

Дніпропетровський національний університет
імені Олеся Гончара

**МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ
ПРИКЛАДНИХ ЗАДАЧ МЕХАНІКИ
ДЕФОРМІВНОГО ТВЕРДОГО ТІЛА**

**МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ПРИКЛАДНЫХ ЗАДАЧ МЕХАНИКИ
ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА**

**METHODS OF SOLVING APPLIED PROBLEMS
IN SOLIDS MECHANICS**

Збірник наукових праць

13
випуск

Дніпропетровськ
Ліра
2012

Методи розв'язування прикладних задач механіки деформівного твердого тіла: зб. наук. праць / ред. кол.: А. П. Дзюба (відп. ред.) та ін. – Дніпропетровськ: Ліра, 2012. – Вип. 13. – 460 с. Рос., укр. та англ. мовами.

Наведені нові результати досліджень у галузі механіки деформівного твердого тіла. Основна увага приділена питанням розробки та удосконалення математичних моделей, методів теоретичного і експериментального дослідження та застосування сучасних комп'ютерних технологій для розв'язування актуальних прикладних задач.

Для наукових співробітників, інженерів-механіків та аспірантів.

Збірник внесено до Переліку наукових фахових видань України, в яких можуть публікуватися результати дисертаційних робіт на здобуття наукових ступенів доктора і кандидата наук (технічні науки (механіка деформівного твердого тіла) – постанова президії ВАК України від 16 грудня 2009 р. № 1-05/6; фізико-математичні науки (механіка) – постанова президії ВАК України від 01 липня 2010 р. № 1-05/5).

Рекомендовано до друку Вченою радою Дніпропетровського національного університету імені Олеся Гончара (протокол № 10 від 31 березня 2011 р.)

РЕДАКЦІЙНА КОЛЕГІЯ:

д-р техн. наук, проф. **А. П. Дзюба** (відп. редактор); канд. техн. наук, с.н.с. **Ю. М. Селіванов** (відп. секретар); д-р техн. наук, проф. **Ю. С. Воробйов**; канд. фіз.-мат. наук, доц. **О. О. Бобильов**; д-р техн. наук, проф. **В. З. Грищак**; д-р техн. наук, проф., чл.-кор. НАНУ **В. С. Гудрамович**; д-р техн. наук, проф. **М. М. Дронь**; д-р техн. наук, проф. **О. С. Каіров**; д-р фіз.-мат. наук, проф. **В. І. Кузьменко**; д-р техн. наук, проф. **В. М. Левін**; д-р фіз.-мат. наук, проф. **В. В. Лобода**; д-р техн. наук, проф. **А. І. Маневич**; д-р техн. наук, проф. **Н. І. Ободан**; д-р фіз.-мат. наук, проф. **А. М. Пасічник**; д-р техн. наук, проф., чл.-кор. НАН України **О. В. Пилипенко**; д-р фіз.-мат. наук, проф. **А. К. Приварников**; д-р фіз.-мат. наук, проф. **О. А. Приходько**; д-р фіз.-мат. наук, проф. **С. О. Смирнов**; д-р фіз.-мат. наук, проф. **П. О. Стеблянко**; д-р фіз.-мат. наук, проф. **Ю. А. Черняков**

Рецензенти: д-р техн. наук, проф. **В. О. Бараненко**.
д-р фіз.-мат. наук, проф. **О. А. Зевін**,

Адреса редколегії:

49010, м. Дніпропетровськ, пр. Гагаріна, 72,

Дніпропетровський національний університет ім. Олеся Гончара, корп. 3, кімн. 41.,
e-mail: compmech@ua.fm

Свідоцтво про державну реєстрацію друкованого засобу масової інформації
КВ № 8831 від 03.06.2004 р.

ISSN 2079-536X

© Дніпропетровський національний університет імені Олеся Гончара, 2012.

© Автори статей, 2012

УДК 519.876.5

Р. В. Киричевский, канд. техн. наук, В. Ю. Донченко

ЧИСЛЕННАЯ СХОДИМОСТЬ РЕШЕНИЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ТРЁХМЕРНЫХ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ С ЛИНЕЙНОЙ АППРОКСИМАЦИЕЙ В ПРОГРАММНОМ КОМПЛЕКСЕ МИРЕЛА+

Рассматривается задача теории упругости в линейной постановке с использованием трёхмерных конечных элементов с линейной аппроксимацией. Предложенный способ подбора сетки разбиения основан на работе САПР МИРЕЛА+. Полученное решение представлено к сравнению с известными результатами в виде таблиц.

Ключевые слова: МИРЕЛА+, теория упругости, дискретизация.

Программный комплекс МИРЕЛА+ является системой программ, основанной на методе конечных элементов, предназначенной для расчета конструкций и разработанной для использования на автоматизированных рабочих местах (АРМ) под управлением операционной системы Windows-2000, Windows NT, WindowsXP [1]. Программа отличается использованием высокоэффективных расчетных алгоритмов и удобством для пользователя. Все это позволяет инженеру выполнять необходимые расчеты непосредственно на своем рабочем месте.

Конечноэлементная модель конструкции формируется исходя из физических представлений о работе конструкции и ее частей. Геометрия конечноэлементной модели задается координатами узлов. Связи узлов между собой отражают структуру расчетной схемы – топологию.

Для описания конструкции в МИРЕЛА+ вводятся две системы координат – базисная декартова система координат $z^{k'}$, в которой задаются геометрические координаты узлов, поля нагрузок и граничных условий и местная криволинейная система координат x^i , в которой задается нумерация и сеточные координаты узлов.

Все узлы и элементы нумеруются возрастающей последовательностью целых чисел рис. 1. Номера узлов каждого элемента образуют топологическую информацию для данного элемента.

Независимо от вида нагрузки (распределенная, сосредоточенная, поверхностная, объемная) и ее физической основы (статическая, инерционная, весовая, температурная и т. п.), она считается в конечном счете приложенной в узлах расчетной схемы (узловые нагрузки - усилия и моменты).

На конечноэлементную модель должны быть наложены граничные условия в виде закреплений и величин заданных перемещений узлов.

Комплекс МИРЕЛА+ использует вариант метода конечных элементов (МКЭ) позволяющий получать матрицы жесткости конечных элементов (КЭ), которые учитывают жесткие смещения, эффект ложного сдвига и с абую сжимаемость эластомеров. Этот вариант МКЭ, предложенный В. В. Киричевским в [2], относится к гибриднему методу, так как включает тройную

аппроксимацию для компонент перемещений, деформаций и функции изменения объема. Процесс вычисления коэффициентов матрицы жесткости КЭ так организован, что все коэффициенты разложения деформаций и функций изменения объема выражаются через коэффициенты аппроксимации перемещений. Это позволяет получить уравнения, аналогичные уравнениям прямого МКЭ, в форме метода перемещений, сохраняющие все его преимущества по сравнению со смешанными формулировками.

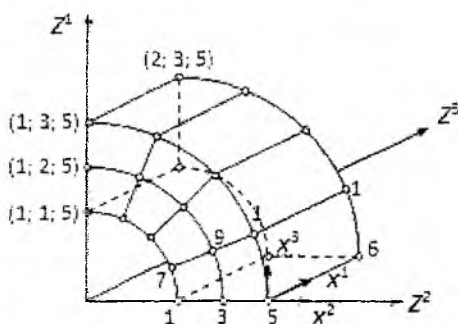


Рис. 1 – Пространственная и сеточная нумерация узлов

Система линейных алгебраических уравнений, построенная таким образом, симметричная и имеет ленточный вид

$$[K^{ij}] \{u_j\} = \{P^i\}. \quad (1)$$

Задача блока – это решение системы (1) модифицированным блочным методом Гаусса для ленточных, симметричных матриц, либо другим точным, приближенным методом (комплекс допускает расширение).

Результатом решения системы (1) является вектор узловых перемещений $\{u_j\}$. По вычисленному вектору узловых перемещений $\{u_j\}$ определяются компоненты тензора деформаций ε_{ij} в центрах КЭ в декартовой системе координат в соответствии с формулой

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (c_j^m \nabla_i u_m + c_i^m \nabla_j u_m), \quad (2)$$

где c_j^i – компоненты тензора преобразования координат.

Для линейного элемента градиенты деформаций $\Delta_i u_j$ вычисляются в центре КЭ через узловые перемещения $U(N, I)$ по формулам:

$$\Delta_i U_1 = \frac{1}{4}(U(2,i) + U(4,i) + U(6,i) + U(8,i) - U(1,i) - U(3,i) - U(5,i) - U(7,i));$$

$$\Delta_i U_2 = \frac{1}{4}(U(3,i) + U(4,i) + U(7,i) + U(8,i) - U(1,i) - U(2,i) - U(5,i) - U(5,i)); \quad (3)$$

$$\Delta_i U_3 = \frac{1}{4}(U(5,i) + U(6,i) + U(7,i) + U(8,i) - U(1,i) - U(2,i) - U(3,i) - U(4,i)).$$

Компоненты тензора напряжений также вычисляются в центре КЭ по зависимостям:

$$\sigma^{11} = 2\mu\varepsilon_{11} + \lambda\theta; \quad \theta = \frac{\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}}{3}; \quad \sigma^{22} = 2\mu\varepsilon_{22} + \lambda\theta; \quad \sigma^{33} = 2\mu\varepsilon_{33} + \lambda\theta;$$

$$\sigma^{12} = \sigma^{21} = 2\mu\varepsilon_{12}; \quad \sigma^{13} = \sigma^{31} = 2\mu\varepsilon_{13}; \quad \sigma^{23} = \sigma^{32} = 2\mu\varepsilon_{23}. \quad (4)$$

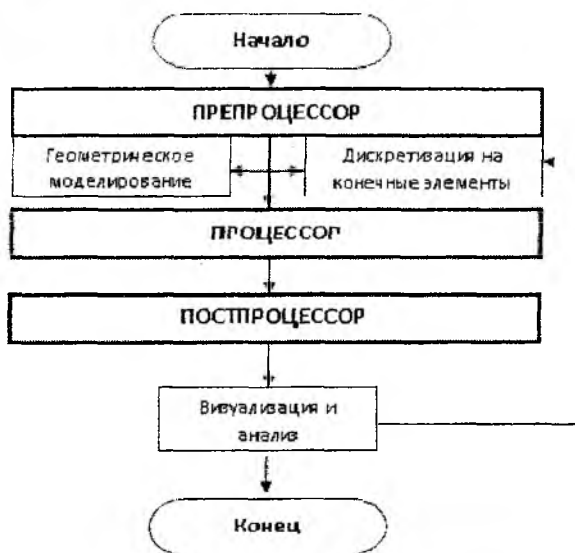


Рис. 2 – Общая схема автоматизации анализа напряженно-деформированного состояния конструкции в САПР

На первом этапе задается произвольная дискретизация на КЭ и получаем необходимые параметры выходных данных. Далее они сравниваются с уже имеющимися и если результаты не совпадают с определенной точностью, подпрограмма возвращает ход решения к программе данных, где размер КЭ уменьшается вдвое, вчетверо и т. д. одинаково по каждой оси координат. Поэтому одной особенностью входных данных является – заранее выбранная крупная дискретизация на КЭ. Алгоритм представлен на рис. 2.

Толстая круглая плита защемленная по контуру. 1. *Название задачи.* Толстая, жестко защемленная по контуру плита круглая в плане, выполненная из изотропного линейно упругого материала, при действии одностороннего равномерно распределенного давления, (рис. 2) [3].

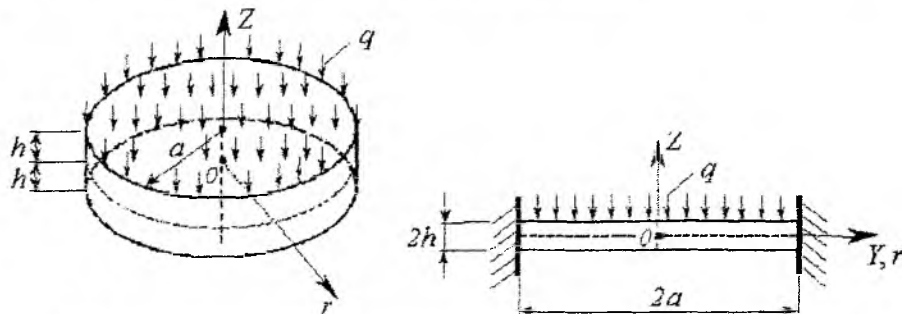


Рис. 3 – Толстая, жестко защемленная по контуру плита круглая в плане, выполненная из изотропного линейно упругого материала, при действии одностороннего равномерно распределенного давления

2. *Формулировка задачи.* Толстая, жестко защемленная по контуру плита круглая в плане, выполненная из изотропного линейно упругого материала, при действии одностороннего равномерно распределенного давления. Определить вертикальные перемещения в центре плиты, нормальные напряжения σ_r , σ_z в центре плиты и нормальные напряжения σ_r^* в точках защемленных граней для $Z/h = 1,0; 0,5; 0,0; -0,5$ и $-1,0$ при $\gamma = a/h = 2$ и 5 .

3. *Исходные данные.* $E = 1,0 \cdot 10^7$ кПа – модуль упругости плиты; $\mu = 0,25$ – коэффициент Пуассона плиты; $2r = 20$ м – диаметр плиты; $2h = 10$ м и 4 м – толщина плиты; $q = 10$ кН/м².

4. *Конечноэлементная модель.* Рассматривались расчетные схемы состоящие только из объемных КЭ размером $0,5 \times 0,5 \times 0,5$ м для плиты толщиной 10 м (по толщине плиты 20 КЭ) и КЭ размером $0,5 \times 0,5 \times 0,5$ м для плиты толщиной 4 м (по толщине плиты 8 КЭ).

Результаты решения. В табл. 1 – 4 представлено сравнение результатов расчета для перемещений и нормальных напряжений с эталонным решением для случая $\gamma = a/h = 2$. В табл. 5 – 8 представлено сравнение результатов расчета для перемещений и нормальных напряжений с эталонным решением для случая $\gamma = a/h = 5$. В табл. 1 – 5 приведены безразмерные значения wE/qa , в табл. 2 – 6 приведены безразмерные значения σ_z/q табл. 3 – 7 приведены безразмерные значения σ_r/q , а в табл. 4 – 8 приведены безразмерные значения σ_r^*/q . Как следует из этих таблиц, для всех точек, имеем хорошее соответствие и перемещений и напряжений с

аналитическим решением. Следует отметить, что эталонное решение [3] является приближенным. Это хорошо видно для напряжений σ_z , на верхней поверхности плиты это напряжение должно равняться q , а на нижней поверхности — 0. Результаты, полученные в МИРЕЛА+ ближе к этим значениям, чем эталонное решение.

Таблица 1 — $\gamma = a/h = 2$, wE/qa

Z/h	МИРЕЛА+	Эталон	Отклонение
1,0	-1,149	-1,156	0,994
0,5	-0,991	-0,990	1,001
0,0	-0,846	-0,848	0,998
-0,5	-0,760	-0,760	1,000
-1,0	-0,704	-0,709	0,993

Таблица 2 — $\gamma = a/h = 2$, σ_z/q

Z/h	МИРЕЛА+	Эталон	Отклонение
1,0	-0,997	-1,113	0,896
0,5	-0,861	-0,839	1,026
0,0	-0,532	-0,534	0,996
-0,5	-0,176	-0,180	0,978
-1,0	-0,005	0,096	—

Таблица 3 — $\gamma = a/h = 2$, σ_r/q

Z/h	МИРЕЛА+	Эталон	Отклонение
1,0	-0,926	-1,036	0,894
0,5	-0,409	-0,395	1,035
0,0	-0,120	-0,131	0,916
-0,5	0,125	0,133	0,940
-1,0	0,572	0,531	1,077

Таблица 4 — $\gamma = a/h = 2$, σ_r^*/q

Z/h	МИРЕЛА+	Эталон	Отклонение
1,0	2,377	2,432	0,977
0,5	-0,165	-0,282	0,585
0,0	-0,200	-0,164	1,220
-0,5	-0,216	-0,241	0,896
-1,0	-1,231	-1,403	0,877

Таблица 5 — $\gamma = a/h = 5$, wE/qa

Z/h	МИРЕЛА+	Эталон	Отклонение
1,0	-4,506	-4,558	0,989
0,5	-4,536	-4,575	0,991
0,0	-4,513	-4,543	0,993
-0,5	-4,451	-4,489	0,991
-1,0	-4,337	-4,382	0,990

Таблица 6 – $\gamma = a/h = 5$, σ_z/q

Z/h	МИРЕЛА+	Эталон	Отклонение
1,0	-0,975	-1,107	0,881
0,5	-0,830	-0,935	0,888
0,0	-0,500	-0,488	1,025
-0,5	-0,170	-0,116	1,466
-1,0	-0,025	0,108	—

Таблица 7 – $\gamma = a/h = 5$, σ_r/q

Z/h	МИРЕЛА+	Эталон	Отклонение
1,0	-3,338	-3,634	0,919
0,5	-1,642	-1,499	1,095
0,0	-0,156	-0,151	1,033
-0,5	1,329	1,202	1,106
-1,0	3,026	3,209	0,943

Таблица 8 – $\gamma = a/h = 5$, σ_r^*/q

Z/h	МИРЕЛА+	Эталон	Отклонение
1,0	6,108	5,939	1,028
0,5	1,265	1,544	0,819
0,0	-0,217	-0,268	0,810
-0,5	-1,664	-1,803	0,923
-1,0	-5,708	-5,866	0,973

Комплекс программ МИРЕЛА+ основан на теории механики сплошной среды, применение которой, как показывает практика строительства, машиностроения, и других отраслей промышленности позволяет правильно определить напряженно-деформированное состояние и другие параметры сложных пространственных конструкций [4].

Применяемые в МИРЕЛА+ математические методы решения ранее прошли всестороннюю апробацию, и их использование не вносит в расчет моделей существенных погрешностей [5].

Именно надежность и пригодность существующих программ комплекса ко многим типам задач на основе метода конечных элементов, позволяют значительно сократить расчетное время сложных инженерных конструкций.

Приведенный тестовый пример и его сравнение с аналитическим решением и экспериментальными данными, свидетельствуют о достоверности и точности расчетов, выполняемых с использованием МИРЕЛА+.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ССЫЛКИ

1. *Киричевский В. В.* Метод конечных элементов в вычислительном комплексе «МИРЕЛА+» / [В. В. Киричевский, Б. М. Дохняк, Ю. Г. Козуб, С. И. Гоменюк, Р. В. Киричевский, С. Н. Гребенюк]. – К.: Наук. думка, 2005. – 403 с.
2. *Киричевский В. В.* Обобщение моментной схемы конечных элементов для исследования конструкций из слабосжимаемых эластомеров / В. В. Киричевский // Проблемы прочности. – 1986. – № 11. – С. 105–110.
3. *Лисицын Б. М.* Расчет защемленных плит в постановке пространственной теории упругости / Б. М. Лисицын // Прикладная механика. – 1970. – Т. 6. – Вып. 5. – С. 18–23.

4. **Толок В. А.** Метод конечных элементов: теория, алгоритмы, реализация / [В. А. Толок, В. В. Киричевский, С. И. Гоменюк, С. Н. Гребенюк, Д. П. Бувайло]. – К. : Наук. думка, 2003. – 316 с.

5. **Киричевский В. В.** Метод конечных элементов в механике эластомеров / В. В. Киричевский. – К. : Наук. думка, 2002. – 655 с.

*Луганский национальный университет
имени Тараса Шевченко,
Луганск, Украина*

Поступила в редколлегию 02.03.2012

Р. В. Киричевський, канд. техн. наук, В. Ю. Донченко

ЧИСЕЛЬНА ЗБІЖНІСТЬ РІШЕНЬ З ВИКОРИСТАННЯМ ТРИВИМІРНИХ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ З ЛІНІЙНОЮ АПРОКСИМАЦІЄЮ В ПРОГРАМНОМУ КОМПЛЕКСІ MIRELA+

Розглядається задача теорії пружності в лінійній постановці з використанням тривимірних скінченних елементів з лінійною апроксимацією. Запропонований спосіб підбору сітки розбиття заснований на роботі САПР MIRELA+. Отримане рішення представлено до порівняння з відомими результатами у вигляді таблиць.

Ключові слова: MIRELA+, теорія пружності, дискретизація.

R. V. Kirichevskiy, Associate Professor, V. Yu. Donchenko

NUMERAL CONVERGENCE OF DECISIONS WITH THE USE OF THREE-DIMENSIONAL EVENTUAL ELEMENTS WITH LINEAR APPROXIMATION IN A PROGRAMMATIC COMPLEX MIRELA+

The task of theory of resiliency is examined in the linear raising with the use of three-dimensional eventual elements with linear approximation. The offered method of selection of net of breaking up is based on work CAD MIRELA+. The got decision is presented to comparing to the known results as tables.

Keywords: MIRELA+, theory of resiliency, discretisation.