. – 48 с.
2. Бродецкий Г.Л. Экономико-математические методы и модели в логистике: процедуры оптимизации: учеб. для студентов учреждений высшего профессионального образования / Г.Л. Бродецкий. – М. : ИЦ Академия, 2012. – 288 с.
3. Бурда А.Г. Исследование операций в экономике: учебное пособие / А.Г. Бурда, Г.П. Бурда. – СПб. : Лань, 2018. – 564 с.
4. Гончаров В.А. Методы оптимизации: учебное пособие для ВУЗов / В.А. Гончаров. – Люберцы : Юрайт, 2016. – 191 с.
5. Горелик В.А. Исследование операций и методы оптимизации: учебник / В.А. Горелик. – М. : Academia, 2018. – 384 с.
6. Зайцев М.Г. Методы оптимизации управления и принятия решений: примеры, задачи, кейсы: учебное пособие / М.Г. Зайцев, С.Е. Варюхин. – М. : Дело АНХ, 2015. – 640 с.
7. Измаилов А.Ф. Численные методы оптимизации / А.Ф. Измаилов, М.В. Солодов. – М. : Физматлит, 2008. – 320 с.
8. Келлер И.Э. Методы оптимизации в примерах и задачах: учебное пособие / И.Э. Келлер. – СПб. : Лань, 2015. – 512 с.
9. Колбин В.В. Специальные методы оптимизации: учебное пособие / В.В. Колбин. – СПб. : Лань, 2014. – 384 с.
10. Корнеенко В.П. Методы оптимизации: учебное пособие / В.П. Корнеенко. – М.: Высшая школа, 2007. – 664 с.
11. Кочегурова Е.А. Теория и методы оптимизации: учебное пособие для академического бакалавриата / Е.А. Кочегурова. – Люберцы : Юрайт, 2016. – 133 с.
12. Лабскер Л.Г. Теория игр в экономике. Практикум с решениями задач (для бакалавров) / Л.Г. Лабскер; под ред. Ященко Н.А.. – М. : КноРус, 2016. – 331 с.
13. Мастяева И.Н. Методы оптимальных решений: учебник / И.Н. Мастяева, Г.И. Горемыкина, О.Н. Семенихина. – М. : КУРС, НИЦ ИНФРА-М, 2016. – 384 с.

14. Морозов В.В. Исследование операций в задачах и упражнениях: учебное пособие / В.В. Морозов, А.Г. Сухарев, В.В. Федоров. – М. : КД Либроком, 2016. – 288 с.

15. Невежин В.П. Исследование операций и принятие реш. в эк.: сборник задач / В.П. Невежин, С.И. Кружилов, Ю.В. Невежин. – М. : Форум, 2016. – 288 с.

16. Нефедов Ю.М. Методы оптимизации: учебное пособие для студентов, обучающихся по направлению 01.03.02 Прикладная математика и информатика / Ю.М. Нефедов. – Луганск : Изд-во «Ноулидж», 2020. – 256 с.

17. Пантелеев А.В. Методы оптимизации в примерах и задачах: учебное пособие / А.В. Пантелеев, Т.А. Летова. – СПб. : Лань, 2015. – 512 с.

18. Сдвижков О.А. Практикум по методам оптимизации: практикум / О.А. Сдвижков. – М. : Вузовский учебник, НИЦ ИНФРА-М, 2014. – 231 с.

19. Супрун Д.Г. Методы оптимизации. Задачи линейного программирования / Д.Г. Супрун. – М. : МГИУ, 2008. – 82 с.

20. Урубков А.Р. Методы и модели оптимизации управленческих решений: учебное пособие / А.Р. Урубков, И.В. Федотов. – М. : ИД Дело РАНХиГС, 2012. – 240 с.

21. Черноруцкий И.Г. Методы оптимизации. Компьютерные технологии: учебное пособие / И.Г. Черноруцкий. – СПб. : BHV, 2011. – 384 с.

22. Шевелевич К.В. Практикум по дисциплине «Исследование операции и методы оптимизации»: практикум / сост. К.В. Шевелевич. – М. : ФГБОУ ВО «РЭУ им. Г. В. Плеханова», 2016 – 24 с.

23. Ширяев В.И. Исследование операций и численные методы оптимизации: учебное пособие / В.И. Ширяев. – М. : Ленанд, 2017. – 224 с.

Заключение

Учебное издание является дополнительным учебным пособием, предназначенным для организации самостоятельной работы студентов, оказания помощи в изучении методов оптимизации и исследования операций при подготовке к практическим занятиям, контрольным работам, зачету, экзамену, при выполнении домашних работ.

В данном пособии акцентировано внимание на практическую часть основных разделов математического программирования, позволяющие решать экономико-производственные задачи, и являются базовой частью изучаемой дисциплины «Исследование операций в экономике». Поэтому основной целью учебно-методического пособия «Методы оптимизации и исследование операций» является подготовка студентов к самостоятельному изучению литературы по методам оптимизации и исследованию операций, математическим методам в экономике; развитие логического и аналитического мышления; активизация познавательной, самостоятельной и творческой деятельности.

Учебное издание

КРИВКО Яна Петровна
ДАВЫСКИБА Оксана Викторовна

Методы оптимизации и исследование операций

Учебно-методическое пособие

В авторской редакции

Компьютерный оригинал – макет Я. П. Кривко
Верстка – О. В. Давыскиба

Подписано в печать 29.03.2021. Бумага офсетная
Гарнитура Times New Roman.
Печать ризографическая. Формат 60х84/16. Усл. печ. л. 6,51.
Тираж 50 экз. Заказ № 35.

Издатель ГОУ ВО ЛНР «ЛГПУ»
«Книта»
ул. Оборонная, 2, г. Луганск, ЛНР, 91011. Т /ф: (0642) 58-03-20.
e-mail: knitaizd@mail.ru