

Министерство образования и науки ДНР  
Донецкий национальный технический университет

Кафедра "Высшая математика им. В.В. Пака"

**Сборник научно-методических работ**

Выпуск 12

*Столетию ДонНТУ посвящается*



Донецк - 2021

УДК 51-7, 332.1: 330.4, 372.851, 378.016, 378.016:51, 378.1, 378.016:  
378.147.091-027.31, 378.147, 378.4:519.2, 378.14, 517.1, 517.5, 517.6,  
517.9. (072), 519.242: 519.25, 531.38, 536.7, 536+539.196.3, 538.4, 621.923

Рекомендовано к печати Советом Донецкого Национального технического  
университета  
Протокол № 6 от 25.06.2021 г.

**Сборник научно-методических работ.**- Вып. 12.-Донецк: ДонНТУ, 2021.–269 с.

Настоящий сборник посвящен знаменательной дате нашего университета – столетию его образования. В сборнике содержатся работы преподавателей кафедры и сотрудников других вузов, в которых рассматриваются проблемы и аспекты преподавания высшей математики в техническом вузе, а также различные направления использования математических методов при решении инженерных задач, а именно, задач механики твердого тела, прикладных задач физики и экономики.

Научно-методические работы являются обобщением опыта преподавателей кафедры по усовершенствованию математической подготовки специалистов.

Издание рассчитано на широкий круг научных работников, а также аспирантов и студентов старших курсов технических университетов.

**Редакционная коллегия:** профессор Улитин Г.М. - главный редактор, проф. Сторожев В.И., Лесина М.Е., Евсеева Е.Г., доц. Руссиян С.А., Локтионов И.К.

Адрес редакционной коллегии : ДНР, 83050, г. Донецк, ул. Артема, 96, ДонНТУ, 3-й учебный корпус, кафедра "Высшая математика", тел. (062) 3010901.

<b>14. Евсева Е. Г., Варавина В.С.</b> ОБУЧЕНИЕ ТЕМЕ «ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ» БУДУЩИХ ЭКОНОМИСТОВ СРЕДСТВАМИ ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ.....	93
<b>15. Евсева Е. Г., Омельченко Д.С.</b> ФОРМИРОВАНИЕ СИСТЕМЫ ПОНЯТИЙ ПО ТЕМЕ «ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ» В ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИКЕ БУДУЩИХ ЭКОНОМИСТОВ».....	102
<b>16. Евсева Е. Г., Тышлек К.А.</b> ПРИЁМЫ ФОРМИРОВАНИЯ ПРОФЕССИОНАЛЬНО-ЗНАЧИМЫХ КАЧЕСТВ ЛИЧНОСТИ БУДУЩИХ УЧИТЕЛЕЙ И ПРЕПОДАВАТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ.....	110
<b>17. Игнатова Е. А.</b> О ВАЖНОСТИ ФОРМИРОВАНИЯ МЕЖПРЕДМЕТНЫХ СВЯЗЕЙ ПРИ ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИКЕ.....	119
<b>18. Калайдо Ю.Н.</b> ПРИМЕНЕНИЕ АППАРАТА КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ В ПРИКЛАДНЫХ ИНЖЕНЕРНЫХ ЗАДАЧАХ .....	122
<b>19. Калашиникова О.А., Дрёмов В.В.</b> МЕТОДЫ ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ В РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ О ДВИЖЕНИИ ФРОНТА ЗАТВЕРДЕВАНИЯ В ИЗЛОЖНИЦАХ С РАЗЛИЧНОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬЮ СТЕНОК .....	130
<b>20. Ковалёв И.Н.</b> ИЗУЧЕНИЕ КУРСА «СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ» В ТЕХНИЧЕСКОМ ВУЗЕ.....	139
<b>21. Кононыхин Г.А.</b> ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В КУРСЕ “МАТЕМАТИКА” ДЛЯ СТУДЕНТОВ СТРОИТЕЛЬНЫХ СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ.....	144
<b>22. Коняева Ю.Ю.</b> КОМПЕТЕНТНОСТНО-ОРИЕНТИРОВАННЫЕ ЗАДАЧИ КАК СРЕДСТВО ФОРМИРОВАНИЯ УНИВЕРСАЛЬНЫХ КОМПЕТЕНЦИЙ СТУДЕНТОВ ФИЗИЧЕСКИХ НАПРАВЛЕНИЙ ПОДГОТОВКИ.....	147
<b>23. Лактионова Д.А.</b> МЕТАПРЕДМЕТНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ОБУЧЕНИЯ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ И ПУТИ ИХ ДОСТИЖЕНИЯ .....	155
<b>24. Лесина М.Е.</b> ЧАСТНОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ДВИЖЕНИИ ПО ИНЕРЦИИ СИСТЕМЫ ДВУХ ГИРОСКОПОВ ЛАГРАНЖА.....	161
<b>25. Лесина М.Е., Савин А.И.</b> ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ДВИЖЕНИЙ СИСТЕМЫ ДВУХ ГИРОСКОПОВ ЛАГРАНЖА .....	167
<b>26. Литовка В.В.</b> ПРОБЛЕМЫ КАЧЕСТВА ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ СТУДЕНТОВ-ЗАОЧНИКОВ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ .....	170

## ПРИМЕНЕНИЕ АППАРАТА КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ В ПРИКЛАДНЫХ ИНЖЕНЕРНЫХ ЗАДАЧАХ

*Калайдо Ю.Н.*

*ГОУ ВО ЛНР «Луганский государственный педагогический университет»  
[kalaydo28@yandex.ua](mailto:kalaydo28@yandex.ua)*

*В данной статье рассматривается роль прикладной направленности математического образования в подготовке будущих инженеров. Особое внимание уделяется изучению темы «Основы теории функции комплексного переменного», геометрической интерпретации поля комплексных чисел, их применению к решению практико-ориентированных задач. Приведены примеры решения некоторых прикладных инженерных задач с использованием комплексного исчисления.*

**Ключевые слова:** *прикладная направленность, комплексные числа, кинематический анализ, электротехника, символьный метод.*

Подготовка будущих специалистов инженерной направленности должна основательной и фундаментальной, а также неразрывно связанной с реальными процессами производства. Математические знания являются научной базой инженерных знаний и умений успешного и квалифицированного специалиста на рынке труда. Но в настоящее время можно констатировать снижение мотивации у студентов как при получении математических знаний и умений, так и профессиональных. Это обусловлено рядом причин: разрывом между слабой математической подготовкой абитуриентов и достаточно высоким уровнем требований по математике в университете для студентов технических направлений подготовки; трудностями в освоении студентами специальных дисциплин, обусловленными несвоевременным знакомством с математическим аппаратом; неумением студентов работать с учебной и справочной литературой; сокращением количества аудиторных часов, отводимых на изучение основных разделов математики; отсутствием практико-ориентированных задач при фундаментальном изложении материала [1].

Использование задач с прикладной направленностью при изучении основных разделов математики способствует повышению мотивации и развитию мышления студентов, побуждает к самостоятельному переосмыслению и усвоению новых теоретических знаний. При изложении основного материала необходимо рассматривать вопросы применения тех или иных фундаментальных разделов математики в инженерных исследованиях. Преподаватель математики должен ориентироваться в содержании специальных дисциплин, чтобы понимать на какие разделы

математического аппарата основываются данные дисциплины, и без каких математических знаний и умений будущие специалисты данной отрасли высшего технического образования не смогут обойтись. Это будет способствовать повышению уровня как математического, так и профессионального образования у будущих инженеров. Установление межпредметных связей математики с общепрофессиональными и специальными дисциплинами является в настоящее время актуальным и позволяет оптимально сочетать фундаментальное и профессиональное образование.

При изучении темы: «Основы теории функции комплексного переменного» необходимо обратить внимание студентов, что аппарат комплексных чисел имеет широкое применение в различных областях естествознания. При исследовании широкого круга процессов, имеющих периодический характер, применение комплексных чисел в значительной мере упрощает технику решения уравнений, описывающих эти явления, а также анализ полученных результатов. Это обусловлено геометрической интерпретацией комплексных чисел, возможностью их представления как векторов на комплексной плоскости, а также наличием простой связи между экспоненциальной и тригонометрической формами, что в некоторых случаях способствует более компактному решению поставленных задач.

Замена двух действительных функций одной комплекснозначной функцией действительного переменного также приводит к упрощению математических выкладок. Пусть даны две действительных функции:  $u = f_1(t)$  и  $v = f_2(t)$ . Тогда можно построить комплекснозначную функцию  $w = u + iv = f_1(t) + if_2(t)$ , область определения которой будет совпадать.

На практических и лекционных занятиях по математике можно продемонстрировать эффективность метода представления величин в комплексной форме, обращаясь, например, к задачам из курсов «Теория машин и механизмов» и «Электротехника и основы электроники».

При изучении механизмов основной областью применения аппарата комплексных чисел является кинематика. Кинематический анализ механизмов включает вопросы изучения звеньев с геометрической точки зрения, то есть без учета действующих сил. Для этого используются графические, аналитические и экспериментальные методы исследования [2]. Аналитический метод решения позволяет проводить анализ с заданной степенью точности. Используя показательную форму комплексных чисел, можно записать следующее уравнение замкнутости для плоского шарнирного четырехзвенника (рис.1):

$$\vec{l}_1 + \vec{l}_2 = \vec{l}_0 + \vec{l}_3$$

$$l_1 e^{i\varphi_1} + l_2 e^{i\varphi_2} = l_0 + l_3 e^{i\varphi_3} . \quad (1)$$

Векторы заменяются комплексными числами. Аналоги скоростей и ускорений можно получить, продифференцировав по обобщенной координате уравнения геометрических связей механизма.

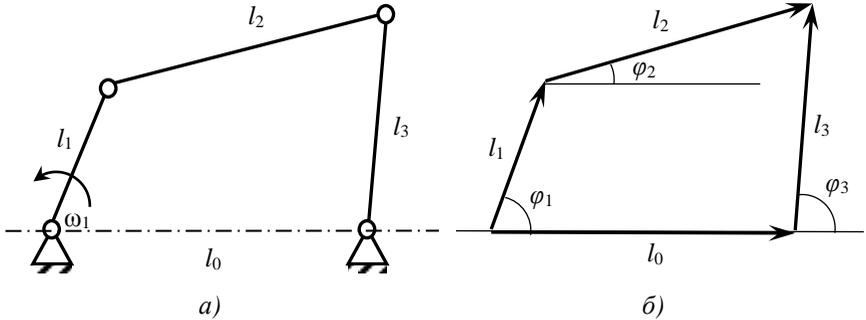


Рисунок 1 – Схема (а) и векторная интерпретация (б) шарнирного четырехзвенника

Применив формулу Эйлера к (1), можно перейти к уравнению следующего вида [3]:

$$l_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) + l_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) = l_0 + l_3(\cos \varphi_3 + i \sin \varphi_3) \quad (2)$$

Выделив действительные и мнимые части в правой и левой части равенства (2), получим:

$$l_1 \cos \varphi_1 + l_2 \cos \varphi_2 + i(l_1 \sin \varphi_1 + l_2 \sin \varphi_2) = l_0 + l_3 \cos \varphi_3 + i l_3 \sin \varphi_3 .$$

Два комплексных числа равны, если равны соответственно их действительные и мнимые их части:

$$\begin{cases} l_1 \cos \varphi_1 + l_2 \cos \varphi_2 = l_0 + l_3 \cos \varphi_3 \\ l_1 \sin \varphi_1 + l_2 \sin \varphi_2 = l_3 \sin \varphi_3 \end{cases} . \quad (3)$$

Линейные размеры звеньев ( $l_0, l_1, l_2, l_3$ ) и значение угла  $\varphi_1$  заданы. Из полученной системы уравнений можно определить углы  $\varphi_2$  и  $\varphi_3$ :

$$\begin{cases} l_3 \cos \varphi_3 - l_2 \cos \varphi_2 = l_1 \cos \varphi_1 - l_0 \\ l_3 \sin \varphi_3 - l_2 \sin \varphi_2 = l_1 \sin \varphi_1 \end{cases} .$$

Для определения угловой скорости и углового ускорения дифференцируем (1) по обобщенной координате  $\varphi_1$ :

$$l_1 i e^{i\varphi_1} + l_2 i \varphi_2' e^{i\varphi_2} = l_3 i \varphi_3' e^{i\varphi_3} .$$

После преобразований получаем:

$$l_1 e^{i\varphi_{12}} + l_2 \varphi_2' = l_3 \varphi_3' e^{i\varphi_{32}} .$$

$$l_1(\cos \varphi_{12} + i \sin \varphi_{12}) + l_2 \varphi_2' = l_3 \varphi_3' (\cos \varphi_{32} + i \sin \varphi_{32}) .$$

Приравниваем действительные и мнимые части комплексных чисел:

$$\begin{cases} l_1 \cos \varphi_{12} + l_2 \varphi_2' = l_3 \varphi_3' \cos \varphi_{32} \\ l_1 \sin \varphi_{12} = l_3 \varphi_3' \sin \varphi_{32} \end{cases} \quad (4)$$

Выражения (4) и (5) совпадают с формулами, которые могут быть получены с помощью метода замкнутых векторных контуров. Данные системы могут быть достаточно просто решены с помощью любого математического пакета.

В электротехнике для расчета цепей переменного тока также используется аппарат комплексных чисел. При анализе цепей переменного тока электрические величины представляются в форме синусоидальных функций, что приводит к усложнению математических расчетов. Чтобы упростить вычисления, синусоидально изменяющиеся токи, напряжения, э.д.с. представляют векторами или комплексными числами. Этот метод получил название символического, поскольку в нем оригиналы (синусоидальные функции) заменяются своими символами (комплексными числами или векторами). Символические изображения, развитые сначала в теории колебаний, были применены к теории переменных токов.

С помощью комплексных чисел в электротехнике в теории электрических цепей могут быть представлены как величины (напряжения, токи, сопротивления), так и зависимости между этими величинами (законы Ома и Кирхгофа). Применение комплексных чисел дает возможность унифицировать расчеты цепей постоянного и переменного тока, то есть использовать все законы, формулы, методы расчетов, применяющиеся в цепях постоянного тока, для расчета цепей переменного тока [4]. Также существенным преимуществом символического метода является простота расчета при помощи математических пакетов.

При разборе практико-ориентированных задач по расчету цепи переменного тока необходимо обращать внимание студентов на то, что в электротехнике, в отличие от математики, мнимую единицу обозначают не  $i$ , а  $j$ , чтобы не путать с обозначением тока.

Мгновенное значение силы тока задается синусоидальной функцией:

$$i(t) = I_m \cdot \sin(\omega t + \psi_i),$$

где  $I_m$  – амплитудное значение,  $\omega$  – угловая частота,  $\psi_i$  – начальная фаза.

Данную функцию можно представить как мнимую часть комплекснозначной функции:

$$\begin{aligned} i(t) &= \text{Im}(I_m \cdot \cos(\omega t + \psi_i) + j \cdot I_m \cdot \sin(\omega t + \psi_i)) = \text{Im}(I_m \cdot e^{j(\omega t + \psi_i)}) = \\ &= \text{Im}(I_m \cdot e^{j\psi_i} \cdot e^{j\omega t}) = \text{Im}(\dot{I}_m \cdot e^{j\omega t}), \end{aligned}$$

где  $\dot{I}_m$  – комплексная амплитуда.

Поэтому синусоидальный ток представляют в виде проекции вращающегося вектора  $I_m \cdot e^{j(\omega t + \psi_i)}$  на мнимую ось в начальный момент времени. Именно таким способом и получают векторную диаграмму синусоидальных изменяющихся во времени величин. Между мгновенным значением и векторным представлением синусоидальной величины существует взаимно однозначное соответствие – вектор несет информацию о

действующем значении величины (длина вектора) и начальной фазе (угол поворота вектора относительно положительного направления горизонтальной оси) [5].

Рассмотрим пример расчета однофазной цепи переменного тока. Необходимо найти эквивалентное сопротивление и ток в общей части цепи и во всех ветвях, если цепь (рис. 2) находится под напряжением  $e(t) = 220 \cdot \sin(\omega t)$  В, а частота тока  $f = 50$  Гц. Активные сопротивления цепи  $R_1 = 91$  Ом,  $R_3 = 510$  Ом и  $R_4 = 820$  Ом; индуктивность катушки  $L_1 = 0,76$  Гн; емкости конденсаторов  $C_2 = 21,2$  мкФ и  $C_3 = 16,8$  мкФ.

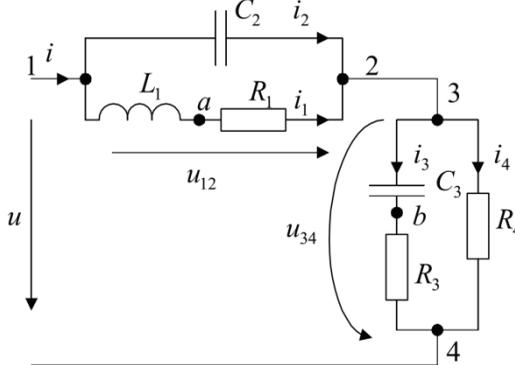


Рисунок 2 – Однофазная цепь переменного тока

Расчет цепи производится символическим методом с использованием комплексных амплитуд токов и напряжений, а также комплексных сопротивлений.

Круговую частоту электрического тока находим по формуле:

$$\omega = 2\pi f = 2 \cdot 3,14 \cdot 50 = 314 \text{ рад/с.}$$

Сопротивление каждой ветви цепи характеризуют комплексным сопротивлением:

$$Z = R + jX = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = |Z| \cdot e^{j\varphi}.$$

Определяем комплексные сопротивления для каждой из ветвей:

$$Z_1 = R_1 + j\omega L_1 = 91 + j239 \text{ Ом}$$

$$Z_2 = -j\frac{1}{\omega C} = -j150 \text{ Ом}$$

$$Z_3 = R_3 - j\frac{1}{\omega C_3} = 510 - j189 \text{ Ом}$$

$$Z_4 = R_4 = 820 \text{ Ом}$$

Эквивалентное сопротивление рассчитывается сверткой цепи. Ветви  $Z_1$  и  $Z_2$  соединены параллельно, поэтому их эквивалентное комплексное сопротивление равно:

$$Z_{12} = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{(91 + j239) \cdot (-j150)}{91 + j239 - j150} = 127 - j274 \text{ Ом.}$$

Ветви  $Z_3$  и  $Z_4$  также соединены параллельно:

$$Z_{34} = \frac{Z_3 Z_4}{Z_3 + Z_4} = \frac{(510 - j189) \cdot 820}{510 - j189 + 820} = 324,5 - j70,6 \text{ Ом.}$$

Находим общее сопротивление цепи:

$$\begin{aligned} Z_{\text{общ}} &= Z_{12} + Z_{34} = 127 - j274 + 324,5 - j70,6 = \\ &= 451,5 - j344,6 \text{ Ом.} \end{aligned}$$

Определяем комплексную амплитуду тока в общей цепи:

$$I = \frac{E_m}{Z} = \frac{220}{451,5 - j344,6} = 0,31 + j0,24 \text{ А.}$$

Определяем комплексные амплитуды тока на участках цепи:

$$I_1 = \frac{I \cdot Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{(0,31 + j0,24)(-j150)}{(91 + j239)(-j150)} = -0,06 - j0,45 \text{ А.}$$

$$I_2 = \frac{I \cdot Z_1}{Z_1 + Z_2} = \frac{(0,31 + j0,24)(91 + j239)}{(91 + j239)(-j150)} = 0,36 + j0,69 \text{ А.}$$

$$I_3 = \frac{I \cdot Z_4}{Z_3 + Z_4} = \frac{(0,31 + j0,24) \cdot 820}{(510 - j190) \cdot 820} = 0,17 + j0,17 \text{ А.}$$

$$I_4 = \frac{I \cdot Z_3}{Z_3 + Z_4} = \frac{(0,31 + j0,24) \cdot (510 - j190)}{(510 - j190) \cdot 820} = 0,14 + j0,07 \text{ А.}$$

Откладывая значения действительных и мнимых частей токов на комплексной плоскости, строим векторы токов, то есть получаем векторную диаграмму. В пакете Mathcad формируем двумерные векторы с нулевым первым элементом. Вторые элементы в этих векторах будут иметь значения комплексных амплитуд токов (рис.3).

Аналогично можно произвести расчет и для комплексных амплитуд напряжений. Для расчета комплексных амплитуд токов в символической схеме замещения цепи в данном примере применялись методы расчета линейных цепей постоянного тока.

От комплексных амплитуд довольно просто перейти к функциям времени для мгновенным значений. Чтобы построить графики токов и э.д.с. необходимо задать шаг и временной интервал.

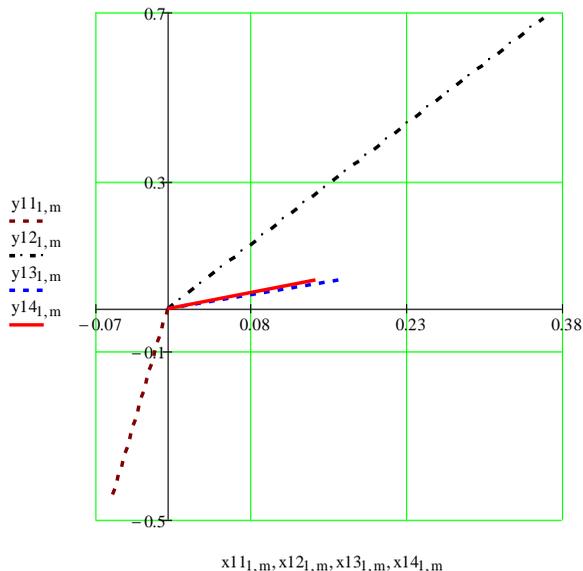


Рисунок 3 – Векторная диаграмма токов

Реализация профессиональной направленности изучения темы «Основы теории функции комплексного переменного» для будущих инженеров нацелена на усиление мотивации студентов, ведущей к осознанному усвоению математических знаний и их использованию в ходе изучения общетехнических и специальных дисциплин. Из рассмотренных выше примеров следует, что комплексные числа являются универсальным и удобным математическим средством решения прикладных инженерных задач. Многие задачи значительно упрощаются после их перевода в комплексную плоскость.

### *Литература*

1. Далингер В.А. Практико-ориентированное обучение будущих инженеров математике // Международный журнал экспериментального образования. – 2015. – № 3-1. – С. 111-114.
2. Мацюк И.Н., Третьяков В.М., Шляхов Э.М. Аналитическая кинематика плоских рычажных механизмов высоких классов с помощью программы Mathcad. Теория механизмов и машин. – Санкт-Петербург. – 2012. – № 1. Том 10. – С. 65-70.
3. Морозова В.Д. Теория функции комплексного переменного: Учеб. для вузов / Под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. – 3-е изд., исправл. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2009. – 520с.

4. Атабеков Г.И. Теоретические основы электротехники. Линейные электрические цепи: учеб. пособ. – 7-е изд., стер. – СПб.: Издательство «Лань», 2009. – 592 с.: ил.

5. Андреева И.М. Комплексные числа и их применение в электротехнике / И.М. Андреева, Н.Д. Василевич, Л.А. Хвощинская. – Мн.: БГАТУ, 2002. – 30 с.

*Kalaydo Yu. N.*

### **APPLICATION OF THE COMPLEX NUMBER IN APPLIED ENGINEERING PROBLEMS**

**Abstract.** *This article examines the role of the applied orientation of mathematics education in the training of future engineers. Particular attention is paid to the study of the topic "Fundamentals of the theory of functions of a complex variable", the geometric interpretation of the field of complex numbers, their application to solving practice-oriented problems. Examples of solving some applied engineering problems using complex calculus are given.*

**Keywords:** *applied orientation, complex numbers, kinematic analysis, electrical engineering, symbolic method.*