Міністерство освіти і науки, молоді та спорту України

Державний заклад
«Луганський національний університет
імені Тараса Шевченка»

О. В. ПАНІШЕВА

ЗБІРНИК ЗАДАЧ З ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ ТА МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ

Луганськ

ДЗ «ЛНУ імені Тараса Шевченка»

2012

УДК 519.2(075.8)
ББК 22.17я73
П16

Р е ц е н з е н т и:

Димарський Я. М. – доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри інформатики Луганського державного університету внутрішніх справ імені Є. О. Дідоренка.

Іє О. М. – кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри математичного аналізу та алгебри Луганського національного університету імені Тараса Шевченка.

Михайлова І. О. – кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри теоретичної і прикладної інформатики Луганського національного університету імені Тараса Шевченка.

Панішева О. В.
П16 Збірник задач з теорії ймовірностей та математичної статистики / авт.-укл. О. В. Панішева ; Держ. закл. "Луган. нац. ун-т імені Тараса Шевченка". – Луганськ : Вид-во ДЗ "ЛНУ імені Тараса Шевченка", 2012. – 228 с.

Навчальний посібник призначений для підготовки до занять з дисципліни "Теорія ймовірностей та математична статистика" й містить основні теоретичні відомості, приклади розв'язання типових задач, які сприяють розумінню теми, тренувальні вправи та завдання для індивідуальної роботи.

Збірник може бути корисним студентам технічних спеціальностей у процесі підготовки до занять з теорії ймовірностей, викладачам, які викладають цю дисципліну, тим, хто цікавиться питаннями можливості використання теорії ймовірностей та статистики на практиці.

УДК 519.2(075.8)
ББК 22. 17я73

Рекомендовано до друку науково-методичною радою Луганського національного університету імені Тараса Шевченка (протокол № 8 від 14 березня 2012 року)

© Панішева О. В., 2012
© ДЗ "ЛНУ імені Тараса Шевченка", 2012

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА

Теорія ймовірностей та математична статистика є тією наукою, на методи і результати якої спираються інші прикладні науки. Її методи широко використовуються у різноманітних галузях: теорії надійності, теорії масового обслуговування, в теоретичній фізиці, у геодезії, астрономії, теорії автоматичного керування, загальній теорії зв'язку та багатьох інших теоретичних та прикладних науках. Теорія ймовірностей слугує також для обґрунтування математичної та прикладної статистики, яка, в свою чергу, використовується при плануванні та організації виробництва, при аналізі технологічних процесів, контролі якості продукції та для багатьох інших цілей. Саме тому знання основ теорії ймовірностей та математичної статистики є необхідною складовою освіченості сучасної людини.

Оволодіти розрахунковим апаратом теорії ймовірностей та математичної статистики з метою його подальшого використання у задачах прикладної професійної спрямованості – одна з цілей вивчення цієї дисципліни у вищих навчальних закладах. Досягнення цієї цілі відбувається через розв'язання студентами різного типу задач, які зібрані у даному збірнику.

Даний посібник адресується студентам спеціальності 6.040302 «Інформатика» та інших технічних спеціальностей. Його написано у відповідності з типовою навчальною програмою Міністерства освіти і науки, молоді та спорту України для студентів технічних спеціальностей вищих навчальних закладів. У збірнику використано матеріали, що пройшли практичну перевірку при викладанні теорії ймовірностей в педагогічних, економічних і класичних вищих навчальних закладах для різних форм навчання. Прийняті в посібнику позначення відповідають позначенням, які наводяться в більшості підручників і посібників з теорії ймовірностей та статистики.

Мета даного посібника – допомогти студентам у засвоєнні основних понять курсу теорії ймовірностей та математичної статистики через розв'язання практичних завдань. Посібник призначено для організації навчальної діяльності студентів під час проведення практичних занять та при організації їх самостійної роботи, що обумовило структуру збірника.

Кожний параграф складено за такою схемою: наведено основні теоретичні відомості, запропоновано зразки розв'язання завдань, надано перелік тренувальних вправ, які призначені для розв'язання в аудиторії. Ці вправи різного рівня складності. Серед них є як типові завдання, зразки розв'язання яких наведені у тексті, так і нестандартні, завдання творчого та прикладного характеру. Окремі параграфи завершуються варіантами індивідуальних завдань, що призначені для самостійного розв'язання студентами. Варіанти майже не відрізняються один від одного за рівнем складності, що дозволяє викладачеві об'єктивно оцінити самостійну роботу студентів. Для узагальнення та систематизації знань студентів та організації їх підготовки до модульних робіт призначені задачі, розміщені наприкінці розділів. До окремих задач надано відповіді і вказівки з розв'язання. Необхідні для виконання розрахунків таблиці наведено у додатках. У першому розділі основну увагу приділено подіям та обчисленню їх ймовірностей, у другому – випадковим величинам та їх числовим характеристикам, третій розділ присвячено основним поняттям математичної статистики.

Сподіваємось, що оволодіння курсом теорії ймовірності й статистики допоможе розв'язувати і життєві задачі: обирати найкращий з можливих варіантів, оцінювати ступінь ризику, шанси на успіх, співвідносити ймовірне і достовірне, справедливість і несправедливість у іграх тощо.

СТРУКТУРА КУРСУ

Модуль А. Основні поняття теорії ймовірностей

Тема 1. Предмет та задачі курсу теорії ймовірностей. Історія виникнення науки. Події. Види подій (детерміновані, випадкові, невизначені). Основні поняття теорії ймовірностей.

Тема 2. Алгебра подій. Операції над подіями. Діаграми Ейлера-Вена.

Тема 3. Різні підходи до визначення ймовірності події. Класичне, геометричне та статистичне визначення імовірності. Властивості ймовірності.

Тема 4. Застосування комбінаторики до обчислення ймовірності.

Тема 5. Сума та добуток подій. Теореми додавання ймовірностей. Умовна імовірність. Теорема множення ймовірностей. Незалежні події.

Модуль В. Дискретні випадкові величини

Тема 1. Формула повної ймовірності. Формули Байєса.

Тема 2. Схема Бернуллі. Формули Бернуллі. Локальна теорема Лапласа. Інтегральна теорема Лапласа. Формула Пуассона.

Тема 3. Імовірність відхилення відносної частоти від постійної ймовірності у схемі Бернуллі. Теорема Бернуллі

Тема 4. Випадкові величини. Види випадкових величин. Дискретні та неперервні випадкові величини. Ряд розподілу дискретної випадково величини.

Тема 5. Числові характеристики випадкових величин: математичне очікування, дисперсія, середнє квадратичне відхилення.

Модуль С. Неперервні випадкові величини

Тема 1. Неперервні випадкові величини.

Тема 2. Функція розподілу. Щільність ймовірності.

Тема 3. Основні закони розподілу та їх характеристики.

Тема 4. Нормальний розподіл.

Тема 5. Закон великих чисел. Нерівність Чебишева. Теорема Чебишева, її наслідки.

Модуль D. Елементи математичної статистики

Тема 1. Основні поняття вибіркової теорії. Генеральна сукупність. Вибірка.

Тема 2. Вибіркові характеристики. Центральні тенденції, міри варіації.

Тема 3. Варіаційний та статистичний ряд. Табулювання даних та обчислення частот.

Тема 4. Графічне представлення даних. Полігон частот, гістограма. Представлення даних за допомогою Excel.

РОЗДІЛ 1
ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ

1.1. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ

ОСНОВНІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

Випробування – реальний або мисленевий експеримент (який виконується за певної незмінної сукупності умов), результати якого піддаються спостереженню.

Подія – результат випробування. Будь-яка подія відбувається внаслідок випробування (експерименту, досліду).

Наприклад, випробування – підкидання монети, події: А – «поява герба», В – «поява цифри».

Серед усіх подій виділяють три класи: детерміновані, випадкові, невизначені.

Детерміновані події – ті, результат яких є визначеним. Випадкові – такі, результат яких залежить від випадку. Але не будь-яка подія, результат якої не можна передбачити – випадкова. Наприклад, перебіг війни, результат футбольного матчу не належать до випадкових. Тут не можна проводити багатократні спостереження за одних й тих самих умов, і хоч результат таких подій не може бути передбачений, такі події є невизначеними (на відміну від випадкових).

Отже, щоб випробування було випадковим, необхідна наявність трьох умов: їх можна провести багаторазово, вони проходять в приблизно однакових умовах і наслідки цих випробувань неоднозначні. Випадкові події – це будь-які наслідки випадкових випробувань.

У теорії ймовірностей розглядаються тільки випадкові події. Серед них виділяють такі види:

Достовірна (вірогідна) подія – подія, яка в результаті випробування неодмінно відбудеться (позначається літерою U).

Неможлива подія – подія, яка в даному випробуванні не може відбутись (позначається літерою V).

Випадкова подія – подія, яка в результаті випробування може відбутись, а може не відбутись. Випадкові події позначаються літерами A, B, C, D,... .

Елементарні події – події, які не можна розкласти на простіші.

Повною групою подій називається множина подій таких, що в результаті кожного випробування обов'язково повинна відбутися хоча б одна із них.

Попарно несумісні події – це події, дві з яких не можуть відбуватися разом.

Наприклад, попадання і промах при одному пострілі – це дві несумісні події.

Рівноможливі події – це такі події, кожна з яких не має ніяких переваг у появі частіше за іншу під час багаторазових випробувань, що проводяться за однакових умов.

Наприклад, поява цифр 1, 2, 3 4, 5, 6 при киданні грального кубика – рівноможливі події.

Можлива елементарна подія – це кожний із можливих результатів окремого випробування.

Простір елементарних подій – множина можливих елементарних подій, кожною з яких може закінчитись випробування. Якщо позначимо wi $(i = 1, 2,.., n)$ можливі елементарні події, то цю множину можна записати у вигляді $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\}$.

Простір може містити скінченну, зліченну або незліченну множину значень.

Події утворюють простір елементарних подій, якщо вони:

1) утворюють повну групу подій;
2) є несумісними;
3) є рівно можливими.

Принципи складання простору елементарних подій:

1. Умови досліду певною мірою ідеалізуються. Ті з них, які не мають суттєвого впливу на результат досліду, не враховуються.

2. Елементарні події повинні охоплювати всі можливі результату досліду.

3. Елементарні події бажано вибирати такі, щоб у досліді вони мали однакові можливості відбутися.

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

1. Серед подій вибрати детерміновані, випадкові, невизначені.
А – розмір деталі, яка виробляється на заводі, вийшов за стандартні розміри.
В – при температурі 1000^0С виявилися живі організми.
С – студент Іванов витримає іспит з теорії ймовірностей.
Д – Сашко одружиться на Марійці через 2 роки.

Розв'язання.

Якщо станки на заводі добре налагоджені, працюють в однакових умовах, то подія «розмір деталі вийшов за стандартні розміри» може як відбутися, так і не відбутися. Тут є можливість спостерігати стандартна чи ні деталь достатньо багато разів (теоретично - скільки завгодно). Тому подія А – випадкова.

При температурі 1000^0С усе живе гине і виявити живі організми неможливо. Так буде завжди. Тому подія В – детермінована.

Результат експерименту із складанням іспиту та одруженням неможливо передбачити, але і повторити ці експерименти двічі в однакових умовах неможливо. Отже, події С і Д не випадкові, хоч і невизначені.

2. Відокремте подію і випробування: підкидаємо гральну кістку, випадає двійка.

Розв'язання.

Випробування – підкидання гральної кістки, подія – випадання двійки.

3. Визначити тип подій:
А – день народження учня – 2 квітня.
В – тато, взявши участь у лотереї, виграє.
С – після четверга буде п'ятниця.
Д – черепаха навчиться говорити.

Розв'язання.

Події А та В – випадкові, С – достовірна, Д – неможлива.

4. Юнак придбав 1 лотерейний квиток. Розглянемо події А – білет виграв В – білет програв. Чи утворюють повну групу подій ці події?

Розв'язання.

Внаслідок випробування може відбутися хоча б одна з подій – виграш або програш. Тому ці події утворюють повну групу.

5. У Ганни в портфелі є 2 зошити в клітинку, 3 у звичайну лінійку та у косу лінійку. Дівчинка бере один зошит. Скласти простір елементарних подій.

Розв'язання.

Умовно позначимо зошити: у клітинку - 1кл, 2кл; у звичайну лінійку 1л, 2л, 3л.; у косу лінійку – 1к. Простір елементарних подій Е = {1кл; 2кл; 1л; 2л; 3л; 1к}.

6. В одній коробці є синій, зелений і червоний олівці, а в іншій – синій і зелений. Беруть по одному олівцю з кожної коробки. Скласти простір елементарних подій.

Розв'язання.

Умовно позначимо олівці залежно від їх кольору: синій – с, зелений – з, червоний – ч. Коробки умовно занумеруємо. Олівці, які беруть з першої коробки, записуватимемо першими, а з другої – другими. Тоді простір елементарних подій має склад: {сс, сз, чс, чз, зс, зз}.

7. У випробуванні – кидання грального кубика складіть повну групу подій.

Розв'язання.

У цьому випробуванні повну групу становлять події:

A_1 – «поява числа 1»;

A_2 – «поява числа 2»;

A_3 – «поява числа 3»;

A_4 – «поява числа 4»;

A_5 – «поява числа 5»;

A_6 – «поява числа 6»,

або події:

B_1 – «поява парного числа»;

B_2 – «поява непарного числа».

8. У змаганнях беруть участь автомобілі з команди «Динамо» під номерами 10, 12, 23 та з команди «Спартак» під номерами 4 і 15. Визначити сумісність таких подій:

А – переміг автомобіль з команди «Динамо», В – переміг автомобіль з команди «Спартак», С – переміг автомобіль з номером менше ніж 10.

Розв'язання.

Позначимо 10, 12, 23 – автомобілі з команди «Динамо», 4, 15 - автомобілі з команди «Спартак». Отже, можливі наслідки (елементарні події) Е = {10, 12, 23, 4,15}. Склад заданих в умові подій: A = {10, 12, 23}; B = {4,15}; C = {4}. Висновки: події A і B, A і C несумісні, оскільки не мають спільних елементарних подій, події B і C – сумісні, оскільки мають спільну елементарну подію.

9. В аудиторію ввійшла людина. Чи є сумісними події «в аудиторію ввійшла людина молодше 25 років» і «в аудиторію ввійшла дівчина»?

Розв'язання.

Ці події сумісні, тому що можуть відбуватися одночасно: в аудиторію може ввійти дівчина молодше 25 років.

ТРЕНУВАЛЬНІ ВПРАВИ

1. З'ясуйте, які події є детермінованими, випадковими, невизначеними.

1) Поява герба при підкиданні монети.
2) Збільшення довжини дроту при його нагріванні.
3) Перетворення води в лід при створенні температури, меншої від 0^0C.
4) Влучення в ціль при пострілі мисливця.
5) Виграш «Шахтаря» у грі з «Динамо».
6) Перемога «лівих» сил у революції.
7) Виникнення електричного струму при створенні різниці потенціалів на кінцях провідника.
8) Загибель живого організму при температурі вище 1000^0C.
9) Поява бракованого виробу на виробництві.
10) Утворення родини після двотижневого знайомства Ірини та Микити.
11) Фірма «А» переможе у конкурентній боротьбі фірму «В».
12) Парна кількість листків на зірваній вами у полі квітці.
13) Вступ абітурієнта А до Луганського національного університету.
14) Випадання сектору «приз» при обертанні рулетки у грі «Поле чудес».
15) Плавлення металу за температури 1000^0 C.

2. Відокремте події і випробування та запишіть результат у таблицю:

1) тягнемо екзаменаційний білет, випадає білет № 3;
2) дістаємо лампу з коробки, вона бракована;

3) набираємо навмання телефонний номер і чуємо голос знайомого;
4) відкриваємо поштову скриньку і знаходимо лист;
5) стріляємо і влучаємо в ціль;
6) вмикаємо світло, а лампочка перегорає;
7) виходите на вулицю, а назустріч вам йде слон;
8) отримання оцінки «відмінно» на іспиті;
9) однакові оцінки на іспиті з теорії ймовірностей у двох студентів.

Таблиця:

Випробування	Подія

3. (У) Наведіть приклади достовірних, неможливих та випадкових подій. Визначте тип наведених нижче подій.

A – два попадання при трьох пострілах;
B – навмання вибране трицифрове число не більше 1000;
C – випадання 12 очок при киданні двох гральних кубиків;
D – випадання цифри 3 при киданні монети;
E – випадання 13 очок при киданні двох гральних кубиків;
F – поява слова «мама» при випадковому наборі букв а, а, м, м;
M – чотири попадання при трьох пострілах;
N – поява на одній грані грального кубика числа 8;
P – собака розмовляє людським голосом;
O – потяг на станцію прийшов за розкладом;
Q – у Свердловську опівночі світить сонце;
L – у Києві опівдні світло;
J – ваша команда виявиться переможцем чемпіонату університету з волейболу;
H – вода при 100° С закипає;
G – після літа настане весна;
R – після п’ятниці буде неділя;
S – ти програєш партію в шахи.

4. Заповніть таблицю.

№	Випробування	Випадкова подія	Достовірна подія	Неможлива подія
1.	Підкидання грального кубика			
2.	Підкидання монети			
3.	Витягування кулі зі скриньки, де є чорні та білі кулі			

4.	Витягування двох гральних карт			
5.	Два постріли по мішені			

5. Розподілите представлені у таблиці події в 4 стовпчики:

Випадкові події: Достовірні : Неможливі: Невизначені:

№	Випробування	Подія
1.	Натискаємо на кнопку дверного дзвінка	Звук не пролунав
2.	Підкидання грального кубика	Випало два очки
3.	Юнак познайомився з дівчиною	Їхні дні народження в один день
4.	Створення низької температури	Вода перетворилася в лід
5.	Постріл	Влучення у ціль
6.	Охолодження тіла	Його об’єм збільшився
7.	Зроблено три постріли	Два влучення
8.	Підкидання грального кубика	Випало 7
9.	Підкидання 3 гральних кубиків	Набрали 19 очок
10.	Підкидання монети	Поява герба
11.	Купив лотерейний квиток	Виграв 10 гр.
12.	Узяв з вази яблуко	Яблуко солодке
13.	Доторкнувся до льоду	Одержав опік
14.	Від’ємне число піднесли у квадрат	Відповідь - число від’ємне
15.	Записали тризначне число	Число більше 1000
16.	Дістали карту з колоди	Карта бубнової масті
17.	Тягнемо екзаменаційний квиток	Випадає квиток № 3
18.	Набираємо телефонний номер	Чуємо дитячий голос
19.	М'яч підкидаємо нагору	М'яч падає на землю
20.	З цифр 3, 7, 5 склали тризначне число	Число ділиться на 3
21.	Повну склянка води перекидаємо догори дном	Вода виливається
22.	Узяв участь у безпрограшній лотереї	Нічого не виграв
23.	Дістаємо з коробки ялинкову іграшку	Іграшка розбита
24.	Підкидаємо десятикопієчну монету	Монета упала цифрою 5

25.	Грають 2 збірні команди з волейболу	Виграє команда 1 курсу

6. (У)Які події є попарно несумісними?

1) влучення і промах при двох пострілах;

2) поява 1 і 2 очок під час одного кидання грального кубика;

3) влучення і промах під час одного пострілу;

4) поява 3 і 4 очок при двократному підкиданні кубика;

5) дослід – підкидання монети. Події: А – поява герба, В – поява решки.

6) дослід – підкидання двох монет. Події: А – поява герба на першій монеті, В – поява решки на другій монеті;

7) дослід – 2 постріли по мішені. Події: А – жодного влучення, В – одне влучення, С – два влучення;

8) дослід – 2 постріли по мішені. Події: А – хоча б одне влучення, В – хоча б один промах;

9) дослід – підкидання грального кубика. Події: А – випало число більше ніж 3, В – випало парне число.

7. У коробці є по дві цукерки зі сливою, лимонною та абрикосовою начинкою. Складіть простір елементарних подій.

8. Чи утворюють повну групу такі множини подій:

1) дослід – підкидання двох монет. Події: А – поява герба на першій монеті, В – поява решки на другій монеті;

2) дослід – підкидання двох монет. Події: А – поява двох гербів, В – поява двох решок;

3) дослід – 2 постріли по мішені. Події: А – жодного влучення, В – одне влучення, С – два влучення;

4) дослід – 2 постріли по мішені. Події: А – хоча б одне влучення, В – хоча б один промах.

9. У скриньці знаходяться занумеровані кульки, однакові за розмірами. Під номерами 1; 2; 3 – сині, 4; 5 – білі, а 6; 7 – чорні. Визначте сумісність таких подій:

А – взяли кульку під парним номером;

В – взяли кульку з номером більш ніж 5;

С – взяли кульку синього кольору;

Д – взяли кульку чорного кольору;

Е – взяли кульку з простим числом.

10. У Кості є друзі: Ганна, Ваня й Толя – з першої школи, Ганна, Микола, Толя й Ніна – із сьомої школи. Повертаючись зі школи додому, Костя зустрів одного з друзів. Визначте сумісність подій:

А – зустрів друга із сьомої школи;
В – зустрів друга з першої школи;
С – зустрів друга – дівчину;
Д – зустрів друга – хлопця;
Е – зустрів Ганну.

11. В одній коробці є синій, зелений і червоний олівці, а в іншій – синій і зелений. Беруть по одному олівцю з кожної коробки. Визначте сумісність таких подій:
А – взяли олівці однакового кольору;
В – один з узятих олівців червоний;
С – один з узятих олівців синій;
Д – взяли олівці різних кольорів.

12. Визначте сумісність подій при підкиданні двох монет:
А – випали на обох монетах цифри;
В – випали герб і цифра;
С – випали однакові сторони в обох монетах;
Д – випав хоча б один герб.

13. Чи є події однаковоможливими події А та В:
1) дослід – підкидання симетричної монети. Події: А – поява герба, В – поява решки;
2) дослід – підкидання несиметричної (деформованої) монети. Події: А – поява герба, В – поява решки;
3) дослід – постріл у мішень. Події: А – влучення, В – промах.

14. Чи можна вважати рівноможливими при підкиданні кнопки такі події:
А – кнопка упаде шляпкою;
В – кнопка упаде гострим кінчиком?

15. Чи утворюють події А і В простір елементарних подій:
А – бутерброд упав маслом униз;
В – бутерброд упав маслом догори?
Яка з умов не виконана?

16. Наведіть приклади
1) трьох подій, які утворюють повну групу елементарних подій;
2) трьох подій, однаково можливих і несумісних, але які не утворюють повної групи;
3) двох подій, які утворюють повну групу, але не є однаково можливими.

17. У тесті з історії вказано 3 дати і сказано, що це дати трьох історичних подій. Учень не знає, коли відбулися ці події і називає дати навмання. Побудуйте простір елементарних подій досліду, який полягає в тому, що учень навмання вибрав дату кожної події.

ВАРІАНТИ ІНДИВІДУАЛЬНИХ ЗАВДАНЬ

Варіант1

1. У скриньці знаходяться 2 білі, 2 сині і 2 червоні кульки. Наугад вибирають 5 кульок. Визначте вид кожної з трьох подій:
1) серед витягнутих кульок є білі;
2) серед витягнутих кульок 3 білі;
3) серед витягнутих кульок 2 білі.

2. За умов попередньої задачі визначте, чи є сумісними події: А – «серед кульок є білі» та В – «серед кульок є червоні».

Варіант 2

1. У скриньці знаходяться 2 білі, 2 сині і 2 червоні кульки. Наугад вибирають 3 кульки. Визначте вид кожної з трьох подій:
1) серед витягнутих кульок є білі;
2) серед витягнутих кульок 3 білі;
3) серед витягнутих кульок 2 білі.

2. За умов попередньої задачі визначте, чи є сумісними події: А – «серед кульок є білі» та В – «усі кульки червоні».

Варіант 3

1. У скриньці знаходяться 3 білі, 3 чорні та 3 червоні кульки. Розглядають подію: «всі витягнуті кульки різних кольорів» Визначте тип цієї події, якщо вибрано наугад
1) 2 кульки;
2) 8 кульок;
3) 5 кульок.

2. За умов попередньої задачі визначте, чи є однаково можливими при витягуванні 2 кульок події А – «витягнуті кульки червоні» та В – «витягнуті кульки білі».

Варіант 4

1. У скриньці знаходяться 2 білі, 2 чорні та 2 червоні кульки. Розглядають подію: «всі витягнуті кульки різних кольорів». Визначте тип цієї події, якщо вибрано наугад
1) 2 кульки;
2) 6 кульок;
3) 3 кульки.

2. За умов попередньої задачі визначте, чи є сумісними події при витягуванні 2-х кульок: А – «серед витягнутих кульок є біла», В – «серед кульок є червона».

Варіант 5

1. У скриньці знаходяться 5 білих, 5 чорних та 5 червоних кульки. Розглядають подію: «всі витягнуті кульки різних кольорів». Визначте тип цієї події, якщо вибрано наугад
1) 3 кульки;
2) 10 кульок;
3) 14 кульок.
2. За умов попередньої задачі наведіть приклад подій, які утворюють повну групу.

Варіант 6

1. У скриньці знаходяться 3 білі, 3 чорні та 3 червоні кульки. Розглядають подію: «всі витягнуті кульки різних кольорів». Визначте тип цієї події, якщо вибрано наугад 5 кульок.
2. За умов попередньої задачі наведіть приклад подій, які утворюють простір елементарних подій.

Варіант 7

1. У скриньці знаходяться 3 білі, 3 чорні та 3 червоні кульки. Розглядають подію: «всі витягнуті кульки різних кольорів». Визначте тип цієї події, якщо вибрано наугад
1) 2 кульки;
2) 3 кульки;
3) 4 кульки.
2. Наведіть приклад рівноможливих подій за умов попередньої задачі.

Варіант 8

1. У скриньці знаходяться 3 білі, 3 чорні та 3 червоні кульки. Розглядають подію: «серед кульок є дві однакового кольору», Визначте тип цієї події, якщо вибрано наугад
1) 2 кульки;
2) 3 кульки;
3) 4 кульки.
2. За умов попередньої задачі наведіть приклад несумісних подій.

Варіант 9

1. З шухляди, у якій 16 білих і 8 чорних шкарпеток, наугад дістають 12. Яка з подій є достовірною:

1) серед витягнутих шкарпеток не всі одного кольору;
2) серед витягнутих шкарпеток є чорні;
3) серед витягнутих шкарпеток є білі.

2. За умов попередньої задачі визначте, чи є рівноможливими події А – «витягнута шкарпетка біла», В – «витягнута шкарпетка чорна».

Варіант 10

1. У кишені є по 15 монет 25 і 10 монет по 50 копійок. Навмання витягують 12. Яка з подій є неможливою:
1) серед витягнутих монет немає монет по 25 копійок;
2) серед витягнутих монет немає монет по 50 копійок;
3) усі витягнуті монети по 25 копійок.

2. За умов попередньої задачі наведіть приклад подій, які є несумісними.

Варіант 11

1. На аркуш із зошита в лінійку кидають навмання монету вартістю 5 коп. Яка з подій є неможливою:
1) монета перетнула 1 лінійку;
2) монета не перетнула жодної лінійки;
3) монета перетнула 2 лінійки;
4) кількість лінійок, які перетнула монета, не менша 3.

2. За умов попередньої задачі визначте, чи є сумісними події А та В, якщо А – «монета перетнула хоча б одну лінійку», В – «кількість лінійок, які перетнула монета, більше 1».

Варіант 12

1. На аркуш із зошита в лінійку кидають навмання монету вартістю 5 коп. Яка з подій є достовірною:
1) монета перетнула хоча б 1 лінійку;
2) монета не перетнула жодної лінійки;
3) монета перетнула 2 лінійки;
4) кількість лінійок, які перетнула монета, не менша 3.

2. За умов попередньої задачі визначте, чи утворюють простір елементарних подій події А та В, якщо А – «монета перетнула хоча б одну лінійку», В – «кількість лінійок, які перетнула монета, більше 1».

Варіант 13

1. У коробці лежать 3 пари однакових рукавичок. З неї навмання виймають кілька рукавичок. Розглядають події А – «усі рукавичку на ліву руку», В – «витягнуті рукавички на різні руки»,

C – «серед рукавичок є рукавичка на праву руку». Які з подій є достовірними, якщо навмання обрано:
1) 2 рукавички;
2) 4 рукавички;
3) 5 рукавичок.
2. За умов попередньої задачі визначте, які події утворюють простір елементарних подій, якщо навмання витягнуто 2 рукавички.

Варіант 14

1. У класі навчається 12 хлопчиків і 11 дівчаток. Обирають жеребкуванням чергових. Визначте тип події; серед чергових є дівчата», якщо на чергування обирають
1) 10 учнів;
2) 12 учнів;
3) 14 учнів.
2. За умов попередньої задачі визначте, чи є сумісними події A – «серед чергових є хлопець» та B – «серед чергових є дівчина».

Варіант 15

1. У казковому акваріумі плавають 30 рибок, серед яких 3 – чарівні. Визначте тип події «серед виловлених рибок є чарівна», якщо виловили
1) 3 рибки;
2) 27 рибок;
3) 28 рибок.
2. За умов попередньої задачі визначте тип події «усі виловлені рибки чарівні».

Варіант 16

1. Серед наведених нижче випробувань визначте ті, які не є випадковими:
1) олімпійські ігри;
2) грошова лотерея;
3) вступ до університету;
4) нагрівання води в чайнику.
2. Із лотерейного барабану виймають 1 білет. Які події утворюватимуть простір елементарних подій?

Варіант 17

1. У коробці лежать 4 кольорові та 10 простих олівці. Навмання беруть 5 олівців. Яка з подій є достовірною:
1) A – серед витягнутих олівців є хоча б один кольоровий;

2) В – серед витягнутих олівців є хоча б один простий;
3) С – усі витягнуті олівці – кольорові.

2. Наведіть приклади несумісних подій, пов'язаних з попереднім дослідом.

Варіант 18

1. У коробці лежать 4 кольорові та 10 простих олівці. Навмання беруть 10 олівців. Яка з подій є неможливою:
1) А – усі витягнуті олівці кольорові;
2) В – усі витягнуті олівці прості;
3) С – серед витягнутих олівців є кольорові;
4) Д – серед витягнутих олівців є прості.

2. Наведіть приклад достовірної події за умов попередньої задачі.

Варіант 19

1. У коробці лежать 4 кольорові та 10 простих олівці. Скільки олівців потрібно взяти навмання з коробки, щоб серед них було:
1) не менш ніж 2 простих;
2) не менш ніж 3 кольорових.

2. За умов попередньої задачі визначте, чи будуть сумісними події А – «серед олівців є прості» та В – «серед олівців є кольорові», якщо витягнуто навмання 5 олівців.

Варіант 20

1. У сумці лежать однакові за формою цукерки: 9 шоколадних і 6 мармеладних. Не дивлячись, виймають із сумки 8 цукерок. Визначити тип події «хоча б одна цукерка – шоколадна».

2. За умов попередньої задачі визначте, чи будуть сумісними події А – «серед цукерок є шоколадні» та В – «серед цукерок є мармеладні».

Варіант 21

1. У сумці лежать однакові за формою цукерки: 9 шоколадних і 6 мармеладних. Не дивлячись, виймають із сумки 8 цукерок. Визначити тип події «хоча б одна цукерка – мармеладна».

2. За умов попередньої задачі наведіть приклад несумісних подій.

Варіант 22

1. У сумці лежать однакові за формою цукерки: 9 шоколадних і 6 мармеладних. Не дивлячись, виймають із сумки 8 цукерок. Визначити тип події «усі цукерки – мармеладні».

2. За умов попередньої задачі наведіть приклад подій, які утворюють простір елементарних подій.

Варіант 23

1. У сумці лежать однакові за формою цукерки: 9 шоколадних і 6 мармеладних. Скільки цукерок потрібно взяти із сумки, щоб серед них напевно були шоколадні?
2. За умов попередньої задачі наведіть приклад достовірної, неможливої та випадкової події.

Варіант 24

1. У сумці лежать однакові за формою цукерки: 9 шоколадних і 6 мармеладних. Визначте тип події «серед витягнутих цукерок є мармеладні», якщо витягнули
   1) 2 цукерки;
   2) 8 цукерок;
   3) 10 цукерок.
2. Скільки цукерок потрібно витягнути із сумки, щоб серед них напевно були цукерки обох сортів?

Варіант 25

1. У сумці лежать однакові за формою цукерки: 9 шоколадних і 6 мармеладних. Визначте тип події «серед витягнутих цукерок є цукерки обох видів», якщо витягнули:
1) 5 цукерок;
2) 7 цукерок;
3) 12 цукерок;
2. Скільки цукерок потрібно витягнути із сумки, щоб серед них напевно були мармеладні?

1.2. ОПЕРАЦІЇ НАД ПОДІЯМИ

ОСНОВНІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

Сумою подій В і С називається подія А = В + С (або А = $B \cup C$) така, що при випробуванні відбувається принаймні одна з цих подій. Множину елементарних подій, що становлять подію А, дістають об’єднанням множин елементарних подій, що становлять події В і С. Аналогічно визначається сума (n > 2) подій.

Добутком подій В і С називається подія А = ВС (або А = $B \cap C$) така, що в результаті випробування відбувається як подія В, так і подія С. Інакше кажучи, добуток подій С і B

означає, що відбулися обидві події в даному випробуванні. Множина елементарних подій, що становлять подію А, визначається як переріз множин, що становлять події В і С. Аналогічно визначається добуток n подій($n > 2$).

Різницею подій В і С називається подія А = В – С (або А = В\С), така, що відбувається подія В і не відбувається подія С. Множина елементарних подій, що становлять подію А, містить елементарні події, що становлять В, виключаючи ті, при яких відбувається подія С.

Подія $\overline{A}$ називається ***протилежною*** до події А, якщо вона відбувається тоді і тільки тоді, коли подія А не відбуваєтеся. Читається – «не А».

Наприклад, якщо подія А – «попадання в ціль при пострілі», то подія $\overline{A}$ – «промах при пострілі».

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

1. Запишіть суму і добуток подій за підкидання грального кубика, якщо задані такі події:

А – випала грань із числом, меншим ніж 3;

В – випала грань із парним числом.

Розв'язання.

Можливі наслідки – це числа на гранях кубика Е = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

Подія А = {1, 2}, В = {2, 4, 6}.

Тоді сума $A + B = A \cup B = \{1, 2, 4, 6\}$, добуток $AB = A \cap B = \{2\}$.

Відповідь: А+В – випала грань з будь-яким з чисел 1, 2, 4, 6; АВ – випала грань з числом 2.

2. Запишіть суму та добуток подій А і В, якщо подія А – «перший стрілець влучив у ціль», подія В – «другий стрілець влучив у ціль».

Розв'язання.

Подія С = А + В – «у ціль влучив перший або другий учасник» = « у ціль влучив хоча б один з учасників».

Подія $C = A \cdot B$ – «у ціль влучили обидва учасники».

3. У коробці є кольорові олівці. З неї беруть 2 олівці. Напишіть подію, протилежну до А, якщо подія А

1) взяли олівці різних кольорів;

2) серед узятих олівців є синій;

3) не взяли жодного зеленого олівця.

Розв'язання.

1) $\overline{A}$ – взяли олівці однакового кольору.

2) $\overline{A}$ – обидва взяті олівці не сині.

3) $\overline{A}$ – взяли хоча б один зелений олівець.

ТРЕНУВАЛЬНІ ВПРАВИ

1. (У) Проводиться випробування – кидання двох монет. Розглядаються такі події:

А – випав герб на першій монеті;
В – випала цифра на першій монеті;
С – випав герб на другій монеті;
Д – випала цифра на другій монеті.
Що означають події
1)А + С; 2) В + Д; 3) А + Д; 4) В + С. 5) АС 6) ВД?

2. (У)По мішені проводиться два постріли. Розглядаються події: А – „попадання при першому пострілу ", В – „попадання при другому пострілі ". Що означають події $A + \overline{B}$; $\overline{A} + B$; $\overline{A} + \overline{B}$?

3. Вкажіть події, протилежні до подій:
1) А – випали два герба при підкиданні двох монет;
2) В – три попадання при трьох пострілах;
3) С – хоча б одне попадання при чотирьох пострілах;
4) Д – виграш одного гравця при грі в шахи.

4. Робітник виготовив n деталей. Нехай подія $A_i (i = 1, 2, ..., n)$ полягає в тому, що i-та деталь має дефект. Записати такі події:
1) жодна з деталей не має дефектів;
2) принаймні одна деталь має дефект;
3) лише одна деталь має дефект.

5. Прилад складається з двох блоків 1-го типу і трьох блоків 2-го типу. Події $A_k (k = 1, 2)$ означають, що працює k-й блок 1-го типу, а події $B_j (j = 1, 2, 3)$ – працює j-й блок 2-го типу. Прилад працює, якщо працює принаймні один блок першого типу і не менш як два блоки 2-го типу. Виразити подію C – «прилад працює» через події A_k і B_j.

6. Випробування полягає в тому, що навмання обирається натуральне число n. Розглядаються наступні події:
А – «n=2», В – «n ділиться на 2», С – «n ділиться на 3». Що означатимуть події: А + В, В + С, ВС, АВ, $\overline{B}$, В – С?
7. Розглянемо випробування: на числовій прямій наугад обираємо число x. Розглянемо події: А – «$x \geq 3$», В – «$x \leq 8$», С – «1<x<2». Записати події АВ, А+В, А – В, АС, $\overline{A}$, $\overline{C}$.
8. Три стрільця стріляють у ціль. Кожен робить 1 постріл. Розглянемо події:
A_1 – перший влучив у ціль;
A_2 – другий влучив у ціль;
A_3 – третій влучив у ціль.
Через ці 3 події за допомогою операцій над подіями виразити події:
А – хоча б один стрілок влучив у ціль;
В – тільки один стрілець влучив у ціль;
С – усі стрільці влучили у ціль;
Д – усі стрільці промахнулися.
9. З ящика, який містить білі, чорні та сині кульки, по черзі виймають 3 кульки. Розглядаємо події: Бi – «i-та кулька біла», Сi – « i-та кулька синя», Чi – «i-та кулька чорна».
Записати події :
А – усі кульки сині;
В – серед витягнутих кульок одна біла і 2 чорних;
С – вийняли хоча б 2 чорні кульки.
10. Гральну кістку кидають двічі**.** Аi – «при першому киданні випало i очків», B_i – «при другому киданні випало i очків». Виразити через події A_i та B_i події:
А – при одному з підкидань випало 3 очки, а при іншому – 2;
В – при обох підкиданнях випало по 4 очки;
С – при першому і другому підкиданні випала однакова кількість очків;
Д – сума очків, які випали при першому і другому підкиданні, дорівнює 10;
Е – при першому і другому підкиданнях випала різна кількість очків.
11. Члени авіамодельного гуртка запускають 2 моделі літаків. Позначимо через Ai – злетіла i-та модель. Запишіть події:
1) злетіли обидві моделі;

2) злетіла тільки одна модель;
3) жодна модель не злетіла;
4) злетіла перша модель;
5) не злетіла друга модель;
6) злетіла хоча б одна модель.

ВАРІАНТИ ІНДИВІДУАЛЬНИХ ЗАВДАНЬ

Варіант 1

Каналом зв'язку передаються послідовно 4 повідомлення, кожне з яких може бути передано правильно або викривлено. Нехай A_i означає подію, яка полягає в тому, що i-те повідомлення передано правильно.

Записати такі події:
1) B – усі повідомлення передано правильно;
2) C – хоча б одне повідомлення передано правильно.

Варіант 2

Прилад складається з трьох блоків 1-го типу та трьох блоків 2-го типу. Позначимо події: Ai – справний i-й блок 1-го типу; Bj – справний j-й блок 2-го типу. Прилад справний (подія C), якщо справний хоча б один блок 2-го типу і хоча б два блоки 2-го типу. Виразити подію C через події Ai та Bj.

Варіант 3

Судно має один кермовий пристрій, три котли та дві турбіни. Подія A означає справність кермового пристрою, Bi – справність i-го котла, Cj – справність j-ї турбіни. Судно кероване (подія Д), якщо справний кермовий пристрій, хоча б один котел і хоча б одна турбіна. Виразити Д через A, Bi, Cj.

Варіант 4

ВТК перевіряє партію з чотирьох виробів. Нехай Ai – подія, яка полягає в тому, що у i-го виробу виявлено дефект. Треба виразити через A_1, A_2, A_3, A_4 такі події:
1) хоча б у одного виробу виявлено дефект;
2) у жодного виробу не виявлено дефекту;
3) дефект виявлено у одного виробу.

Варіант 8

Робітник обслуговує 3 верстати. Позначимо через Ai подію – i-й верстат потребує уваги. Виразити через Ai такі події:

1) жоден верстат не потребує уваги робітника;
2) хоча б один верстат потребує уваги робітника;
3) два верстати потребують уваги робітника.

Варіант 9

Робітник обслуговує 3 верстати. Позначимо через Аі подію – «*і*-й верстат потребує уваги». Виразити через А*і* такі події:
1) усі верстати потребують уваги робітника
2) хоча б один верстат не потребує уваги робітника
3) хоча б два верстати потребують уваги робітника

Варіант 10

Каналом зв'язку передаються послідовно 4 повідомлення, кожне з яких може бути передано правильно або викривлено. Нехай А*і* означає подію, яка полягає в тому, що *і*-те повідомлення передано правильно. Записати такі події:
1) В – одне повідомлення передано правильно;
2) С – жодного повідомлення не передано правильно.

Варіант 11

Нехай А, В, С – три довільні події. Знайти вирази для подій, які полягають в тому, що з подій А, В, С:
1) відбулась лише подія В;
2) відбулись лише події А і С, а В не відбулась;
3) жодна з подій не відбулась.

Варіант 12

Нехай А, В, С – три довільні події. Знайти вирази для подій, які полягають у тому, що з подій А, В, С:
1) відбулись щонайменше дві події;
2) відбулась одна подія.

Варіант 13

Дослід полягає у послідовному витягуванні карток з числами від 1 до 10, розміщених у довільному порядку. Подія А – «з'ява картки з числом 5», подія В – «з'ява картки з числом 10», подія С – «з'ява картки з парним числом», подія Д – «з'ява картки числом, кратним 5». Що означають події Д·С та А+В?

Варіант 14

У скриньці лежать однакові за розміром катушки з нитками трьох кольорів: чорні, білі та коричневі. Зі скриньки взяли навмання 4 катушки ниток. Запишіть такі події:
1) хоча б дві катушки з чорними нитками;
2) усі катушки з білими нитками.

Варіант 15

У скриньці лежать однакові за розміром котушки з нитками трьох кольорів: чорні, білі та коричневі. Зі скриньки взяли навмання 4 котушки ниток. Запишіть такі події:

1) хоча б дві котушки з нитками однакового кольору;
2) усі котушки з чорними нитками;
3) серед котушок є котушки одного кольору.

Варіант 16

У скриньці лежать однакові за розміром котушки з нитками трьох кольорів: чорні, білі та коричневі. Зі скриньки взяли навмання 4 котушки ниток. Запишіть такі події:

1) хоча б три котушки з нитками одного кольору;
2) тільки одна котушка з білими нитками;
3) серед котушок є котушка з чорними нитками.

Варіант 17

У скриньці лежать однакові за розміром котушки з нитками трьох кольорів: чорні, білі та коричневі. Зі скриньки взяли навмання 4 котушки ниток. Запишіть такі події:

1) хоча б три котушки з нитками одного кольору;
2) тільки дві котушки з білими нитками;
3) серед кат ушок є котушка з білими нитками.

Варіант 18

У коробці 4 олівця кольорові, а інші 2 – прості. Навмання обирають 3 олівця. Запишіть події:

1) хоча б 2 олівці прості;
2) усі олівці прості;
3) серед олівців є кольоровий.

Варіант 19

Автоматичною лінією виготовлено *n* деталей. Подія А*i* полягає в ому, що *i*-та за порядком виготовлення деталь має найвищу якість Виразити через А*i* такі події:

1) хоча б одна деталь має найвищу якість;
2) одна деталь має найвищу якість.

Варіант 20

Верстат виготовив 4 деталі. Подія А*i* полягає в тому, що *i*–та за порядком виготовлення деталь має найвищу якість. Виразити через А*i* такі події:

1) усі деталі мають найвищу якість;
2) жодна деталь не має найвищої якості;

3) хоча б одна деталь має найвищу якість.

Варіант 21

Дослід полягає у киданні двох монет. Розглядають такі події: A – «поява герба на першій монеті»; B –«поява цифри на першій монеті»; C – «поява герба на другій монеті»; D – «поява цифри на другій монеті»; E – «поява хоча б одного герба»; F – «поява хоча б однієї цифри»; G – «поява двох гербів»; H – «поява двох цифр». Яким подіям цього списку рівносильні такі події:

1) A + C;   2) AC;   3) BD;   4) B + D ?

Варіант 22

По мішені роблять 3 постріли. Розглядають події A*i* – «влучення при *i*-му пострілі» і події $\overline{A}\,i$ – «промахи при *i*-му пострілі». Представити за допомогою A*i* та $\overline{A}\,i$ такі події:

1) A – усі три влучення;
2) B – усі три промахи;
3) C – хоча б одне влучення;
4) Д – хоча б один промах.

Варіант 23

Виділити повну групу несумісних подій у досліді з киданням одного грального кубика. Виразити через події цієї групи подію A – «випадання парного числа очок» і подію B – «випадання числа очок, кратного 3».

Варіант 24

Назвати протилежні для таких подій: A – «випадання двох гербів при киданні двох монет»; B – «поява білої кулі» при вийманні однієї кулі з урни, в якій 2 білі, 3 чорні та 4 червоні кулі; C – «три влучення з трьох пострілів».

Варіант 25

Протягом доби на станцію «Довжанська» прибуває 5 потягів. Позначимо через A*i* подію «*i*-й потяг прибув на станцію вчасно». Запишіть наступні події:

1) усі потяги прийшли на станцію вчасно;
2) тільки два потяги прибули вчасно;
3) хоча б один потяг прийшов вчасно;
4) вчасно прийшли не менше трьох потягів;
5) усі потяги запізнились.

1.3. КОМБІНАТОРИКА

ОСНОВНІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

Комбінаторика – розділ математики, який вивчає кількості сполук, які можна утворити з елементів деякої скінченної множини.

Перестановками з n елементів називаються сполуки, які складаються *з* n різних елементів, і які відрізняються одна від одної лише порядком розміщення елементів. ***Кількість*** усіх можливих перестановок з n елементів обчислюють за формулою: $P_n = n!$.

Розміщеннями без повторень з n елементів по m називаються сполуки, кожна з яких містить m різних елементів, взятих з даних n елементів, і які відрізняються одна від одної або складом елементів, або їх порядком, або і тим, і другим. ***Кількість*** усіх можливих розміщень без повторень з n по m обчислюють за формулою: $A_n^m = \dfrac{n!}{(n-m)!}$.

Розміщенням з повтореннями з n елементів по m називається будь-який кортеж довжини m, який складається з елементів множини М, в якому хоча б один елемент повторюється. Їх кількість обчислюється за формулою: $\overline{A_n^m} = n^m$.

Комбінаціями без повторень з n елементів по m називаються сполуки, кожна з яких містить m різних елементів, взятих з даних n елементів, і які відрізняються одна від одної хоча б одним елементом. Їх ***кількість*** обчислюється за формулою: $C_n^m = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$.

ПРИКЛАДИ РОЗВ’ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

1. Розв’язати рівняння: $C_{x-3}^2 = 21$.

Розв’язання.

Скористаймося формулою для обчислення числа комбінацій.

$$\frac{(x-3)!}{2!(x-3-2)!} = 21;$$

$$\frac{(x-3)!}{(x-5)!}=21;$$

$$\frac{(x-3)(x-4)(x-5)!}{2!(x-5)!}=21;$$

$(x$-3)$(x$-4) = 42;

x^2-7x -30 =0;

x_1 = 10; x_2= -3.

Оскільки комбінації розглядаються тільки на множині невід'ємних цілих чисел, то число -3 не є розв'язанням даного рівняння.

Відповідь:10.

2. Скільки двоцифрових чисел можна утворити з цифр 1, 2, 3, 4, не повторюючи їх у запису числа?

Розв'язання.

На першому місці можна записати будь-яку з чотирьох цифр – усього 4 можливості. На другому місці – будь-яку з трьох цифр, що залишилися – 3 можливості. Будь-яка цифра, що стоїть на першому місці, може комбінуватися з будь-якою цифрою на другому місці. Тому загальна кількість способів є $4\cdot 3=12$. Іншими словами, ми обчислили кількість розміщень без повторень з 4 елементів по 2:

$$A_4^2=\frac{4!}{2!}=4\cdot 3=12.$$

Відповідь: 12 чисел.

3. Скільки різних п'ятицифрових чисел можна записати за допомогою цифр 1, 2, 3, 4, 5 за умови, що жодна цифра в запису числа не повторюється?

Розв'язання.

Для числа є суттєвим порядок запису цифр. Крім того, усі цифри мають бути задіяні і не повторюватися. Отже, маємо справу з перестановками без повторень з 5 елементів. Їх кількість P_5 = 5! = 120.

Відповідь: 120 чисел.

4. Скількома способами можна скласти список з 8 студентів ?

Розв'язання.

Маємо перестановки з 8 елементів.

$$P_n=8!=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8=40320.$$

Відповідь: 40320 способами.

5. Скільки різних трицифрових чисел можна записати за допомогою цифр 1, 2, 3, 4, 5 за умови, що жодна цифра в запису числа не повторюється?

Розв'язання.

Тут є суттєвим порядок запису цифр. Але при цьому не всі цифри, а тільки які-небудь три з п'яти, входять до запису числа. Отже, маємо справу з розміщеннями без повторень з 5 елементів по 3.

Їхня кількість $A_5^3 = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{2\cdot 1} = 5\cdot 4\cdot 3 = 60.$

Відповідь: 60 чисел.

6. Потрібно виділити трьох з п'яти учнів на чергування по їдальні. Скількома способами це можна зробити?

Розв'язання.

У виборі учнів для чергування порядок вибору несуттєвий, адже немає різниці, в якому порядку вчитель викличе чергових: „Петренко, Сидоренко й Іванов" або "Сидоренко, Петренко й Іванов". Це одна й та сама трійка чергових. При цьому в кожному виборі задіяні три учні з п'яти. Отже, маємо справу з комбінаціями з 5 елементів по 3. Їх кількість $C_5^3 = \frac{5!}{3!\cdot 2!} = 10.$

Відповідь: 10 способами.

7. У шаховому гуртку 5 хлопців і 3 дівчини. Для зустрічі з гросмейстером прийшло 3 запрошення. Скількома способами можна розподілити запрошення так, щоб на зустріч потрапила хоча б одна дівчина?

Розв'язання.

1 спосіб.

„Хоча б одна дівчина" означає, що їх може бути одна, дві або три. Тоді запитання переформулюється так: „Скількома способами можна вибрати трьох осіб з 5 хлопців і трьох дівчат, щоб серед них була або 1 дівчина, або 2 дівчини, або 3 дівчини?"

Одну дівчину з трьох можна вибрати трьома способами і залишається вибрати ще двох хлопців з п'яти. Це можна зробити C_5^2 способами. Отже, всього $3C_5^2$ способів.

Дві дівчини з трьох можна вибрати C_3^2 способами і одного хлопця – п'ятьма способами. Разом $5C_3^2$ способів.

Три дівчини з трьох можна вибрати тільки одним способом. Тоді загальна кількість способів3 C_5^2 + 5 C_3^2 +1 = 46.

2 спосіб.

Трьох осіб з усіх членів гуртка можна вибрати C_8^3 способами. Тільки трьох хлопців можна вибрати C_5^3 способами. У всіх інших варіантах будуть присутні дівчата.

Отже, таких способів C_8^3 - C_5^3 = $\frac{8!}{3!5!} - \frac{5!}{2!3!} = 56 - 10 = 46$.

Відповідь: 46 способами.

8. З 10 тенісисток і 6 тенісистів складають 4 змішані пари. Скількома способами це можна зробити?

Розв'язання.

4 змішані пари – це 8 осіб: 4 тенісистки і 4 тенісиста. 4 тенісистки з 10 можна вибрати C_{10}^4 способами. 4 тенісиста з 6 можна вибрати C_6^4 способами. Тоді 8 осіб для утворення пар можна вибрати C_{10}^4 C_6^4 способами.

Полічимо, скількома способами можна з 8 осіб утворити 4 змішані пари: одного з тенісистів можна поставити у пару з будь-якою з чотирьох тенісисток, всього 4 способи; другого з тенісистів можна поставити у пару з будь-якою з трьох тенісисток, всього 3 способи; третього - у пару з будь-якою з двох тенісисток, всього 2 способи;для четвертого залишається тільки один спосіб стати у пару. Отже, всього $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4!$ способів утворення чотирьох пар з 8 осіб. А всіх способів утворити 4 змішані пари C_{10}^4 C_6^4 4!=75600.

Відповідь: 75600 способами.

9. Скількома способами можна розподілити уроки в шести класах між трьома вчителями, якщо кожен учитель викладає у двох класах?

Розв'язання.

Перший учитель може вибрати два класи з шести C_6^2 різними способами. Після вибору першого вчителя другий може вибрати два класи з чотирьох, що залишилася, C_4^2 різними способами. Тоді два вчителі можуть вибрати по два класи $C_6^2 \cdot C_4^2$ різними способами. Якщо вони зробили вибір, то третій учитель може взяти лише ті два класи, що залишились. Тому шукане число способів дорівнює $C_6^2 C_4^2 = 90$.

Відповідь: 90 способами.

10. Скільки семицифрових чисел можна записати, користуючись цифрами 2, 3, 5, при умові, що цифра 2 повторюється в кожному з чисел 3 рази, а цифри 3 і 5 – по два рази?

Розв'язання.

Шукане число, очевидно, є число різних перестановок з повтореннями з цифр 2, 3, 5, в яких цифра 2 повторюється в кожному з чисел 3 рази, а цифри 3 і 5 – по два рази. Тому воно дорівнює

$$\frac{7!}{3!2!2!} = \frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{3\cdot 2\cdot 1\cdot 2\cdot 1\cdot 2\cdot 1} = 210.$$

Відповідь: 210.

11. У підрозділі 60 солдатів і 5 офіцерів. Скількома способами можна виділити караул, який складає 3 солдатів і одного офіцера?

Розв'язання.

Трьох солдатів можна виділити:

$$C_{60}^3 = \frac{60!}{3!\cdot 57!} = \frac{60\cdot 59\cdot 58}{1\cdot 2\cdot 3} = 59\cdot 58\cdot 10 = 34220$$ способами.

Одного офіцера можна виділити: $C_5^1 = \frac{5!}{1!\cdot 4!} = 5$ способами.

Тоді за правилом добутку маємо:

$$C_{60}^3 \cdot C_5^1 = 34220\cdot 5 = 171100 \cdot$$

Відповідь: 171100 способами.

12. Скількома різними способами можна поділити 20 зошитів між трьома учнями?

Розв'язання.

Якщо один з учнів дістане a зошитів, другий b зошитів, третій c зошитів, то даний розподіл можна записати у вигляді такої комбінації з повтореннями:

$$\underbrace{11 1\ldots 1}_{a}\underbrace{2 2\ldots 2}_{b}\underbrace{3 3 3\ldots 3}_{c},$$ де $a + b + c = 20$.

Отже, число можливих розподілів дорівнює числу комбінацій з повтореннями з 3 елементів по 20 елементів, тобто

$$C_{3+20-1}^{20} = \frac{22!}{20!2!} = \frac{20!21\cdot 22}{20!\cdot 2} = 21\cdot 11 = 231.$$

13. Скільки п'ятизначних чисел можна скласти з цифр 0, 1, 2, 3, 4, якщо кожна цифра входить до складу числа тільки один раз?

Розв'язання.

Число не може починатися з 0. Тому шукана кількість п'ятизначних чисел дорівнює різниці

$P_5 - P_4 = 5! - 4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 - 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 120 - 24 = 96.$

Відповідь: 96 чисел.

ТРЕНУВАЛЬНІ ВПРАВИ

1. Обчислити:

1) $\dfrac{8!+9!}{7!}$;

2) $\dfrac{102!}{100!} - \dfrac{100!}{98!}$;

3) $\dfrac{(k+7)(k+6)}{5!} \cdot \dfrac{7!(k+5)!}{(k+7)!}$;

4) $\left(\dfrac{1}{n!} - \dfrac{n-2}{(n+1)!}\right)(n+1)!$;

5) $C_6^4 \cdot C_4^3 + C_4^3 \cdot C_3^2 - C_3^2 \cdot C_2^1$;

6) $A_5^4 \cdot P_4 - A_4^2 \cdot P_2 - A_5^2 \cdot P_3 - A_6^2 P_4$;

7) $\dfrac{A_5^3 - A_{10}^5}{P_2} + \dfrac{P_5}{P_2}$;

8) $\dfrac{A_5^2}{P_5} + \dfrac{A_{10}^5}{7P_5}$;

9) $C_{25}^{23} + C_{15}^{13} - 3C_{10}^7$;

10) $\dfrac{P_{10} - 9P_8}{P_9}$;

11) $\dfrac{P_m}{P_{m-2}}$.

2. Розв'язати рівняння

1) $C_x^2 \cdot P_2 = 56$;

2) $C_{x-3}^2 = 21$;

3) $P_{x+2} = 42A_x^5 \cdot P_{x-5}$;

4) $A_x^3 = 56x$;

5) $A_x^3 + 3A_x^2 = 0,5P_{x+1}$;

6) $\frac{P_{n+2}}{P_n} = 72$;

7) $A_x^4 = 6A_{x-2}^2$;

8) $C_x^{x-2} = 45$;

9) $\frac{P_{x+2}}{A_x^n P_{x-n}} = 132$;

10) $C_{2x+8}^{2x+3} = 13A_{2x+6}^3$;

11) $C_x^{x-3} + C_x^{x-2} = 15(x-1)$;

12) $C_{4x+9}^{4(x+1)} = 5A_{4x+7}^3$;

13) $C_{15}^x = C_{15}^{x+3}$;

14) $A_{x+3}^4 = 30A_x^2$.

3. Розв'язати нерівність:

1) $C_{2x}^7 > C_{2x}^5$;

2) $A_x^2 \le 12$.

4. Розв'язати систему рівнянь:

1) $\begin{cases} A_{m-2}^n : A_{m-2}^{n-1} = 3; \\ C_{m-2}^n : C_{m-2}^{n-1} = 0,6. \end{cases}$

2) $\begin{cases} A_{2x}^{n-2} : A_{2x}^{n-3} = 8; \\ C_{2x}^{n-2} : C_{2x}^{n-3} = 2\frac{2}{3}. \end{cases}$

5. Скількома способами можна оббити 6 стільців, якщо є 12 сортів оббивочного матеріалу?

6. Скільки двоцифрових чисел можна утворити з цифр 1, 2, 3, 4, не повторюючи їх у запису числа?

7. Скільки можна скласти двоцифрових чисел з трьох цифр?

8. Скільки трицифрових чисел можна утворити з множини цифр {1, 2, 4, 5, 6}? Скільки двоцифрових? Чотирицифрових?

9. Вінні-пух, П'ятачок і Сова збиралися на день народження до Віслюка Іа і почали вирішувати, в якому порядку вони будуть вручати подарунки. Скільки можливих варіантів є?

10. Скількома способами можна скласти список студентів групи, в якій налічується 25 студентів?

11. Студент може вибрати 2 факультативних курси з шести можливих. Скількома способами це можна зробити?

12. Потрібно розсадити 12 гостей на 12 стільців. Скількома способами це можна зробити?

13. Мама коза пішла по молоко, а семеро козенят почали гратися в „потяг". Але засперечалися, в якому порядку їм їхати. Тоді вони вирішили перепробувати всі можливі випадки. Скільки часу вони витратять, якщо кожен новий „потяг” буде „їхати” рівно одну хвилину?

14. У відділенні 12 солдатів. Скількома способами можна скласти наряд з 3 солдатів?

15. У спортивній команді 30 осіб. Скількома способами можна обрати олімпійську команду у складі 3 осіб?

16. З 8 членів профкому потрібно обрати голову, його зама, секретаря і культорга. Скількома способами це можна зробити?

17. У взводі 5 сержантів і 50 солдатів. Скількома способами можна скласти наряд з 1 сержанта і 3 солдатів?

18. Для преміювання трьох учнів купили 12 книжок. Скільки можливих способів розподілу премій по 4 книжки?

19. Скількома способами можна утворити з групи 12 чоловіків і 8 жінок комісію, в яку б входили 3 чоловіки і 2 жінки?

20. Із 8 троянд і 6 жоржин треба скласти букет так, щоб в ньому були 2 троянди і 3 жоржини. Скількома способами це можна зробити?

21. У групі 34 студенти. Скількома способами можна обрати президію для проведення зборів у складі 3 чоловік?

22. Скількома способами можна обрати на шахівниці 2 квадрати: білий і чорний? 2 білих квадрати?

23. З 12 слів чоловічого роду, 9 жіночого і 10 середнього потрібно обрати по 1 слову кожного роду. Скількома способами це можна зробити?

24. Із складу учасників конференції з 42 осіб потрібно обрати делегацію, яка складається з 4 осіб. Скількома способами це можна зробити?

25. Скількома способами можна утворити трикольоровий прапор, якщо є матеріал 6 різних кольорів ?

26. Четверо студентів складають іспит. Скількома способами можуть бути виставлені їм оцінки за чотирибальною шкалою, якщо жоден не отримає „незадовільно”?

27. 6 ящиків будівельних матеріалів доставляють на 5 поверхів будівництва. Скількома способами можна це можна зробити?

28. 15 занумерованих більярдних кульок розкладено по 6 лузам. Скількома способами можна це зробити?

29. У шаховому турнірі беруть участь 5 школярів і 15 студентів. Скількома способами можуть розподілитися місця, які зайняли школярі, якщо ніякі 2 учасники не набрали однакової кількості очок?

30. Скількома способами можна присудити 3 перші премії 3 людям, якщо кількість людей, що змагалися, дорівнює 10?

31. У турнірі беруть участь 6 учнів. Скількома способами можна розподілити місця між ними?

32. На виставці було 150 іграшок. Відвідувачу запропонували обрати будь-які 3. Скількома способами можна це зробити?

33. У класі 20 хлопчиків і 20 дівчаток. Для участі в концерті потрібно обрати танцювальний дует, дует співаків та дует гімнастів. Скількома способами можна це зробити?

34. З 10 різних книг обирають 4 для посилки. Скількома способами можна це зробити?

35. Скількома способами можна розподілити місця у турнірній таблиці 10 футбольних команд?

36. Скількома способами можна заповнити у карточці „Спортлото” 6 номерів з 49?

37. Необхідно укомплектувати екіпаж космічного корабля: командир, перший помічник, другий помічник, 2 бортінженери, лікар. Командирська трійка може бути обрана із 25 пілотів, бортінженери – із 20 спеціалістів, лікар – із 8 медиків. Скількома способами можна укомплектувати екіпаж?

38. Скількома способами можна розставити 12 білих і 12 чорних шашок на 32 чорних поля?

39. Скільки можливих комбінацій відповідей можна дати на 8 питань, якщо на кожне питання можна відповісти лише „так” чи „ні”?

40. Скільки різних музичних фраз можна скласти з 6 нот, якщо не допускати в одній фразі повторення звуків?(вважати, що піаніно має 88 клавіш).

41. На патрулювання містом військова частина виділила 20 солдатів і 4 офіцери. Скільки різних маршрутів можна з них утворити, якщо кожен маршрут складається з 5-ти солдатів та 1-го офіцера?

42. Скількома способами можна відібрати декілька книг з п’яти однакових підручників алгебри і чотирьох однакових підручників геометрії?

43. Скільки слів, що мають 2 голосних і 2 приголосних, можна утворити з літер слова «функція»?

ВАРІАНТИ ІНДИВІДУАЛЬНИХ ЗАВДАНЬ

Варіант 1

1. У пасажирському потягу 14 вагонів. Скількома способами можна розподілити за вагонами 14 провідників, якщо за кожним вагоном закріплено одного провідника?
2. Скількома способами можна вибрати чотири особи на чотири різні посади з дев'яти кандидатів на ці посади?
3. У команду з плавання повинні входити 4 юнаки і 2 дівчини. Скількома способами можна скласти таку команду, якщо є 8 юнаків і 5 дівчат?

Варіант 2

1. Скількома способами можна скласти список з 10 студентів?
2. Студенти групи, яка складається з 25 осіб, обмінялись один з одним фотографіями. Скільки всього було роздано фотографій?
3. На чергування вулицями міста прибуло 30 студентів і 5 викладачів. Скільки різних маршрутів можна з них утворити, якщо кожний маршрут складається з 6 студентів і 1 викладача?

Варіант 3

1. З цифр 0, 1, 2, 3 складені всі можливі чотиризначні числа так, що в кожному числі нема однакових цифр. Скільки одержано чисел?
2. Зі скількох різних елементів можна скласти 210 розміщень по 2 елемента в кожному розміщенні?
3. Скільки може бути випадків при виборі двох олівців і трьох ручок з 5 різних олівців і 5 різних ручок?

Варіант 4

1. З цифр 1, 2, 3, 4, 5 складені всі можливі п'ятизначні числа без повторення цифр. Скільки серед них таких, що починаються цифрою 3?
2. Розклад на один день містить 5 уроків. Визначити кількість таких розкладів при виборі з 11 дисциплін.
3. Скількома способами можна вибрати трьох чергових з групи в 20 студентів?

Варіант 5

1. З цифр 1, 2, 3, 4, 5 складені всі можливі п'ятизначні числа без повторення цифр у числі. Скільки серед цих чисел таких, які не починаються з цифри 5?

2. Яка частина з 10^7 семицифрових телефонних номерів складається з 7 різних цифр?

3. Чемпіонат, в якому беруть участь 16 команд, проводиться у два кола. Визначити число зустрічей, які треба провести.

Варіант 6

1. З цифр 1, 2, 3, 4, 5 складені всі можливі п’ятизначні числа без повторення цифр. Скільки серед них таких, які починаються з числа 54?

2. Група з 25 студентів обирає зі свого складу старосту, фізорга і культорга. Скількома способами це можна зробити?

3. У вазі стоять 10 червоних і 6 рожевих гвоздик. Скількома способами можна скласти букет з 5 квітів, якщо букет повинен містити 3 червоні та 2 рожеві гвоздики?

Варіант 7

1. З цифр 1, 2, 3, 4, 5 складені всі можливі п’ятизначні числа без повторення цифр у них. Скільки серед цих чисел таких, які не починаються з числа 34?

2. Скількома способами можна скласти чотирикольорові стрічки з семи стрічок різного кольору?

3. Скільки чоловік брало участь у шаховому турнірі, якщо відомо, що кожний учасник зіграв з кожним із решти по одній партії, а всього було зіграно 120 партій?

Варіант 8

1. Скільки різних п’ятизначних чисел можна скласти з цифр 0,1,2,3,4, не повторюючи цифр у числі?

2. Збори у складі 40 чоловік обирають голову, секретаря і трьох членів редакційної комісії. Скількома способами можна обрати ці 5 осіб?

3. Дана множина складається з шести елементів. Підрахувати число триелементних підмножин даної множини.

Варіант 9

1. Знайти кількість всіх тризначних чисел, які можна скласти з цифр 1,2,3, не повторюючи цифр у числі.

2. Скількома способами можна розмістити троє коней в чотирьох стійлах?

3. У школі зібралось 10 учнів. Кожний, хто приходить, рукостисканням вітається з тими, котрі уже зібрались. Визначити число рукостискань.

Варіант 10

1. Знайти кількість всіх тризначних чисел, які можна скласти з цифр 1, 3, 5, не повторюючи цифр у числі.
2. На станції 8 запасних колій. Скількома способами можна розмістити на них 3 поїзди?
3. Є 6 предметів. Скількома способами їх можна розподілити на дві групи так, щоб в одній групі було два предмети, а в іншій - чотири?

Варіант 11

1. Знайти кількість всіх п’ятизначних чисел, складених з цифр 1,2,3,4,5, якщо цифри у числі не повторюються.
2. Скільки треба взяти елементів, щоб число розміщень з них по чотири було в 12 разів більше числа розміщень з них по 2?
3. У шаховому турнірі беруть участь 8 студентів. Кожний учасник з кожним із решти повинен зіграти дві партії. Скільки всього партій повинні зіграти учасники турніру?

Варіант 12

1. Серед перестановок цифр числа 1234567 скільки таких, які починаються числом 123?
2. Зі скількох елементів можна скласти 56 розміщень по два елементи в кожному?
3. Скільки різних діагоналей можна провести в опуклому восьмикутнику?

Варіант 13

1. Серед перестановок цифр числа 1234567 скільки таких, які починаються з числа 67?
2. Число розміщень з n елементів по 2 в 7 разів більше числа розміщень з $(n-4)$ елементів по 2. Знайти n.
3. З 20 кандидатів у лічильну комісію необхідно вибрати трьох. Скількома способами можна це зробити?

Варіант 14

1. Серед перестановок цифр числа 1234567 скільки таких, які починаються з цифр 1,2,3, причому ці цифри розміщені в будь-якому порядку і займають перші три місця?
2. Визначити число n з умови : $A_{2n}^{3} = 20A_{n}^{2}$
3. З 10 троянд і 8 жоржин треба скласти букет так, щоб у ньому були 2 троянди і 3 жоржини. Скількома способами можна скласти такий букет?

Варіант 15

1. Серед перестановок цифр числа 1234567 скільки таких, які починаються з цифр 1 і 2, що стоять поруч?
2. Знайти m з умови : $A_{m-4}^2 + A_{m-3}^2 + A_{m-2}^2 = 20.$
3. З 10 юнаків, 8 хлопчиків і 5 дівчат треба скласти шахову команду, в яку входили б 4 юнаки, 1 хлопчик і 2 дівчини. Скількома способами це можна зробити?

Варіант 16

1. На книжковій полиці розміщені 10 томів. Скількома способами їх можна розставити так, щоб при цьому 1-й і 2-й томи стояли поруч?
2. Скількома способами можна обрати три особи на три різні посади з 10-ти кандидатів на ці посади?
3. У підрозділі 60 солдатів і 5 офіцерів. Скількома способами можна виділити караул, який складається з трьох солдатів і одного офіцера?

Варіант 17

1. Обчислити кількість всіх чотирицифрових чисел, які можуть бути утворені за допомогою цифр 1,4,2,5 без повторень цифр у числі.
2. Яка частина з 10^5 п'ятицифрових телефонних номерів складається з п'яти різних цифр?
3. Скільки різних акордів можна взяти на 6 вибраних клавішах рояля, якщо кожен акорд може містити від 3 до 6 звуків?

Варіант 18

1. Скількома способами можна розсадити за столом 5 гостей?
2. Яка частина з 10^6 шестицифрових телефонних номерів складається з шести різних цифр?
3. З 10 різних квіток треба скласти букет таким чином, щоб у нього входило не менше, як 2 квітки. Скільки способів існує для складання такого букета?

Варіант 19

1. Скільки п'ятизначних чисел, кратних 10, можна скласти з цифр 0,1,3,5,8,якщо цифри в числі не повторюються?
2. Група з 25 студентів обирає старосту і його заступника. Скількома способами це можна зробити?
3. Учень має по одній монеті вартістю 1, 2, 5, 10, 25, 50 копійок. Скількома способами він може ці монети розкласти у дві кишені?

Варіант 20

1. Скільки п'ятицифрових чисел, кратних 5, можна скласти з цифр 0,1,3,5,7, якщо цифри в числі не повторюються?
2. Група з 25 студентів обирає старосту, фізорга, культорга і трьох делегатів на конференцію. Скількома способами це можна зробити, якщо делегатом конференції може бути будь-який студент групи?
3. Скількома способами можна групу з 15 студентів розділити на дві частини так, щоб в одній частині було 4 студенти, а в іншій 11?

Варіант 21

1. Скільки п'ятицифрових чисел можна скласти з цифр 1,2,3,4,5,6?
2. Група з 25 студентів обирає старосту, фізорга, культорга і трьох делегатів на конференцію. Скількома способами це можна зробити, якщо в число делегатів конференції не обираються староста, фізорг і культорг?
3. Скільки шахистів брало участь у шаховому турнірі, якщо відомо, що кожен учасник зіграв з кожним із решти по одній партії, а всього було зіграно 210 партій?

Варіант 22

1. Знайти суму цифр всіх п'ятизначних чисел, які можуть бути складені з цифр 0,1,2,3,4, якщо цифри у числі не повторюються.
2. Яка частина з 10^4 чотирицифрових телефонних номерів складається з чотирьох різних цифр?
3. Скільки складених чисел можна утворити з простих дільників числа 3570, якщо кожне число містить тільки три простих дільники і дільники в числі не повторюються?

Варіант 23

1. Скільки чисел, що починаються з цифри 5, можна одержати, переставляючи всіма можливими способами цифри числа 19850?
2. Яка частина з 10^3 трицифрових телефонних номерів складається з трьох різних цифр?
3. Скільки складених чисел можна утворити з простих дільників числа 2310, якщо кожне число містить тільки два простих дільники і дільники в числі не повторюються?

Варіант 24

1. Скільки п’ятицифрових чисел, що закінчуються цифрою 9, можна одержати, переставляючи всіма можливими способами цифри числа 19058?
2. Скількома способами можна скласти трикольорові прапори з п’яти різних кольорів?
3. У групі 25 студентів. З їх складу треба обрати трьох делегатів на конференцію. Скільки є можливостей такого вибору?

Варіант 25

1. Скільки п’ятицифрових чисел можна скласти з цифр 1, 2, 3, 4, 5, в яких на другому місці стоїть цифра 5, причому цифри в числі не повторюються?
2. Скільки можна скласти різних двокольорових прапорів, маючи в своєму розпорядженні тканину восьми різних кольорів?
3. Скільки прямих ліній можна провести через 10 точок, розміщених так, що ніякі 3 з них не лежать на одній прямій?

1.4. КЛАСИЧНЕ ОЗНАЧЕННЯ ЙМОВІРНОСТІ

ОСНОВНІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

Імовірністю події А називається числова міра об’єктивної можливості настання цієї події в певному випробуванні. Позначається ймовірність як Р(А) (від лат. Probabilities-ймовірність)

Властивості ймовірності:

1. Імовірність достовірної події $P(U)=1$.
2. Імовірність неможливої події $P(V) = 0$.
3. Імовірність будь-якої випадкової події $0<P(A)<1$.

Класичне означення ймовірності: Імовірністю випадкової події А називається відношення кількості елементарних подій m, які сприяють появі цієї події (становлять множину її елементарних подій), до загальної кількості n рівноможливих елементарних подій, що утворюють простір елементарних подій Ω:

$$P(A)=\frac{m}{n}.$$

Щоб обчислити ймовірність події А за цією формулою, потрібно знайти кількість елементарних подій у просторі Ω, а також кількість їх у множині, яка відповідає події А. Для цього (за потреби) застосовують формули комбінаторики.

ПРИКЛАДИ РОЗВ’ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

1. Знайти ймовірність того, що при киданні двох монет випаде два герба.

Розв'язання

Нехай подія А – «випало два герба».

Простір елементарних подій складається з чотирьох подій: A_1– «випало два герба»; A_2– «випали герб та число»; A_3 – «випали число та герб»; A_4 – «випали два числа».

Події А сприяє лише одна подія – A_1.

Отже, m = 1, n = 4 і тоді $P(A)=\frac{m}{n}=\frac{1}{4}$.

Відповідь: 0,25.

2. В урні лежать 20 кульок, з яких 12 білих, решта – чорні. З урни навмання виймають дві кульки. Яка ймовірність того, що вони білі?

Розв'язання

Загальна кількість елементарних подій випробування (вийнято дві кульки) дорівнює числу способів, якими можна вийняти 2 кульки із 20, тобто числу комбінацій із 20 елементів по 2 ($n = C_{20}^{2}$).

Підрахуємо кількість елементарних подій, які сприяють події «вийнято дві білих кульки». Ця кількість дорівнює числу способів, якими можна вийняти 2 кульки із 12 білих, тобто числу комбінацій із 12 елементів по 2 ($m = C_{12}^{2}$).

Отже, якщо подія А – «вийнято дві білі кульки», то $P(A)=\frac{m}{n}=\frac{C_{12}^{2}}{C_{20}^{2}}=\frac{12\cdot 11}{1\cdot 2}\cdot\frac{1\cdot 2}{20\cdot 19}=\frac{33}{95}$.

Відповідь: $\frac{33}{95}$.

3. У групі 25 студентів. З них 12 юнаків й 13 дівчат. Випадковим образом до дошки викликають двох студентів. Яка ймовірність, що це дівчата?

Розв’язання.

$$n = C_{25}^2; \quad m = C_{13}^2; \quad P(A) = \frac{C_{13}^2}{C_{25}^2} = \frac{13 \cdot 12}{25 \cdot 24} = \frac{13}{50} = 0{,}26 \cdot$$

Відповідь: 0,26.

4. У партії з 8 деталей 6 – стандартні. Знайти ймовірність того, що серед чотирьох взятих навмання деталей дві будуть стандартними.

Розв'язання.

Загальне число n можливих результатів цього експерименту дорівнює числу способів, за якими можна взяти 4 деталі з наявних 8, тобто n = C_8^4. Підрахуємо число результатів, які сприяють події А (серед взятих 4-х деталей є дві стандартні). Дві стандартні деталі з шести наявних можна взяти C_6^2 способами, причому дві інші деталі повинні бути нестандартними. Взяти ж ті 2 нестандартні деталі з 2 наявних можна C_2^2 способами.

Отже, $m = C_6^2 \cdot C_2^2$ і шукана ймовірність

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{C_6^2 \cdot C_2^2}{C_8^4} = \frac{15}{70} = \frac{3}{14} \cdot$$

Відповідь: $\frac{3}{14}$.

5. Партія складається з 10 стандартних і 5 нестандартних деталей. Із партії навмання беруть 5 деталей. Знайти ймовірність того, що серед узятих деталей 3 виявились стандартними.

Розв'язання

Подія А – «серед 5 деталей 3 стандартні, а 2 нестандартні». Деталі беруться навмання, тому можливою елементарною подією є будь-яка група з 5 деталей, вибраних із 15 деталей. Порядок у групі неістотний, тому вона належить до комбінацій. Усі елементарні події рівно можливі. Для обчислення ймовірності застосуємо формулу класичного означення ймовірності.

Загальна кількість елементарних подій

$$n = C_{15}^5 = \frac{15!}{5! \cdot 10!} = \frac{360360}{120} = 3003.$$

Щоб обчислити кількість елементарних подій, які становлять подію А, міркуємо так: 3 стандартні деталі з 10 можна вибрати

C_{10}^{3} способами, а 2 нестандартні з 5 – C_{5}^{2} способами. Отже, $m = C_{10}^{3} \cdot C_{5}^{2} = 120 \cdot 10 = 1200.$

Остаточно дістаємо: Р(А)= $\frac{1200}{3003} \approx 0,4.$

Відповідь: 40%.

ТРЕНУВАЛЬНІ ВПРАВИ

1. (У) Учень, розв'язуючи задачу на підрахунок імовірності, отримав відповідь $\frac{64}{63}$. Учитель, не перевіряючи розв'язання, сказав, що задачу розв'язано невірно. Чому?

2. (У) Імовірність деякої події дорівнює 0. Про яку подію йдеться?

1) А – учасник безпрограшної лотереї виграє;
2) В – слово починається з «ь»;
3) С – підкинута монета впаде гербом догори;
4) D – студентові першого курсу 1 рік.

3. (У) З 25 фломастерів 2 не пишуть. Яка ймовірність того, що наугад обираючи один фломастер, візьмемо той, який пише?

1) $\frac{2}{23}$; 2) $\frac{2}{25}$; 3) $\frac{23}{25}$; 4) інша відповідь.

4. У скриньці 10 перенумерованих кульок з номерами від 1 до 10. Витягнули одну кульку. Імовірність якої події дорівнює 1?

1) кулька має номер 5;
2) кулька має номер 11;
3) номер кульки не перевищує 10.

5. У скриньці 5 білих і 8 чорних кульок. Із скриньки навмання витягається одна кулька. Знайти ймовірність того, що ця кулька біла.

6. (У)У скриньці 15 білих і 5 чорних шарів. Обирають навмання одну кульку. Яка ймовірність того, що ця кулька синя?

7. (У) У мішечку 16 кульок. Вони червоного, синього, жовтого і зеленого кольорів. Скільки кульок кожного кольору в мішечку, якщо відомо, що ви можете з однаковим успіхом вийняти червону, синю, жовту або зелену кульку;ймовірність витягнути червону кульку 0,5; синю – 0, 375, а ймовірності витягнути жовту та зелену однакові?

8. Навмання вибирають одну цифру. Знайти ймовірність того, що вибрана цифра менша за 3.

9. З натуральних чисел від 1 до 30 учень навмання називає одне. Яка ймовірність того, що число виявиться дільником числа 30?

10. На конференцію приїхали учасники зі Львова - 12 студентів, із Сум - 5, з Києва - 8, з Луганська - 20. Яка ймовірність того, що учасник, з яким ви заговорите, приїхав з Києва? Приїхав не зі Львова?

11. У лотерейному барабані п'ята частина виграшних білетів. Дістають наугад один білет. Яка ймовірність того, що він виграє?

12. У кошику знаходяться 5 білих, 7 червоних і 9 червоних куль. Яка імовірність того, що навмання обрана кулька - не білого кольору?

13. У коробці 6 різнобарвних олівців. Навмання вибирають один олівець. Яка імовірність того, що узятий олівець не червоного кольору?

14. У ящику 50 однакових деталей, з яких5 пофарбовані. Наугад виймають одну деталь. Знайти ймовірність того, що деталь, яку вийняли, виявиться пофарбованою.

15. Гральний кубик підкинули 1 раз. Яка ймовірність подій:

А – випало число, що є дільником числа 4;

В – випало не менш ніж 5 очок;

С – випало число, яке є квадратом натурального числа;

Д – випало не менш ніж 4 очки?

16. Маємо новий відривний календар на не високосний рік. Відриваємо навмання один листок. Знайти ймовірність того, що на листку

1) число 1;

2) число 31.

17. Вибирають навмання 4 різних цифри від 1 до 9. Яка ймовірність, що серед вибраних цифр – 2 парні і 2 непарні?

18. Набираючи телефонний номер, абонент забув 2 останні цифри і набрав їх навмання, пам'ятаючи лише, що вони непарні та різні. Яка ймовірність, що номер набраний правильно?

19. У вазі стоять 7 червоних півоній і 8 білих. Беруть, не дивлячись, 3 квітки. Яка імовірність того, що всі три квітки білі?

20. У скриньці 10 куль: 3 білих і 7 чорних. Навмання витягають одну кулю.
1) Яка ймовірність, що ця куля а) біла? б) чорна?
2) Яка ймовірність, що витягнуті навмання дві кулі – чорні?
3) Яка ймовірність, що серед п'яти витягнутих куль 3 чорні?

21. У партії з 8 деталей 6 стандартних. Знайти ймовірність того, що серед чотирьох взятих навмання деталей 2 стандартні.

22. У цеху працюють 6 чоловіків та 4 жінки. За табельними номерами навмання вибрали 7 працівників. Знайти ймовірність того, що серед вибраних 3 жінки.

23. На складі 15 кінескопів, причому 10 з них вітчизняні. Знайти ймовірність того, що серед 5 навмання вибраних кінескопів 3 вітчизняних.

24. У групі 12 студентів, серед яких 8 відмінників. За списком навмання вибрано 9 студентів. Знайти ймовірність того, що серед них 5 відмінників.

25. У цеху працюють 8 чоловіків та 2 жінки. Випадковим чином було вибрано 4 особи. Яка ймовірність того, що серед них буде одна жінка?

26. Кинуто два гральні кубики. Знайти ймовірність того, що сума очок, які випали на верхніх гранях кубиків, дорівнюватиме 9.

27. Із 16 студентів, серед яких 4 дівчини, на вечір запрошують трьох. Яка ймовірність того, що серед запрошених буде 1 дівчина?

28. З озера, де плавають 50 щук, виловили 7, помітили їх, і відпустили в озеро. Другого разу виловили 12 щук. Яка ймовірність того, що серед цих дванадцяти буде дві помічені?

29. У групі 8 юнаків і 14 дівчат. Шляхом жеребкування обирають 3 особи для поїздки в театр. Знайти ймовірність того, що будуть обрані два юнаки та одна дівчина.

30. У скриньці білі й чорні кульки. Білих кульок 10. Відомо, що ймовірність витягнути білу кульку за умови випадкового витягування однієї кульки дорівнює $\frac{2}{7}$. Скільки кульок у скриньці?

31. У коробці кнопок учетверо більше, ніж скріпок. Навмання обирають 1 предмет. Яка ймовірність того, що це кнопка?

32. Чи вірний висновок зробив Сергій, який купив 2 лотерейні білети, серед яких виявився 1 виграшний, і після цього вирішив, що ймовірність виграшу у цій лотереї дорівнює 0,5?

ВАРІАНТИ ІНДИВІДУАЛЬНИХ ЗАВДАНЬ

Варіант 1

1. Серед 50 деталей 3 нестандартні. Випадково взято 2 деталі. Знайти ймовірність того, що серед взятих деталей одна стандартна, а інша нестандартна.
2. З колоди карт (36) виймається навмання одна карта. Знайти ймовірність того, що ця карта буде:

1) тузом;
2) пікової масті;
3) піковим тузом.

Варіант 2

1. У коробці простих олівців утричі більше, ніж кольорових. Навмання обирають один. Яка ймовірність того, що він простий?
2. Серед 40 деталей 5 – нестандартні. Взято навмання 2 деталі. Знайти ймовірність того, що обидві деталі будуть нестандартні.

Варіант 3

1. На клумбі 20 червоних, 10 синіх та 30 білих айстр. Яка ймовірність того, що зірвана в темряві айстра виявиться червоною або синьою?
2. У партії з r виробів k - браковані. Знайти ймовірність того, що серед вибраних навмання s виробів l будуть браковані.

Варіант 4

1. З 60 питань, що входять до екзаменаційних білетів, студент підготував 50. Яка ймовірність того, що взятий навмання студентом білет, який містить два питання, буде складатися з підготовлених ним питань?
2. Яка ймовірність того, що серед вийнятих навмання чотирьох кульок з урни з 20 білими і 25 червоними кульками, дві виявляться білими?

Варіант 5

1. Підкидається правильний тетраедр, на гранях якого поставлені номери 1, 2, 3, 4. Якою є ймовірність того, що він упаде на грань з номером 2?
2. У групі 17 студентів, серед яких 8 дівчат. Шляхом жеребкування вибирають 7 студентів для поїздки в театр. Яка ймовірність того, що будуть вибрані 4 дівчини і 3 хлопці?

Варіант 6

1. Відомо, що зі 100000 атомів полонію самочинно розпадаються впродовж доби 495. Знайти ймовірність того, що впродовж доби певний атом полонію не розпадеться.
2. Складальник має 10 деталей, які мало відрізняються одна від одної. Серед них 4 першого, по 2 другого, третього і четвертого видів. Яка ймовірність того, що з шести взятих одночасно деталей 3 виявляться першого виду, 2 другого і 1 третього?

Варіант 7

1. Кидають два гральних кубики. Визначити ймовірність того, що сума очок, які випали на кубиках, дорівнюватиме 8.
2. Студент знає 45 з 60 питань програми. Кожен екзаменаційний білет містить 3 питання. Знайти ймовірність того, що студент знає всі 3 питання навмання взятого білета.

Варіант 8

1. Визначити ймовірність того, що за одночасного кидання двох гральних кубиків сума очок, які випали, виявиться меншою за 5.
2. В урні 5 білих та 4 чорних куль. З урни виймають відразу 5 куль. Знайти імовірність того, що 2 з них будуть білі, а 3 – чорні.

Варіант 9

1. На маршруті працюють 3 трамваї Луганського тепловозобудівельного заводу, і 6 – Київського. Знайти ймовірність того, що перший трамвай, який підійде на зупинку, зроблено Луганським заводом. .
2. В урні 8 білих та 6 чорних куль. З урни виймають відразу 3 кулі. Знайти ймовірність того, що всі три кулі будуть білі.

Варіант 10

1. Куб, всі грані якого пофарбовані, розпилено на 125 кубиків однакового розміру, які потім старанно змішані. Знайти ймовірність того, що навмання вийнятий кубик буде мати пофарбованих граней: а) три; б) дві; в) одну.
2. В урні 8 білих та 6 чорних куль. З урни виймають відразу 3 кулі. Знайти ймовірність того, що дві з них будуть білі, а одна – чорна.

Варіант 11

1. З 10 хлопчиків і 8 дівчаток треба виділити для участі в туристичному поході 5 осіб. Обчислити ймовірність того, що будуть виділені 2 хлопчики і 3 дівчинки.

2. В урні 8 білих та 6 чорних куль. З урни виймають відразу 3 кулі. Знайти ймовірність того, що всі три кулі будуть чорні.

Варіант 12

1. Бібліотека складається з десяти різних книг, причому п'ять книг коштують по 40 грн. кожна, три книги – по 10 грн. і дві книги – по 30 гри. Знайти ймовірність того, що взята навмання книга коштує 10 грн.
2. У лотереї розігруються 1000 квитків, серед них один виграш на 50 грн., 5 виграшів по 20 грн., 20 виграшів по 10 грн. і 50 виграшів по 5 грн. Дехто купляє один квиток. Знайти ймовірність:

1) виграти не менше 10 грн.;
2) будь-якого виграшу.

Варіант 13

1. Задумано двозначне число. Яка ймовірність того, що сума цифр цього числа дорівнює 6?
2. У партії зі 100 деталей 5 бракованих. Визначити ймовірність того, що серед вибраних навмання 10 деталей 2 виявляться браковані.

Варіант 14

1. Задумано деяке двозначне число. Яка ймовірність того, що сума цифр цього числа дорівнюватиме 7?
2. З колоди гральних карт (36 шт.), старанно перемішаних, виймають навмання 6 карт. Знайти ймовірність того, що серед них буде 2 карти "король пік".

Варіант 15

1. На шістьох однакових картонках написано літери: А, В, К, М, О, С. Картонки перемішують і розкладають навмання в ряд. Яка ймовірність того, що виникло слово "МОСКВА"?
2. У цеху працюють 7 чоловіків та 3 жінки. За табельними номерами навмання вибрано 3 особи. Чому дорівнює ймовірність того, що всі троє вибраних будуть жінки?

Варіант 16

1. У ящику 10 деталей, серед них – 3 нестандартні. Навмання беруть 3 деталі. Знайти ймовірність того, що вибраними будуть 1 стандартна та 2 нестандартні деталі.
2. В урні 10 білих, 6 чорних та 7 червоних куль. З урни виймають одну за одною всі кулі і записують їх кольори. Знайти ймовірність того, що в цьому списку білий колір з'явиться раніше чорного.

Варіант 17

1. У цеху працюють 7 чоловіків та 3 жінки. Шляхом жеребкування вибрано 3 особи. Чому дорівнює ймовірність того, що всі троє вибраних – чоловіки?
2. З послідовності цілих чисел від 1 до 10 навмання вибирають два числа. Як ймовірність того, що одне з них менше 6, а друге більше 6?

Варіант 18

1. На складі знаходяться 10 кінескопів, серед них 7 кінескопів виробництва Львівського заводу. Навмання вибрано 3 кінескопи. Знайти ймовірність того, що серед них будуть 2 кінескопи Львівського заводу.
2. Набираючи номер телефону, абонент забув останні дві цифри і, пам'ятаючи лише, що ці цифри різні, набрав їх навмання. Знайти ймовірність того, що набрано потрібні цифри.

Варіант 19

1. У пакеті на однакових картках надруковані 7 літер: А, Б, В, Г, Д, Е, О. Знайти ймовірність того, що виймаючи одну за одною 4 картки і розміщуючи їх у ряд, можна буде прочитати слово "ВОДА".
2. В урні *а* білих та *в* чорних куль. З урни виймають білу кулю і відкладають її вбік. Після цього з урни беруть ще одну кулю. Знайти ймовірність того, що ця куля буде також біла.

Варіант 20

1. На 8 однакових картках написані числа 2, 4, 6, 7, 8, 11, 12, 13. Навмання беруть дві картки. Знайти ймовірність того, що утворений з двох одержаних таким чином чисел дріб можна скоротити.
2. У майстерню для ремонту поступило 10 годинників марки "Чайка". Відомо, що 6 штук з них потребують загальної чистки механізму. Майстер навмання бере 5 годинників. Знайти ймовірність того, що два з них потребують загальної чистки механізму.

Варіант 21

1. В урні *а* білих та *в* чорних куль. З урни виймають дві кулі. Знайти ймовірність того, що обидві кулі будуть білі.
2. Учасники жеребкування тягнуть жетони з номерами від 1 до 100. Знайти ймовірність того, що номер першого, навмання взятого жетона, не містить цифри 5.

Варіант 22

1. З 10 білетів виграшними є 2. Визначити ймовірність того, що серед взятих навмання 5 білетів:

1) один виграшний;

2) два виграшні.

2. Набираючи номер телефону, абонент забув останні три цифри і, пам'ятаючи, що ці цифри різні, набрав їх навмання. Знайти ймовірність того, що він набрав потрібні цифри.

Варіант 23

1. Знайти ймовірність того, що при одночасному киданні двох кубиків сума очок, які випали, дорівнюватиме 9.

2. Шість чоловік випадково розсаджуються на лаві. Знайти ймовірність того, що дві фіксовані особи сидітимуть поруч.

Варіант 24

1. На кінець дня в наметі залишилось 60 кавунів, 50 з яких спілі. Покупець вибирає 2 кавуни. Яка ймовірність того, що обидва кавуни спілі?

2. Куб, всі грані якого пофарбовані, розпиляли на 64 кубики однакового розміру, які потім старанно змішали. Знайти ймовірність того, що вийнятий навмання кубик матиме пофарбованих граней:

1) три;

2) дві;

3) одну.

Варіант 25

1. У партії з 20 деталей 5 – браковані. Знайти ймовірність того, що з 5 взятих навмання деталей дві будуть браковані.

2. Кидають два гральних кубики. Знайти ймовірність того, що сума очок які випадуть на верхніх гранях обох кубиків, дорівнюватиме 7.

1.5. ГЕОМЕТРИЧНЕ ОЗНАЧЕННЯ ЙМОВІРНОСТІ

ОСНОВНІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

Якщо простір елементарних подій Ω можна подати у вигляді деякого геометричного образу, а множину елементарних подій для події А – як частину цього геометричного образу, то ***ймовірність*** події А визначається як відношення мір цих множин:

$$P(A)=\frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}.$$

Область, на яку поширюється це означення, може бути одновимірною (пряма, відрізок), двовимірною (плоска фігура), тривимірною (тіло у просторі).У плоскому випадку матимемо таке означення.

Нехай на площині є деяка фігура F, що містить фігуру f. На фігуру F навмання кидається точка, що може виявитися в будь-якій точці фігури F. Нехай подія A — влучення точки у фігуру f, а S_f й S_F — площі фігур f й F відповідно. Тоді

$$P(A)=\frac{S_f}{S_F}$$

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

1. Точку навмання кинули на відрізок [0; 2]. Яка ймовірність її попадання у відрізок [0,5; 1,4]?

Розв'язання

Простір елементарних подій - увесь відрізок $\Omega=[0;\,2]$, а множина подій, які сприяють події $A=[0{,}5;\,1{,}4]$, при цьому довжини цих відрізків дорівнюють $l(\Omega)=2$ и $l(A)=0{,}9$ відповідно. Тому

$$P(A)=\frac{l(A)}{l(\Omega)}=\frac{0{,}9}{2}=0{,}45\cdot$$

2. Двоє осіб домовились зустрітися в певному місці у проміжку часу від t_1 до t_2 годин, а також про те, що той, хто прийде першим, чекатиме на другого протягом t годин. Знайти ймовірність того, що зустріч відбудеться, якщо кожна особа може прийти в довільний момент часу t є $[t_1;t_2]$.

Розв'язання.

Подія А – «зустріч відбудеться». Позначимо довжину часового проміжку $t_2-t_1=T,$ а моменти приходу кожної особи – *x і y*. Тоді подія А відбудеться за умови $|x-y| \le t,$ де $0 \le x \le T,$ $0 \le y \le T.$ Зобразимо ці умови на площині в системі координат XOY (рис. 1). Як випливає з рис. 1, часу Т відповідає площа квадрата $OBCD,$ а події А – площа шестикутника $OEFCKM.$ Скориставшись геометричним означенням імовірності, дістанемо: $P(A) = \frac{S_{OEFCKM}}{S_{OBCD}} = \frac{T^2 - (T-t)^2}{T^2} = \frac{t(2T-t)}{T^2}.$

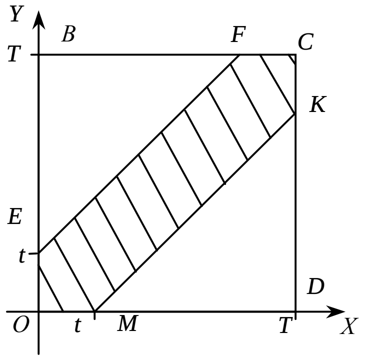


Рис. 1

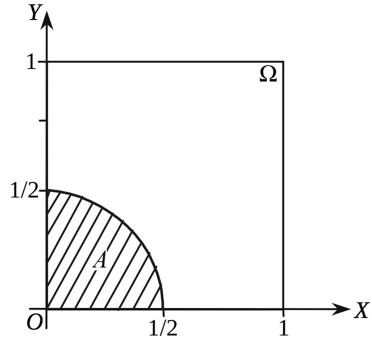


Рис. 2

3. На двох суміжних сторонах квадрата з довжиною сторони, що дорівнює 1, навмання взято по точці. Знайти ймовірність того, що відстань між цими точками не перевищить 0,5.

Розв'язання.

Подія А – «відстань між двома навмання взятими точками не перевищить 0,5». Позначимо відстань від точок, узятих на сторонах квадрата, до його вершини, що є спільною для цих сторін, через *x* і *y*. Тоді відстань між зазначеними точками $d = \sqrt{x^2 + y^2}$. Множина значень для *x* і *y* незліченна, причому значення кожної з цих змінних рівноможливі на заданих відрізках. Для обчислення ймовірності скористаємося геометричною інтерпретацією. Як елементарну подію розглядаємо $\omega_i = \{x_i; y_i\}.$ Якщо *x* і *y* змінюються в зазначених межах, то множина Ω є квадратом зі стороною 1. Щоб визначити множину точок для події *A*, проведемо лінію

$\sqrt{x^2+y^2}=0{,}5$. На рис. 2 подано множину Ω, в якій заштриховано множину точок, що відповідають події A. Мірою кожної з розглядуваних множин є відповідна площа, тому $P(A)=\dfrac{S_A}{S_\Omega}=\dfrac{\pi\cdot 0{,}25}{1}=\dfrac{\pi}{4}$.

ТРЕНУВАЛЬНІ ВПРАВИ

1. Після бурі на ділянці між 40-м і 70-м кілометрами телефонної мережі розірвався провід. Яка ймовірність того, що він розірвався між 45-м і 50-м кілометрами мережі?

2. У квадрат випадково кинута точка. Яка ймовірність того, що точка виявиться нижче діагоналі квадрата?

3. У правильний трикутник випадково кинута точка. Яка ймовірність того, що точка виявиться вище середньої лінії цього трикутника?

4. У трапецію з основами 6 та 10 см випадково кинута точка. Яка ймовірність того, що точка виявиться вище середньої лінії трапеції?

5. Усередині круга радіусом R навмання вибирають точку. Знайти ймовірність того, що точка потрапить усередину:
1) вписаного у круг квадрата;
2) вписаного у круг правильного трикутника.

6. У коло радіуса 10 кидають точку. Знайти ймовірність того, що відстань від точки до центра кола не перевищує 4.

7. На відрізок довжиною 10 см випадково кинута точка. Яка ймовірність того, що точка
1) виявиться у лівій половині відрізка;
2) опиниться на відстані, яка не перевищує 2 см від кінців відрізка?

8. На площині проведено 2 концентричні кола з радіусами 10 см і 20 см відповідно. Знайти ймовірність того, що точка, поставлена навмання у великий круг, потрапить у кільце, утворене побудованими колами.

9. На колі радіуса R навмання взято дві точки. Яка ймовірність того, що відстань між ними не перевищує $r (r \leq 2R)$?

10. На відрізку довжини l навмання вибирають дві точки. Знайти ймовірність того, що з трьох одержаних відрізків можна побудувати трикутник.

11. На площину, розграфлену паралельними прямими лініями, відстань між якими $2a$, навмання кидають голку довжини $2l$. Яка ймовірність того, що голка перетне одну з паралельних прямих, якщо $l<a$?

12. На нескінченну шахову дошку зі стороною квадрата a навмання кидають монету радіуса $r < \frac{a}{2}$. Знайти ймовірність того, що монета попаде цілком в середину квадрата, тобто не перетне жодну з його сторін.

13. Інтервал руху трамваю 5 хв. Пасажир вийшов на зупинку у випадковий момент часу. Яка ймовірність того, що він буде чекати трамвая не більше 3 хвилин?

14. Двоє студентів домовилися про зустріч. Кожен з них може прийти на місце зустрічі протягом 20 хв. За домовленістю студент, який прийшов на місце зустрічі першим, чекає 10 хв. і покидає місце зустрічі. Яка ймовірність того, що зустріч відбудеться?

15. Двоє домовилися про зустріч між 13.00 та 14.00. Той, хто прийшов першим, чекає на іншого15 хв., після чого уходить. Чому дорівнює ймовірність їх зустрічі?

16. У квадрат зі стороною 2 см випадково кинута точка. Яка ймовірність того, що точка виявиться усередині кола, вписаного в цей квадрат?

17. У правильний трикутник випадково кинута точка. Яка ймовірність того, що точка виявиться усередині кола, вписаного в цей трикутник?

18. Усередині еліпса $\frac{x2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ розташований круг $x^2+y^2=9$. Знайти ймовірність попадання точки в кільце, яке обмежене еліпсом та кругом.

19. Диск, який обертається, розділений на 8 секторів, які пофарбовані у білий та чорний колір (через один). По диску роблять постріл. Яка ймовірність того, що влучать у білий сектор?

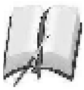
20. У прямокутник з вершинами A(–2; –1), B(2; –1), C(2; 1), D(2; 1) випадково кинута точка. Яка ймовірність того, що вона виявиться усередині еліпса $\frac{x^2}{4}+y^2=1$?

21. Точку кинули навмання на відрізок [0; 2].Яка ймовірність того, що вона потрапить у відрізок [0,5; 1,5]?

22. Міни поставлені на прямій через кожні 15 м. Танк шириною 3 м йде перпендикулярно цій прямій. Яка ймовірність того, що танк наїде на міну?

23. У кулю вписаний куб, точку кидають навмання в кулю. Яка ймовірність того, що вона потрапить у куб?

24. Уявіть собі, що метеорит упав на територію великого міста, яку можна вважати кругом радіуса R= 18 км. Яка ймовірність того, що метеоріт виявиться у центрі міста?



ВАРІАНТИ ІНДИВІДУАЛЬНИХ ЗАВДАНЬ

Варіант 1

1. Телефонна лінія, яка з'єднує райцентр з селом, має довжину 12 км. Під час грози скоїлось пошкодження на цій лінії. Знайти ймовірність того, що пошкодження скоїлось на перших трьох кілометрах від райцентру.
2. На квадратному столику зі стороною 80 см лежить квадратне дзеркальце зі стороною 10 см. На цей столик потрапив кинутий кимось камінець. Якою є ймовірність того, що цей камінець потрапить на дзеркальце?

Варіант 2

1. Електропоїзд зупинився через обрив контактного дроту. Довжина ділянки, на якій міг статися обрив, складає 2 км. Потяг знаходиться за 400 м від кінця цієї ділянки. Якою є ймовірність того, що розрив трапився перед потягом?
2. На квадратному столику зі стороною 80 см лежить кругле дзеркальце з радіусом 5 см. На цей столик потрапив кинутий кимось камінець. Якою є ймовірність того, що цей камінець потрапить на дзеркальце?

Варіант 3

1. На відрізок довжиною 5 см кинули точку. Яка ймовірність того, що точка опиниться на відстані 3 см від лівого кінця цього відрізка?

2. На журнальному столику у формі прямокутника зі сторонами 90 см і 45 см лежить книга, розміри якої 25 см на 10 см. Краплина чаю випадково падає на столик. Яка ймовірність того, що вона не попаде на книгу?

Варіант 4

1. У запаяному скляному кубику з ребром 3 см знаходиться газ. Усередині цього кубика виділяють маленький кубик з ребром 1 см. Яка ймовірність того, що якась одна певна молекула, за якою ведуться спостереження, опиниться всередині маленького кубика?
2. На ділянці між 20-м та 30-м км хтось розібрав частину залізничного полотна. Яка ймовірність того, що порушення залізниці відбулося між 125-м та 150-м км?

Варіант 5

1. У вікні, розміри якого 1,3 м на 0,8 м, відчинена хвіртка. Дитина кидає м'ячик, намагаючись не попасти у шибку. Яка ймовірність у неї це зробити, якщо розміри хвіртки 0,6 м на 0,25 м.
2. На координатній прямій дано точки з координатами A(2) B(9), C(4), D(7). На відрізку AB навмання зафіксовано точку. Яка ймовірність того, що вона опиниться між точками C і D?

Варіант 6

1. Усередині прямокутника зі сторонами 8 см і 6 см випадково обирається точка. Яка ймовірність того, що точка потрапить у квадрат зі стороною 1 см, розташований всередині прямокутника?
2. На відрізку AB телефонної лінії довжиною 1200 м відбувся розрив. Якою є ймовірність того, що точка розриву віддалена від точки A на відстань не менше 200 м?

Варіант 7

1. На відрізку AB телефонної лінії довжиною 1200 м відбувся розрив. Якою є ймовірність того, що точка розриву віддалена від точки A на відстань не більше 200 м?
2. На шахівницю з клітинками розміром 5 см, кидають монету діаметром 0,5 см. Яка ймовірність того, що монета потрапить цілком усередину одного квадрата?

Варіант 8

1. Усередині рівностороннього трикутника навмання зафіксовано точку. Якою є ймовірність того, що вона потрапить усередину трикутника, утвореного середніми лініями цього трикутника?

2. На ділянці траси між двома населеними пунктами довжиною 2 км трапилася поломка автомобіля. Яка ймовірність того, що поломка трапилася на відстані, меншій ніж 300 м від одного з населених пунктів?

Варіант 9

1. Круг радіусом 10 см, поділений на сектори різної площі, обертається навколо центру. На ньому є два сектори, пофарбовані різними кольорами, з центральним кутом 30^0.усі інші сектори білі. Хлопець кидає дротик у цей круг. Яка ймовірність того, що від потрапить у кольоровий сектор?
2. На ділянці довжиною 3 км відбувся прорив водогону. Яка ймовірність того, що прорив відбувся між 100 м та 300 м метрами цього водогону?

Варіант 10

1. У квадрат розміром 3 см, який поділено на квадрати зі стороною 1 см, кидають дротик. Один з цих квадратиків зафарбований. Знайти ймовірність попасти дротиком усередину зафарбованого квадратика.
2. На ділянці трубопроводу довжиною 1 км стався прорив. Яка ймовірність того, що він стався між 40-м та 50-м метрами цієї ділянки?

Варіант 11

1. На відрізку ВС навмання обрано точку. Якою є ймовірність того, що вона буде знаходитися від середини відрізка на відстані, що не перевищує 0,2 його довжини?
2. На площині намальовано 2 концентричні кола радіусами 5см і 10см. Знайти ймовірність того, що точка, яку кинули у велике коло, потрапить у кільце, утворене цими колами.

Варіант 12

1. На відрізку [-1; 3] випадково обирається число. Яка ймовірність того, що воно невід’ємне?
2. У середину круга радіуса 4 см навмання кинули точку. Знайти ймовірність того, що точка потрапить у середину вписаного в круг квадрата.

Варіант 13

1. Після бурі на ділянці між 40-м і 70-м кілометрами телефонної лінії відбувся обрив дроту. Ремонтна бригада, що обслуговує цю ділянку, розташовується на 50-му кілометрі. Якими є шанси на користь того, що їй потрібно їхати у бік 70-го кілометра?

2. Усередину квадрата зі стороною 4 см навмання кинули точку. Знайти ймовірність того, що точка потрапить у середину вписаного в круг кола.

Варіант 14

1. На відрізку [-1; 3] випадково обирається число. Яка ймовірність того, що воно не додатне?
2. Мішень складається з 10 кругів, які обмежені концентричними колами радіусів r_k ($k = 1,2,\ldots,10$), причому $r_1<r_2<\ldots<r_{10}$. Подія A_k полягає у влученні в круг радіуса r. Обчисліть ймовірність події A_2.

Варіант 15

1. Стержень довжиною l навмання розламали на 2 частини. Знайти ймовірність того, що довжина меншої частини не більша за $l/3$.
2. Мішень складається з 10 кругів, які обмежені концентричними колами радіусів r_k ($k = 1,2,\ldots,10$), причому $r_1<r_2<\ldots<r_{10}$. Подія A_k полягає у влученні в круг радіуса r. Обчисліть ймовірність події A_5.

Варіант 16

1. Точку наугад кинули на відрізок [0;2]. Яка ймовірність того, що вона потрапить у відрізок [0,5;1,4]?
2. На двох суміжних сторонах квадрата з довжиною сторони, що дорівнює 1, навмання взято по точці. Знайти ймовірність того, що відстань між цими точками не перевищить 0,5.

Варіант 17

1. На відрізку довжини l навмання вибирають точку. Знайти ймовірність того, що вона потрапить у ліву половину відрізка.
2. На колі взято будь-які три точки *A*, *B*, С. Знайти ймовірність того, що трикутник *ABC* гострокутний

Варіант 18

1. Стержень завдовжки L розрубують на дві частини. Знайти ймовірність того, що менша з частин, на які він поділяється, має довжину не менш як $\frac{L}{5}$.
2. Усередині круга радіусом R навмання вибирають точку. Знайти ймовірність того, що точка потрапить усередину вписаного у круг правильного шестикутника.

Варіант 19

1. На колі взято будь-які три точки *A*, *B*, С. Знайти ймовірність того, що трикутник *ABC* прямокутний.
2. У куб зі стороною 5 см навмання кидають точку. Знайти ймовірність того, що вона опиниться усередині меншого куба, вписаного в більший, сторона якого учетверо менша від діагоналі більшого куба.

Варіант 20

1. У прямокутному трикутнику з катетами довжиною 4 та 9 м навмання вибрали точку. Яка ймовірність того, що вона потрапить в коло радіусом 1 м, розташоване в трикутнику?
2. Стержень завдовжки l розламали на дві частини. Знайти імовірність того, що довжина меншої частини не перевищуватиме $l/3$.

Варіант 21

1. Усередині плоскої фігури площі S лежать три плоских фігури, які не перетинаються, відповідно з площинами S_1, S_2, S_3. Яка ймовірність того, що навмання вибрана з більшої фігури точка не попадає у жодну із фігур S_1, S_2 та S_3?
2. Після бурі на ділянці між 40-м і 70-м кілометрами телефонної лінії трапився обрив. Яка ймовірність, що обрив відбувся між 50-м і 55-м кілометрами лінії?

Варіант 22

1. У квадрат з вершинами у точках (0,0), (0,1), (1,1), (1,0), навмання кинуто точку (x,y). Знайти ймовірність того, що координати такої точки задовольнятимуть нерівність $y < 2x$.
2. У коло радіуса R вписано рівносторонній трикутник. Яка ймовірність того, що навмання поставлена точка попаде в середину трикутника?

Варіант 23

1. У коло радіуса R кидають точку. Знайти імовірність того, що відстань від цієї точки до центра кола не перевищує r**.**
2. Із відрізка [0,2] навмання вибираються два числа x і y. Яка ймовірність, що ці числа задовольняють нерівність $x^2 \le 4y \le 4x$?

Варіант 24

1. На площині розташовано три фігури одна всередині іншої. Площа меншої фігури дорівнює S_2, середньої – S_1, а більшої – S. Навмання вибрано точку більшої фігури. Яка ймовірність, що точка належатиме меншій фігурі?

2. На відрізок АВ довжиною 12 см навмання ставиться точка *M*. Знайти ймовірність того, що площа квадрата, побудованого на відрізку *AM*, знаходитиметься у межах 36 см^2 і 81 см^2

Варіант25

1. Накреслено п'ять концентричних кіл, радіуси яких відповідно дорівнюють r, 2r, 3r, 4r, 5r. У колі найбільшого радіуса навмання вибрано точку. Яка ймовірність того, що вибрана точка належить колу радіуса 2r?
2. Сторожу повідомили, що у паркані довжиною 300 м пошкоджено одну дошку. Яка ймовірність того, що пошкодження знаходиться на відстані,меншій за 50 м від початку паркану?

1.6. ТЕОРЕМИ ДОДАВАННЯ ТА МНОЖЕННЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ. УМОВНІ ЙМОВІРНОСТІ. НЕЗАЛЕЖНІСТЬ ПОДІЙ.

ОСНОВНІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

Теорема додавання ймовірностей. Нехай подія А є сумою двох подій В і С. Тоді:
а) якщо події В і С несумісні, то Р(А) = Р(В) + Р(С);
б) якщо події В і С сумісні, то Р(А)= Р(В) + Р(С) – Р(В $\cap$ С).

Події В і С називаються ***залежними***, якщо ймовірність однієї з них змінюється залежно від того, відбулась друга подія чи ні. У противному разі події називаються ***незалежними***.

Імовірність події С, визначена за умови, що подія В відбулася, називається ***умовною*** і позначається Р(В/С) або $P_в(C)$.

Теореми множення ймовірностей: Нехай подія А є добутком двох подій В і С. Тоді:
а) якщо події В і С незалежні, то Р(А) =Р($B \cap C$)=Р(В)Р(С);
б) якщо події В і С залежні, то Р(А) =Р($B \cap C$)=Р(В)Р(С/В)
Ці теореми справджуються й для добутку *n* (*n* > 2) подій.

Нехай у результаті випробування можуть відбутися *n* подій $A_1, A_2, \ldots A_n$. Потрібно знайти ***ймовірність того, що відбудеться принаймні одна з них.*** Позначимо цю подію через А. Тоді протилежною буде подія $\overline{A}$, яка полягає в тому, що в результаті випробування одночасно настали протилежні події: $\overline{A} = \bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}$.

Знайдемо ймовірність події А через імовірність протилежної події: $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - P(\bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i})$

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

1. Партія містить 12 стандартних і чотири нестандартні деталі. Навмання беруть три деталі. Знайти ймовірність того, що серед узятих деталей:

1) не менш як дві стандартні;

2) усі три нестандартні;

3) принаймні одна стандартна.

Розв'язання.

1) Нехай подія A – «серед трьох узятих деталей не менш як дві стандартні». Тоді її можна подати як суму двох подій: A_1 – «серед трьох узятих деталей дві стандартні і одна нестандартна» і A_2 – «усі три узяті деталі стандартні». Події A_1 і A_2 несумісні, тому маємо:

2) $P(A) = P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2).$

Імовірності подій A_1 і A_2 знайдемо згідно з класичним означенням імовірності.

$n = C_{16}^3 = 560;\ m_1 = C_{12}^2 \cdot C_4^1 = 66 \cdot 4 = 264;\ m_2 = C_{12}^3 = 220.$

Отже, $P(A) = \dfrac{484}{560} \approx 0{,}864.$

2) Подія B – «усі три взяті деталі нестандартні». Цю подію можна подати як добуток трьох подій $B_i (i = 1,2,3)$, де i-та деталь нестандартна, $B = \bigcap_{i=1}^{3} B_i$. Умовою задачі не задано, що деталі беруться з поверненням. Отже, взяти три деталі разом – це те саме, що брати їх по одній без повернення, а тому події залежні. Згідно з цим імовірність події B обчислюємо так:

$$P(B) = P\left(\bigcap_{i=1}^{3} B_i\right) = P(B_1) \cdot P(B_2/B_1) \cdot P(B_3/B_1 \cap B_2) = \frac{4}{16} \cdot \frac{3}{13} \cdot \frac{2}{12} \approx 0{,}007.$$

3) Подія C – «із трьох деталей принаймні одна стандартна». Протилежна подія $\overline{C}$ – «усі три деталі нестандартні». Імовірність

цієї події щойно знайдено: $P(\overline{C}) = P(B)$. Остаточно маємо: $P(C) = 1 - P(\overline{C}) \approx 1 - 0{,}007 = 0{,}993.$

Відповідь: 0,993.

2. Маємо 3 партії деталей. Перша партія складається з 10 стандартних і 3 нестандартних деталей, друга – із 15 стандартних і 4 нестандартних, третя – із 20 стандартних і 5 нестандартних деталей. Із кожної партії беруть по одній деталі. Знайти ймовірність того, що серед узятих деталей:

1)тільки одна стандартна;

2) тільки дві стандартні.

Розв'язання.

Нехай згідно з умовою з кожної партії взято по одній деталі. При цьому можуть відбутися події A_1, A_2, A_3, які полягають відповідно в тому, що деталь, яку взяли з першої, другої і третьої партії виявилась стандартною.

Подія A – «тільки одна із трьох деталей виявилась стандартною». Цю подію можна подати так: $A = A_1\overline{A}_2\overline{A}_3 \cup \overline{A}_1 A_2 \overline{A}_3 \cup \cup \overline{A}_1\overline{A}_2 A_3$. Групи подій, сумою яких є подія A, несумісні між собою, а події в кожній групі незалежні. Тому ймовірність події A обчислимо так:

$$P(A) = \frac{10}{13}\cdot\frac{4}{19}\cdot\frac{1}{5} + \frac{3}{13}\cdot\frac{15}{19}\cdot\frac{1}{5} + \frac{3}{13}\cdot\frac{4}{19}\cdot\frac{4}{5} = \frac{133}{1235} \approx 0{,}108.$$

Подія B – «тільки дві деталі із трьох виявились стандартними». Подамо цю подію через події A_1, A_2, A_3 та протилежні до них:

$$B = A_1 A_2 \overline{A}_3 \cup A_1 \overline{A}_2 A_3 \cup \overline{A}_1 A_2 A_3.$$

Подію B подано як суму несумісних груп подій. У кожній групі події незалежні. Знайдемо ймовірність події B:

$$P(B) = \frac{10}{13}\cdot\frac{15}{19}\cdot\frac{1}{5} + \frac{10}{13}\cdot\frac{4}{19}\cdot\frac{4}{5} + \frac{3}{13}\cdot\frac{15}{19}\cdot\frac{4}{5} = \frac{490}{1235} \approx 0{,}397.$$

Відповідь: 0,397.

3. Перевезення вантажів для підприємства забезпечують два автогосподарства, які з цієї метою щодня в першу зміну мають виділяти по одному автомобілю. Імовірність виходу автомобіля на лінію в першому автогосподарстві дорівнює 0,7, а в другому – 0,6. Знайти ймовірність того, що в першу зміну на підприємстві перевозитимуться вантажі.

Розв'язання.

Розглянемо події: A – «на підприємстві в першу зміну перевозитимуться вантажі»; A_1 – «для перевезення вантажів прибув автомобіль із першого автогосподарства»; A_2 – «для перевезення вантажів прибув автомобіль із другого автогосподарства». Тоді $A = A_1 \cup A_2$. Події A_1 і A_2 сумісні, тому $P(A) = P(A_1) + \quad + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$. Очевидно, що події A_1 і A_2 незалежні і $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2)$. Остаточно дістаємо:

$$P(A) = 0{,}7 + 0{,}6 - 0{,}7 \cdot 0{,}6 = 0{,}88.$$

Відповідь: 0,88.

4. Прилад складається із трьох вузлів, які працюють незалежно один від одного, причому другий і третій вузли взаємозамінювані. Ймовірності виходу з ладу вузлів на заданому часовому проміжку становлять відповідно 0,2; 0,3 і 0,4. Знайти ймовірність того, що протягом заданого часу прилад працюватиме.

*Розв'язання***.**

Розглянемо події: A – «прилад працює протягом заданого часу»; B_1 – «перший вузол працює»; B_2 – «другий вузол працює»; B_3 – «третій вузол працює». Подія A настає, якщо працюють перший та другий вузли, або перший та третій вузли, або всі три вузли разом. Звідси: $A = B_1 \cap (B_2 \cup B_3)$. За умовою задачі маємо, що події B_1 і $(B_2 \cup B_3)$ незалежні, а події B_2 і B_3 – сумісні. Тому

$$P(A) = P(B_1 \cap (B_2 \cup B_3)) = P(B_1) \cdot P(B_2 \cup B_3) = P(B_1) \cdot (P(B_2) + P(B_3) - P(B_2 \cap B_3)) =$$

$$= P(B_1) \cdot (P(B_2) + P(B_3) - P(B_2) \cdot P(B_3)) = 0{,}8 \cdot (0{,}7 + 0{,}7 - 0{,}7 \cdot 0{,}7) = 0{,}728.$$

Під час обчислення враховано, що умовою задачі задано ймовірності протилежних подій.

Відповідь: 0,728.

5. Три стрільця зробили по одному пострілу в ту ж саму мішень. Імовірність влучення кожного з них відповідно дорівнює: 0,6; 0,7; 0,9. Знайти ймовірність того, що влучать у мішень 2 стрільці.

*Розв'язання***.**

Нехай події A_1, A_2, A_3 — влучення відповідно 1-го, 2-го й 3-го стрільця.

Тоді A — подію, що влучать 2 стрільця, представимо в такий спосіб:

$$A = A_1 \cdot A_2 \cdot \overline{A_3} + A_1 \cdot \overline{A_2} \cdot A_3 + \overline{A_1} \cdot A_2 \cdot A_3.$$

Тоді:

$$P(A) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(\overline{A_3}) + P(A_1) \cdot P(\overline{A_2}) \cdot P(A_3) + P(\overline{A_1}) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) =$$
$$= 0{,}6 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}1 + 0{,}6 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}9 + 0{,}4 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}9 = 0{,}456.$$

Відповідь: 0, 456

6. Робітник обслуговує 3 верстати, які працюють незалежно друг від друга. Імовірність того, що протягом години 1-й верстат потребує уваги працівника - 0,1, для іншого верстата - 0,2, для третього - 0,3. Знайти ймовірність того, що впродовж години хоча б один верстат потребуватиме уваги робітника.

*Розв'язання***.**

Нехай A – подія, ймовірність якої треба знайти.

Тоді протилежна подія $\overline{A}$, яка полягає в тому, що жоден верстат не потребуватиме уваги робітника, може бути представлена таким чином:

$$P(\overline{A}) = P(\overline{A_1}) \cdot P(\overline{A_2}) \cdot P(\overline{A_3}) = 0{,}9 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}7 = 0{,}504.$$

Звідси випливає, що:

$$P(A) = 1 - 0{,}504 = 0{,}496.$$

Відповідь: 0,496.

7. Студент прийшов на екзамен, підготувавши лише 20 з 25 питань програми; екзаменатор задав йому три питання. Знайти ймовірність того, що студент знає відповіді на ці питання.

Розв'язання.

Позначимо через A_i $(i = 1, 2, 3)$ подію "студент знає відповідь на *i*-те питання, задане екзаменатором", через *A* подію "студент знає відповіді на всі три питання". Тоді $A = A_1 A_2 A_3$, і за формулою (4) маємо:

$$P(A_1) = \frac{20}{25}, \quad P(A_2 / A_1) = \frac{19}{24}$$

(оскільки питань залишилось 24, з них студент знає 19, бо перше питання студент знав).

Аналогічно $P(A_3 / A_1 A_2) = \dfrac{18}{23}$, тоді $P(A)=\frac{20}{25}\cdot\frac{19}{24}\cdot\frac{18}{23}=\frac{57}{115}=0{,}496\cdot$

Відповідь: 0,496.

8. Три стрільця зробили по одному пострілу по мішені. Імовірність попадання для першого стрільця дорівнює 0,8, для другого – 0,7, для третього – 0,9. Знайти ймовірність того що:
1) влучив лише один стрілець;
2) влучили лише два стрільці;
3) влучили три стрільці;
4) влучив хоча б один стрілець.

*Розв'язання***.**

Позначимо через A_i $(i=1,\,2,\,3)$ подію "попав i стрілець".

1) Подія A – попав лише один стрілець. Очевидно, що

$$A=A_1\overline{A}_2\overline{A}_3+\overline{A}_1A_2\overline{A}_3+\overline{A}_1\overline{A}_2A_3\,.$$

Доданки в цій сумі – несумісні події, а в кожному доданку множники – незалежні події, тому ймовірність суми дорівнює сумі ймовірностей кожного доданку, а ймовірність добутків доданків дорівнює добутку ймовірностей множників. Одержимо:. $P(A)=0{,}8\cdot0{,}3\cdot0{,}1+0{,}2\cdot0{,}7\cdot0{,}1+0{,}2\cdot0{,}3\cdot0{,}9=0{,}092$

2) Подія B – влучили лише два стрільці:

$$B=A_1A_2\overline{A}_3+A_1\overline{A}_2A_3+\overline{A}_1A_2A_3$$

$$P(B)=0{,}8\cdot0{,}7\cdot0{,}1+08\cdot0{,}3\cdot0{,}9+0{,}2\cdot0{,}7\cdot0{,}9=0{,}398\,.$$

3) Подія C – влучили три стрільці: $C=A_1A_2A_3$.

$$P(C)=0{,}8\cdot0{,}7\cdot0{,}9=0{,}504\,.$$

4) Подія D – влучив хоча б один стрілець: $\overline{D}=\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3$,

$$P(\overline{D})=0{,}2\cdot0{,}3\cdot0{,}1=0{,}006\,,$$

тоді

$$P(D)=1-P(\overline{D})=1-0.006=0{,}994.$$

ТРЕНУВАЛЬНІ ВПРАВИ

1. Монету кидають 3 рази. Знайти ймовірність того, що „герб" випаде 2 рази, використавши теореми додавання та множення ймовірностей.

2. Нехай $P(A)\geq 0{,}8$; $P(B)\geq 0{,}8$. Довести, що $P(AB)\geq 0{,}6$.

3. У першій скриньці 5 білих і 10 чорних куль, у другій – 10 білих і 5 чорних. З кожної скриньки навмання витягнули по одній кулі. Знайти ймовірність, що витягнули хоча б одну білу кулю.

4. У скриньці 10 червоних та 6 синіх куль. Навмання витягають 2 кулі. Яка ймовірність того, що витягнуті кулі одного кольору?

5. Знайти ймовірність того, що навмання вибране двозначне число є кратним 2, або 5, або 2 і 5 одразу?

6. На грошово-речовій лотереї на кожні 10 000 білетів припадає 200 речових і 50 грошових виграшів. Яка ймовірність виграшу (речового чи грошового) для того, хто має 1 білет?

7. У цеху є три резервні двигуни, для кожного з яких імовірність бути ввімкненим у даний момент дорівнює 0,3. Знайти ймовірність того, що в даний момент увімкнено:

1) принаймні два двигуни;

2) принаймні один двигун.

8. Від аеровокзалу відправились два автобуси. Імовірність своєчасного прибуття кожного з них дорівнює 0,92. Знайти ймовірність такої події:

A – обидва автобуси прибудуть своєчасно;

B – обидва автобуси запізняться;

C – тільки один автобус прибуде своєчасно.

9. Маємо дві партії деталей. У першій партії сім придатних і три браковані деталі. У другій – 10 придатних і 4 браковані. Із кожної партії навмання беруть по одній деталі. Знайти ймовірність такої події:

1) обидві деталі придатні;

2) обидві деталі браковані;

одна деталь придатна, а друга бракована.

10. Студент прийшов на залік, знаючи відповідь на 24 питання з 30-ти. Яка ймовірність скласти залік, якщо після неправильної відповіді на питання викладач задає ще одне питання?

11. Кубик кинули двічі. Знайти умовну ймовірність того, що випало дві „п’ятірки, якщо відомо, що сума очок, що випали, ділиться на 5.

12. Кинуто послідовно 3 монети. Визначити, залежні, чи незалежні події: A={випав „герб” на першій монеті}, B={випала хоча б одна „цифра”}.

13. Кинули монету і кубик. Визначити залежні, чи незалежні події: А ={випав „герб”}, В ={випала парна кількість очок}.

14. Імовірність влучання в ціль для першого стрільця рівна 0,8, а для другого – 0,6. Стрільці незалежно один від одного зробили по одному пострілу. Яка ймовірність, що в ціль влучить хоча б один з них?

15. Три студенти, незалежно один від одного, вимірюють деяку фізичну величину. Імовірність того, що перший допустить помилку під час зчитування показів приладу, дорівнює 0,1; для другого ця ймовірність – 0,15; для третього – 0,2. Знайти ймовірність того, що під час одноразового вимірювання хоча б один з дослідників допустить помилку.

16. В електричне коло послідовно увімкнено 3 елементи, які можуть виходити з ладу незалежно один від одного. Імовірності відмови елементів за час Т відповідно рівні 0,1; 0,15 і 0,2. Яка ймовірність того, що через час Т струму в колі не буде?

17. Імовірність хоча б одного влучання в ціль за 3 постріли рівна 0,875. Знайти ймовірність влучання за один постріл.

18. Двоє мисливців зробили по одному пострілу в ціль. Імовірність влучання для них відповідно рівні 0,7 і 0,8. Знайти ймовірності того, що: 1) обидва влучили; 2)лише один влучив; 3) жоден не влучив; 4) хоча б один влучив.

19. Імовірність вчасного повернення кредиту для першої фірми становить 0,7, для другої – 0,8. Знайти ймовірності того, що:
1) вчасно повернуть кредит обидві фірми;
2) поверне лише одна фірма;
3) жодна не поверне;
4) хоча б одна поверне.

20. Партія містить 12 стандартних і 4 нестандартні деталі. Навмання беруть три деталі. Знайти ймовірність того, що серед узятих деталей:
1) не менш як дві стандартні;
2) усі три нестандартні;
3) хоча б одна стандартна.

21. Маємо 3 партії деталей. Перша партія складається з 10 стандартних і 3 нестандартних деталей, друга – із 15 стандартних і 4 нестандартних, третя – із 20 стандартних і 5 нестандартних деталей. Із кожної партії беруть по одній деталі. Знайти ймовірність того, що серед узятих деталей:

1) лише одна стандартна;
2) лише дві стандартні.

22. Перевезення вантажів для підприємства забезпечують два автогосподарства, які з цієї метою щодня в першу зміну мають виділяти по одному автомобілю. Імовірність виходу автомобіля на лінію в першому автогосподарстві дорівнює 0,7, а в другому – 0,6. Знайти ймовірність того, що в першу зміну на підприємстві перевозитимуться вантажі.

23. Прилад складається із трьох вузлів, які працюють незалежно один від одного, причому другий і третій вузли взаємозамінювані. Імовірності виходу з ладу вузлів на заданому часовому проміжку становлять відповідно 0,2; 0,3 і 0,4. Знайти ймовірність того, що протягом заданого часу прилад працюватиме.

24. Монету підкидають 6 разів. Знайти ймовірність того, що хоча б один раз з’явиться герб.

25. Урна містить 20 куль, з яких 8 куль білого кольору, 12 – чорного. Обчислити ймовірність того, що при витягуванні з урни трьох куль всі вони виявляться чорного кольору.

26. Кинуто два гральних кубики. Знайти ймовірність того, що сума очок, які випали на гранях, дорівнює 5, а добуток 4.

27. У майстерні працюють 2 мотори, незалежно друг від друга. Імовірність того, що протягом години перший мотор не зажадає уваги майстра, дорівнює 0,9. Для другого мотора ця ймовірність дорівнює 0,85. Яка ймовірність того, що протягом години жоден з моторів не потребує уваги майстра.

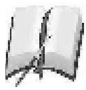
28. Групі студентів з 30 осіб видали путівки: 5 – у Крим, 18 – в Одесу, 7 – у Миргород. Путівки розподіляються жеребкуванням. Яка ймовірність того, що двоє друзів відпочиватимуть разом?

29. У ящику 10 червоних й 6 синіх ґудзиків. Виймаються навмання 2 ґудзика. Яка ймовірність того, що ґудзика будуть одноколірними?

30. На книжковій полиці 15 підручників, 5 з яких – з теорії ймовірностей. Студент навмання обирає 3 підручника з цих 15. Знайти ймовірність того, що
1) хоча б один підручник з теорії ймовірностей;
2) 2 підручники з теорії ймовірностей;
3) усі підручники з теорії ймовірностей;
4) усі підручники не з теорії ймовірностей.

31. Імовірність того, що подія А з'явиться хоча б раз у двох незалежних випробуваннях, дорівнює 0,75. Знайти ймовірність появи цієї події в одному випробуванні.

32. Перші ЕОМ працювали на електронних лампах. Нехай у одній з таких ЕОМ було 10 000 електронних ламп, які незалежно одна від одної могли перегорати з імовірністю 0,0001 за період часу Т. Якщо хоча б 1 лампа становилась несправна, ЕОМ давала невірні результати. Яка ймовірність вихода ЕОМ зі строю за період часу Т?



ВАРІАНТИ ІНДИВІДУАЛЬНИХ ЗАВДАНЬ

Варіант 1

1. В ящику 8 деталей, серед яких 2 нестандартні. Знайти ймовірність того, що серед двох вибраних навмання деталей не буде жодної стандартної.
2. Два стрільці стріляють в одну і ту ж ціль. Імовірність влучення для 1-го стрільця 0,8, для 2-го – 0,9. Знайти ймовірність ураження цілі (ціль визнається ураженою при влученні у неї хоча б однієї кулі).

Варіант 2

1. Двоє задумали по одному цілому числу: перший від 1 до 50, другий від 51 до 100. Яка ймовірність того, що обидва задумали числа, кратні 11?
2. В електричне коло послідовно увімкнено 3 елементи, які працюють незалежно один від одного. Імовірність відмови 1-го, 2-го і 3-го елементів відповідно дорівнюють 0,1, 0,15 і 0,2. Знайти ймовірність того, що струму в колі не буде.

Варіант 3

1. Є два ящики з кулями. У першому 3 білих та 7 чорних, у другому 6 білих та 9 чорних. З кожного ящика виймають по одній кулі. Яка ймовірність того, що обидві кулі білі?
2. Прилад містить два незалежно працюючі елементи. Імовірності відмови елементів відповідно дорівнюють 0,05 та 0,08. Знайти ймовірність відмови приладу, якщо для цього достатньо відмови хоча б одного з елементів.

Варіант 4

1. Для зруйнування мосту достатньо влучення однієї бомби. Знайти ймовірність того, що міст буде зруйновано, якщо на нього будуть скинуті 4 бомби з імовірностями влучення відповідно 0,3, 0,4, 0,6 та 0,7.
2. Чому дорівнює ймовірність того, що при одночасному киданні трьох гральних кубиків 2 очки з'являться тільки на двох кубиках?

Варіант 5

1. З натуральних чисел, що не перевищують 100, беруть два довільні числа. Визначити ймовірність того, що обидва ці числа діляться на 5.
2. Робітник обслуговує три верстати. Ймовірність безперебійної роботи впродовж однієї години після налагодження для першого верстата дорівнює 0,8, для другого – 0,9, для третього – 0,75. Знайти ймовірність того, що впродовж години тільки один верстат потребує втручання робітника.

Варіант 6

1. Яка ймовірність того, що задумане в межах 100 ціле число ділиться на 10 або на 11?
2. Імовірність того, що кожний з трьох друзів прийде в умовлене місце, відповідно дорівнює 0,8, 0,4 та 0,7. Визначити ймовірність того, що зустріч відбудеться, якщо для цього достатньо з'явитися двом з трьох друзів.

Варіант 7

1. В урні a білих та b чорних куль. З урни виймають дві кулі. Знайти ймовірність того, що ці кулі різного кольору.
2. Студент вивчив до іспит 30 питань з 50. У білеті 3 питання. Яка ймовірність того, що студент знає хоча б 2 з них?

Варіант 8

1. На клумбі 20 червоних, 10 синіх та 30 білих айстр. Яка ймовірність того, що зірвана в темряві айстра виявиться червоною або синьою?
2. Робітник обслуговує три верстати. Імовірність безперебійної роботи впродовж години після налагодження для першого верстата дорівнює 0,9, для другого – 0,8, для третього – 0,7. Знайти ймовірність того, що впродовж цієї години точно два верстати потребують втручання робітника.

Варіант 9

1. З ящика, у якому 10 стандартних і 5 бракованих деталей, дістають 2 деталі. Яка ймовірність того, що обидві деталі браковані?
2. Робітник обслуговує три верстати. Відомо, що ймовірність безперебійної роботи впродовж однієї години після налагодження для першого верстата дорівнює 0,9, для другого – 0,8, і для третього – 0,7. Знайти ймовірність того, що впродовж цієї години лише один верстат потребує втручання.

Варіант 10

1. Є лабіринт з шістьма розгалуженнями. З кожного розгалуження є два шляхи, причому один з них веде в глухий кут. Обчислити ймовірність, з якою можна пройти цим лабіринтом, не заходячи в жоден глухий кут.
2. Для сигналізації про аварію встановлено 2 незалежно один від одного працюючі пристрої. Імовірність того, що під час аварії спрацює перший пристрій, дорівнює 0,9, другий – 0,95. Знайти ймовірність того, що під час аварії спрацює хоча б один пристрій.

Варіант 11

1. Три стрільці стріляють по одній мішені, при цьому ймовірність влучення з одного пострілу для них відповідно дорівнює 0,8, 0,7 та 0,6. Знайти ймовірність з'яви в мішені двох пробоїн внаслідок одночасного пострілу всіх трьох стрільців.
2. Для сигналізації про аварію встановлено 3 незалежно працюючі пристрої. Імовірність того, що під час аварії спрацює перший пристрій, дорівнює 0,9, другий – 0,95 і третій – 0,85. Знайти ймовірність того, що під час аварії спрацює хоча б один пристрій.

Варіант 12

1. З урни, яка містить 5 куль, занумерованих числами 1,2,3,4,5, виймають навмання всі п’ять куль одну за одною. Яка ймовірність того, що номери вийнятих куль розмістяться у зростаючому порядку?
2. Імовірність влучення у ціль даним стрільцем з одного пострілу дорівнює 0,8. Стрілець зробив три постріли. Знайти ймовірність влучення у ціль хоча б однієї кулі.

Варіант 13

1. З 10 квитків виграшними є 2. Визначити ймовірність того, що серед взятих навмання 2 квитків обидва будуть виграшними.

2. Три стрільці стріляють в одну і ту ж мішень. При цьому відомо, що ймовірність влучення з одного пострілу для 1-го стрільця дорівнює 0,8, для 2-го – 0,7, для 3-го – 0,6. Знайти ймовірність появи в мішені однієї пробоїни, якщо стрільці зробили по одному пострілу.

Варіант 14

1. На кінець дня в наметі залишилось 60 кавунів, з яких 50 зрілі. Покупець вибирає 2 кавуни. Яка ймовірність того, що обидва кавуни дозрілі?
2. Робітник обслуговує три верстати. Імовірність порушення нормальної роботи впродовж години після перевірки для першого верстата дорівнює 0,1, для другого – 0,15, для третього – 0,2. Знайти ймовірність того, що після перевірки впродовж години хоча б один з верстатів потребує ремонту.

Варіант 15

1. Імовірність влучення у ціль першого стрільця дорівнює 0,8, другого – 0,6. Знайти ймовірність влучення у ціль хоча б однієї кулі, якщо обидва стрільці зроблять по одному пострілу.
2. Знайти ймовірність того, що підкинутий гральний кубик впаде, показавши на верхній грані парне і кратне трьом число.

Варіант 16

1. У двох ящиках знаходяться деталі: в 1-му 10 (з них 3 стандартні); в 2-му 15 (з них 6 стандартні). З кожного ящика навмання виймають по одній деталі. Яка ймовірність того, що обидві деталі стандартні?
2. У групі 25 студентів. З них відмінно встигають з математики 5 осіб, добре –12, задовільно – 6, незадовільно – 2. Знайти ймовірність того, що студент, викликаний навмання, буде відмінником або хорошистом.

Варіант 17

1. Серед 40 деталей є 5 нестандартних. Узято навмання дві деталі. Знайти ймовірність того, що обидві деталі будуть нестандартні.
2. На студії телебачення – 3 телекамери. Для кожної камери ймовірність того, що вона в даний момент увімкнена, дорівнює 0,6. Знайти ймовірність того, що в даний момент увімкнена хоча б одна з телекамер.

Варіант 18

1. Студент знає 45 питань з 60. Кожен екзаменаційний квиток містить три питання. Знайти ймовірність того, що студент знає всі три питання.
2. Робітник обслуговує три верстати, які працюють незалежно один від одного. Ймовірність того, що впродовж години перший верстат не потребуватиме уваги робітника, дорівнює 0,9, для другого така ймовірність дорівнює 0,8, а для третього – 0,85. Знайти ймовірність того, що впродовж години якийсь один верстат потребуватиме уваги робітника.

Варіант 19

1. Знайти ймовірність дворазового виймання білої кулі з урни, в якій з 12 куль є 7 білих, якщо:

1) вийнята куля повертається назад в урну;
2) вийнята куля в урну не повертається.

2. Робітник обслуговує три верстати, які працюють незалежно один від одного. Ймовірність того, що впродовж години перший верстат не потребуватиме уваги робітника, дорівнює 0,9, для другого така ймовірність дорівнює 0,8, а для третього – 0,85. Яка ймовірність того, що впродовж години хоча б один верстат потребуватиме уваги робітника?

Варіант 20

1. Імовірність схожості призначеного для посіву насіння дорівнює 0,98. Імовірність попадання насіння на придатний для проростання ґрунт дорівнює 0,95. Який відсоток насіння за цих умов дасть сходи?
2. Чому дорівнює ймовірність того, що при одночасному киданні трьох монет герб з’явиться хоча б на одній з них?

Варіант 21

1. Підприємство виготовляє 95% стандартних виробів, причому 86% з них першого сорту. Знайти ймовірність того, що взятий навмання виріб цього підприємства виявиться виробом першого сорту.
2. Чому дорівнює ймовірність того, що при киданні трьох гральних кубиків 6 очок випаде хоча б на одному з них?

Варіант 22

1. Яка ймовірність того, що при витягуванні двох карт з повної колоди 52 гральних карт обидві вони виявляться картами бубнової масті?

2. Три електричні лампочки послідовно увімкнено в коло. Імовірність того, що будь-яка лампочка перегорить, якщо напруга в мережі перевищить номінальну, дорівнює 0,6. Знайти ймовірність того, що при підвищенні напруги струму в колі не буде.

Варіант 23

1. Монету підкидають 6 разів. Знайти ймовірність того, що хоча б один раз з’явиться герб.
2. Імовірність влучення у ціль першого стрільця з одного пострілу дорівнює 0,8, другого – 0,6. Знайти ймовірність того, що у ціль влучить тільки один стрілець, якщо вони зробили по одному пострілу.

Варіант 24

1. Три стрільці зробили по одному пострілу в одну і ту ж мішень. Імовірність влучення в мішень для першого стрільця дорівнює 0,9, для другого – 0,8, для третього – 0,7. Знайти ймовірність того, що всі стрільці промахнулись.
2. В урні 8 куль чорного та 12 куль білого кольору. Обчислити ймовірність того, що при вийманні з урни двох куль обидві будуть чорного кольору.

Варіант 25

1. Набираючи номер телефону, абонент забув дві останні цифри і, пам’ятаючи лише, що вони різні, набрав їх навмання. Знайти ймовірність того, що набрано потрібні цифри.
2. У грошово-речовій лотереї, в якій розігруються 120 грошових та 80 речових виграшів, 10000 білетів. Знайти ймовірність того, що на придбаний один лотерейний білет випаде виграш, речовий або грошовий.

1.7. ФОРМУЛА ПОВНОЇ ЙМОВІРНОСТІ. ФОРМУЛА БАЄСА.

ОСНОВНІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

Формула повної ймовірності. Нехай подія A може відбутися тільки за умови настання однієї із несумісних подій B_i ($i = 1, 2, \ldots, n$), які утворюють повну групу. Тоді ймовірність події A обчислюється за формулою:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(Bi) \cdot P_{Bi}(A),$$

де $P(B_i)$ – імовірність події B_i;

$P_{Bi}(A)$ – умовні ймовірності настання події A.

Події $B_i (i = 1, 2, ..., n)$, які утворюють повну групу подій і попарно несумісні, називаються ***гіпотезами***. Подія A може відбутись одночасно з деякою із подій B_i. Відомі ймовірності подій B_i та умовні ймовірності того, що подія A відбудеться. Відомо, що в результаті випробування подія A відбулась. Потрібно з огляду на це переоцінити ймовірності гіпотез B_i. Для цього застосовують ***формулу Баєса***:

$$P_A(Bi) = \frac{P(Bi)P_{Bi}(A)}{\sum_{i=1}^{n} P(Bi)P_{Bi}(A)}.$$

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

1. На двох верстатах-автоматах виробляють однакові деталі, які надходять на транспортер. Продуктивність першого верстата утричі більша, ніж другого, причому перший верстат виробляє нестандартну деталь з імовірністю 0,15, а другий – з імовірністю 0,2. Знайти ймовірність того, що навмання взята з транспортера деталь буде стандартною.

Розв'язання.

Розглянемо події: B_1 – «деталь виготовлено на першому верстаті»; B_2 – «деталь виготовлено на другому верстаті»; A – «вибрана деталь стандартна». Події B_1 і B_2 несумісні й утворюють повну групу, що ж до події A, то вона може відбутись одночасно з кожною із цих подій. Умовні ймовірності настання події A відомі. Згідно з умовою, що продуктивність першого верстата утричі більша, ніж другого, знаходимо $P(B_1) = 0{,}75$, $P(B_2) = 0{,}25$. За формулою повної ймовірності маємо: $P(A) = 0{,}75 \cdot 0{,}85 + 0{,}25 \cdot 0{,}8 = 0{,}8375.$

2. Партію виготовлених деталей перевіряли два контролери. Перший перевірив 45 %, а другий – 55 % деталей. Імовірність припуститися помилки під час перевірки для першого контролера становить 0,15, для другого – 0,1. Після додаткової перевірки в партії прийнятих деталей виявлено браковану. Оцінити ймовірність помилки для кожного контролера.

Розв'язання.

Розглянемо події: B_1 – «деталь перевіряв перший контролер»; B_2 – «деталь перевіряв другий контролер»; A – «виявлено браковану деталь». Події B_1 і B_2 несумісні й утворюють повну групу. Подія A відбулась одночасно з однією із цих подій, імовірності яких потрібно переоцінити. Застосуємо формулу Баєса.

$$P(B_1/A)=\frac{P(B_1)P(A/B_1)}{\sum_{j=1}^{2}P(B_j)P(A/B_j)}=\frac{0{,}45\cdot 0{,}15}{0{,}45\cdot 0{,}15+0{,}55\cdot 0{,}1}\approx 0{,}551;$$

$$P(B_2/A)=1-P(B_1/A)=1-0{,}551=0{,}449.$$

Отже, більш імовірно, що помилки припустився перший контролер.

3. Маємо дві партії однакових виробів. Перша складається з 15 стандартних і 4 нестандартних, друга – із 18 стандартних і 5 нестандартних виробів. Із навмання вибраної партії взято один виріб, який виявився стандартним. Знайти ймовірність того, що другий навмання взятий виріб також буде стандартним.

Розв'язання.

Розглянемо події: B_1 – «перший виріб взято з першої партії»; B_2 – «перший виріб узято з другої партії»; A – «перший узятий виріб стандартний»; C – «другий узятий виріб стандартний». За формулою повної ймовірності знаходимо ймовірність події A:

$$P(A)=P(B_1)P(A/B_1)+P(B_2)P(A/B_2)=\frac{1}{2}\cdot\frac{15}{19}+\frac{1}{21}\cdot\frac{18}{23}=\frac{587}{874}.$$

За формулою Баєса обчислюємо умовні ймовірності $P(B_1/A)$ і $P(B_2/A)$:

$$P(B_1/A)=\frac{1}{2}\cdot\frac{15}{19}:\frac{587}{874}=\frac{115}{229};\quad P(B_2/A)=1-\frac{115}{229}=\frac{114}{229}.$$

Імовірність події C знаходимо за формулою:

$$P(C/A)=P(B_1/A)P(C/A\cap B_1)+P(B_2/C)P(C/A\cap B_2).$$

Умовні ймовірності такі: $P(C/A\cap B_1)=\frac{7}{9}$, $P(C/A\cap B_2)=\frac{17}{22}$. Отже,

$$P(C/A) = \frac{115}{229} \cdot \frac{7}{9} + \frac{114}{229} \cdot \frac{17}{22} \approx 0{,}775.$$

4. Є два набори деталей. Імовірність того, що деталь з першого набору стандартна, дорівнює 0,6, а другого – 08. Знайти ймовірність того, що взята навмання деталь з навмання взятого набору буде стандартна.

Розв'язання.

Нехай A – подія, ймовірність якої треба знайти, тобто вийнята деталь стандартна. Таку деталь можна вийняти з першого набору (гіпотеза B_1), або з другого набору (гіпотеза B_2). Через то, що ці гіпотези однаково можливі, то $P(B_1) = P(B_2) = 0{,}5$. Умовна ймовірність того, що з першого набору буде вийнято стандартну деталь $P_{B_1}(A) = 0{,}6$, а з другого – $P_{B_2}(A) = 0{,}8$.

Шукана ймовірність знаходиться за формулою повної ймовірності

$$P(A) = P(B_1)P_{B_1}(A) + P(B_2)P_{B_2}(A) = 0{,}5 \cdot 0{,}6 + 0{,}5 \cdot 0{,}8 = 0{,}3 + 0{,}4 = 0{,}7$$

5. Нехай за умови попереднього прикладу вийнято стандартну деталь. Знайти ймовірність того, що її вийнято з першого набору.

Розв'язання.

За формулою Байєса, підставляючи значення відповідних імовірностей (позначення ті ж, що і в попередній задачі), одержимо $P_A(B_i) = \frac{0{,}5 \cdot 0{,}6}{0{,}3 + 0{,}4} = \frac{0{,}3}{0{,}7} = \frac{3}{7}$.

ТРЕНУВАЛЬНІ ВПРАВИ

1. На конвеєр надходять деталі від трьох автоматів. Перший дає 90 %, другий – 93 %, а третій – 95 % придатної продукції. Протягом зміни від першого автомата надходить 60, від другого – 50, від третього – 40 деталей. Знайти ймовірність потрапляння на конвеєр:1) нестандартної деталі; 2)стандартної деталі.

2. На складі зберігаються кінескопи, 70 % яких виготовлено на заводі № 1, а решта – на заводі № 2. Імовірність того, що кінескоп витримає гарантійний строк, дорівнює 0,9 для заводу № 2 і 0,8 для заводу № 1. Знайти ймовірність того, що навмання взятий кінескоп: 1) не витримає гарантійного строку; 2) витримає гарантійний строк.

3. Металеві заготівки для подальшої обробки надходять із двох цехів: 55 % із першого, 45 % із другого. При цьому продукція з першого цеху містить 3 %, а з другого цеху – 5 % браку. Знайти ймовірність того, що заготівка, яка надійшла на обробку:1) придатна; 2) бракована.

4. На склад надходить продукція від двох підприємств. Від першого – 60 %, від другого – 40 %. Перше підприємство дає 80 % продукції 1-го сорту і 20 % 2-го сорту, а друге дає 70 % продукції 1-го сорту і 30 % 2-го сорту. Знайти ймовірність того, що навмання взята одиниця продукції буде: 1)першого сорту; 2) другого сорту.

5. Для посіву пшениці заготовлено насіння, серед якого 95 % 1-го сорту, 3 % 2-го та 2 % 3-го сорту. Імовірність того, що з насінини виросте колосок, в якому не менш ніж 50 зерен, для1-го сорту насіння становить 0,5, для 2-го сорту – 0,2, для 3-го – 0,1. Знайти ймовірність того, що навмання взятий колосок у разі такого посіву матиме не менш як 50 зерен.

6. Деталі на конвеєр надходять із двох автоматів. Від першого – 60 %, від другого – 40 %. Перший автомат дає 2 %, а другий – 1 % браку. Деталь, яка надійшла на конвеєр, виявилась стандартною. Знайти ймовірність того, що цю деталь виготовлено: 1) першим автоматом; 2) другим автоматом.

7. Деякий прилад випускається у трьох варіантах в залежності від застосування у ньому одного з трьох елементів: A_1, A_2 чи A_3. Відомо, що ймовірність безперебійної роботи впродовж деякого часу після налагодження у випадку застосування елемента A_1 дорівнює 0,98, у випадку застосування елементів A_2 і A_3 відповідно 0,96 і 0,92. Відомо також, що 20% усіх приладів випускається у варіанті A_1, 30% – у варіанті A_2, а решта 50% – у варіанті A_3. Знайти ймовірність безперебійної роботи впродовж деякого часу після налагодження навмання взятого приладу.

8. Виріб перевіряється на стандартність одним із двох товарознавців. Імовірність того, що виріб попаде першому товарознавцеві дорівнює 0,6, а другому – 0,4. Імовірність того, що стандартний виріб буде визнано стандартним першим товарознавцем дорівнює 0,98, а другим – 0,95. Стандартний виріб після перевірки визнано стандартним. Знайти ймовірність того, що цей виріб перевіряв перший товарознавець.

9. У кожній з трьох урн міститься по 6 чорних та 4 білих куль. З першої урни навмання вийняли одну кулю і переклали у другу урну, після чого із другої урни навмання вийняли одну кулю і переклали у третю урну. Знайти ймовірність того, що куля, навмання вийнята з третьої урни, виявиться білою.

10. Електричні лампи виготовляють на трьох заводах. Перший завод виготовляє 45% загальної кількості електричних ламп, другий – 40%, третій – 15%. Продукція першого заводу складає 70% стандартних ламп, другого – 80%, третього – 81%. До магазинів потрапляє продукція всіх трьох заводів. Яка ймовірність того, що придбана в магазині електрична лампа виявиться стандартною.

11. У ящику міститься 12 деталей, вироблених на першому заводі, 20 деталей, вироблених на другому заводі і 18 деталей вироблених на третьому заводі. Імовірність того, що деталь, виготовлена на першому заводі – відмінної якості, дорівнює 0,9; для деталей, вироблених на другому та третьому заводах, ці ймовірності відповідно дорівнюють 0,6, та 0,9. Знайти ймовірність того, що навмання вийнята деталь буде відмінної якості.

12. У перший урні міститься 10 кульок, з них 8 білі; у другій урні 20 кульок, з них 4 білі. З кожної урни навмання взяли по одній кульці, а потім з них навмання взяли одну кульку. Знайти ймовірність того, що ця кулька виявиться білою.

13. Маємо 3 однакових на вигляд ящика. У першому ящику 20 білих кульок, у другому – 10 білих і 10 чорних кульок, у третьому - 20 чорних. З вибраного навмання ящика дістали білу кульку. Яка ймовірність того, що кулька з першого ящика?

14. У перший урні 20 білих кульок, в другій 10 білих и 10 чорних кульок, в третій – 20 чорних кульок. З навмання обраної урни взяли білу кульку. Знайти ймовірність того, що вона з першої урни.

15. Імовірність попасти в ціль при пострілі для першого стрільця дорівнює 0,3; для другого – 0,5; для третього – 0,8. Попадання в ціль зафіксовано. Знайти ймовірність того, що влучив перший стрілець..

16. На склад поступає продукція трьох фабрик, причому продукція першої фабрики складає 20%, другої – 46% і третьої – 34%. Відомо також, що процент нестандартних виробів для першої фабрики дорівнює 3%, для другої – 2%, для третьої – 1%. Знайти ймовірність того, що навмання взятий нестандартний виріб вироблено на першій фабриці.

17. Три екзаменатори приймають іспит з теорії ймовірностей у групи з 30 студентів. Перший опитує 6 випадково обраних зі списку студентів, другий – 3, третій – 21. У тих, хто слабко підготувався до іспиту, шанси скласти іспит різні: у першого викладача – 40%, у другого -10%, у третього - 70%. Знайти ймовірність того, що студент, який слабко підготувався до іспиту, складе його.

18. На фірму надходять комплектуючі від трьох постачальників А, В і С. На долю фірми А приходиться 50% загального об’єму поставок, фірми В – 30%, С – 20%. Серед деталей, які поставляє фірма А, 10% бракованих, фірма В - 5%, С – 6%. Яка ймовірність того, що наугад взята деталь виявиться стандартною?

19. Імовірність того, що виріб задовольняє стандарту, 0,96. Пропонується спрощена схема перевірки на стандартність, яка дає вірний результат з ймовірністю 0,98 для стандартних деталей і з ймовірністю 0,05 для нестандартних. Знайти ймовірність того, що виріб, признаний за цією схемою стандартним, справді задовольняє умовам стандарту.

ВАРІАНТИ ІНДИВІДУАЛЬНИХ ЗАВДАНЬ

Варіант 1

1. На складання поступають деталі від трьох автоматів. Перший дає 25%, другий – 30% і третій – 45% деталей даного типу, що поступають на складання. Перший автомат допускає 0,1% нестандартних деталей, другий – 0,2%, третій – 0,3%. Яка ймовірність надходження нестандартної деталі?

2. У спеціалізовану лікарню поступають у середньому 60% хворих із захворюванням K, 30% хворих із захворюванням L, 10% – із захворюванням M. Імовірність повного вилікування хвороби K дорівнює 0,7, для хвороб L і M ці ймовірності дорівнюють 0,8 і 0,9. Знайти ймовірність того, що навмання взятого хворого, який поступив у лікарню, буде виписано здоровим.

3. Нехай за умов попередньої задачі хворого, який поступив у лікарню, було виписано здоровим. Знайти ймовірність того, що цей хворий страждав захворюванням K.

Варіант 2

1. Є два набори деталей. Імовірність того, що деталь першого набору бракована, дорівнює 0,01, другого – 0,02. Знайти ймовірність того, що взята навмання деталь з навмання взятого набору доброякісна.
2. Для сигналізації про те, що режим роботи автоматичної лінії відхиляється від нормального, використовується індикатор. Він належить з імовірностями 0,2, 0,3 і 0,5 до одного з трьох типів, для яких імовірності спрацьовування при порушенні нормальної роботи дорівнюють, відповідно, 0,9, 0,7 та 0,6. Знайти ймовірність того, що навмання взятий індикатор спрацює при порушенні нормальної роботи лінії.
3. Нехай за умов попередньої задачі від індикатора одержано сигнал. Знайти ймовірність того, що індикатор належить до першого типу.

Варіант 3

1. Є три урни з кулями. В першій урні 4 білі та 3 чорні, у другій 5 білих та 2 чорні, в третій 2 білі та 5 чорних. Хтось обирає навмання одну урну і виймає з неї кулю. Знайти ймовірність того, що ця куля – біла.
2. На двох автоматичних верстатах виготовляються однакові деталі. Відомо, що ймовірність виготовлення деталі найвищої якості на першому верстаті дорівнює 0,92, а на другому – 0,8. Виготовлені на обох верстатах не розсортовані деталі знаходяться на складі. Серед них деталей, виготовлених на першому верстаті, у 3 рази більше, ніж на другому. Знайти ймовірність того, що навмання взята деталь буде деталлю найвищої якості.
3. Нехай за умов попередньої задачі навмання взята деталь виявилась деталлю найвищої якості. Знайти ймовірність того, що вона виготовлена на другому верстаті.

Варіант 4

1. Певний виріб може поступити для обробки випадковим чином на один з трьох верстатів з імовірностями, що дорівнюють відповідно 0,2, 0,3 та 0,5. Під час обробки на першому верстаті ймовірність браку дорівнює 0,02, на другому – 0,03, на третьому – 0,05. Знайти ймовірність того, що виріб, який поступив у цех, після обробки відповідатиме технічним умовам.

2. Нехай за умов попередньої задачі виріб, який поступив у цех, відповідає технічним умовам. Яка ймовірність того, що цей виріб оброблявся на третьому верстаті?

3. У ящику знаходяться 5 деталей, серед яких можуть бути і браковані. Вийнята навмання деталь виявилась не бракована. Знайти ймовірність того, що 3 деталі в ящику не браковані, а 2 браковані, якщо припустити, що перед дослідом всі гіпотези рівноможливі.

Варіант 5

1. Радіолампа належить до однієї з двох партій з імовірностями $p_1 = 0,6$ і $p_2 = 0,4$. Імовірність того, що лампа працюватиме задану кількість годин дорівнює відповідно для цих партій 0,7 та 0,8. Знайти ймовірність того, що вибрана навмання лампа працюватиме задану кількість годин.

2. Нехай за умов попередньої задачі лампа пропрацювала задану кількість годин. Яка ймовірність того, що вона належить до першої партії?

3. В ящику знаходяться 4 деталі, серед яких можуть бути і браковані. Вийнята навмання деталь виявилась якісною. Знайти ймовірність того, що всі деталі в ящику якісні, якщо припустити, що перед дослідом усі гіпотези рівноможливі.

Варіант 6

1. У першій коробці 20 деталей, серед яких 18 стандартних, у другій – 10 деталей, серед них 7 стандартних. З другої коробки навмання взято одну деталь і перекладено у першу. Знайти ймовірність того, що деталь, вийнята навмання з першої коробки, буде стандартною.

2. Нехай за умов попередньої задачі деталь, яку вийнято з першої коробки виявилась стандартною. Яка ймовірність того, що з другої коробки в першу перекладена стандартна деталь?

3. Деталі, виготовлені в цеху деякого заводу, попадають для перевірки їх нестандартність до одного з двох контролерів. Імовірність того, що деталь попаде до першого контролера, дорівнює 0,6, а до другого – 0,4. Імовірність того, що стандартну деталь буде визнано стандартною першим контролером, дорівнює 0,94, а другим – 0,98. Знайти ймовірність того, що стандартну деталь буде визнано стандартною.

Варіант 7

1. Є два набори деталей. Імовірність того, що деталь першого набору стандартна, дорівнює 0,8, а другого 0,9. Знайти ймовірність того, що взята навмання деталь із навмання взятого набору нестандартна.
2. Нехай за умов попередньої задачі взята навмання деталь із навмання взятого набору виявилась нестандартною. Яка ймовірність того, що вона належить до першого набору?
3. На складання надходять деталі з трьох автоматів. Перший дає 20%, другий –30% і третій –50% деталей даного типу, які поступають на складання. Перший автомат допускає 0,2% браку, другий – 0,3%, третій – 0,5%. Знайти ймовірність того, що навмання взята деталь буде стандартна.

Варіант 8

1. У цеху три типи автоматичних верстатів виробляють одні й ті ж деталі. Верстати першого типу виробляють 0,94 деталей відмінної якості, другого – 0,9 і третього – 0,85. Усі виготовлені в цеху впродовж зміни деталі у не розсортованому вигляді знаходяться на складі. Знайти ймовірність того, що взята навмання деталь виявиться деталлю відмінної якості, якщо верстатів першого типу 5 штук, другого – 3 штуки, третього – 2 штуки і продуктивність усіх однакова.
2. Нехай за умов попередньої задачі взята навмання деталь виявилась деталлю відмінної якості. Знайти ймовірність того, що вона була виготовлена на верстаті першого типу.
3. Є три однакові на вигляд ящики. У першому з них 20 білих куль, у другому – 10 білих та 10 чорних, у третьому – 20 чорних куль. З вибраного навмання ящика вийняли білу кулю. Обчислити ймовірність того, що кулю вийнято з першого ящика.

Варіант 9

1. В ящик, що містить дві деталі, вкинуто стандартну деталь, а потім навмання вийнято одну деталь. Знайти ймовірність того, що вийнято стандартну деталь, якщо однаково ймовірні всі можливі припущення про число стандартних деталей, які з самого початку знаходились у ящику.
2. Нехай за умов попередньої задачі вийнято стандартну деталь. Знайти ймовірність того, що з самого початку в ящику була одна стандартна і одна нестандартна деталь.

3. Для сигналізації про те, що режим роботи автоматичної лінії відхиляється від нормального, використовується індикатор. Він належить з імовірностями 0,7 і 0,3 до одного з двох типів, для яких імовірності спрацьовування під час порушення нормальної роботи лінії дорівнюють відповідно 0,4 і 0,8. Знайти ймовірність одержання сигналу, якщо буде порушена нормальна робота лінії.

Варіант 10

1. У групі спортсменів знаходяться 20 лижників, 6 велосипедистів та 4 бігуни на довгі дистанції. Імовірність виконати кваліфікаційну норму для лижника дорівнює 0,9, велосипедиста – 0,8, для бігуна – 0,6. Знайти ймовірність того, що спортсмен, вибраний навмання, виконає кваліфікаційну норму.
2. Нехай за умов попередньої задачі спортсмен виконав кваліфікаційну норму. Знайти ймовірність того, що це був велосипедист.
3. У двох урнах знаходяться білі та чорні кулі. У першій – 3 білі та 2 чорні, в другій 2 білі та 2 чорні. З першої урни навмання виймають одну кулю і перекладають у другу, а потім з другої урни навмання виймають одну кулю. Знайти ймовірність того, що ця куля буде білою.

Варіант 11

1. Для участі в студентських відбірних змаганнях виділено з першої групи курсу 4, з другої 6, з третьої 5 студентів. Імовірності того, що студенти першої, другої та третьої груп попадуть у збірну інституту, відповідно дорівнюють 0,9, 0,7 та 0,6. Знайти ймовірність того, що студент, вибраний навмання, за підсумками відбірних змагань попаде у збірну.
2. Нехай за умов попередньої задачі навмання вибраний студент за підсумками відбірних змагань попав у збірну. Знайти ймовірність того, що це був студент першої групи.
3. У першому ящику міститься 12 ламп, з яких одна нестандартна, в другому – 10 ламп, з яких теж одна нестандартна. З першого ящика навмання взято лампу і перекладено в другий. Знайти ймовірність того, що навмання вийнята з другого ящика лампа – нестандартна.

Варіант 12

1. Біля бензоколонки, що стоїть на шосе, проїжджають в середньому 80% вантажних та 20% легкових автомашин. Імовірність того, що буде заправлятись вантажна машина,

дорівнює 0,05, для легкової ця ймовірність дорівнює 0,1. Знайти ймовірність того, що вибрана навмання машина буде заправлятись.

2. У телевізійному ательє знаходяться 4 кінескопи різних типів. Імовірності того, що кінескопи витримають гарантійний термін служби, відповідно дорівнюють 0,8; 0,85; 0,9; 0,95. Знайти ймовірність того, що взятий навмання кінескоп витримає гарантійний термін.

3. Нехай за умов попередньої задачі вибраний навмання кінескоп витримав гарантійний термін служби. Знайти ймовірність того, що це був кінескоп 1-го типу.

Варіант 13

1. У першій коробці міститься 15 деталей, з них 12 стандартних, у другій коробці 10 деталей, з них 8 стандартних. З першої коробки навмання взято деталь і перекладено в другу. Знайти ймовірність того, що деталь, навмання вийнята з другої коробки, буде стандартною.

2. Деякий виріб може поступати для обробки випадковим чином на один з трьох верстатів з імовірностями відповідно 0,2; 0,3 та 0,5. При обробці на першому верстаті ймовірність браку дорівнює 0,02, на другому верстаті – 0,03 і на третьому – 0,05. Знайти ймовірність того, що вибраний навмання виріб після обробки буде бракованим.

3. Нехай за умов попередньої задачі виріб, що поступив у цех, після обробки виявився доброякісним. Знайти ймовірність того, що він оброблявся на першому верстаті.

Варіант 14

1. Є два набори деталей. Імовірність того, що деталь першого набору бракована, дорівнює 0,01, а другого – 0,02. Знайти ймовірність того, що взята навмання деталь з навмання взятого набору – доброякісна.

2. Радіолампа, яку поставили в телевізор, може належати до однієї з трьох партій з імовірністю 0,2; 0,5 і 0,3. Імовірність того, що лампа буде працювати певне число годин, для цих партій відповідно дорівнює 0,8; 0,6 і 0,9. Знайти ймовірність того, що вибрана навмання лампа буде працювати певне число годин.

3. Нехай за умов попередньої задачі радіолампа, яку вибрано навмання, пропрацювала певне число годин. Знайти ймовірність того, що вона належала до першої партії.

Варіант 15

1. У першому ящику міститься 20 деталей, з них 15 стандартних, у другому –30 деталей, з них 27 стандартних, у третьому – 10 деталей, з них 9стандартних. Знайти ймовірність того, що навмання вийнята деталь з навмання взятого ящика – стандартна.
2. Нехай за умов попередньої задачі навмання вийнята деталь з навмання взятого ящика виявилась стандартною. Яка ймовірність того, що її вийнято з першого ящика?
3. Два автомати виробляють деталі, які поступають на загальний конвеєр. Імовірність одержання нестандартної деталі на першому автоматі дорівнює 0,06, а на другому – 0,03. Продуктивність першого автомата вдвоє більша за продуктивність другого. Знайти ймовірність того, що деталь, яку навмання взято з конвеєра, – нестандартна.

Варіант 16

1. Складальник одержав три коробки деталей, виготовлених заводом №1, і дві коробки деталей, виготовлених заводом №2. Імовірність того, що деталь заводу №1 стандартна, дорівнює 0,8, а заводу №2 – 0,9. Складальник навмання вийняв деталь з навмання взятої коробки. Знайти ймовірність того, що вийнято стандартну деталь.
2. Нехай за умов попередньої задачі складальник вийняв стандартну деталь. Яка ймовірність того, що вона виготовлена заводом №1?
3. Для участі в студентських відбірних змаганнях було виділено з першої групи 4 студенти, з другої – 10, з третьої – 6 студентів. Імовірність того, що відібраний студент з першої, другої, третьої груп попаде в збірну інституту,дорівнює відповідно 0,5; 0,4 та 0,3. Навмання вибраний учасник змагань попав у збірну. Яка ймовірність того, що він з першої групи?

Варіант 17

1. У групі легкоатлетів 30 спортсменів: 8 бар’єристів, 12 бігунів на довгі дистанції та 10 стрибунів з жердиною. Імовірність виконати кваліфікаційну норму для бар’єриста дорівнює 0,9, для бігуна – 0,5 і для стрибуна з жердиною – 0,6. Знайти ймовірність того, що спортсмен, вибраний навмання, виконає кваліфікаційну норму.

2. Нехай за умов попередньої задачі вибраний навмання спортсмен виконав кваліфікаційну норму. Знайти ймовірність того, що це був стрибун з жердиною.
3. Серед деталей, що поступають на складання з першого верстата, 0,1% бракованих, з другого – 0,2%, з третього – 0,3% і з четвертого – 0,5%. Продуктивності цих верстатів відносяться як 4:3:2:1 відповідно. Деталь, яку було взято навмання, виявилась стандартною. Знайти ймовірність того, що вона виготовлена на першому верстаті.

Варіант 18

1. Є 3 набори деталей. Імовірність того, що деталь першого набору стандартна, дорівнює 0,9, другого – 0,75, третього – 0,6. Знайти ймовірність того, що взята навмання деталь з навмання взятого набору – стандартна.
2. У двох урнах знаходяться кулі. В першій урні 4 білі та 6 чорних, в другій 3 білі та 2 чорні. З першої урни навмання вийнято одну кулю і перекладено в другу. Потім з другої урни виймають кулю. Знайти ймовірність того, що ця куля – біла.
3. Нехай за умов попередньої задачі з другої урни вийнято білу кулю. Яка ймовірність того, що з першої урни в другу було перекладено білу кулю?

Варіант 19

1. Пластмасові болванки виготовляються на трьох пресах. Перший прес виробляє 50% всіх болванок, другий – 30% і третій – 20%. При цьому серед болванок, які поступають з першого преса, в середньому 0,03 нестандартних, з другого – 0,02 нестандартних, з третього – 0,01нестандартних. Яка ймовірність того, що взята навмання болванка відповідає стандарту?
2. Нехай за умов попередньої задачі взята навмання болванка виявилась стандартною. Яка ймовірність того, що вона виготовлена на першому пресі?
3. У першій коробці міститься 20 радіоламп, з них 18 стандартних. У другій коробці – 10 радіоламп, з них 8 стандартних. З другої коробки навмання взято лампу і перекладено в першу. Знайти ймовірність того, що лампа,навмання вийнята з першої коробки, – стандартна.

Варіант 20

1. Деталі для складання виготовляються на двох верстатах, причому перший виробляє деталей в 4 рази більше ніж другий. При

цьому брак складає 0,02 продукції першого верстата і 0,01 продукції другого верстата. Знайти ймовірність того, що взята навмання деталь виявиться придатною для складання.

2. Нехай за умов попередньої задачі взята навмання деталь виявилась придатною для складання. Знайти ймовірність того, що вона виготовлена на першому верстаті.

3. У першій урні знаходяться 2 білі та 3 чорні кулі, в другій – 4 білі та 1 чорна. З першої урни навмання вийнято одну кулю і перекладено в другу. Знайти ймовірність того, що куля, навмання вийнята з другої урни, – біла.

Варіант 21

1. Деякий виріб може надійти для обробки випадковим чином на один з двох верстатів з імовірностями 0,6 та 0,4. При обробці на першому верстаті ймовірність браку дорівнює 0,02, на другому – 0,03. Знайти ймовірність того, що виріб, який поступив у цех, після обробки виявиться доброякісним.

2. Нехай за умов попередньої задачі виріб, що поступив у цех, після обробки виявився доброякісним. Знайти ймовірність того, що він оброблявся на другому верстаті.

3. У двох урнах знаходяться кулі білого та чорного кольору. У першій урні – 5 білих та 3 чорні, в другій – 3 білі та 2 чорні. З першої урни навмання вийнято одну кулю і перекладено в другу. Знайти ймовірність того, що куля, навмання вийнята з другої урни, – біла.

Варіант 22

1. Є два набори деталей. Імовірність того, що деталь першого набору стандартна, дорівнює 0,95, а другого – 0,85. Знайти ймовірність того, що взята навмання деталь з навмання взятого набору – стандартна.

2. Нехай за умов попередньої задачі вийнято нестандартну деталь. Яка ймовірність того, що її вийнято з першого набору?

3. Є 5 гвинтівок, серед них 2 з оптичним прицілом. Імовірність влучення у ціль пострілом з гвинтівки, яка має оптичний приціл, становить для даного стрільця 0,95, без оптичного прицілу – 0,8. Знайти ймовірність влучення у ціль, якщо стрілець зробить один постріл з гвинтівки, взятої навмання.

Варіант 23

1. Прилад може працювати у двох режимах: нормальному та ненормальному. Нормальний режим спостерігається у 80% всіх

випадків роботи приладу, ненормальний – у 20%. Імовірність виходу з ладу приладу, що працює в нормальному режимі впродовж часу Т, дорівнює 0,1, в ненормальному – 0,7. Знайти ймовірність виходу з ладу приладу впродовж часу Т.

2. Нехай за умов попередньої задачі прилад вибув з ладу впродовж часу Т. Знайти ймовірність того, що він працював у нормальному режимі.

3. Є три однакові урни. У першій 5 білих і 3 чорні, у другій 3 білі та 1 чорна, у третій тільки білі кулі. Дехто підходить навмання до однієї з урн і виймає одну кулю. Знайти ймовірність того, що ця куля буде біла.

Варіант 24

1. Прилади одного найменування виготовляються на двох заводах: перший поставляє 60% всіх виробів, другий – 40%. Імовірність безвідмовної роботи впродовж часу Т приладу, виготовленого на першому заводі, дорівнює 0,9, на другому – 0,8. Знайти ймовірність безвідмовної роботи впродовж часу Т взятого навмання приладу, що поступив на виробництво.

2. Нехай за умов попередньої задачі взятий навмання прилад працював безвідмовно впродовж часу Т. Яка ймовірність того, що цей прилад виготовлено на першому заводі?

3. Пасажир може звернутися в одну з двох кас за одержанням квитка. Імовірність звертання в кожну касу залежить від її місця розташування і дорівнює відповідно 0,7 та 0,3. Імовірність того, що до приходу пасажира квитки будуть розпродані, дорівнює для першої каси 0,8, а для другої – 0,4. Знайти ймовірність того, що, звернувшись в одну з кас, пасажир придбає квитка.

Варіант 25

1. Проводиться стрільба по цілі. Ціль складається з трьох частин, площі яких дорівнюють S_1, S_2, S_3 ($S_1 + S_2 + S_3 = S$). Для снаряда, що влучив у ціль, ймовірність влучити в ту або іншу частину пропорційна площі цієї частини. При влученні у першу частину ціль буде уражена з імовірністю p_1, в другу частину – p_2, у третю – p_3. Знайти ймовірність ураження цілі, якщо відомо, що у неї влучив один снаряд.

2. Першим заводом на кожні 100 електроламп виробляється в середньому 90 стандартних, другим – 95, третім – 85, а їх продукція складає відповідно 50, 30 і 20 відсотків всіх

електроламп, що надходять у магазин даного району. Знайти ймовірність придбання стандартної електролампи.
3. Нехай за умов попередньої задачі електролампа, яку придбали в магазині даного району, була стандартна. Знайти ймовірність того, що її виготовлено на першому заводі.

1.8.СХЕМА ВИПРОБУВАНЬ З ПОВТОРЕННЯМИ

ОСНОВНІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

Незалежні випробування. Нехай проводяться n випробувань, у кожному з яких подія А може відбутись або не відбутись. Якщо ця ймовірність у кожному випробуванні не залежить від того, відбулась вона в інших випробуваннях чи ні, то такі випробування називаються незалежними щодо події А. Згідно з означенням випробування також незалежні, якщо в кожному з них імовірність настання події А однакова. Імовірність того, що подія А відбудеться в кожному з незалежних випробувань, позначають $P(A)=p,$ а ймовірність настання протилежної події $P(\overline{A})=1-p=q.$ Для розв'язування задач на повторні незалежні випробування застосовують такі формули і теореми.

Формула Бернуллі. Імовірність того, що в n незалежних випробуваннях, у кожному з яких імовірність Р(А) = р, подія А відбудеться m раз, обчислюється за формулою:
$P_n(m)=C_n^m p^m q^{n-m}$.

Формула застосовується, якщо $n \leq 10$.

Локальна теорема Лапласа. Імовірність того, що в n незалежних випробуваннях, у кожному з яких $P(A) = p$, подія A відбудеться m раз, подається такою наближеною залежністю:

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x), \text{ де } \varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \; x=\frac{m-np}{\sqrt{npq}}.$$

Локальна теорема Лапласа дає змогу обчислювати ймовірності $P_n(m)$, якщо $n > 10$ і $p > 0{,}1$.

Формула Пуассона. Якщо в кожному з n незалежних повторних випробувань $P(A)=p$ і $0<p<0{,}1$, а n велике, то

$$P_n(m)\approx\frac{a^m}{m!}e^{-a},\ a=np.$$

Інтегральна теорема Лапласа. Імовірність того, що подія A відбудеться від m_1 до m_2 раз при проведенні n незалежних випробувань, у кожному з яких подія A відбувається з імовірністю p, обчислюється за формулою:

$$P_n(m_1,m_2)\approx\Phi(x_2)-\Phi(x_1),$$

де $\Phi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$ – функція Лапласа;

$$x_1=\frac{m_1-np}{\sqrt{npq}},\ x_2=\frac{m_2-np}{\sqrt{npq}}.$$

Значення функції Лапласа наводяться у спеціальних таблицях (див. додатки).

Відхилення відносної частоти від імовірності. Імовірність того, що при проведенні n незалежних випробувань відхилення відносної частоти події A від її ймовірності за модулем не перевищить ε, визначається за формулою:

$$P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|<\varepsilon\right)\approx2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right).$$

ПРИКЛАДИ РОЗВ’ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

1. Андрій робить 4 спроби виграти у грального автомата. Імовірність виграшу у кожній спробі складає 0,2. Дослідіть задачу на відповідність схемі Бернуллі.

Розв’язання.

У кожній спробі може відбутися один з двох наслідків: Андрій виграв – успіх, Андрій програв – невдача. Імовірність успіху у кожній спробі складає 0,2. Випадкова величина можливої кількості успіхів –ряд невід’ємних цілих чисел від 0 до 4. Отже, задача – схема Бернуллі.

2. Кидаємо монету 6 раз. Знайти ймовірність того, що герб

випаде 1, 3, 5 разів.
*Розв'язання***.**
Згідно з формулою $P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}$ маємо:

$$P_6(1) = C_6^1 \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{6}{1} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{32} = \frac{6}{64},$$

$$P_6(3) = C_6^3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{8} = \frac{20}{64},$$

$$P_6(5) = C_6^5 \left(\frac{1}{2}\right)^5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 \cdot \frac{1}{2} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \cdot \frac{1}{32} \cdot \frac{1}{2} = \frac{6}{64}.$$

3. Знайти ймовірність того, що подія *A* з'явиться три рази в чотирьох випробуваннях, якщо ймовірність її появи в одному випробуванні дорівнює 0,1.
*Розв'язання***.**
Шукана ймовірність

$$P_4(3) = C_4{}^3 p^3 q^{4-1} = 4 \cdot (0{,}1)^3 \cdot 0{,}9 = 0{,}0036 \ .$$

4. Із партії, в якій 12 стандартних і 4 нестандартні деталі, навмання беруться 3 деталі з поверненням. Знайти ймовірність того, що серед узятих деталей:
1) усі три стандартні;
2) не більш як одна нестандартна;
3) принаймні одна нестандартна.
*Розв'язання***.**
Маємо схему трьох незалежних випробувань. Нехай подія *A* – «узята щоразу деталь стандартна», тоді $P(A) = p = \frac{12}{16} = 0{,}75.$

Імовірності обчислюватимемо за формулою Бернуллі:
1) $P_3(3) = C_3^3 p^3 q^0 = 0{,}75^3 = 0{,}421875.$
2) Подію «із трьох деталей не більш як одна нестандартна» можна розглядати так: узято 3 стандартні деталі або 2 стандартні і одну нестандартну деталь. У позначеннях формули Бернуллі

$$P_3(m \geq 2) = P_3(3) + P_3(2) = 0{,}421875 + C_3^2 \cdot 0{,}75^2 \cdot 0{,}25 = 0{,}84375.$$

3) Протилежною для даної буде подія «усі три деталі стандартні». Їй рівносильна подія $P_3(m < 3)$. Обчислимо цю ймовірність: $P_3(m < 3) = 1 - P_3(3) = 1 - 0{,}421875 = 0{,}578125.$

5. На кожні 40 відштампованих виробів у середньому припадає 4 дефектних. Із усієї продукції навмання узято 400 виробів. Знайти ймовірність того, що серед них 350 виробів будуть без дефектів.

Розв'язання.

Подія *A* – «узято виріб без дефекту». За умовою $P(A) = p = 0,9$. Проведено $n = 400$ незалежних випробувань. Розв'яжемо задачу за формулою локальної теореми Лапласа: $P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x)$,

$x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}$.

Підставляючи дані за умовою задачі, дістаємо:

$$x = \frac{350 - 400 \cdot 0,9}{\sqrt{400 \cdot 0,9 \cdot 0,1}} \approx -1,67.$$

За таблицями знаходимо $\varphi(-1,67) = \ = 0,0989$, беручи до уваги, що $\varphi(x)$ – парна функція.

Отже, $P_{400}(350) \approx \frac{0,0989}{6} \approx 0,0165.$

6. Завод відправив на базу 1000 доброякісних виробів. За час перебування в дорозі кожний виріб може бути пошкоджено з імовірністю 0,003. Знайти ймовірність того, що на базу прибудуть 3 пошкоджені вироби.

Розв'язання.

Якщо подія *A* – «виріб пошкоджено», то її ймовірність $p = 0,003$. Розглядається схема незалежних випробувань, $n = 1000$. Імовірність події *A* досить мала, тому задачу розв'яжемо за формулою Пуассона: $P_n(m) \approx \frac{a^m}{m!} e^{-a}$.

Виконуючи обчислення, знаходимо: $a = np = 1000 \cdot 0,003 = 3$;

$$P_{1000}(3) \approx \frac{3^3}{3!} e^{-3} \approx 0,229.$$

7. Для кожного абонента ймовірність подзвонити на комутатор протягом однієї години дорівнює 0,01. Комутатор обслуговує 300 абонентів. Знайти ймовірність того, що протягом години подзвонять:

1) 4 абонента;

2) не більш 4 абонентів.

Розв'язання.

1) $n = 300$, $p = 0{,}01$, $q = 0{,}99$, $l = np = 3$,

$npq = 3 \cdot 0{,}99 = 2{,}97 < 9$.

2) $P_{300}\{0 \le k \le 4\} = 1 - \sum_{k=5}^{\infty} \frac{3^k}{k!} e^{-3} = 1 - 0{,}184737 = 0{,}815263$

8. Знайти ймовірність того, що подія A наступить рівно 80 разів в 400 випробуваннях, якщо ймовірність появи цієї події в кожнім випробуванні дорівнює 0,2.

Розв'язання.

1) $n = 400,\ k = 80,\ p = 0{,}2,\ q = 0{,}8.$

2) Скористаємося формулою Лапласа:

$$P_{400}(80) = \frac{1}{\sqrt{400 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8}} \cdot \varphi(x) = \frac{1}{8} \cdot \varphi(x)$$

3) Знайдемо x: $x = \dfrac{80 - 400 \cdot 0{,}2}{8} = 0.$

4) За таблицею знайдемо: $\varphi(x) = \varphi(0) = 0{,}3989$.

5) Шукана ймовірність $P_{400}(80) = \frac{1}{8} \cdot 03989 = 0{,}04986$.

9. Зерна пшениці проростають з імовірністю 0,95. Знайти ймовірність того, що із 2000 посіяних зерен зійде від 1880 до 1920.

Розв'язання.

Подія A – «зерно пшениці зійшло». Її імовірність p = 0,95, кількість незалежних випробувань n = 2000. Застосуємо формулу інтегральної теореми Лапласа:

$P_n(m_1; m_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$, де

$$x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}},\ \ x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}},$$

$\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2p}} \displaystyle\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ - функція Лапласа.

Виконаємо обчислення:

$$x_1=\frac{1880-2000\cdot 0{,}95}{\sqrt{2000\cdot 0{,}95\cdot 0{,}05}}\approx -1{,}03;\ x_2=\frac{1920-1900}{\sqrt{95}}\approx 2{,}06;$$

$$P_{2000}(1880;1920)\approx \Phi(2{,}06)-\Phi(-1{,}03)=\Phi(2{,}06)+\Phi(1{,}03)=$$
$$=0{,}4803+0{,}3485=0{,}8288.$$

Значення функції Лапласа беруться з відповідної таблиці, яка розміщена додатках. .

10. Імовірність того, що деталь не пройшла перевірку ВТК, дорівнює p = 0,2. Знайти ймовірність того, що серед 400 випадково відібраних деталей виявиться неперевірених від 70 до 100 деталей.

Розв'язання.

1) $p=0{,}2,\ q=0{,}8,\ n=400,\ k_1=70,\ k_2=100$.

2) За інтегральною теоремою Муавра-Лапласа:

$$x'=\frac{k_1-np}{\sqrt{npq}}=\frac{70-400\cdot 0{,}2}{\sqrt{400\cdot 0{,}2\cdot 0{,}8}}=-1{,}25;$$

$$x''=\frac{k_2-np}{\sqrt{npq}}=\frac{100-400\cdot 0{,}2}{\sqrt{400\cdot 0{,}2\cdot 0{,}8}}=2{,}5.$$

3) $P_{400}(70,100)=\Phi(2{,}5)-\Phi(-1{,}25)=\Phi(2{,}5)+\Phi(1{,}25)$.

4) За таблицею: $\Phi(2{,}5)=0{,}4938$; $\Phi(1{,}25)=0{,}3944$.

5) Шукана ймовірність $P_{400}(70, 100)$ = 0, 4938 + 0, 3944 = 0, 8877.

11. Верстат-автомат виготовляє стандартну деталь з імовірністю 0,9. Із продукції беруть партію деталей. Скільки деталей має містити партія, щоб з імовірністю 0,9973 можна було стверджувати: у партії відхилення відносної частоти появи нестандартної деталі від імовірності її виготовлення не перевищуватиме 0,03? Визначити можливу кількість нестандартних деталей у партії за даних умов.

Розв'язання.

Подія A – «виготовлено нестандартну деталь». Маємо схему з n незалежними випробуваннями, в якій $P(A)=p=0{,}1$. Скористаємося формулою:

$$P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|<\varepsilon\right)\approx 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right).$$

$$2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right)=0{,}9973;\ \Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right)=0{,}49865.$$

За таблицями знаходимо $\varepsilon\sqrt{\dfrac{n}{pq}}=3;\ n=\dfrac{9pq}{\varepsilon^2}=900.$

Визначимо кількість нестандартних деталей у партії за даних умов, розв'язавши нерівність:

$$\left|\frac{m}{900}-0{,}1\right|<0{,}03;\ -0{,}03<\frac{m}{900}-0{,}1<0{,}03;\ 0{,}07<\frac{m}{900}<0{,}13;\ 63<m<117.$$

Отже, у партії із 900 деталей буде від 63 до 117 нестандартних деталей.

ТРЕНУВАЛЬНІ ВПРАВИ

1. Дослідіть задачі на відповідність схемі Бернуллі:

1) Хлопчик 4 рази кидає м'яча в корзину. Імовірність попадання для кожного кидка 0,25.

2) Зі 100 лотерейних білетів 20 мають виграш по 1 грн., 2 грн. і 3 грн. Інші – програшні.

3) 4 рази підкидається гральний кубик. У досліді цікавить тільки кількість випадань грані з числом 5.

4) До магазину завезено 20 мішків цукру з розрахунковою вагою по 50 кг кожний. Імовірність того, що мішок цукру важчий за розрахункову вагу, дорівнює 0,1, що легший – 0,5.

2. Схожість насіння даного виду оцінюється ймовірністю 0,4. Яка ймовірність того, що з посіяних 6 насінин зійдуть 2?

3. Імовірність влучення у ціль з одного пострілу дорівнює 0,8. Знайти ймовірність того, що з 5 пострілів у ціль буде влучено 2 рази.

4. На кожні 30 штампованих виробів у середньому припадає 6 виробів з дефектом. Знайти ймовірність того, що з 5 навмання взятих виробів 3 виявляться без дефекту.

5. Монета кидається 8 разів підряд. Знайти ймовірність того, що 6 разів вона впаде гербом нагору.

6. Нехай схожість насіння жита становить 90%. Знайти ймовірність того, що з 7 посіяних насінин зійде 5.

7. Гральна кістка підкинута 10 разів. Знайти ймовірність випадання одиниці 7 разів.

8. Прийнявши ймовірність народження хлопчика за 0,515, знайти ймовірність того, що серед 10 немовлят буде 4 дівчинки.

9. Імовірність виграшу облігації за весь період позики становить 0,6. Куплено 5 облігацій. Знайти ймовірність такої події:

1) виграють дві облігації;

2) виграш випаде принаймні на одну облігацію;

3) виграють не більш як дві облігації.

10. Імовірність поразки мішені при одному пострілі дорівнює 0,8. Знайти ймовірність того, що при 100 пострілах мішень буде уражена рівно 75 разів.

11. Монета була підкинута 40 разів. Знайти ймовірність того, що герб випаде в 25 випадках.

12. Відомо,що футболіст Зідан забиває пенальті з імовірністю 0,9. Яка ймовірність того, що з 20 одинадцятиметрових ударів він заб’є рівно 16.

13. Для забезпечення роботи на деякому будівельному об’єкті автопідприємство має 6 автомобілів. Імовірність виходу кожного автомобіля на лінію в першу зміну дорівнює 0,8. Знайти ймовірність нормальної роботи автопідприємства, якщо для цього в першу зміну потрібно мати на лінії не менш як 4 автомобілі.

14. Частка 2-го сорту деякої масової продукції в середньому становить 20 %. Навмання взято 100 примірників цієї продукції. Яка кількість виробів 2-го сорту в утвореній групі найімовірніша і яка ймовірність того, що в цій групі буде саме така кількість виробів 2-го сорту?

15. Посівний фонд містить 92 % насіння 1-го сорту. Навмання взято 150 зерен. Знайти ймовірність того, що серед них 140 зерен 1-го сорту.

16. Прядильниця обслуговує 1000 веретен. Імовірність обриву нитки на одному веретені протягом 1 хв. дорівнює 0,005. Знайти ймовірність того, що протягом 1 хв. буде обрив нитки на двох веретенах.

17. До банку надійшло 5000 пачок грошових знаків. Імовірність того, що пачку неправильно скомплектовано, дорівнює 0,0004. Знайти ймовірність того, що серед одержаних пачок буде не більш як одна неправильно укомплектована.

18. Частка 1-го сорту в деякій продукції в середньому становить 80 %. Скільки примірників цієї продукції треба взяти, щоб з імовірністю 0,9 можна було стверджувати, що в партії буде не менш як 75 примірників 1-го сорту?

19. Знайти ймовірність того, що в результаті 4 незалежних випробувань подія А з'явиться не менше як 3 рази, якщо в результаті одного випробування ймовірність її з'яви дорівнює 0,2.

20. Імовірність того, що деталь не пройде перевірку ВТК дорівнює 0,1. Знайти ймовірність того, що з 400 випадковим чином відібраних деталей перевірку ВТК не пройдуть:

а) рівно 46 деталей;

б) від 30 до 50 деталей.

21. Імовірність виходу з ладу конденсатора впродовж деякого часу Т дорівнює 0,2. Яка ймовірність того, що зі 100 конденсаторів впродовж часу Т вийдуть з ладу:

а) рівно 22 конденсатори;

б) від 14 до 28 конденсаторів.

22. Кубик кидають 6000 разів. Знайти ймовірність того, що „двійка " випаде 900 разів.

23. Монету кидають 100 разів. Яка ймовірність того, що кількість випадань „герба" буде в межах від 45 до 55?

24. Підприємство виробляє 99,2% стандартних виробів. Яка ймовірність того, що серед 5000 навмання вибраних виробів кількість нестандартних не більша за 50?

25. Робітниця прядильного цеху обслуговує 800 веретен. Імовірність обриву пряжі в кожному з веретен за час Т становить 0,005. Знайти ймовірність того, що за час Т буде більше 10-ти обривів.

26. Знайти ймовірність того, що серед 10000 деталей буде 40 бракованих, якщо ймовірність браку для одної деталі становить 0,005.

27. У перші класи мають прийняти 200 дітей. Знайти ймовірність того, що серед них виявиться 100 хлопців, якщо ймовірність народження хлопця становить 0,515.

28. Знайти ймовірність того, що в родині, яка має п'ятьох дітей, буде 3 дівчини та 2 хлопця.

29. Пристрій складається з 1000 елементів, що працюють незалежно один від одного. Імовірність відмови будь-якого елемента за час Т рівна 0,002. Знайти ймовірність того, що за час Т відмовлять 3 елементи.

30. На кожні 40 відштампованих виробів у середньому припадає 4 дефектних. Із усієї продукції навмання узято 400 виробів. Знайти ймовірність того, що серед них 350 виробів будуть без дефектів.

31. Завод відправив на базу 1000 доброякісних виробів. За час перебування в дорозі кожний виріб може бути пошкоджено з імовірністю 0,003. Знайти ймовірність того, що на базу прибудуть 3 пошкоджені вироби.

32. Зерна пшениці проростають з імовірністю 0,95. Знайти ймовірність того, що із 2000 посіяних зерен зійде від 1880 до 1920.

33. Верстат-автомат виготовляє стандартну деталь з імовірністю 0,9. Із продукції беруть партію деталей. Скільки деталей має містити партія, щоб з імовірністю 0,9973 можна було стверджувати: у партії відхилення відносної частоти появи нестандартної деталі від імовірності її виготовлення не перевищуватиме 0,03? Визначити можливу кількість нестандартних деталей у партії за даних умов.

34. Прядильниця обслуговує 1000 веретен. Імовірність обриву нитки на одному веретені за 1 хв. дорівнює 0,004. Знайти ймовірність того, що протягом 1 хв. обрив відбудеться на 5 веретенах.

35. Магазин одержав 1000 пляшок мінеральної води. Імовірність того, що під час перевезення пляшка виявиться розбитою, дорівнює 0,003. Знайти ймовірність того, що магазин одержав розбитих пляшок:

1) рівно 2; 2) менш 2; 3) більше 2; 4) хоча б одну.

36. Рукопис об'ємом в 1000 сторінок машинописного тексту містить 1000 помилок. Знайти ймовірність того, що навмання взята сторінка містить:

1) хоча б одну помилку;
2) рівно 2 помилки;
3) не менш 2 помилок.

37. Імовірність народження хлопчика дорівнює 0,51. Знайти ймовірність того, що серед 100 немовлят буде 50 хлопчиків.

38. У наслідок багаторічних спостережень помічено що з 1000 новонароджених у середньому 515 хлопчиків і 485 дівчаток. Знайти імовірність того, що в родині, в якій шестеро дітей, не більше як дві дівчинки.

39. Знайти приближно ймовірність того, що при 400 випробуваннях подія наступить рівно 104 рази, якщо ймовірність її появи в кожному випробуванні дорівнює 0,2.

40. Імовірність появи події в кожнім випробуванні дорівнює 0,25. Знайти ймовірність того, що при 300 випробуваннях подія наступить:

1) рівно 75 разів;

2) рівно 85 разів.

41. У перші класи буде прийнято 200 дітей. Знайти ймовірність того, що серед них виявиться 100 дівчаток, якщо ймовірність народження хлопчиків дорівнює 0,515.

42. Медики стверджують, що 94% осіб, які отримали щеплення проти туберкульозу, мають стійкий імунітет. Яка ймовірність того, що серед 100 000 громадян зі щепленнями 5800 не мають імунітету проти згаданої хвороби?

43. Імовірність зустріти на вулиці знайомого дорівнює 0,2. Яка ймовірність того, що серед перших зустрічних 100 осіб буде 25 знайомих?

44. У місті мешкає однакова кількість чоловіків і жінок. Яка ймовірність серед 100 випадкових перехожих зустріти 35 жінок?

45. Яка ймовірність того, що серед 500 довільно обраних осіб п’ятеро народилися 8 березня?

46. Імовірність того, що деталь, що зійшла з конвеєра, стандартна, дорівнює 0,9. Знайти ймовірність того, що з 400 деталей 356 виявляться стандартними.

47. Імовірність того, що деталь, що зійшла з конвеєра, стандартна, дорівнює 0,9. Знайти ймовірність того, що з 400 деталей число стандартних буде від 370 до 380.

48. Імовірність виготовлення деталі вищого сорту на даному верстаті дорівнює 0,4. Знайти ймовірність того, що серед навмання взятих 26 деталей половина виявиться вищого сорту.

49. Антон робить 10 спроб виграти у грального автомата. Яка ймовірність того, що Антон матиме від 2 до 4 успішних спроб, якщо ймовірність виграшу в кожній спробі дорівнює 0,2?

50. У селищі Станційне ймовірність того, що зустрічна людина працює на залізниці, дорівнює 0,1. Яка ймовірність того, що серед перших зустрічних 50 людей буде не менше 5 і не більше 7 залізничників?

51. У селищі Шахтарське ймовірність того, що зустрічна людина працює на шахті, дорівнює 0,3. Яка ймовірність того, що з перших зустрічних десяти людей більше 6 є шахтарями?

52. Гральний кубик підкидається 12000 разів. Яка ймовірність того, що число 5 випаде від 1900 до 2100 разів?

53. Знайти ймовірність того, що подія A наступить рівно 70 разів в 243 випробуваннях, якщо ймовірність появи цієї події у кожному випробуванні дорівнює 0,25.

54. Імовірність появи події в кожному з 2100 незалежних випробуваннях дорівнює 0,7. Знайти ймовірність того, що подія з'явиться:

1) не менш 1470 разів і не більше 1500 разів;
2) не менш 1470 разів;
3) не більше 1469 разів.

55. Імовірність поразки мішені стрільцем при одному пострілі дорівнює 0,75. Знайти ймовірність того, що при 100 пострілах мішень буде уражена:

1) не менш 70 разів і не більше 80 разів;
2) не більше 70 разів.

56. Яка ймовірність того, що в стовпчику з 100 навмання відібраних монет, число монет, розташованих гербом нагору, буде від 45 до 55?

57. Схожість насіння даної рослини дорівнює 0,9. Знайти ймовірність того, що з 900 посіяних насінин число пророслих буде між 790 й 830.

58. Імовірність того, що відвідувач магазину зробить покупку, дорівнює 0,75. Знайти ймовірність того, що при 100 відвідуваннях клієнт зробить покупку 80 разів.

ВАРІАНТИ ІНДИВІДУАЛЬНИХ ЗАВДАНЬ

Варіант 1

1. Для кожного з чотирьох автобусів, що працюють на маршруті, ймовірність зламатися протягом місяця дорівнює $\frac{1}{3}$. Яка ймовірність того, що впродовж місяця зламаються два автобуси?
2. Імовірність обриву нитки на одне веретено впродовж години дорівнює 0,1. Знайти ймовірність того, що число обривів упродовж години на 100 веретен буде:

1) рівно 16;
2) не менше як 7 і не більше 13.

Варіант 2

1. Знайти ймовірність того, що подія A з'явиться в 4 незалежних випробуваннях не менше двох разів, якщо ймовірність з'яви події A в результаті кожного випробування дорівнює 0,2.
2. Імовірність влучення у мішень з одного пострілу дорівнює 0,9. Визначити ймовірність того, що зі 100 пострілів у мішень буде влучено:

1) рівно 90 разів;
2) від 81 до 93 разів.

Варіант 3

1. У цеху 4 мотори. Для кожного мотора ймовірність того, що його в дану мить увімкнено, дорівнює 0,6. Знайти ймовірність того, що в дану мить увімкнено:

1) 2 мотори;
2) усі мотори.

2. Імовірність влучення у рухливу мішень дорівнює 0,2. Чому дорівнює ймовірність того, що з 25 пострілів вдалими будуть:

1) 9 пострілів;
2) від 3 до 9 пострілів.

Варіант 4

1. Імовірність виготовлення автоматом стандартної деталі дорівнює 0,9. Визначити ймовірність того, що з трьох навмання взятих деталей:

1) дві виявляться стандартними;
2) стандартними виявляться всі три.

2. Імовірність виходу з ладу протягом деякого часу T одного конденсатора дорівнює 0,1. Знайти ймовірність того, що зі 100 конденсаторів протягом часу T з ладу вийдуть:

1) рівно 16 конденсаторів;
2) від 4 до 19 конденсаторів.

Варіант 5

1. У бавовні знаходиться 10% коротких волокон. Яка ймовірність того, що у навмання взятому віхті з 4 волокон виявиться не більше двох коротких?
2. Імовірність влучення у мішень з одного пострілу дорівнює 0,8. Знайти ймовірність того, що в результаті 400 пострілів у мішень буде влучено:

1) рівно 300 разів;
2) від 240 до 340 разів.

Варіант 6

1. Знайти ймовірність того, що подія А з'явиться в результаті 5 незалежних випробувань не менше як два рази, якщо в результаті кожного випробування ймовірність її з'яви дорівнює 0,2.
2. Знайти ймовірність того, що серед навмання взятих 100 деталей 55 виявляться відполірованими, якщо в загальній масі є порівну деталей відполірованих і невідполірованих. Яка ймовірність того, що число відполірованих деталей буде від 45 до 50?

Варіант 7

1. Знайти ймовірність того, що в результаті 5 незалежних випробувань подія А з'явиться хоча б 3 рази, якщо в результаті одного випробування ймовірність її з'яви дорівнює 0,1.
2. Провадяться 400 незалежних випробувань, під час кожного з яких імовірність з'яви події А дорівнює 0,5. Знайти ймовірність того, що подія А з'явиться:

1) рівно 220 разів;
2)від 200 до 240 разів.

Варіант 8

1. Схожість насіння даного виду рослин оцінюється ймовірністю 0,3. Яка ймовірність того, що з 5 посіяних насінин зійдуть не менше 4?
2. Імовірність з'яви події в результаті кожного випробування дорівнює 0,2. Проводяться 400 незалежних випробувань. Визначити ймовірність того, що подія з'явиться:

1) рівно 60 разів;
2) від 70 до 100 разів.

Варіант 9

1. Яка ймовірність того, що подія А з'явиться в 4 незалежних випробуваннях не більше як 2 рази, якщо ймовірність її з'яви внаслідок одного випробування дорівнює 0,8.
2. Імовірність з'яви події А в результаті одного випробування дорівнює 0,6. Яка ймовірність з'яви цієї події не менше як 342 та не більше як 378 разів, якщо проведено 600 незалежних випробувань? Яка ймовірність того, що подія настане рівно 360 разів?

Варіант 10

1. Монету підкидають 5 разів. Знайти ймовірність того, що герб випаде не менше 4 разів.
2. У процесі масового виробництва діодів імовірність браку при формуванні дорівнює 0,1. Яка ймовірність того, що з 400 навмання взятих діодів 50 будуть бракованими? Знайти ймовірність того, що бракованих буде від 25 до 55 діодів.

Варіант 11

1. Імовірність влучення у ціль в результаті одного пострілу дорівнює 0,8. Знайти ймовірність 2 влучень в результаті 6 пострілів.
2. Роблять 900 підкидань монети. Знайти ймовірність того, що число з'яв герба буде:

1) рівно 480 разів;
2) від 420 до 480 разів.

Варіант 12

1. По цілі роблять 5 пострілів. Імовірність влучення у ціль в результаті одного пострілу дорівнює 0,4. Щоб одержати залік зі стрільби, треба мати не менше 3 влучень. Знайти ймовірність одержання заліку.
2. У магазин поступило 400 книг з теорії ймовірностей. Імовірність продажу кожної з них упродовж дня дорівнює 0,1. Знайти ймовірність того, що впродовж дня буде продано:

1) рівно 40 книг;
2) від 30 до 50 книг.

Варіант 13

1. Подія B наступить у випадку, якщо подія A з'явиться не менше як два рази. Знайти ймовірність того,що наступить подія B, якщо буде проведено 5 незалежних випробувань, в кожному з яких імовірність з'яви події A дорівнює 0,9.
2. За умов автоматичного пресування карболітових болванок 0,8 загальної їх кількості не мають щербин. Знайти ймовірність того, що зі 100 взятих навмання болванок без щербин будуть:

1) рівно 75 штук;
2) від 75 до 85 штук.

Варіант 14

1. У цеху 5 моторів. Для кожного мотора ймовірність того, що його в дану мить увімкнено, дорівнює 0,8. Знайти ймовірність того, що в дану мить увімкнено 2 мотори.

2. Під час виточування болтів спостерігається в середньому 10% браку. Знайти ймовірність того, що в партії з 400 болтів придатними будуть:
1) рівно 360 штук;
2) від 348 до 366 штук.

Варіант 15

1. Імовірність влучення у ціль в результаті одного пострілу дорівнює 0,6. Знайти ймовірність двох влучень в результаті 5 пострілів.
2. Електростанція обслуговує мережу з 10000 ламп. Імовірність увімкнення кожної лампи дорівнює 0,5. Знайти ймовірність того, що одночасно увімкнених ламп буде:
1) рівно 5100;
2) від 4950 до 5050.

Варіант 16

1. Імовірність виготовлення стандартної деталі автоматичним верстатом дорівнює 0,9. Знайти ймовірність того, що з 5 взятих навмання деталей 2 виявляться стандартними.
2. Імовірність влучення у мішень з одного пострілу дорівнює 0,4. Знайти ймовірність того, що в результаті 600 пострілів у мішень влучать:
1) рівно 240 разів;
2) від 210 до 240 разів.

Варіант 17

1. Монету кидають 6 разів. Знайти ймовірність того, що герб випаде не менше як два рази.
2. Імовірність влучення у мішень стрільцем з одного пострілу дорівнює 0,8. Знайти ймовірність того, що зі 100 пострілів у мішень буде влучено:
1) рівно 90 разів;
2) від 75 до 85 разів.

Варіант 18

1. Проведено 4 незалежні випробування, в кожному з яких ймовірність з’яви події А дорівнює 0,7. Знайти ймовірність того, що подія А з’явиться хоча б два рази.
2. Штампування металевих клем для з’єднувальних пластин дає 20% браку. Визначити ймовірність того, що з 400 клем, вибраних навмання, стандарту будуть відповідати:
1) рівно 300 штук;

2) не менше як 310 і не більше як 330 штук.

Варіант 19

1. Робітник обслуговує 4 верстати. Кожен верстат протягом 6 годин роботи кілька разів зупиняється і загалом простоює 0,6 години, причому зупинки їх в будь-яку мить однаково ймовірні. Знайти ймовірність того, що в дану мить будуть працювати 2 верстати.
2. Імовірність того, що деталь не пройде перевірку ВТК, дорівнює 0,2. Знайти ймовірність того, що серед 400 випадковим чином відібраних деталей виявиться неперевірених:

1) рівно 80 деталей;
2) від 70 до 100 деталей.

Варіант 20

1. У випадковим чином вибраній сім'ї 5 дітей. Вважаючи ймовірність народження хлопчика та дівчинки однаковими, визначити ймовірність того, що у цій сім'ї три хлопчики та дві дівчинки.
2. Схожість зерна, яке зберігається на складі, дорівнює 80%. Відбирають випадковим чином 100 зерен. Знайти ймовірність того, що серед них зійде:

1) від 68 до 90 штук;
2) рівно 80 штук.

Варіант 21

1. На складі знаходяться 500 однакових коробок із взуттям. Відомо, що в 200 коробках взуття чорного кольору, а в 300 – брунатного. Коробки не розсортовані за кольором взуття. Службовець бере 5 перших коробок, які попались під руку. Знайти ймовірність того, що серед них виявляться 3 коробки із взуттям чорного та дві коробки із взуттям брунатного кольору.
2. Відомо, що 0,8 всієї кількості телефонних апаратів, які виготовляє завод, є продукцією першого ґатунку. Знайти ймовірність того, що серед вибраних навмання 100 апаратів 1-го ґатунку будуть:

1) рівно 70 штук;
2) від 70 до 90 штук.

Варіант 22

1. У сім'ї 4 дітей. Вважаючи, що ймовірність народження хлопчика та дівчинки однакові, знайти ймовірність того, що в цій сім'ї 3 хлопчики та 1 дівчинка.

2. Імовірність влучення у ціль зі скорострільної гармати при одному пострілі дорівнює 0,9. Знайти ймовірність того, що в результаті 100 пострілів число влучень буде:
1) рівно 93;
2) від 90 до 96.

Варіант 23

1. В урні 30 білих та 20 чорних куль. Вийнято підряд 3 кулі, причому кожну вийняту кулю повертають в урну перед витягуванням наступної, і кулі в урні змішуються. Яка ймовірність того, що серед 3 куль буде 1 біла.
2. За деякого технологічного процесу в середньому 1% кульок, які виготовляють для підшипників, виявляються бракованими. Знайти ймовірність того, що серед 10000 кульок, що поступили на контроль, бракованими будуть:
1) рівно 90 штук;
2) від 80 до 100 штук.

Варіант 24

1. Імовірність появи події А дорівнює 0,1. Яка ймовірність того, що внаслідок 5 випробувань подія А з’явиться рівно 3 рази?
2. За даними технічного контролю в середньому 10% годинників, які виготовляє завод, потребують додаткового регулювання. Чому дорівнює ймовірність того, що з 400 годинників, виготовлених заводом, потребують додаткового регулювання:
1) рівно 52 годинники;
2) від 34 до 52 годинників?

Варіант 25

1. Імовірність виготовлення деталі 1-го ґатунку автоматичним верстатом дорівнює 0,8. Знайти ймовірність того, що з трьох взятих навмання деталей 2 виявляться деталями першого ґатунку.
2. За даними технологічного процесу в середньому 90% всієї кількості телефонних апаратів, що виготовляються заводом, є продукцією найвищої якості. Яка ймовірність того, що зі 100 вибраних навмання телефонних апаратів будуть відповідати продукції найвищої категорії якості:
1) рівно 84 апарати;
2) від 84 до 96 апаратів?

ЗАДАЧІ НА ВСІ ТЕМИ ПЕРШОГО РОЗДІЛУ

1. На трьох верстатах-автоматах виготовляються однакові деталі. Перший верстат дає 5 % браку, другий – 7 %, третій – 9 %. Із продукції кожного верстата навмання взято по одній деталі. Знайти ймовірність того, що серед них виявилось:
1) 0, 1, 2, 3 придатних;
2) принаймні одна деталь придатна;
3) принаймні одна деталь бракована.

2. Президент фірми хоче створити команду дизайнерів для розробки нової моделі виробу у складі двох інженерів і трьох маркетологів. Яка імовірність того, що команда такого складу буде створена, якщо з групи 13 інженерів і 6 маркетологів вибрати навмання 7 осіб?

3. Серед 20 телевізорів фірми «СОНІ» 14 мають систему дистанційного керування. Яка ймовірність того, що серед п'яти випадково відібраних телевізорів 3 матимуть цю систему?

4. На десяти сторінках газети розміщені рекламні оголошення, 7 сторінок присвячені соціально-політичним проблемам,3 – спортивним новинам. Використали 4 сторінки з цієї газети. Яка ймовірність того, що серед них немає сторінок зі спортивними новинами?

5. У папці є 8 відомостей, сформованих одним бухгалтером, і 12 відомостей – другим. Навмання беруться три відомості. Знайти ймовірність того, що: 1) всі три відомості сформовано другим бухгалтером; 2) відомостей, сформованих другим бухгалтером, виявиться більше, ніж сформованих першим.

6. У продавця канцтоварів у шухляді є 16 фломастерів українського виробництва, 8 – угорського і 14 – китайського. Знайти ймовірність того, що серед випадково вибраних п'ятнадцяти фломастерів тринадцять фломастерів виявляться імпортного виробництва.

7. Гросмейстер демонструє сеанс одночасної гри на 14 дошках з аматорами, серед яких 8 надають перевагу захисту Альохіна, 3 – «Каро-Кан» і троє – індійській обороні. Яка ймовірність того, що на перших п'яти шахівницях буде розіграно захист Альохіна?

8. На паркінгу автомобілів є десять марок «Жигулі», 5 – закордонного виробництва і 9 – «Таврій». Через снігопад 7 автомобілів не виїхали з паркінгу. Яка ймовірність того, що серед них немає жодного автомобіля іноземного виробництва?

9. Експерт з управління цінними паперами розглядає 24 об’єкти для інвестування. Лише 6 з них буде вибрано. Яка ймовірність того, що з п’яти навмання взятих об’єктів виявиться об’єкт під номером 8?

10. У папці 12 акцій 1-го виду і 8–2-го. Навмання беруть 3 акції. Знайти ймовірність того, що акції будуть одного виду.

11. Імовірність поліпшення спортсменом особистого досягнення зі стрибків у висоту дорівнює 0,1. Чому дорівнює ймовірність того, що він поліпшить свій результат, якщо йому надано можливість зробити три спроби.

12. Імовірність одного влучення в ціль при одному залпі з двох автоматів дорівнює 0,38. Знайти ймовірність влучення в ціль при одному пострілі з першого автомата, якщо відомо, що для другого ця ймовірність дорівнює 0,7.

13. В аудиторії серед 15 комп’ютерів 12 справних. Знайти ймовірність того, що з двох навмання вибраних комп’ютерів хоча б один виявиться несправним.

14. Студент знає 50 із 60 питань програми. Знайти ймовірність того, що із трьох навмання витягнутих питань він знатиме: а) хоча б одне; б) тільки одне; в) не більш як одне.

15. Підприємство отримує сировину від трьох постачальників і не виконує контракту з виготовлення продукції, якщо хоча б один із постачальників зриває поставку сировини. Імовірності вчасної поставки сировини для постачальників відповідно дорівнюють 0,97; 0,95; 0,99. Знайти ймовірність виконання контракту підприємством-виробником.

16. У лотереї розігрується 1000 білетів, з яких виграшними є 4 речових вартістю 40, 60, 70 і 100 грн. і 5 грошових по 300 грн. кожний. Знайти імовірність того, що учасник лотереї, маючи три білети, виграє на суму, не меншу 400 грн.

17. Протипожежний пристрій складається із трьох незалежно працюючих сигналізаторів, які спрацьовують у випадку пожежі з імовірностями, що відповідно дорівнюють 0,95; 0,92; 0,98. Знайти ймовірність того, що при пожежі спрацюють: а) тільки один сигналізатор; б) принаймні один; в) тільки два; г) хоча б два.

18. Акція клубу «Книга – поштою» включає десять різних книжок, причому п’ять із них коштують по 4 грн., три – по 5 грн., дві – по 3 грн. Знайти ймовірність того, що сумарна вартість двох навмання замовлених книжок становить 8 грн.

19. У пакеті на тендер міститься 5 акцій, останні цифри номерів яких відповідно 1, 2, 3, 4, 5. Навмання витягають дві акції. Знайти ймовірність того, що сума останніх цифр номерів витягнутих акцій буде не менша від трьох.

20. В альбомі 20 фотокарток, серед яких три шукані. Навмання відібрано 5 карток. Яка ймовірність того, що серед них виявиться хоча б дві шукані.

21. У кошику бабусі є пряжа в мотках, 40 % якої блакитна, решта – біла. Знайти ймовірність того, що два навмання взяті мотки матимуть однаковий колір.

22. Для вчасного збирання врожаю пшениці достатньо, щоб у полі працювало два комбайни. Знайти ймовірність того, що пшеницю буде вчасно зібрано, якщо господарство має три комбайни, імовірності справної роботи яких дорівнюють відповідно 0,4; 0,9; 0,8.

23. Імовірність банкрутства для першої фірми –0,75, а для другої фірми ця ймовірність на 20 % більша. Знайти ймовірність того, що хоча б одна з цих фірм збанкрутує.

24. Відомо, що випадкові події А та В незалежні, причому Р (АВ) = 0,52, Р (АВ) = 0,37, Р (А + В) = 0,89. Знайти Р (А) + Р(В) і з’ясувати, чи сумісні події А та В.

25. У дипломаті 30 акцій, серед яких 3 шукані. Навмання беруться 3 акції. Знайти ймовірність того, що серед них виявиться хоча б дві шукані.

26. Для виготовлення деталі робітникові потрібно виконати чотири незалежні технологічні операції. Імовірність припуститися браку при виготовленні кожної з них дорівнює відповідно 0,004; 0,005; 0,008; 0,001. Знайти ймовірність того, що виготовлена робітником деталь виявиться бракованою.

27. Імовірності вчасної сплати податків для кожного із трьох підприємств дорівнюють відповідно 0,4; 0,3; 0,6. Знайти ймовірність вчасної сплати податків не більш ніж двома підприємствами.

28. Групі студентів для проходження виробничої практики виділено 30 місць: 15 – у Києві, 8 – у Львові, 7 – у Москві. Ці місця розподіляються між студентами випадковим чином. Знайти ймовірність того, що студент і студентка, які незабаром збираються одружитися, будуть направлені для проходження практики в одне й те саме місто.

29. Імовірність того, що перший спортсмен пройде дистанцію без штрафних очок, дорівнює 0,6, а для другого і третього ці ймовірності дорівнюють відповідно 0,9 і 0,8. Знайти ймовірність того, що: 1) тільки два спортсмени пройдуть дистанцію без штрафних очок; 2) хоча б два; 3) не більш як два.

30. Імовірність того, що деякий товар зберігається на складі, дорівнює р, причому він може перебувати в будь-якій із восьми секцій складу з однаковою ймовірністю. Перевірка семи секцій показала, що там він відсутній. Знайти ймовірність того, що товар міститься у восьмій секції складу.

31. При збиранні телевізорів використовуються мікросхеми двох постачальників, частка яких становить від 1 до 30 %. Частка бракованої продукції для кожного постачальника становить відповідно 2 і 3 %. Знайти ймовірність того, що взята навмання мікросхема виявиться стандартною.

32. На підприємстві виготовляються однотипні вироби на трьох поточних лініях. На першій лінії виготовляється 20 % виробів від усього обсягу їх виробництва, на другій – 30 %, на третій – 50 %. Кожна з ліній характеризується відповідно такою часткою стандартних виробів: 97, 98 і 95 %. Знайти ймовірність того, що навмання взятий виріб, виготовлений на підприємстві, виявиться бракованим, а також імовірність того, що цей бракований виріб виготовлено: а) на першій лінії; б) на другій; в) на третій.

33. Телевізійне ательє має чотири кінескопи. Імовірність того, що кожний з них витримає подвійний гарантійний термін, дорівнює відповідно 0,7; 0,9; 0,85; 0,8. Знайти ймовірність того, що навмання взятий кінескоп витримає подвійний гарантійний термін.

34. У двох контейнерах є по 20 деталей, причому в першому – 5 бракованих, а в другому – 3 браковані деталі. З першого контейнера навмання береться одна деталь і перекладається в другий. Знайти імовірність того, що після цього навмання взята з другого контейнери деталь виявиться стандартною.

35. Два автомати штампують однорідні деталі, які потрапляють на спільний конвеєр. Продуктивність першого автомата втричі більша, ніж продуктивність другого. Частка браку для кожного з них становить відповідно 0,4 і 0,5. Яка ймовірність того, що навмання взята з конвеєра деталь буде стандартною?

36. На складі телеательє зберігаються три комплекти однотипних деталей: у першому – 100 деталей, з яких дві браковані,в другому –

200, з-поміж яких 2 % бракованих; у третьому – 1500, причому всі вони стандартні. Знайти ймовірність того, що навмання взята деталь із випадково вибраного комплекту виявиться стандартною.

37. У першій шухляді є чотири стандартні і дві браковані деталі, у другій – п’ять стандартних і три браковані, третя – порожня. З першої шухляди навмання беруть дві деталі, з другої – одну, і все це перекладають у третю. Знайти ймовірність того, що навмання взята з третьої шухляди деталь виявиться стандартною.

38. Деталь може надійти для обробки на перший автомат з імовірністю 0,3, на другий – з імовірністю 0,2, а на третій –з імовірністю 0,5. При обробці на першому верстаті ймовірність браку становить 0,01, на другому – 0,03, а на третьому – 0,08. Вибрана навмання деталь виявилася бракованою. Яка ймовірність того, що її виготовлено на другому автоматі?

39. У кінці потокової лінії з виготовлення приладів установлено два автомати-контролери, які визначають, належить чи не належить відповідний прилад до найвищої категорії якості. Статистично встановлено, що 30 % приладів задовольняють вимоги найвищої категорії якості, а контролери роблять помилкові висновки щодо якості приладу відповідно у 2 і 8 % випадків. Випадково один і той самий прилад було перевірено обома автоматами: перший визначна найвищу категорію якості, другий – ні. Якому з висновків вірити?

40. Із 14 баскетболістів четверо влучають у кошик із штрафного кидка з імовірністю 0,9; п’ять – з імовірністю 0,8; три – з імовірністю 0,7 і два – з імовірністю 0,6. Яка імовірність того, що, навмання відібраний спортсмен влучить у кошик із штрафного; довільно відібраний баскетболіст виконає один штрафний кидок і не влучить у кошик. До якої групи найімовірніше він належить?

41. Для формування футбольної команди університету виділено 5 студентів, з II – 7, з III – 8, з IV – 6. Імовірність того, що будь-якого студента кожного з курсів буде включено до складу збірної університету, дорівнює відповідно 0,6; 0,4; 0,8; 0,45. Навмання відібраний учасник змагань потрапив до складу збірної. На якому курсі ймовірніше за все він навчається?

42. У товарному поїзді 50 вагонів, завантажених вугіллям двох сортів, 25 вагонів містить 70 % вугілля 1-го сорту, 15 вагонів – 60 % і 10 вагонів – 85 % вугілля 2-го сорту. Випадково взятий для аналізу кусок вугілля виявився 2-го сорту. Знайти ймовірність того, що він взятий із вагона другої групи.

43. У першому комплекті міститься 20 деталей, 6 із яких нестандартні; у другому 10, з яких 3 нестандартні. З кожного комплекту навмання виймають по одній деталі, а потім із цих двох деталей навмання беруть одну. Знайти ймовірність того, що ця деталь виявиться стандартною.

44. У першому контейнері є 30 деталей, з яких 4 браковані, у другому відповідно 20 і 3. Навмання взята деталь із випадковим чином вибраного контейнера виявилась стандартною. Яка ймовірність того, що деталь було взято з першого контейнера?

45. На конвеєр надходять деталі, які виготовляються двома автоматами. Імовірність одержання нестандартної деталі на першому автоматі дорівнює 0,05, на другому на 10 % нижча. Продуктивність другого автомата на 60 % вища, ніж першого. Знайти ймовірність того, що навмання взята з конвеєра деталь виявиться нестандартною.

46. Відомо, що для деякої вікової групи k_1 відсотків усіх чоловіків і k_2 відсотків усіх жінок хворіють на діабет. Кількість чоловіків для цієї групи на 7% менша за кількість жінок. У навмання відібраної особи було виявлено діабет. Яка ймовірність того, що це була жінка?

47. Імовірність того, що двокамерний холодильник «NORD» не зіпсується протягом гарантійного терміну, дорівнює 0,8, а для однокамерного ця ймовірність на 10 % більша. Знайти ймовірність того, що навмання куплений холодильник із шести двокамерних і десяти однокамерних не зіпсується протягом гарантійного терміну.

48. На біржі продаються акції чотирьох фірм, частка акцій кожної з яких становить відповідно 25, 30, 15 і 30 %. Але серед них є акції збанкрутілих фірм, частка яких становить відповідно 10, 4, 1 і 3. Знайти ймовірність того, що навмання придбана акція належить фірмі, яка збанкрутіла.

49. Виріб перевіряється на стандартність одним із товарознавців. Імовірність того, що виріб потрапить до першого товарознавця, дорівнює 0,65, а до другого – 0,35. Імовірність того, що стандартний виріб буде підтверджений як стандартний першим товарознавцем, дорівнює 0,9, а другим – 0,98. Стандартний виріб при перевірці було підтверджено як стандартний. Знайти ймовірність того, що цей виріб перевірив другий товарознавець.

50. Монітор до комп'ютера може належати одній із чотирьох партій з імовірностями, що становлять відповідно 0,4; 0,1; 0,2 і 0,3. Імовірність того, що монітор відпрацює подвійний гарантійний термін, для кожної партії дорівнює відповідно 0,7; 0,8; 0,6; 0,9. Знайти ймовірність того, що навмання вибраний монітор працюватиме подвійний гарантійний термін.

51. У продаж надійшли дискети трьох кольорів: чорного, синього і червоного. Чорних і червоних дискет порівну, а синіх удвічі менше, ніж чорних. Серед дискет чорного кольору 2 % бракованих, червоного – 1 %, синього – 0,5 %. Знайти ймовірність того, що навмання придбана дискета виявиться якісною.

52. Імовірність того, що випадково відібраний із партії прилад потребує додаткового регулювання, дорівнює 0,07. Якщо при вибірковій перевірці партії приладів виявиться, що не менш як 6 % відібраних приладів потребують регулювання, то вся партія повертається для доробки. Знайти ймовірність того, що партію буде повернено, якщо для контролю з партії відібрали 500 приладів.

53. Імовірність того, що навмання взята електрична лампочка відпрацює передбачений стандартом термін, дорівнює 0,95. Знайти ймовірність того, що з 400 придбаних лампочок хоча б 370 відпрацюють передбачений стандартом час, а також найімовірнішу кількість таких лампочок.

54. Установлено, що 5 % імпортних телевізорів виходять з ладу через перепади напруги електромережі. Яка ймовірність того, що з п'яти придбаних телевізорів хоча б три не вийдуть з ладу?

55. Текст із 2000 літер передається по телеграфу. При передаванні однієї літери можлива помилка з імовірністю 0,002. Знайти ймовірність того, що при передаванні цього тексту виявиться не менш як дві помилки.

56. Відомо, що в технологічному процесі виготовлення мікросхем забезпечується 98 % продукції, яка відповідає технологічним вимогам. Яка ймовірність того, що з 300 мікросхем бракованих виявиться не менш як три.

57. На дорогах України лише 80 % автомобільних шин витримують гарантійний термін. Знайти найімовірнішу кількість шин, що не витримують гарантійного терміну, з партії 1500 шин, а також імовірність такої кількості шин.

58. Імовірність того, що навмання взятий кінескоп задовольняє вимоги найвищого ґатунку, становить 0,7. За місяць ВТК телевізійного заводу має перевірити 400 кінескопів. Яка ймовірність того, що серед них виявиться хоча б 350 кінескопів найвищого ґатунку?

59. Для студентського гуртожитку закуплено 10 телевізорів. Імовірність того, що будь-який із них витримає гарантійний термін, дорівнює 0,95. Знайти ймовірність того, що протягом гарантійного терміну з ладу вийдуть: а) два телевізори; б) принаймні два. Знайти найімовірнішу кількість телевізорів, що витримають гарантійний термін.

60. Для нормальної роботи гуртової бази на лінії має бути не менш як 3 вантажних бусів, а їх є 7. Імовірність для кожного з них не вийти на лінію дорівнює 0,05. Знайти ймовірність того, що найближчого дня гуртова база працюватиме нормально.

61. Імовірність появи події в кожному із 300 незалежних випробувань дорівнює 0,9. Знайти таке додатне число ε, щоб з імовірністю 0,98 абсолютна величина відхилення відносної частоти появи події від її ймовірності 0,9 не перевищила ε.

62. Технологічний процес підприємства дає змогу дістати 90 % виробів найвищого ґатунку. Знайти найімовірнішу кількість виробів найвищого ґатунку серед 300 виготовлених підприємством виробів, а також імовірність появи цієї кількості виробів.

63. Детектор неправди фіксує неправдиву відповідь з імовірністю 95%. Яка ймовірність того, що на 10 поставлених запитань неправдиву відповідь буде зафіксовано хоча б двічі?

64. Серед автомобілів, що ввозяться в Україну, 80% становлять легкові. Протягом дня на митницю прибуло 40 автомобілів. Яка ймовірність того, що не більш як 9 з них легкові?

65. Для розвинутих країн Заходу частка тіньового бізнесу становить 1%. Яка ймовірність того, що серед 200 зареєстрованих за рік фірм таким бізнесом займається хоча б дві?

66. Відомо, що $\frac{3}{4}$ населення міста користується послугами кабельного телебачення. Яка ймовірність того, що серед 300 мешканців такими послугами користується хоча б 230?

67. У середньому 30 % акцій видавничих фірм протягом року стають збитковими. Яка ймовірність того, що серед 140 акцій цих фірм збитковими будуть менш як 40?

68. У середньому 80% студентів курсу здають залік із першої спроби. Знайти ймовірність того, що з п’яти навмання взятих студентів цього курсу з першого разу здадуть не більш як четверо.

69. Радіостанція протягом дня транслює 300 музичних програм. Яка ймовірність того, що не менш як 150 з них виконуються англійською мовою, коли відомо, що англомовні програми становлять 80 % репертуару радіостанції?

70. Відомо, що серед готівкової маси 0,5 % купюр непридатні до подальшого використання. Знайти ймовірність того, що серед 2700 купюр виторгу магазину непридатними для наступного використання є хоча б дві купюри.

71. Імовірність появи події в кожному з незалежних випробувань дорівнює 0,8. Скільки потрібно провести випробувань, щоб з імовірністю 0,95 можна було очікувати відхилення відносної частоти появи події від її ймовірності за абсолютною величиною не більш як на 0,03?

РОЗДІЛ 2
ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ

2.1. ЗАКОНИ РОЗПОДІЛУ І ЧИСЛОВІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН

Дискретні випадкові величини

ОСНОВНІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

Нехай задано простір елементарних подій Ω.

Випадкова величина **–** це однозначна числова функція $X = f(\Omega)$, яку задано на просторі елементарних подій

Дискретною називають випадкову величину, можливі значення якої є окремі ізольовані числа. Кількість числових значень дискретної величини є скінчена аба зчислена множина.

Законом розподілу випадкової величини називається співвідношення між значеннями випадкової величини і їх ймовірностями.

Часто закон розподілу дискретної випадкової величини задають у вигляді таблиці, перший рядок якої містить можливі значення x_i, а другий – відповідні їм імовірності p_i:

Для дискретних випадкових величин закони розподілу можуть задаватися множиною значень, що їх набуває випадкова величина, і ймовірностями цих значень.

X	x_1	x_2	…	x_n
p	p_1	p_2	…	p_n

Тут $p_1 + p_2 + .. + p_n = 1$.

Графічний спосіб задання закону розподілу ймовірностей – це побудова «многокутника розподілу»

Математичним сподіванням M(X) дискретної випадкової величини X називається сума добутків всіх її значень x_i на їх імовірності p_i: $M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \mathbf{K} + x_n p_n$

Математичне сподівання має такі властивості:

1) $MC = C$ (C – стала);

2) $MCX = CMX$;

3) $M(X+Y)=MX+MY$;

4) $MXY = MX \cdot MY$, якщо X і Y – незалежні випадкові величини.

Дисперсією D(X) випадкової величини X називається математичне сподівання квадрата відхилення випадкової величини від її математичного сподівання:. Дисперсію зручно обчислювати за формулою $D(X) = M(X^2) - M^2(Xx)$.

Основні властивості дисперсії:

1) $DC = 0$;

2) $DCX = C^2 DX$;

3) $D(X+Y) = DX + DY$, якщо випадкові величини незалежні.

Середнє квадратичне відхилення (позначається літерою σ) є квадратним коренем із дисперсії: $\sigma = \sqrt{D}$.

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

1. Дослідити на дискретність випадкову величину X**.**

а) у магазині є кашкети 55-го, 56-го та 58-го розмірів. X – розміри кашкетів.

б) дерево за рік виросло від 1,5 до 2 м. X – випадкова величина росту дерева.

Розв'язання:

а) Випадкова величина дискретна, оскільки кількість розмірів кашкетів є обмеженою.

б) Випадкова величина не є дискретною, оскільки висота дерева може бути будь-якою в межах від 1,5 м до 2 м.

2. Знайти математичне сподівання дискретної випадкової величини *X*, заданої законом розподілу:

X	– 4	6	10
p	0,2	0,3	0,5

Розв'язання:

$M(X) = -4\cdot 0{,}2 + 6\cdot 0{,}3 + 10\cdot 0{,}5 = 6$.

3. Знайти математичне сподівання випадкової величини z, якщо відомі математичні сподівання x и y:

$z = x + 2y$; $M(x) = 5$; $M(y) = 3$.

Розв'язання.

$M(z)=M(x+2y)=M(x)+2M(y)=5+2\cdot 3=11$.

4. Знайти дисперсію й середнє квадратичне відхилення дискретної випадкової величини *X*, заданої законом розподілу:

X	-5	2	3	4
p	0,4	0,3	0,1	0,2

Розв'язання.

Дисперсію шукатимемо за формулою $D(x)=M(x^2)-M^2(x)$.

1)обчислимо математичне сподівання:

$M(x)=-5\cdot 0{,}4+2\cdot 0{,}3+3\cdot 0{,}1+4\cdot 0{,}2=-0{,}3$.

2) Складемо закон розподілу для X^2:

X^2	25	4	9	16
p	0,4	0,3	0,1	0,2

3) Знайдемо математичне сподівання для X^2:

$M(X^2)=25\cdot 0{,}4+4\cdot 0{,}3+9\cdot 0{,}1+16\cdot 0{,}2=15{,}3$.

4) Знайдемо шукану дисперсію:

$D(X)=M(X^2)-M^2(X)=15{,}3-(-0{,}3)^2=15{,}21$.

5) Знайдемо середнє квадратичне відхилення:

$s(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{15{,}21}=3{,}9$.

Відповідь: дисперсія D = 15,21, середнє квадратичне відхилення s =3,9.

5. Скласти закон розподілу ймовірностей числа з'явлень події А в трьох незалежних випробуваннях, якщо ймовірність з'явлення події А в кожному випробуванні дорівнює 0,6. Знайти математичне сподівання та дисперсію цієї випадкової величини.

Розв'язання.

Випадкова величина X може прийняти такі значення: 0; 1; 2; 3, бо, за умовою, проводилося 3 випробування. Знайдемо ймовірності випадковій величині X прийняти кожне з цих значень та занесемо отримані ймовірності до таблиці.

p = 0,6 – ймовірність з'явлення події А в одному випробуванні;

q = 1 - *p* = 0,4 – імовірність не з'явлення події А в одному випробуванні.

$$P(X=0)=C_3^0\cdot p^0\cdot q^{3-0}=1\cdot 1\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^3=\frac{8}{125}=0{,}06.$$

$P(X=1) = C_3^1 \cdot p^1 \cdot q^{3-1} = \dfrac{3!}{1!(3-1)!} \cdot \dfrac{3}{5} \cdot \left(\dfrac{2}{5}\right)^2 = \dfrac{36}{125} = 0{,}288.$

$P(X=2) = C_3^2 \cdot p^2 \cdot q^{3-2} = \dfrac{3!}{2!(3-2)!} \cdot \left(\dfrac{3}{5}\right)^2 \cdot \left(\dfrac{2}{5}\right) = \dfrac{54}{125} = 0{,}432.$

$P(X=3) = C_3^3 \cdot p^3 \cdot q^{3-3} = 1\left(\dfrac{3}{5}\right)^3 \cdot 1 = \dfrac{27}{125} = 0{,}216.$

Отже, закон розподілу дискретної величини має вигляд:

X*i*	0	1	2	3
pi	$\frac{8}{125}$	$\frac{36}{125}$	$\frac{54}{125}$	$\frac{27}{125}$

Контроль: $\sum p_i = 1$.

Знайдемо математичне сподівання.

$$M(X) = \sum_{i=1}^{4} x_i p_i = 0 \cdot \frac{8}{125} + 1 \cdot \frac{36}{125} + 2 \cdot \frac{54}{125} + 3 \cdot \frac{27}{125} = \frac{225}{125} = 1{,}8.$$

Обчислимо дисперсію: $D(X) = M(X^2) - M^2(X)$.

$$M(X^2) = \sum_{i=1}^{4} x_i^2 p_i = 0 \cdot \frac{8}{125} + 1 \cdot \frac{36}{125} + 4 \cdot \frac{54}{125} + 9 \cdot \frac{27}{125} = \frac{495}{125} = 3{,}96.$$

$D(X) = 3{,}96 - 1{,}8^2 = 0{,}72.$

Обчислимо середнє квадратичне відхилення.

$$s(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{0{,}72} = 0{,}8485.$$

Відповідь: $M(X) = 1{,}8$; $D(X) = 0{,}72$, $s(X) = 0{,}8485$.

6. Маємо 4 заготівки для виготовлення деталей. Імовірність виготовлення придатної деталі дорівнює 0,75. Знайти закон розподілу випадкової величини X – кількість заготівок, що їх буде використано для виготовлення придатної деталі. Знайти MX і DX, а також імовірність того, що із цих заготівок буде виготовлено стандартну деталь.

Розв'язання.

Подамо закон розподілу для випадкової величини X у табличній формі. Очевидно, що випадкова величина може набувати значень 1, 2, 3, 4. Значення $X = 1$ буде тоді, коли з першої заготівки виготовлено стандартну деталь, а ймовірність цього дорівнює 0,75. Випадкова величина набуває значення 2, якщо з першої заготівки виготовлено браковану деталь, а з другої – придатну. За теоремою множення ймовірностей імовірність цієї події $P(X=2)=\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}=\frac{3}{16}$.

Аналогічно, X = 3, якщо деталі, виготовлені з першої та другої заготівок, браковані, а деталь, яку виготовлено з третьої заготівки – придатна. $P(X=3)=\left(\frac{1}{4}\right)^2\cdot\frac{3}{4}=\frac{3}{64}$. Нарешті, X = 4, якщо деталі, виготовлені з перших трьох заготівок, браковані. $P(X=4)=\left(\frac{1}{4}\right)^3=\frac{1}{64}$.

Запишемо закон розподілу:

X	1	2	3	4
p	0,75	0,1875	0,046875	0,015625

Легко перевірити, що сума ймовірностей у законі розподілу дорівнює 1.

Знайдемо математичне сподівання та дисперсію випадкової величини за наведеними щойно формулами.

$$MX=1\cdot\frac{3}{4}+2\cdot\frac{3}{16}+3\cdot\frac{3}{64}+4\cdot\frac{1}{64}=\frac{85}{64};$$

$$MX^2=1\cdot\frac{3}{4}+4\cdot\frac{3}{16}+9\cdot\frac{3}{64}+16\cdot\frac{1}{64}=\frac{139}{64};$$

$$DX=\frac{139}{64}-\left(\frac{85}{64}\right)^2=\frac{1671}{4096}.$$

Якщо подія A – «із чотирьох заготівок виготовлено одну придатну деталь», то $P(A)=1-\left(\frac{1}{4}\right)^4=\frac{255}{256}$.

7. Імовірність того, що в бібліотеці потрібна студентові книга вільна, дорівнює 0,3. Скласти закон розподілу випадкової величини X – числа бібліотек, які відвідає студент, якщо у місті чотири бібліотеки. Обчислити математичне сподівання та дисперсію цієї випадкової величини.

Розв'язання.

Очевидно, що дана випадкова величина може приймати значення 1, 2, 3, 4. Випадкова величина прийме значення 1 (X = 1), якщо потрібна студентові книга буде вільна в першій же бібліотеці, яку він відвідав. Імовірність такої події дорівнює 0,3, тобто P(X=1) =0,3.

Випадкова величина X прийме значення 2, якщо потрібна студентові книга виявилась вільною в другій бібліотеці, яку він відвідав, причому в першій бібліотеці вона була “на руках ”. Імовірність цієї складної події за теоремою множення ймовірностей незалежних подій P(X=2) = 0,7 0,3 = 0,21.

Аналогічно P(X=3) = 0,7 0,7 0,3 = 0, 147.

P(X=4) = 0,7 0,7 0,7 = 0, 343

Таким чином, закон розподілу даної випадкової величини можна подати у вигляді такої таблиці:

X	1	2	3	4
p	0,3	0,21	0,147	0,343

Контроль: 0,3 + 0,21 + 0,147 + 0,343 = 1.

Математичне сподівання даної випадкової величини

$M(X) = 1\cdot 0{,}3 + 2\cdot 0{,}21 + 3\cdot 0{,}147 + 4\cdot 0{,}343 = 2{,}533$

Для обчислення дисперсії треба спочатку скласти закон розподілу випадкової величини X^2:

X^2	1	4	9	16
p	0,3	0,21	0,147	0,343

Математичне сподівання цієї випадкової величини

$M(X^2) = 1\cdot 0{,}3 + 4\cdot 0{,}21 + 9\cdot 0{,}147 + 16\cdot 0{,}343 = 7{,}951.$

Тоді $D(X) = M(X^2) - M^2(X)$.

$D(X) = 7{,}951 - 2{,}533^2 = 1{,}535.$

8. Дискретна випадкова величина X може приймати тільки два значення x_1 та x_2, причому $x_1 < x_2$. Відомі ймовірність $p_1 = 0{,}5$ можливого значення x_1, математичне сподівання M(X) = 4 і дисперсія D(X) = 4. Знайти закон розподілу цієї випадкової величини.

Розв’язання.

Для знаходження x_1 та x_2 потрібно скласти два рівняння відносно x_1 та x_2. З цією метою виразимо відомі математичне сподівання та дисперсію через x_1 та x_2:

$M(X) = 0{,}5x_1 + 0{,}5x_2$

За умовою M(X) = 4, тому, $4 = 0{,}5x_1 + 0{,}5x_2$, або $x_1 + x_2 = 8$.

Щоб скласти друге рівняння, треба спочатку встановити закон розподілу X^2:

X^2	x_1^2	x_2^2
p	0,5	0,5

Звідси $M(X^2) = 0{,}5\,x_1^2 + 0{,}5\,x_2^2$.

З іншого боку, $M(X^2) = D(X) + (M(X))^2 = 4 + 16 = 20$.

Отже, друге рівняння набере вигляду $0{,}5\,x_1^2 + 0{,}5\,x_2^2 = 20$, або $x_1^2 + x_2^2 = 40$.

Таким чином, одержано систему рівнянь: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 8; \\ x_1^2 + x_2^2 = 40. \end{cases}$

Розв'язком цієї системи будуть числа: $x_1 = 2$, $x_2 = 6$.

Шуканий закон розподілу має вигляд:

X	2	6
p	0,5	0,5

4. Розповсюджено 100 лотерейних білетів, з яких 40 передбачають виграш по 1 гривні, 10 – по 5 гривень, 5 – по 10 гривень, решта – програшні. Чи варто купувати багато таких лотерейних білетів, якщо один коштує 1,5 грн.?

Розв'язання.

X – випадкова величина виграшів. X може набувати значень 0, 1, 5, 10. Підрахуємо ймовірність кожного виграшу і запишемо дані у таблицю:

X	0	1	5	10
p	0,45	0,4	0,1	0,05

Обчислимо математичне сподівання виграшу:

$M(X) = 0 \cdot 0{,}45 + 1 \cdot 0{,}4 + 5 \cdot 0{,}1 + 10 \cdot 0{,}05 = 1{,}4$.

Математичне сподівання виграшу менше вартості лотерейного білета (1,4 менше від 1,5), тобто багато купувати згаданих білетів не варто.

ТРЕНУВАЛЬНІ ВПРАВИ

1. Баскетболіст виконує 2 штрафних кидки. Дослідити випадкову величину можливих зарахованих очок на дискретність.

2. Металеву деталь нагрівають від 20^0C до 500^0C. Дослідіть випадкову величину температури нагріву на дискретність.

3. Від надування об'єм повітряної кулі збільшився на 1,5 $м^3$. Дослідіть на дискретність випадкову величину збільшення об'єму повітряної кулі.

4. Лучник тричі стріляє по мішені. Дослідіть на дискретність випадкову величину кількості влучень.

5. В урні знаходяться три білі кулі та п’ять чорних. Навмання вийняли три кулі. Скласти закон розподілу випадкової величини Х – числа вийнятих білих куль. Обчислити математичне сподівання та дисперсію цієї випадкової величини.

6. По мішені роблять постріли до першого влучення або до витрати всіх патронів. Скласти закон розподілу випадкової величини Х – числа витрачених патронів, якщо ймовірність влучення в результаті одного пострілу дорівнює 0,9, а число наявних патронів 5. Знайти математичне сподівання та дисперсію цієї випадкової величини.

7. По цілі роблять 6 пострілів. Імовірність влучення з одного пострілу дорівнює 0,5. Скласти закон розподілу випадкової величини Х – числа влучень у ціль. Обчислити математичне сподівання та дисперсію цієї випадкової величини.

8. Монету кидають 3 рази. Знайти закон розподілу, математичне сподівання і дисперсію кількості випадань „герба”.

9. У скриньці 4 білих і 3 чорних кулі. Навмання витягають 3 кулі. Знайти закон розподілу, математичне сподівання і дисперсію кількості витягнутих білих куль.

10. Прилад складається з 5-ти малонадійних деталей. Відмови деталей незалежні, а ймовірності відмови за час Т відповідно рівні 0,2; 0,3; 0,4; 0,5 і 0,6. Знайти математичне сподівання і дисперсію кількості деталей, що вийшли з ладу за час Т.

11. У скриньці 4 білих і 3 чорних кулі. Навмання витягають одну кулю, потім кладуть назад у скриньку. Знайти закон розподілу, математичне сподівання і дисперсію кількості витягнутих білих куль у 4-х таких експериментах.

12. Незалежні випадкові величини Х та У задані такими законами розподілу:

Х	5	2	4
p	0,6	0,1	0,3

У	7	9
p	0,8	0,2

Знайти математичне сподівання суми Х+У та добутку ХУ цих величин.

13. Знайти (двома способами) математичне сподівання суми числа очків, які можуть випасти при киданні двох гральних кісток.

14. З колоди 36-ти карт навмання витягнули 10. Яка ймовірність, що серед них є хоча б один туз (подія А)? Знайти математичне сподівання і дисперсію кількості появ події А у 20-ти таких експериментах.

15. Кидають 10 кубиків. Знайти математичне сподівання і дисперсію суми очок, які випадуть на всіх кубиках.

16. Імовірність влучення у ціль в результаті одного пострілу для даного стрільця дорівнює 0,8. Стрілець робить три постріли. Скласти закон розподілу випадкової величини Х – числа влучень у ціль. Знайти математичне сподівання та дисперсію цієї випадкової величини.

17. Грального кубика підкинуто 3 рази. Скласти закон розподілу випадкової величини Х – числа появи шістки. Знайти математичне сподівання та дисперсію цієї випадкової величини.

18. Скласти закон розподілу ймовірностей випадкової величини Х – числа з'яви події А в результаті трьох незалежних випробувань, якщо ймовірність з'яви події в результаті одного випробування дорівнює 0,6. Знайти математичне сподівання та дисперсію цієї випадкової величини.

19. По мішені роблять постріли до першого влучення або до витрати всіх патронів. Скласти закон розподілу випадкової величини Х – числа витрачених патронів, якщо ймовірність влучення в результаті одного пострілу дорівнює 0,8, а число наявних патронів 3. Знайти математичне сподівання та дисперсію цієї випадкової величини.

20. У партії 10% нестандартних деталей. Навмання відібрано три деталі. Скласти закон розподілу випадкової величини Х – числа нестандартних деталей серед трьох відібраних. Знайти математичне сподівання та дисперсію цієї випадкової величини.

21. У партії з 8 деталей 6 – стандартні. Навмання відібрано дві деталі. Скласти закон розподілу випадкової величини Х – числа стандартних деталей серед двох відібраних. Знайти математичне сподівання та дисперсію цієї випадкової величини.

22. Імовірність відмови деталі під час випробування на надійність дорівнює 0,2. Знайти математичне сподівання числа деталей, які відмовлять при випробуванні 10 деталей.

23. Знайти дисперсію випадкової величини X – числа появи події A у двох незалежних випробуваннях, якщо M(X) = 0,8.

24. Дискретна випадкова величина X може приймати лише два значення: x_1та x_2, причому $x_1 < x_2$. Відомі ймовірність p_1 можливого значення x_1, математичне сподівання M(X) та дисперсія D(X). Знайти закон розподілу цієї випадкової величини, якщо p_1= 0,1, M(X) = 1,9, D(X) = 0,09.

25. У студентській групі (30 студентів, серед яких 12 дівчат і 18 юнаків) розігруються п’ять путівок на лижну базу в Карпатах. Скласти закон розподілу кількості юнаків, яким дістануться путівки, а також математичне сподівання цієї кількості.

26. На дорогах СНД лише 70 % автомобільних шин витримують гарантійний термін. Скласти закон розподілу кількості шин, що витримають гарантійний термін, із п’яти придбаних. Оцінити середню кількість таких шин та розкид можливих значень.

27. При виготовленні довільного виробу інструмент з імовірністю p= 0,2 може бути пошкодженим і потребуватиме заміни. Знайти математичне сподівання і дисперсію кількості виробів, які будуть виготовлені цим інструментом.

28. Складне завдання доручено трьом робітникам. Статистика свідчить, що якісно виконують завдання в середньому тільки 80 робітників зі 100. Запишіть закон розподілу ймовірностей, обчисліть математичне сподівання та середнє квадратичне відхилення.

29. Для кожного з чотирьох автобусів, що працюють на маршруті, ймовірність зламатися протягом місяця дорівнює $\frac{1}{3}$. Запишіть ряд розподілу кількості зламаних протягом місяця автобусів.

30. Імовірність виграшу по одному лотерейному білету 0,3. Знайти математичне сподівання числа лотерейних білетів, на які припадуть виграші, якщо придбали 20 білетів.

31. Андрій збирається провести на гральному автоматі 4 гри. Імовірність перемоги складає 0,4. Складіть закон розподілу та обчисліть математичне сподівання кількості виграшів.

32. Барабан-рулетку поділено на 10 однакових секторів. На чотирьох секторах виграш складає по 2 грн., на одному – 5 грн., а решта – програшні. Чи варто брати участь у цій грі, якщо право один раз розкрутити барабан коштує 1,5 грн.?

33. У лототроні 40 кульок, з яких 2 кульки виграшні по 10 грн., 8 – по 5 грн., 8 – по 2 грн., решта – програшні. Чи варто брати з лототрону кульку, якщо за кожну слід заплатити 2грн 25 коп.? А якщо кількість виграшних кульок змінити: 4 кульки по 10 грн., 4 – по 5, 12 – по 2?

34. Випущено 2000 лотерейних білетів, з яких 1000 штук з виграшем по 2 грн., 100 – по 10 грн., 50 – по 20 грн., решта – програшні. Чи є сенс купувати білети цієї лотереї, якщо один білет коштує1 грн. 90 коп.

35. Барабан-рулетка поділений на 20 однакових секторів, чи варто грати на цьому барабані, якщо право розкрутити його 1 раз коштує 3 грн., а виграші по секторам розподілені так:

5) на шести секторах виграш по 2 грн., на 5 – по 5 грн., на одному – 20 грн., решта – програшні;

6) на 4-х секторах – по 2 грн., на 4-х – по 5 грн., на 2-х – по 20 грн., решта – програшні.

36. До магазину завезли 20 мішків цементу з такою реальною вагою:

1) 12 мішків – по 9,8 кг, 4 – по 10,1 кг, 4 – по 10,2 кг
2) 12 мішків – по 9,8 кг, 2 – по 10,1 кг, 6 – по 10,2 кг .
3) 10 мішків – по 9,9 кг, 4 – по 10,1 кг, 6 – по 10,2 кг .
4) 10 мішків – по 9,9 кг, 6 – по 10,1 кг, 6 – по 10,2 кг .

Чи варто закупити всю партію цементу, якщо за кожний мішок слід заплатити як за десятикілограмовий?

ВАРІАНТИ ІНДИВІДУАЛЬНИХ ЗАВДАНЬ

Варіант 1

1. У партії з 7 деталей 4 – стандартні. Навмання вийнято 3 деталі. Скласти закон розподілу випадкової величині Х – числа стандартних деталей серед трьох вийнятих. Знайти математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення цієї випадкової величини.

2. Дискретна випадкова величина У може приймати лише 2 значення y_1 та y_2, причому $y_1 > y_2$. Імовірність прийняти випадковій величині У можливе значення y_2 дорівнює 0,4, математичне сподівання – 2,2, дисперсія – 0,96. Знайти закон розподілу цієї випадкової величини.

Варіант 2

1. У партії з 8 деталей 5 – стандартні. Навмання вийнято 3 деталі. Скласти закон розподілу випадкової величині Х – числа стандартних деталей серед трьох вийнятих. Знайти математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення цієї випадкової величини.
2. Дискретна випадкова величина У може приймати лише 2 значення y_1 та y_2, причому $y_1 > y_2$. Імовірність прийняти випадковій величині У можливе значення y_2 дорівнює 0,1, математичне сподівання – 2,8, дисперсія – 0,36. Знайти закон розподілу цієї випадкової величини.

Варіант 3

1. По мішені стріляють до першого влучення або до витрати всіх п'яти патронів. Імовірність влучення при одному пострілі дорівнює 0,7. Скласти закон розподілу випадкової величини Х – числа витрачених патронів. Знайти математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення цієї випадкової величини.
2. Дискретна випадкова величина У може приймати лише 2 значення y_1 та y_2, причому $y_1 > y_2$. Імовірність прийняти випадковій величині У можливе значення y_2 дорівнює 0,2, математичне сподівання – 2,8, дисперсія – 0,16. Знайти закон розподілу цієї випадкової величини.

Варіант 4

1. По мішені стріляють до першого влучення або до витрати всіх чотирьох патронів. Імовірність влучення при одному пострілі дорівнює 0,8. Скласти закон розподілу випадкової величини Х – числа витрачених патронів. Знайти математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення цієї випадкової величини.
2. Дискретна випадкова величина У може приймати лише 2 значення y_1 та y_2, причому $y_1 > y_2$. Імовірність прийняти випадковій величині У можливе значення y_2 дорівнює 0,2, математичне сподівання – 1,8, дисперсія – 0,16. Знайти закон розподілу цієї випадкової величини.

Варіант 5

1. По мішені стріляють до витрати всіх чотирьох патронів. Імовірність влучення при одному пострілі дорівнює 0,8. Скласти закон розподілу випадкової величини Х – числа влучень у мішень.

Знайти математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення цієї випадкової величини.

2. Дискретна випадкова величина У може приймати лише 2 значення y_1 та y_2, причому $y_1 > y_2$. Імовірність прийняти випадковій величині У можливе значення y_2 дорівнює 0,5, математичне сподівання – 5,5, дисперсія – 0,25. Знайти закон розподілу цієї випадкової величини.

Варіант 6

1. По мішені стріляють до витрати всіх п'яти патронів. Імовірність влучення при одному пострілі дорівнює 0,7. Скласти закон розподілу випадкової величини Х – числа влучень у мішень. Знайти математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення цієї випадкової величини.

2. Дискретна випадкова величина У може приймати лише 2 значення y_1 та y_2, причому $y_1 > y_2$. Імовірність прийняти випадковій величині У можливе значення y_2 дорівнює 0,2, математичне сподівання – 2,6, дисперсія – 0,64. Знайти закон розподілу цієї випадкової величини.

Варіант 7

1. У партії 7% бракованих деталей. Навмання вибрано 2 деталі. Скласти закон розподілу випадкової величини Х – числа бракованих деталей серед вийнятих, знайти математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення цієї випадкової величини.

2. Дискретна випадкова величина У може приймати лише 2 значення y_1 та y_2, причому $y_1 > y_2$. Імовірність прийняти випадковій величині У можливе значення y_2 дорівнює 0,1, математичне сподівання – 1,9 дисперсія – 0,09. Знайти закон розподілу цієї випадкової величини.

Варіант 8

1. У партії 5% бракованих деталей. Навмання вибрано 3 деталі. Скласти закон розподілу випадкової величини Х – числа бракованих деталей серед вийнятих, знайти математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення цієї випадкової величини.

2. Дискретна випадкова величина У може приймати лише 2 значення y_1 та y_2, причому $y_1 > y_2$. Імовірність прийняти випадковій величині У можливе значення y_2 дорівнює 0,5, математичне

сподівання – 3, дисперсія – 4. Знайти закон розподілу цієї випадкової величини.

Варіант 9

1. Монету кинули 4 рази. Скласти закон розподілу випадкової величини X – числа з'яв герба. Знайти математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення цієї випадкової величини.
2. Дискретна випадкова величина У може приймати лише 2 значення y_1 та y_2, причому $y_1 > y_2.$ Імовірність прийняти випадковій величині У можливе значення y_2 дорівнює 0,5, математичне сподівання – 3,5, дисперсія – 0,25. Знайти закон розподілу цієї випадкової величини.

Варіант 10

1. Монету кинули 3 рази. Скласти закон розподілу випадкової величини X – числа з'яв герба. Знайти математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення цієї випадкової величини.
2. Дискретна випадкова величина У може приймати лише 2 значення y_1 та y_2, причому $y_1 > y_2.$ Імовірність прийняти випадковій величині У можливе значення y_2 дорівнює 0,8, математичне сподівання – 1,2, дисперсія – 0,16. Знайти закон розподілу цієї випадкової величини.

Варіант 11

1. Монету кинули 5 разів. Скласти закон розподілу випадкової величини X – числа з'яв герба. Знайти математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення цієї випадкової величини.
2. Дискретна випадкова величина У може приймати лише 2 значення y_1 та y_2, причому $y_1 > y_2.$ Імовірність прийняти випадковій величині У можливе значення y_2 дорівнює 0,8, математичне сподівання – 1,4, дисперсія – 0,64. Знайти закон розподілу цієї випадкової величини.

Варіант 12

1. Імовірність влучити в ціль при одному пострілі для деякого стрільця дорівнює 0,85. Скласти закон розподілу випадкової величини X – числа влучень в ціль з трьох пострілів. Знайти математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення цієї випадкової величини.

2. Дискретна випадкова величина У може приймати лише 2 значення y_1 та y_2, причому $y_1 > y_2$. Імовірність прийняти випадковій величині У можливе значення y_2 дорівнює 0,8, математичне сподівання – 1,6, дисперсія – 1,44. Знайти закон розподілу цієї випадкової величини.

Варіант 13

1. Імовірність влучити в ціль при одному пострілі для деякого стрільця дорівнює 0,75. Скласти закон розподілу випадкової величини Х – числа влучень в ціль за чотирьох пострілів. Знайти математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення цієї випадкової величини.
2. Дискретна випадкова величина У може приймати лише 2 значення y_1 та y_2, причому $y_1 > y_2$. Імовірність прийняти випадковій величині У можливе значення y_2 дорівнює 0,8, математичне сподівання – 1,8, дисперсія – 2,56. Знайти закон розподілу цієї випадкової величини.

Варіант 14

1. Гральний кубик підкинули 3 рази. Скласти закон розподілу випадкової величини Х – числа з’яв п’ятірки, знайти математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення цієї випадкової величини.
2. Дискретна випадкова величина У може приймати лише 2 значення y_1 та y_2, причому $y_1 > y_2$. Імовірність прийняти випадковій величині У можливе значення y_2 дорівнює 0,6, математичне сподівання –1,4, дисперсія –0,24. Знайти закон розподілу цієї випадкової величини.

Варіант 15

1. Гральний кубик підкинули 4 рази. Скласти закон розподілу випадкової величини Х – числа з’яв двійки, знайти математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення цієї випадкової величини.
2. Дискретна випадкова величина У може приймати лише 2 значення y_1 та y_2, причому $y_1 > y_2$. Імовірність прийняти випадковій величині У можливе значення y_2 дорівнює 0,8, математичне сподівання – 2, дисперсія – 4. Знайти закон розподілу цієї випадкової величини.

Варіант 16

1. Гральний кубик підкинули 2 рази. Скласти закон розподілу випадкової величини Х – числа з’яв одиниці, знайти математичне

сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення цієї випадкової величини.

2. Дискретна випадкова величина У може приймати лише 2 значення y_1 та y_2, причому $y_1 > y_2$. Імовірність прийняти випадковій величині У можливе значення y_2 дорівнює 0,6, математичне сподівання – 1,8, дисперсія –0,96. Знайти закон розподілу цієї випадкової величини.

Варіант 17

1. Скласти закон розподілу ймовірностей числа з'явлень події А в трьох незалежних випробуваннях, якщо ймовірність з'явлення події А в кожному випробуванні дорівнює 0,7. Знайти математичне сподівання та дисперсію цієї випадкової величини

2. Дискретна випадкова величина У може приймати лише 2 значення y_1 та y_2, причому $y_1 > y_2$. Імовірність прийняти випадковій величині У можливе значення y_2 дорівнює 0,6, математичне сподівання – 2,2 дисперсія – 2,16. Знайти закон розподілу цієї випадкової величини.

Варіант 18

1. Скласти закон розподілу ймовірностей числа з'явлень події А в чотирьох незалежних випробуваннях, якщо ймовірність з'явлення події А в кожному випробуванні дорівнює 0,6. Знайти математичне сподівання та дисперсію цієї випадкової величини.

2. Дискретна випадкова величина У може приймати лише 2 значення y_1 та y_2, причому $y_1 > y_2$. Імовірність прийняти випадковій величині У можливе значення y_2 дорівнює 0,6, математичне сподівання – 2,6 дисперсія –3,84. Знайти закон розподілу цієї випадкової величини.

Варіант 19

1. Скласти закон розподілу ймовірностей числа з'явлень події А в двох незалежних випробуваннях, якщо ймовірність з'явлення події А в кожному випробуванні дорівнює 0,75. Знайти математичне сподівання та дисперсію цієї випадкової величини.

2. Дискретна випадкова величина У може приймати лише 2 значення y_1 та y_2, причому $y_1 > y_2$. Імовірність прийняти випадковій величині У можливе значення y_2 дорівнює 0,5, математичне сподівання – 1,5 дисперсія –0,25. Знайти закон розподілу цієї випадкової величини.

Варіант 20

1. У партії з 7 деталей 6 – стандартні. Навмання вийнято 3 деталі. Скласти закон розподілу випадкової величині Х – числа бракованих деталей серед трьох вийнятих. Знайти математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення цієї випадкової величини.
2. Дискретна випадкова величина У може приймати лише 2 значення y_1 та y_2, причому $y_1 > y_2$. Імовірність прийняти випадковій величині У можливе значення y_2 дорівнює 0,5, математичне сподівання – 2, дисперсія – 1. Знайти закон розподілу цієї випадкової величини.

Варіант 21

1. У партії 10% нестандартних деталей. Навмання відібрано три деталі. Скласти закон розподілу випадкової величини Х – числа нестандартних деталей серед трьох відібраних. Знайти математичне сподівання та дисперсію цієї випадкової величини.
2. Дискретна випадкова величина Х може приймати лише два значення: x_1 та x_2, причому $x_1 < x_2$. Відомі ймовірність p_1 можливого значення x_1, математичне сподівання M(X) та дисперсія D(X). Знайти закон розподілу цієї випадкової величини, якщо $p_1 = 0,6$, M(X) =1,8 , D(X) =1, 96.

Варіант 22

1. У партії 10% нестандартних деталей. Навмання відібрано дві деталі. Скласти закон розподілу випадкової величини Х – числа нестандартних деталей серед двох відібраних. Знайти математичне сподівання та дисперсію цієї випадкової величини.
3. Дискретна випадкова величина Х може приймати лише два значення: x_1 та x_2, причому $x_1 < x_2$. Відомі ймовірність p_1 можливого значення x_1, математичне сподівання M(X) та дисперсія D(X). Знайти закон розподілу цієї випадкової величини, якщо $p_1 = 0,6$, M(X) = 2,2, D(X) = 2,16.

Варіант 23

1. У партії з 8 деталей 6 – стандартні. Навмання відібрано дві деталі. Скласти закон розподілу випадкової величини Х – числа стандартних деталей серед двох відібраних. Знайти математичне сподівання та дисперсію цієї випадкової величини.
2. Дискретна випадкова величина Х може приймати лише два значення: x_1 та x_2, причому $x_1 < x_2$. Відомі ймовірність p_1 можливого значення x_1, математичне сподівання M(X) та дисперсія D(X).

Знайти закон розподілу цієї випадкової величини, якщо p_1= 0,6, M(X) =2,6, D(X) =3,84

Варіант 24

1. У партії з 8 деталей 6 – стандартні. Навмання відібрано три деталі. Скласти закон розподілу випадкової величини X – числа стандартних деталей серед трьох відібраних. Знайти математичне сподівання та дисперсію цієї випадкової величини.
2. Дискретна випадкова величина X може приймати лише два значення: x_1 та x_2, причому $x_1 < x_2$. Відомі ймовірність p_1 можливого значення x_1, математичне сподівання M(X) та дисперсія D(X). Знайти закон розподілу цієї випадкової величини, якщо p_1= 0,5, M(X) = 1,5, D(X) = 0,25

Варіант 25

1. У партії з 6 деталей 4 – стандартні. Навмання відібрано дві деталі. Скласти закон розподілу випадкової величини X – числа стандартних деталей серед двох відібраних. Знайти математичне сподівання та дисперсію цієї випадкової величини.
2. Дискретна випадкова величина X може приймати лише два значення: x_1 та x_2, причому $x_1 < x_2$. Відомі ймовірність p_1 можливого значення x_1, математичне сподівання M(X) та дисперсія D(X). Знайти закон розподілу цієї випадкової величини, якщо p_1= 0,5, M(X) = 2, D(X) =1

2.2. НЕПЕРЕРВНІ ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ. ФУНКЦІЯ РОЗПОДІЛУ. ЩІЛЬНІСТЬ РОЗПОДІЛУ

ОСНОВНІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

Якщо значення, які може приймати дана випадкова величина X, заповнюють цілий нескінченний проміжок (a, b) числової осі, то випадкова величина називається ***неперервною***.

Неперервну випадкову величину неможливо задати за допомогою ряду або багатокутника розподілу, тому що множина її можливих значень нескінченна й незлічення.

Для характеристики поводження неперервної випадкової величини доцільно використати не ймовірність події $X = x$, а ймовірність події $X < x$, де x – деяке дійсне число.

Функцією розподілу випадкової величини x називається функція $F(x)$, що задає ймовірність того, що випадкова величина X прийме значення, менше за x, тобто $F(x) = P(X < x)$.

Функція розподілу – неспадна, неперервна зліва, $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to\infty} F(x) = 1$.

$F(x)$ називають **інтегральною** функцією розподілу.

Неперервну випадкову величину можна задати також за допомогою функції, що називається ***диференціальною*** функцією розподілу або ***щільністю розподілу***. Якщо X – неперервна випадкова величина, то $F(x)$ – неперервна і диференційована; її похідна $f(x) = F'(x)$ називається ***щільністю розподілу ймовірностей***. При цьому $f(x)$ – невід'ємна функція, для якої

$$P(\alpha \le X < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx; \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1; \quad F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt.$$

Імовірність того, що в результаті випробування випадкова величина X прийме значення, яке належить інтервалові (a,b), можна знайти за формулою $P(a < x < b) = \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$

Математичним сподіванням M(X) неперервної випадкової величини X, можливі значення якої належать відрізку $[a;b]$, називається означений інтеграл $M(X) = \int_a^b x\, f(x)\, dx$.

Дисперсією неперервної випадкової величини називається математичне сподівання квадрата її відхилення від математичного сподівання. Якщо можливі значення випадкової величини належать відрізку $[a;b]$, то $D(X) = \int_a^b (x - M(X))^2\, f(x)\, dx$.

Для обчислення дисперсії використовують більш зручну формулу

$$D(X) = \int_a^b x^2 f(x)\, dx - M^2(X)$$

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

1. Задано функцію

$$F(x)=\begin{cases}0, \text{ якщо } x\le 1;\\ ax^2+bx, \text{ якщо } 1<x\le 4;\\ 1, \text{ якщо } x>4.\end{cases}$$

Довести, що можна дібрати такі значення a і b, при яких $F(x)$ буде функцією розподілу ймовірностей випадкової величини X. Знайти $P(2$ £ $X<3)$.

Розв'язання.

Щоб знайти a і b, скористаємося неперервністю функції розподілу в точках $x = 1$ і $x = 4$. Дістанемо систему рівнянь:

$$\begin{cases}a+b=0,\\ 16a+4b=1.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-b,\\ 16b+4b=1.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b=-\dfrac{1}{12},\\ a=\dfrac{1}{12}.\end{cases}$$

Отже, $F(x)=\frac{1}{12}x^2-\frac{1}{12}x$, якщо доведемо, що на цьому проміжку функція монотонно зростає. Відшукуємо похідну функції: $F'(x)=\frac{1}{6}x-\frac{1}{12}$. Похідна дорівнює нулю при $x=\frac{1}{2}$. На проміжку $(0;4)$ похідна функції $F(x)$ додатна, а отже, ця функція зростає. Отже, $F(x)$ задає закон розподілу випадкової величини X. Обчислюємо ймовірність:

$$P(2\le X<3)=F(3)-F(2)=\frac{1}{12}\cdot 9-\frac{1}{12}\cdot 3-\frac{1}{12}\cdot 4+\frac{1}{12}\cdot 2=\frac{1}{3}.$$

2. Дискретну випадкову величину X задано законом розподілу:

x	4	8	12
p	0,5	0,2	0,3

Знайти функцію розподілу F(x) і накреслити її графік.

Розв'язання.

Якщо $x\le 4$, то F(x) = 0, бо значень, які були б менші від числа 2, величина X не приймає. Тому при $x\le 4$ функція F(x) = P(X < x) = 0.

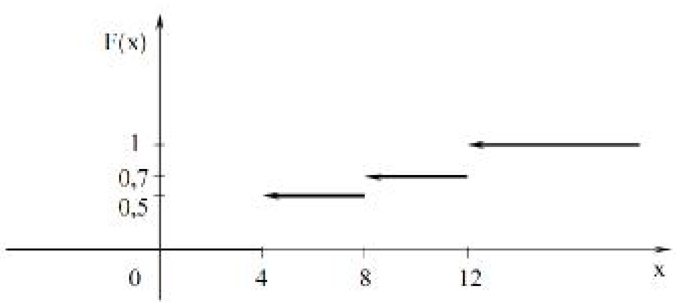
Якщо $4 < x \le 8$, то $F(x) = 0{,}5$. Дійсно, величина X може приймати значення 4 з імовірністю 0,5.

Якщо $8 < x \le 12$, то $F(x) = 0{,}7$. Дійсно, X може приймати значення 4 з імовірністю 0,5 та значення 8 з імовірністю 0,2; отже, одне з цих значень, байдуже яке, за теоремою додавання ймовірностей несумісних подій X може прийняти з імовірністю 0,5 + 0,2 = 0,7.

Якщо $x > 12$, то $F(x) = 1$, тому що подія $x \le 12$ вірогідна і її ймовірність дорівнює 1. Таким чином, шукана функція розподілу ймовірностей аналітично може бути задана так:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad x \le 4; \\ 0{,}5, & \text{якщо} \quad 4 < x \le 8; \\ 0{,}7, & \text{якщо} \quad 8 < x \le 12; \\ 1, & \text{якщо} \quad x > 12. \end{cases}$$

Графік цієї функції має такий вигляд:



3. Випадкову величину задано функцією розподілу:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо}: \quad x < 0; \\ x^4, & \text{якщо}: \; 0 \le x \le 1; \\ 1, & \text{якщо}: \quad x > 1. \end{cases}$$

Знайти:

а) щільність розподілу ймовірності;

б) математичне сподівання;

в) дисперсію випадкової величини;

г) імовірність попадання випадкової величини в інтервал (0;0,5).

Розв'язання.

а) щільність розподілу:

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0, & якщо \quad x < 0; \\ 4x^3, & якщо \quad 0 \le x \le 1; \\ 0, & якщо \quad x > 1. \end{cases}$$

б) математичне сподівання:

$$M(x) = \int_a^b x \cdot f(x)\, dx = \int_0^1 x \cdot 4x^3\, dx = 4\int_0^1 x^4\, dx = 4\frac{x^5}{5}\Bigg|_0^1 = \frac{4}{5}.$$

в) дисперсія:

$$D(x) = \int_a^b x^2 \cdot f(x)\, dx - M^2(x) = \int_0^1 x^2\, 4x^4\, dx - \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 4\int_0^1 x^5\, dx - \frac{16}{25} =$$

$$= \frac{4x^6}{6}\Bigg|_0^1 - \frac{16}{25} = \frac{2}{3} - \frac{16}{25} = \frac{50-48}{75} = \frac{2}{75}.$$

г) імовірність попадання випадкової величини в інтервал $\left(0; \frac{1}{2}\right)$:

$$P\left(0 < X < \frac{1}{2}\right) = F\left(\frac{1}{2}\right) - F(0) = \left(\frac{1}{2}\right)^4 - 0 = \frac{1}{16}.$$

4. Задано $F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ ax^2, & 0 < x \le 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$.

Знайти: $f(x)$, та побудувати її графік.

Розв'язання.

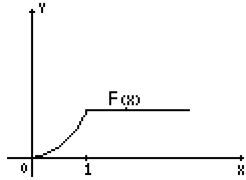
$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ 2ax, & 0 < x \le 1 \\ 0, & x > 1 \end{cases}$$

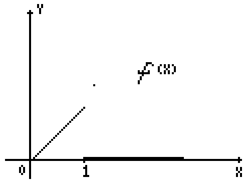
Враховуючи вигляд і властивості $f(x)$, дістанемо:

$\int_0^1 2ax\, dx = 1, \quad \int_0^1 2ax\, dx = ax^2 \Big|_0^1 = a = 1$

Отже:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ x^2, & 0<x\le 1\\ 1, & x>1\end{cases};\qquad f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ 2x, & 0<x\le 1\\ 0, & x>1\end{cases}$$





5. Задано функцію F(x) = $\begin{cases}0, x\le 0\\ 1-e^{-x}, x>0\end{cases}$.Чи є ця функція функцією розподілу деякої випадкової величини? У разі позитивної відповіді знайти ймовірність події $\{0\le X<2\}$.

Розв'язання.

Для того, щоб функція F(x) була функцією розподілу деякої випадкової величини X, необхідно і достатньо виконання наступних умов:

1) F(x)- неспадна функція;

2) $\lim\limits_{x\to\infty}F(x)=1, \lim\limits_{x\to-\infty}F(x)=0$;

3)При будь-якому x виконується рівність F(x-0)= F(x).

Перевіримо виконання цих умов для заданої функції.

1) Знайдемо похідну F'(x) на інтервалі (0; + ∞).

Маємо F'(x) = e^{-x}, x >0.

Оскільки e^{-x}>0, то на інтервалі (0; + ∞) функція зростає. Крім того, 1 - e^{-x}>0 при x >0, отже F(x) зростає на всій числовій прямій.

2) $\lim\limits_{x\to\infty}F(x)=\lim\limits_{ч\to\infty}(1-e^{-x})=1-0=1$.

$\lim\limits_{x\to\infty}F(x)=\lim\limits_{x\to\infty}0=0$.

3) На кожному з проміжків $(-\infty; 0]$ і $(0; +\infty)$ функція F(x) збігається з елементарною функцією, отже, неперервна і ліва границя F(x-0)= F(x).

Отже, умови 1) – 3) виконані, і функція F(x) є функцією розподілу деякої випадкової величини.

Імовірність P $\{0 \le X < 2\}$ = F(2) – F(0)=(1 – e^{-2}) – 0 $\approx$ 0, 86.

ТРЕНУВАЛЬНІ ВПРАВИ

1. Дискретну випадкову величину X задано такою функцією розподілу:

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{якщо } x\le 0;\\ 0{,}3, & \text{якщо } 0<x\le 2;\\ 0{,}4, & \text{якщо } 2<x\le 3;\\ 0{,}7, & \text{якщо } 3<x\le 4;\\ 1, & \text{якщо } x>4.\end{cases}$$

Знайти закон розподілу X у табличній формі.

2. Чи є функція F(x) функцією розподілу деякою випадкової величини, якщо

$$F(x)=\begin{cases}0, x\le -\frac{p}{2},\\ cos\, x, -\frac{p}{2}<x\le 0,\\ 1, x>0\end{cases} \quad ?$$

У випадку позитивної відповіді відшукайте ймовірність події $\left\{X\in\left[-\frac{p}{4};-\frac{p}{6}\right]\right\}$.

3. Чи є наступні функції функціями розподілу деякої випадкової величини?

1) $$F(x)=\begin{cases}0, x\le 0,\\ 0{,}5,\ 0<x\le 1,\\ 1,\ x>1.\end{cases}$$

2) F(x) = $\begin{cases} 0{,}1e^x,\ x \le 1, \\ 0{,}9x+1,\ 0 < x \le 1, \\ 1,\ x > 1. \end{cases}$

3) F(x)= $\begin{cases} 0,\ x \le 1, \\ 0{,}6,\ 1 < x \le 2, \\ 0{,}25x,\ 2 < x \le 3, \\ 1,\ x > 3. \end{cases}$

4. Випадкова величина задана функцією розподілу

F(x) = $\begin{cases} 0, x \le 0, \\ \dfrac{x^3}{100}, 0 < x \le 10, \\ 1, x > 10. \end{cases}$

Знайти щільність ймовірності та ймовірності подій $\{-1 < X \le 5\}$; $\{X \in (2;\infty)\}$; $\{X \in (0;1) \cup [4;\infty)\}$

5. Задано функцію $F(x) = a\sin x + b\cos x + 0{,}5$. Довести, що коли $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, то можна знайти a і b, такі що $F(x)$ – функція розподілу ймовірностей. Знайти ці значення та щільність розподілу $f(x)$.

6. Існує гіпотеза, що випадкова величина X має таку функцію розподілу:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \le 0; \\ ax^2, & \text{якщо } 0 < x \le 3; \\ 1, & \text{якщо } x > 3. \end{cases}$$

У результаті чотирьох випробувань випадкова величина набувала значень, більших за 2. Чи відповідає цей результат висуненій гіпотезі, якщо рівень значущості дорівнює 0,005? Гіпотеза приймається, якщо ймовірність події більша за рівень значущості.

7. Випадкова величина X задається функцією розподілу:

$$F(x)=\begin{cases}0, \text{ якщо } x\le 1,\\ a+b\cdot arctgx, \text{ якщо } x>1.\end{cases}$$

Знайти a,b, $P(2 \le X < 4)$ та $f(x)$.

8. Випадкова величина X задається функцією розподілу:

$$F(x)=\begin{cases}0, \text{ якщо } x<a,\\ bx^2-\dfrac{1}{3}, \text{ якщо } a<x\le 2,\\ 1, \text{ якщо } x>2.\end{cases}$$

Знайти a,b, $P(1{,}2 \le X < 1{,}5)$, і $f(x)$.

9. Дискретна випадкова величина має наступний розподіл:

x	-1,5	0	2,5
p	0,3	0,5	0,2

Знайти функцію розподілу F(x) і побудувати її графік. Використовуючи F(x), знайти ймовірності подій: $\{X\in[-1;1]\}$, $\{X>1{,}5\}$.

10. Випадкова величина має щільність ймовірності

$$f(x)=\begin{cases}0, x\le 0,\\ cx^3, 0<x\le 2,\\ 0, x>2.\end{cases}$$

Знайти 1) сталу c; 2) функцію розподілу $F(x)$; 3) імовірність $P\ (0{,}5 \le X \le 1)$.

11. Випадкова величина має щільність ймовірності $f(x)=\begin{cases}0, x\le 1,\\ \dfrac{a}{x^4}, x>1.\end{cases}$

Знайти 1) значення коефіцієнта a; 2) функцію розподілу $F(x)$; 3) імовірність $P\ (1 < X \le 4)$,$\{X>2\}$.

12. Щільність розподілу $f(x)$ – парна функція. Знайти $F(-1)$, якщо $F(1) = 0{,}8$.

13. Щільність ймовірності випадкової величини

$$f(x)=\begin{cases} 0, \text{ якщо } x \le 0, \\ ax, \text{ якщо } 0 < x \le 1 \\ 0, \text{ якщо } x > 1 \end{cases}$$

Знайти: 1) параметр *a*; 2) функцію розподілу; 3) ймовірність того, що випадкова величина X прийме значення з інтервалу (0,5; 2).

14. Графік щільності розподілу — півколо з центром у початку координат. Знайти аналітичний вираз для $f(x)$, функцію розподілу $F(x)$, математичне сподівання MX та моду розподілу.

15. Випадкову величину X задано функцією розподілу

$$F(x)=\begin{cases} 0, x \le 3; \\ (x-3)^2, 3 < x \le 4; \\ 1, x > 4. \end{cases}$$

Знайти щільність розподілу ймовірностей, математичне сподівання та дисперсію випадкової величини X; імовірність того, що в результаті випробування випадкова величина прийме значення, яке належить інтервалу (3; 3,2).

16. Дискретна випадкова величина X задана законом розподілу:

а)

x	2	4	5	6
p	0,3	0,1	0,2	0,4

б)

x	10	15	20
p	0,1	0,7	0,2

Знайти функцію розподілу й накреслити її графік.

17. Дискретна випадкова величина *x* задана законом розподілу. Обчислити математичне сподівання та дисперсію цієї випадкової величини.

а)

x	-2	-1	0	1	2
p	0,1	0,2	0,2	0,3	0,1

б)

x	1	3	4	6	7
p	0,1	0,1	0,3	0,4	0,1

в)

x	5	7	10	15
p	0,2	0,5	0,2	0,1

г)

x	100	150	200	250	300
p	0,4	0,3	0,2	0,05	0,05

18. Задана інтегральна функція неперервної випадкової величини X:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x \le 0\\ \sin x, & 0 < x \le \frac{p}{2}\\ 1 & x > \frac{p}{2}\end{cases}.$$

Знайти диференціальну функцію *f(x)*.

19. Задано диференціальну функцію неперервної випадкової величини X: $f(x)=x-\frac{1}{2}$ в інтервалі (1; 2). Поза цим інтервалом $f(x)=0$. Знайти інтегральну функцію $F(x)$.

20. Випадкова величина *X* набуває значень на відрізку $[a;2]$, де задано щільність її розподілу $f(x)=Ax^2$. Визначити $a, A, F(x)$ і $D(x)$, якщо $MX = 0$.

21. Випадкова величина *X* набуває значень на відрізку $[a;2]$, $f(x)=\frac{3}{16}x^{n+1}$, $MX = 0$. Знайти a і $n(n\in N)$.

22. Знайти математичне сподівання та дисперсію випадкової величини, що має в інтервалі $(-p;p)$ щільність розподілу, яка дорівнює $f(x) = \frac{2}{p}\sin^2 x$.

23. Випадкова величина задана диференціальною функцією $f(x)=\frac{2}{25}x$ в інтервалі(0;5); поза цим інтервалом $f(x) = 0$ Знайти дисперсію.

24. Випадкова величина задана інтегральною функцією

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{x_0^3}{x^3}, \textit{якщо } x \geq x_0, \\ 1, \textit{якщо } x < x_0. \end{cases}$$

Знайти математичне сподівання, дисперсію, середнє квадратичне відхилення.

25. Випадкова величина X в інтервалі (3; 5) задана щільністю розподілу $f(x) = -\frac{3}{4}x^2 + 6x - \frac{45}{4}$ за інтервалом $f(x) = 0$. Знайти: моду, математичне сподівання та медіану випадкової величини X.

26. Випадкова величина X в інтервалі (0; 5) задана щільністю розподілу $f(x) = \frac{2}{25}x$; за інтервалом $f(x) = 0$. Знайти дисперсію X.

ВАРІАНТИ ІНДИВІДУАЛЬНИХ ЗАВДАНЬ

Варіант 1

1. Дискретну випадкову величину задано законом розподілу

X	1	3	7
p	0,2	0,5	0,3

Знайти функцію розподілу цієї випадкової величини та побудувати її графік.

2. Випадкову величину задано функцією розподілу

$$F(x) = \begin{cases} 0, x \leq 0, \\ x^3, 0 < x \leq 1, \\ 1, x > 1. \end{cases}$$

Знайти щільність розподілу ймовірностей, математичне сподівання та дисперсію цієї випадкової величини; імовірність того, що в результаті випробування випадкова величина прийме значення, яке належить інтервалу (0;0,2).

Варіант 2

1. Дискретну випадкову величину задано законом розподілу

X	2	3	5
p	0,3	0,5	0,2

Знайти функцію розподілу цієї випадкової величини та побудувати її графік.

2. Випадкову величину задано функцією розподілу

$$F(x)=\begin{cases}0, x \le 1,\\(x-1)^3, 1 < x \le 2,\\1, x > 2.\end{cases}$$

Знайти щільність розподілу ймовірностей, математичне сподівання та дисперсію цієї випадкової величини; імовірність того, що в результаті випробування випадкова величина прийме значення, яке належить інтервалу (1,2;2).

Варіант 3

1. Дискретну випадкову величину задано законом розподілу

X	1	3	5
p	0,6	0,3	0,1

Знайти функцію розподілу цієї випадкової величини та побудувати її графік.

2. Випадкову величину задано функцією розподілу

$$F(x)=\begin{cases}0, x \le 1,\\0{,}5(x^2-x), 1 < x \le 2,\\1, x > 2.\end{cases}$$

Знайти щільність розподілу ймовірностей, математичне сподівання та дисперсію цієї випадкової величини; імовірність того, що в результаті випробування випадкова величина прийме значення, яке належить інтервалу (1;1,5)

Варіант 4

1. Дискретну випадкову величину задано законом розподілу

X	2	5	9
p	0,3	0,5	0,2

Знайти функцію розподілу цієї випадкової величини та побудувати її графік.

2. Випадкову величину задано функцією розподілу

$$F(x)=\begin{cases}0, x \le 0,\\3x^2+2x, 0 < x \le \frac{1}{3},\\1, x > \frac{1}{3}.\end{cases}$$

Знайти щільність розподілу ймовірностей, математичне сподівання та дисперсію цієї випадкової величини; імовірність того, що в результаті випробування випадкова величина прийме значення, яке належить інтервалу (0;0,4).

Варіант 5

1. Дискретну випадкову величину задано законом розподілу

X	4	8	10
p	0,2	0,3	0,5

Знайти функцію розподілу цієї випадкової величини та побудувати її графік.

2. Випадкову величину задано функцією розподілу

$$F(x)=\begin{cases} 0, x \le -1, \\ \dfrac{x}{3}+\dfrac{1}{3}, -1 < x \le 2, \\ 1, x > 2. \end{cases}$$

Знайти щільність розподілу ймовірностей, математичне сподівання та дисперсію цієї випадкової величини; імовірність того, що в результаті випробування випадкова величина прийме значення, яке належить інтервалу (-1;0,3).

Варіант 6

1. Дискретну випадкову величину задано законом розподілу

X	4	6	7
p	0,2	0,3	0,5

Знайти функцію розподілу цієї випадкової величини та побудувати її графік.

2. Випадкову величину задано функцією розподілу

$$F(x)=\begin{cases} 0, x \le 0, \\ \dfrac{x^2}{9}, 0 < x \le \dfrac{1}{3}, \\ 1, x > \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

Знайти щільність розподілу ймовірностей, математичне сподівання та дисперсію цієї випадкової величини; імовірність того, що в результаті випробування випадкова величина прийме значення, яке належить інтервалу (0;0,3).

Варіант 7

1. Дискретну випадкову величину задано законом розподілу

X	3	10	12
p	0,6	0,2	0,2

Знайти функцію розподілу цієї випадкової величини та побудувати її графік.

2. Випадкову величину задано функцією розподілу

$$F(x)=\begin{cases} 0, x \le -\frac{1}{2}, \\ \frac{2x+1}{5}, -\frac{1}{2} < x \le 2, \\ 1, x > 2. \end{cases}$$

Знайти щільність розподілу ймовірностей, математичне сподівання та дисперсію цієї випадкової величини; імовірність того, що в результаті випробування випадкова величина прийме значення, яке належить інтервалу (-0,5;0,2).

Варіант 8

1. Дискретну випадкову величину задано законом розподілу

X	10	13	17
p	0,2	0,5	0,3

Знайти функцію розподілу цієї випадкової величини та побудувати її графік.

2. Випадкову величину задано функцією розподілу

$$F(x)=\begin{cases} 0, x \le 2, \\ (x-2)^3, 2 < x \le 3, \\ 1, x > 3. \end{cases}$$

Знайти щільність розподілу ймовірностей, математичне сподівання та дисперсію цієї випадкової величини; імовірність того, що в результаті випробування випадкова величина прийме значення, яке належить інтервалу (2;2,5).

Варіант 9

1. Дискретну випадкову величину задано законом розподілу

X	4	8	12
p	0,4	0,5	0,1

Знайти функцію розподілу цієї випадкової величини та побудувати її графік.

2. Випадкову величину задано функцією розподілу

$$F(x)=\begin{cases} 0, x \le -\frac{2}{3}, \\ -2-3x, -\frac{2}{3} < x \le 1, \\ 1, x > 1. \end{cases}$$

Знайти щільність розподілу ймовірностей, математичне сподівання та дисперсію цієї випадкової величини; імовірність того, що в результаті випробування випадкова величина прийме значення, яке належить інтервалу (-0,2; 1).

Варіант 10

1. Дискретну випадкову величину задано законом розподілу

X	11	13	14
p	0,3	0,5	0,2

Знайти функцію розподілу цієї випадкової величини та побудувати її графік.

2. Випадкову величину задано функцією розподілу

$$F(x)=\begin{cases} 0, x \le 0, \\ 8x^3, 0 < x \le 2, \\ 1, x > 2. \end{cases}$$

Знайти щільність розподілу ймовірностей, математичне сподівання та дисперсію цієї випадкової величини; імовірність того, що в результаті випробування випадкова величина прийме значення, яке належить інтервалу (0;0,2).

Варіант 11

1. Дискретну випадкову величину задано законом розподілу

X	9	11	13
p	0,2	0,5	0,3

Знайти функцію розподілу цієї випадкової величини та побудувати її графік.

2. Випадкову величину задано функцією розподілу

$$F(x)=\begin{cases}0, x \le 0,\\ x^5, 0 < x \le 1,\\ 1, x > 1.\end{cases}$$

Знайти щільність розподілу ймовірностей, математичне сподівання та дисперсію цієї випадкової величини; імовірність того, що в результаті випробування випадкова величина прийме значення, яке належить інтервалу (0;0,3).

Варіант 12

1. Дискретну випадкову величину задано законом розподілу

X	2	3	5
p	0,6	0,3	01

Знайти функцію розподілу цієї випадкової величини та побудувати її графік.

2. Випадкову величину задано функцією розподілу

$$F(x)=\begin{cases}0, x \le -3,\\ (x+3)^3, -3 < x \le -2,\\ 1, x > -2.\end{cases}$$

Знайти щільність розподілу ймовірностей, математичне сподівання та дисперсію цієї випадкової величини; імовірність того, що в результаті випробування випадкова величина прийме значення, яке належить інтервалу (-3;-3,5).

Варіант 13

1. Дискретну випадкову величину задано законом розподілу

X	1	4	6
p	0,1	0,3	0,6

Знайти функцію розподілу цієї випадкової величини та побудувати її графік.

2. Випадкову величину задано функцією розподілу

$$F(x)=\begin{cases}0, x \le 2{,}5,\\ 2x-5,\ 2{,}5 < x \le 3,\\ 1, x > 3.\end{cases}$$

Знайти щільність розподілу ймовірностей, математичне сподівання та дисперсію цієї випадкової величини; імовірність того, що в результаті випробування випадкова величина прийме значення, яке належить інтервалу (2,5;2,9).

Варіант 14

1. Дискретну випадкову величину задано законом розподілу

X	8	10	12
p	0,4	0,3	0,3

Знайти функцію розподілу цієї випадкової величини та побудувати її графік.

2. Випадкову величину задано функцією розподілу

$$F(x)=\begin{cases} 0, x \le 1.75, \\ 4x-7, 1{,}75 < x \le 2, \\ 1, x > 2. \end{cases}$$

Знайти щільність розподілу ймовірностей, математичне сподівання та дисперсію цієї випадкової величини; імовірність того, що в результаті випробування випадкова величина прийме значення, яке належить інтервалу (01,75;2).

Варіант 15

1. Дискретну випадкову величину задано законом розподілу

X	6	7	10
p	0,3	0,3	0,4

Знайти функцію розподілу цієї випадкової величини та побудувати її графік.

2. Випадкову величину задано функцією розподілу

$$F(x)=\begin{cases} 0, x \le 5, \\ 0{,}2(x-5),\ \ 5 < x \le 10, \\ 1, x > 10. \end{cases}$$

Знайти щільність розподілу ймовірностей, математичне сподівання та дисперсію цієї випадкової величини; імовірність того, що в результаті випробування випадкова величина прийме значення, яке належить інтервалу (5;54).

Варіант 16

1. Дискретну випадкову величину задано законом розподілу

X	3	4	8
p	0,4	0,5	0,1

Знайти функцію розподілу цієї випадкової величини та побудувати її графік.

2. Випадкову величину задано функцією розподілу

$$F(x)=\begin{cases}0, x \le 1{,}8, \\ 5x-9,\ 1{,}8 < x \le 2, \\ 1, x > 2\end{cases}$$

Знайти щільність розподілу ймовірностей, математичне сподівання та дисперсію цієї випадкової величини; імовірність того, що в результаті випробування випадкова величина прийме значення, яке належить інтервалу (1,8;1,9).

Варіант 17

1. Дискретну випадкову величину задано законом розподілу

X	5	6	7
p	0,2	0,3	0,5

Знайти функцію розподілу цієї випадкової величини та побудувати її графік.

2. Випадкову величину задано функцією розподілу

$$F(x)=\begin{cases}0, x \le 0, \\ 27x^3, 0 < x \le \dfrac{1}{3}, \\ 1, x > \dfrac{1.}{3}\end{cases}$$

Знайти щільність розподілу ймовірностей, математичне сподівання та дисперсію цієї випадкової величини; імовірність того, що в результаті випробування випадкова величина прийме значення, яке належить інтервалу (0;0,2).

Варіант 18

1. Дискретну випадкову величину задано законом розподілу

X	12	13	17
p	0,4	0,4	0,2

Знайти функцію розподілу цієї випадкової величини та побудувати її графік.

2. Випадкову величину задано функцією розподілу

$$F(x)=\begin{cases}0, x \le 0, \\ 4x^2, 0 < x \le 0{,}5, \\ 1, x > 0{,}5.\end{cases}$$

Знайти щільність розподілу ймовірностей, математичне сподівання та дисперсію цієї випадкової величини; імовірність того, що в результаті випробування випадкова величина прийме значення, яке належить інтервалу (0;0,3).

Варіант 19

1. Дискретну випадкову величину задано законом розподілу

X	3	4	6
p	0,2	0,5	0,3

Знайти функцію розподілу цієї випадкової величини та побудувати її графік.

2. Випадкову величину задано функцією розподілу

$$F(x)=\begin{cases} 0, x \le 0, \\ 125x^3, 0 < x \le 0{,}2, \\ 1, x > 0{,}2. \end{cases}$$

Знайти щільність розподілу ймовірностей, математичне сподівання та дисперсію цієї випадкової величини; імовірність того, що в результаті випробування випадкова величина прийме значення, яке належить інтервалу (0;0,1).

Варіант 20

1. Дискретну випадкову величину задано законом розподілу

X	8	10	15
p	0,3	0,5	0,2

Знайти функцію розподілу цієї випадкової величини та побудувати її графік.

2. Випадкову величину задано функцією розподілу

$$F(x)=\begin{cases} 0, x \le 0, \\ x^3, 0 < x \le 1, \\ 1, x > 1. \end{cases}$$

Знайти щільність розподілу ймовірностей, математичне сподівання та дисперсію цієї випадкової величини; імовірність того, що в результаті випробування випадкова величина прийме значення, яке належить інтервалу (0;0,8).

Варіант 21

1. Дискретну випадкову величину X задано законом розподілу. Знайти функцію розподілу F(x) і накреслити її графік.

X	2	3	6
p	0,4	0,1	0,6

2. Випадкову величину X задано функцією розподілу

$$F(x)=\begin{cases}0, x \le 0,\\ 2x^3, 0 < x \le 1,\\ 1, x > 1.\end{cases}$$

Знайти: а) щільність розподілу ймовірностей, математичне сподівання та дисперсію випадкової величини; б) ймовірність того, що в результаті випробування випадкова величина прийме значення, яке належить інтервалу (0,5;1)

Варіант 22

1. Дискретну випадкову величину X задано законом розподілу. Знайти функцію розподілу F(*x*) і накреслити її графік.

X	1	3	5
p	0,6	0,1	0,3

2. Випадкову величину X задано функцією розподілу

$$F(x)=\begin{cases}0, x \le 0,\\ x^2, 0 < x \le 1,\\ 1, x > 1.\end{cases}$$

Знайти: а) щільність розподілу ймовірностей, математичне сподівання та дисперсію випадкової величини; б) ймовірність того, що в результаті випробування випадкова величина прийме значення, яке належить інтервалу (0;0,5)

Варіант 23

1. Дискретну випадкову величину X задано законом розподілу. Знайти функцію розподілу F(x) і накреслити її графік.

X	1	4	6
p	0,2	0,4	0,4

2. Випадкову величину X задано функцією розподілу

$$F(x)=\begin{cases}0, x \le 0,\\ 0{,}04(x-1)^3, 0 < x \le 6,\\ 1, x > 6.\end{cases}$$

Знайти: а) щільність розподілу ймовірностей, математичне сподівання та дисперсію випадкової величини; б) ймовірність того, що в результаті випробування випадкова величина прийме значення, яке належить інтервалу (1;2)

Варіант 24

1. Дискретну випадкову величину X задано законом розподілу. Знайти функцію розподілу $F(x)$ і накреслити її графік.

X	2	8	5
p	0,4	0,1	0,5

2. Випадкову величину X задано функцією розподілу

$$F(x)=\begin{cases}0, x\le 0,\\ x^5, 0<x\le 1,\\ 1, x>1.\end{cases}$$

Знайти: а) щільність розподілу ймовірностей, математичне сподівання та дисперсію випадкової величини; б) ймовірність того, що в результаті випробування випадкова величина прийме значення, яке належить інтервалу (0;0,5)

Варіант 25

1. Дискретну випадкову величину X задано законом розподілу. Знайти функцію розподілу $F(x)$ і накреслити її графік.

X	10	3	7
p	0,4	0,1	0,5

2. Випадкову величину X задано функцією розподілу F(x)=

$$\begin{cases}0, x\le 0,\\ (x-1)^2, 0<x\le 2,\\ 1, x>2.\end{cases}$$

Знайти: а) щільність розподілу ймовірностей, математичне сподівання та дисперсію випадкової величини; б) імовірність того, що в результаті випробування випадкова величина прийме значення, яке належить інтервалу (1;1,5)

2.3. ОСНОВНІ ЗАКОНИ РОЗПОДІЛУ ЙМОВІРНОСТЕЙ

ОСНОВНІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

1. Біноміальний закон розподілу.

Імовірності в цьому законі визначаються за формулою $P(X=m)=C_n^m p^m (1-p)^{n-m}$, m = 0,1,2, …, n. Закон справджується для схеми незалежних повторних випробувань, у кожному з яких подія A настає з імовірністю p. Частота настання події A має біноміальний закон розподілу. Числові характеристики розподілу: $MX = np,\ DX = np(1-p).$

2. Закон розподілу Пуассона.

Дискретна випадкова величина має розподіл Пуассона, якщо вона набуває зліченної множини значень $(m = 0,1,2,...)$ з імовірностями $P(X = m) = \frac{a^m}{m!}e^{-a}, (a > 0).$ Цей розподіл описує кількість подій, які настають в однакові проміжки часу за умови, що ці події відбуваються незалежно одна від одної зі сталою інтенсивністю. Розподіл застосовується в задачах статистичного контролю якості, у теорії надійності, теорії масового обслуговування. Математичне сподівання і дисперсія в цьому розподілі однакові і дорівнюють a. Для цього розподілу складено таблиці щодо різних значень a (0,1–20). У таблицях для відповідних значень a наведено ймовірності $P(X = m)$ і $P(X \geq m)$.

Якщо у схемі незалежних повторних випробувань n велике і p або $1-p$ прямують до нуля, то біноміальний розподіл апроксимується розподілом Пуассона, коли $a = np.$

3. Геометричний розподіл.

Закон подається формулою: $P(X = m) = p(1-p)^{m-1}, m = 1, 2, ...$.

Геометричний закон розподілу має частоту настання події у схемі незалежних повторних випробувань, якщо вони проводяться до першого настання події. У формулі p – імовірність настання події в кожному випробуванні. Геометричний закон розподілу застосовується у задачах статистичного контролю якості і теорії надійності. Числові характеристики розподілу: $MX = \frac{1}{p}$, $DX = \frac{1-p}{p^2}.$

4. Гіпергеометричний розподіл.

Гіпергеометричний розподіл описує ймовірність настання m успішних результатів у n випробуваннях, якщо значення n мале порівняно з обсягом сукупності N:

$$P(X=m)=\frac{C_k^m\cdot C_{N-k}^{n-m}}{C_N^n},\quad m=0,1,2,...,n;\ k\ge n.$$

Наприклад, імовірність того, що з *n* деталей, які випадково вибрано з партії обсягом *N*, *m* виявляться дефектними, має гіпергеометричний закон розподілу (*k* – кількість дефектних деталей у партії). Цей закон розподілу застосовується в задачах статистичного контролю якості та в суміжних галузях. Числові характеристики розподілу:

$$MX=\frac{kn}{N},\ DX=\frac{nk(N-k)(N-n)}{N^2(N-1)}.$$

Зі зменшенням відношення $\frac{n}{N}$ гіпергеометричний розподіл наближається до біноміального з параметрами n і $p=\frac{k}{N}$. Дуже часто гіпергеометричний розподіл апроксимується розподілом Пуассона, якщо $a=\frac{nk}{N}$.

5. Рівномірний закон розподілу

Якщо ймовірність потрапляння випадкової величини на інтервал пропорційна до довжини інтервалу і не залежить від розташування інтервалу на осі, то вона має рівномірний закон розподілу.

Щільність рівномірного закону розподілу має вид:

$$f(x)=\begin{cases}0, x<a\\ \dfrac{1}{b-a}, a\le x\le b\\ 0, x>b\end{cases}.$$

Функція розподілу рівномірного закону розподілу має вид:

$$F(x)=\begin{cases}0, x<a\\ \dfrac{x-a}{b-a}, a\le x\le b\\ 1, x>b\end{cases}.$$

Математичне сподівання та дисперсія рівномірного закону розподілу дорівнюють

$$MX=\frac{a+b}{2}, DX=\frac{(b-a)^2}{12}.$$

Рівномірний закон розподілу легко моделювати. За допомогою функціональних перетворень із величин, розподілених рівномірно, можна діставати величини з довільним законом розподілу. Графіки щільності ймовірності і функції розподілу наведено на рис. 3 і 4.

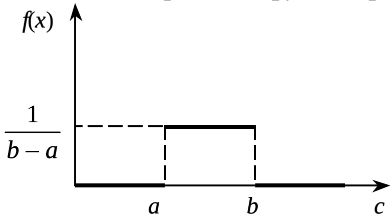


Рис. 3

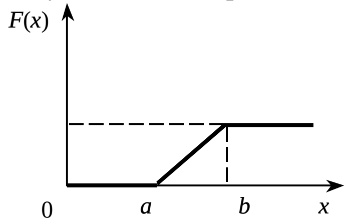


Рис. 4

6. Показниковий закон розподілу.

Щільність розподілу випадкової величини, розподіленої за показниковим законом, задається формулою:

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{якщо } x\le 0;\\ ae^{-ax}, & \text{якщо } x>0.\end{cases}$$

Функція розподілу показникового закону розподілу задається формулою:

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{якщо } x\le 0;\\ 1-e^{-ax}, & \text{якщо } x>0.\end{cases}$$

Математичне сподівання та дисперсія величини *X*, розподіленої за показниковим законом розподілу можна знайти за формулами:

$$MX=\frac{1}{a}, DX=\frac{1}{a^2}.$$

Графік показникового розподілу зображено на рис. 5, а, б.

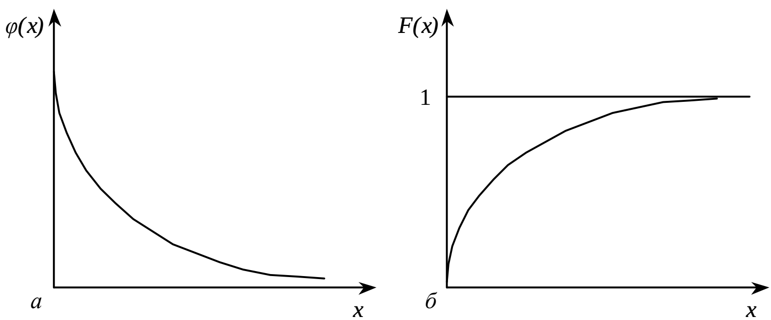


Рис. 5

7. Нормальний закон розподілу

Нормальним зветься такий розподіл імовірностей неперервної випадкової величини X, у якого щільність розподілу має вигляд

$f(x) = \frac{1}{s\sqrt{2p}} \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2s^2}}$, де a = m– математичне сподівання, s – середнє квадратичне відхилення.

Імовірність того, що X прийме значення, яке належить інтервалові (a,b), обчислюється за формулою:

$$P(a < x < b) = \left[\Phi\left(\frac{b-a}{s} \right) - \Phi\left(\frac{a-a}{s} \right) \right],$$

де F(x) – функція Лапласа.

Імовірність того, що абсолютна величина відхилення випадкової величини X від свого математичного сподівання a менша за додатне число s

$$P(|X - a| < d) = \Phi\left(\frac{d}{s} \right)$$

Випадкові величини, що розподілені за нормальним законом, поширені в природі. Такими випадковими величинами будуть, наприклад, зріст чоловіка (жінки), вага виловленої риби (одного якогось виду), дальність польоту снаряда при стрільбі з гармати, похибки вимірювання деякої величини і багато інших.

Функція розподілу нормально розподіленої випадкової величини *X* має вигляд

$$F(x) = \frac{1}{s\sqrt{2p}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-a)^2}{2s^2}dt}.$$

Графіки функцій розподілу і щільності ймовірності наведено відповідно на рис. 6 і 7.

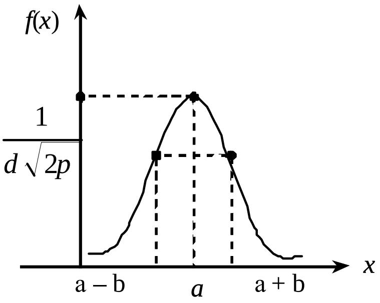


Рис. 6

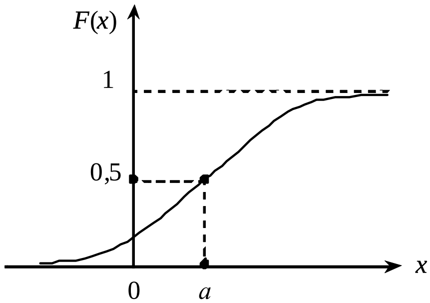


Рис. 7

Нормальний закон розподілу широко застосовується в математичній статистиці. Головна особливість нормального закону полягає в тому, що він є граничним законом, до якого наближаються інші закони розподілу за типових умов.

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

1. У цеху є 5 верстатів. Імовірність того, що верстат працює, дорівнює 0,8. Знайти ймовірність того, що працюватимуть не менш як 3 верстати.

Розв'язання.

Імовірність того, що працює будь-який верстат, дорівнює 0,8. Тому справджується біноміальний закон розподілу:

$P(X=m)=C_n^m p^m (1-p)^{n-m},\ m=0,1,2,\dots,n;$

$$P(X\ge 3)=P(X=3)+P(X=4)+P(X=5).$$

Зазначені ймовірності знайдемо за наведеною щойно формулою.

$$P(X\ge 3)=C_5^3\cdot 0{,}8^3\cdot 0{,}2^2+C_5^4\cdot 0{,}8^4\cdot 0{,}2+0{,}8^5=$$

$$=0{,}2048+0{,}4096+0{,}32768=0{,}94208.$$

2. Визначити ймовірність потрапляння за контрольні межі не менш ніж 2 деталей із проби з 5 деталей, якщо автомат, із продукції якого беруться проби, обробляє 2 деталі за 1 хв. і за зміну у його продукції виявляється 38 деталей, які виходять за контрольні межі. Застосувати для розв'язування задачі закон розподілу Пуассона.

Розв'язання.

Застосуємо формулу розподілу Пуассона: $P(X=m)=\dfrac{(l\,t)^m}{m!}$, m = 0,1,…. Знайдемо λ – середню кількість бракованих деталей, які виготовляються за 1 хв. Якщо тривалість зміни 480 хв., то $\lambda=\dfrac{38}{480}\approx 0{,}08.$ Пробу з 5 деталей виготовляють за $t=\dfrac{5}{2}=2{,}5$ хв., $\lambda t=0{,}08\cdot 2{,}5=0{,}2.$ Знайдемо шукану ймовірність: $P(X\ge 2)=\sum\limits_{m=2}^{5}\dfrac{(\lambda t)^m}{m!}=0{,}0175.$ Значення ймовірності знайдемо в таблицях при $\lambda t=0{,}8$ і $m=2.$

3. Постачальник поставляє замовникові партії деталей обсягом 10 000 шт. кожна. Замовник вважає бажаним бракувати партії, в яких 2 % браку з імовірністю не менш як 0,98. Постачальник хотів би, щоб при цьому партії з 0,5 % браку приймались би з ймовірністю не менш ніж 0,93. Визначити обсяг вибірки n і кількість бракованих деталей, за якої партія бракується. Скористатися для розв’язування задачі розподілом Пуассона.

Розв’язання.

Нехай для контролю відібрано n деталей. Якщо в партії 2 % бракованих деталей, то параметр $a_1=0{,}02n,$ якщо у партії 0,5 % бракованих деталей, то $a_2=0{,}005n.$ При конкретному значенні n маємо деяке значення a_1. Відшукуємо за таблицями значення C, при якому $\sum\limits_{m=c}^{\infty}\dfrac{a_1^m}{m!}e^{-a_1}\ge 0{,}98.$ Перевіряємо, чи буде при знайденому значенні C партія, в якій 0,5 % бракованих деталей, прийматися з імовірністю не менш як 0,93. Для цього шукаємо $P(X\ge C)=\sum\limits_{m=c}^{\infty}\dfrac{a_2{}^m}{m!}$ – імовірність відхилення партії. Віднявши від одиниці цю ймовірність, дістанемо ймовірність прийняття партії, в якій 0,5 % бракованих деталей. Якщо вона не менш як 0,93, то значення n і C забезпечують виконання умов задачі. Розв’язуючи задачу, бажано, щоб n було якомога меншим. Тому послідовно розглядаємо значення n і вибираємо серед них найменше.

Нехай n = 600, тоді $a_1=12,$ $a_2=3.$ Згідно з таблицями при $a_1=12$, C = 6, $P(X\ge 6)=0{,}97966\approx 0{,}98.$ При $a_2=3$ $P(X\ge 6)=$

$=0{,}083918,$ тобто ймовірність прийняття партії, в якій 0,5 % браку, становить 0,916082, що менше за 0,93. Значення n треба збільшити.
Нехай n = 800, тоді $a_1 = 16$, $a_2 = 4$. Значення C = 9. В тому разі партія з 0,5 % браку приймається з імовірністю 0,978637. Отже, значення обсягу вибірки можна зменшити.
Нехай n = 700, тоді $a_1 = 14$, $a_2 = 3{,}5$. Значення C = 7. В такому разі партія з 0,5 % браку приймається з імовірністю 0,93471.
Отже, обсяг вибірки n = 700. В такому разі партія відхиляється, якщо серед вибраних деталей буде не менш як 7 бракованих деталей.

4. При виготовленні довільного виробу інструмент з імовірністю p = 0,2 може бути пошкодженим і потребуватиме заміни. Знайти математичне сподівання і дисперсію кількості виробів, які будуть виготовлені цим інструментом.

Розв'язання.

Нехай випадкова величина X – кількість деталей, виготовлених до заміни цим інструментом. Ця випадкова величина може набувати значень 0, 1, 2, …. Побудуємо закон розподілу цієї величини. Вона набуває значення, що дорівнює нулю, якщо при виготовленні першого виробу інструмент буде пошкоджено; $P(X=0)=p=0{,}2.$ Якщо інструмент буде пошкоджено при виготовленні другого виробу, то X = 1; $P(X=1)=p(1-p).$ Аналогічно $P(X=2)=p(1-p)^2,$ $P(x=3)=p(1-p)^3, \ldots,$ $P(X=k)=$ $=p(1-p)^k, \ldots$. Для обчислення математичного сподівання і дисперсії зіставимо здобутий закон розподілу з геометричним законом розподілу $P(Y=m)=p(1-p)^{m-1}, m=1,2,\ldots.$ Очевидно, що $X=Y-1.$ Скориставшись властивостями математичного сподівання та дисперсії, дістанемо:

$$MX=M(Y-1)=MY-1=\frac{1}{p}-1=5-1=4.$$

$$DX=D(Y-1)=DY=\frac{1-p}{p^2}=20.$$

5. Партія містить 200 виробів, серед яких 25 бракованих. Для перевірки якості з партії відібрали 10 виробів. Якщо при цьому кількість бракованих виробів не перевищує одиниці, то партія приймається. Знайти ймовірність того, що партію буде прийнято. Визначити цю саму ймовірність, якщо апроксимувати гіпергеометричний розподіл біноміальним розподілом і законом розподілу Пуассона.

Розв'язання.

Застосуємо формулу гіпергеометричного закону розподілу. Партію буде прийнято, якщо кількість бракованих серед дібраних 10 дорівнюватиме нулю або одиниці.

$$P(X \le 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = \frac{C_{175}^{10}}{C_{200}^{10}} + \frac{C_{25}^{1} \cdot C_{175}^{9}}{C_{200}^{10}} \approx 0{,}638.$$

Обчислимо цю саму ймовірність за допомогою формули біноміального закону розподілу, де $p = \frac{25}{200} = \frac{1}{8}$:

$$P(X \le 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = \left(\frac{7}{8}\right)^{10} + 10 \cdot \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{7}{8}\right)^{9} \approx 0{,}639.$$

Обчислимо, нарешті, цю саму ймовірність за допомогою закону розподілу Пуассона: $a = np = 10 \cdot \frac{1}{8} = 1{,}25.$

$$P(X \le 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = e^{-1,25} + 1{,}25e^{-1,25} \approx 0{,}644.$$

Як бачимо, похибки обчислення в разі апроксимації гіпергеометричного розподілу порівняно невеликі.

6. Випадкова величина *X* розподілена рівномірно. Знайти щільність її розподілу, якщо $P(X \ge 3) = 0{,}4$, а $MX = 2$.

Розв'язання.

Щільність рівномірного розподілу $f(x) = \frac{1}{b-a}$. Отже, потрібно визначити область зміни випадкової величини. Складаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} \int_3^b \frac{1}{b-a}\,dx = 0{,}4; \\ \int_a^b \frac{x}{b-a}\,dx = 2. \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{b-3}{b-a} = 0{,}4; \\ \frac{a+b}{2} = 2. \end{cases} \quad \begin{cases} 0{,}6b + 0{,}4a = 3; \\ b = 4 - a. \end{cases} \quad b = 7,\ a = -3.$$

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{якщо } x \le -3;\\ 0{,}1, & \text{якщо } -3 < x \le 7;\\ 0, & \text{якщо } x > 7\,.\end{cases}$$

7. Випадкова величина розподілена показниково з параметром a. При якому значенні параметра ймовірність потрапляння випадкової величини на відрізок $[a\,;b\,]$ буде найбільшою?

Розв'язання.

Нехай параметр a – неперервна й диференційована величина. Знайдемо ймовірність потрапляння випадкової величини на відрізок і дослідимо здобуту функцію на екстремум:

$$P(\alpha \le X < \beta)=\int_{\alpha}^{\beta} a e^{-ax}dx = e^{-a\alpha}-e^{-a\beta};\;\; P(a)=e^{-a\alpha}-e^{-a\beta};$$

$$P'(a)=-\alpha e^{-a\alpha}+\beta e^{-a\beta};\; -\alpha e^{-a\alpha}+\beta e^{-a\beta}=0;\; \beta e^{-a\beta}=\alpha e^{-a\alpha};$$

$$\ln b - ab = \ln a - aa\,;\;\; a=\frac{\ln b - \ln a}{b-a}.$$

Покажемо, що при даному значенні a досягається максимум $P(a)$. Знайдемо другу похідну:

$$P''(a)=\alpha^2 e^{-a\alpha}-\beta^2 e^{-a\beta};$$

$$P''\left(\frac{\ln\beta-\ln\alpha}{\beta-\alpha}\right)=\alpha^2 e^{-\alpha\ln\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\beta-\alpha}}}-\beta^2 e^{-\beta\ln\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\beta-\alpha}}}=$$

$$=\alpha^2 e^{\ln\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{\alpha}{\beta-\alpha}}}-\beta^2 e^{\ln\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{\alpha}{\beta-\alpha}}}=\alpha^2\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{\alpha}{\beta-\alpha}}-\beta^2\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{\beta}{\beta-\alpha}}=\alpha\frac{\alpha^{\frac{\beta}{\beta-\alpha}}}{\beta^{\frac{\alpha}{\beta-\alpha}}}-\beta\frac{\alpha^{\frac{\beta}{\beta-\alpha}}}{\beta^{\frac{\alpha}{\beta-\alpha}}}=$$

$=\dfrac{\alpha^{\frac{\beta}{\beta-\alpha}}}{\beta^{\frac{\alpha}{\beta-\alpha}}}(\alpha-\beta)<0,$ оскільки $\alpha<\beta$. Друга похідна у критичній точці від'ємна, тому $P(a)$ в ній досягає максимуму.

8. Висунуто гіпотезу про те, що відхилення розміру деталі від номіналу є випадковою нормально розподіленою величиною з $MX=0$ і $DX=25$ мкм^2. Чи відповідає заданій гіпотезі те, що в перевірених 6 деталей відхилення належало проміжку $[5;13)$? Рівень значущості α = 0,0005.

Розв'язання.

Розглянемо подію *A* – «відхилення в 6 деталей належить проміжку [5; 13)». Обчислимо ймовірність цієї події і зіставимо її з рівнем значущості α. Якщо ймовірність буде меншою за α, то результат випробування не відповідатиме висунутій гіпотезі. Імовірність події *A* знайдемо за теоремою множення ймовірностей:

$P(A) = p^6$, де $p = P(5 \le X < 13)$.

Обчислимо цю ймовірність:

$$P(5 \le X < 13) = \Phi\left(\frac{13-0}{5}\right) - \Phi\left(\frac{5-0}{5}\right) = \Phi(2{,}6) - \Phi(1) =$$
$$= 0{,}4953 - 0{,}3413 = 0{,}154.$$

Тоді $P(A) = 0{,}154^6 < 0{,}2^6 = 0{,}000064.$ Імовірність події *A* менша від рівня значущості. Отже, гіпотеза про закон розподілу не відповідає значенням випадкової величини у випробуваннях.

9. Похибка спостереження *X* при вимірюванні довжини розподілена нормально з $\alpha = 5$ мм і $\sigma = 4$ мм. Знайти ймовірність того, що виміряне значення відхилиться від істинного більш ніж на 10 мм.

Розв'язання.

Згідно з умовою потрібно знайти $P(|X| \ge 10)$. Виразимо цю ймовірність через ймовірність протилежної події:

$$P(|X| \ge 10) = 1 - P(|X| < 10) = 1 - P(-10 < X < 10) = 1 - \Phi\left(\frac{10-5}{4}\right) +$$
$$+ \Phi\left(\frac{-10-5}{4}\right) = 1 - \Phi(1{,}25) - \Phi(3{,}75) = 1 - 0{,}3944 - 0{,}4999 = 0{,}1057.$$

10. Для нормальної випадкової величини *X* з параметрами $a = M(X) = 2, \quad s = \sqrt{D(X)} = 2$.Знайти ймовірність $P(1 < x < 6)$

Розв'язання.

$$P(1 < x < 6) = \Phi\left(\frac{6-2}{2}\right) - \Phi\left(\frac{1-2}{2}\right) = \Phi(2) - \Phi(-0{,}5) =$$
$$= \Phi(2) + \Phi(0{,}5) = 0{,}4772 + 0{,}1915 = 0{,}6687.$$

11. Відомі математичне сподівання a = 18 та середнє квадратичне відхилення s = 3 нормально розподіленої випадкової величини X. Знайти: а) ймовірність того, що в результаті випробування випадкова величина прийме значення з інтервалу (12, 21); б) ймовірність того, що абсолютна величина відхилення випадкової величини від свого математичного сподівання менша за число 2.

Розв'язання.

а) Знайдемо ймовірність попадання випадкової величини X в інтервал (12, 21)

$$P(12 < X < 21) = \frac{1}{2}\left[\Phi\left(\frac{21-18}{3}\right) - \Phi\left(\frac{12-18}{3}\right)\right] = \frac{1}{2}\left[\Phi(1) - \Phi(-2)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}(\Phi(1) + \Phi(2)) = \frac{1}{2}(0{,}6827 + 0{,}9545) = 0{,}8186.$$

(Тут використано той факт, що функція Ф(x) непарна, і тому Ф(-2) = - Ф(2)).

б) Імовірність того, що абсолютна величина відхилення випадкової величини від свого математичного сподівання буде менша за число 2, можна обчислити за формулою

$$P(|X - a| < d) = \Phi\left(\frac{d}{s}\right)$$

Підставляючи дані задачі, матимемо

$$P(|X - 18|) < 2 = \Phi\left(\frac{2}{3}\right) \approx \Phi(0{,}67) = 0{,}4971.$$

ТРЕНУВАЛЬНІ ВПРАВИ

1. На винищувачі є по дві ракети двох типів. По однієї й тій же цілі намічений дослідницький пуск спочатку ракетами першого, а потім другого типу. Пуск припиняється після першого влучення ракети. Визначити закон розподілу невитрачених ракет.

Імовірність влучення при пуску ракети першого типу p_1=0,3, а другого типу – p_2=0,5.

2. Пристрій складається з трьох незалежно працюючих елементів. Імовірність відмови кожного елемента в одному досвіді дорівнює 0,1. Скласти закон розподілу числа елементів, які відмовили в одному досліді.

3. (на розподіл Пуассона) Підручник видано кількістю 100000 примірників. Імовірність того, що підручник сброшюрувано неправильно, дорівнює 0,0001. Знайти ймовірність того, що тираж містить рівно 5 бракованих книг.

4. (геометричний розподіл)Проводиться стрільба по мішені до першого влучення. Імовірність влучення в ціль $p = 0{,}6$. Знайти ймовірність того, що влучення буде при третьому пострілі.

5. Проводиться стрільба по мішені до першого влучення. Імовірність влучення в ціль $p = 0{,}6$. Знайти ймовірність того, що влучення буде при третьому пострілі.

6. Знайти математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення випадкової величини з рівномірним розподілом.

7. Усі значення рівномірно розподіленої випадкової величини лежать на відрізку (2;8). Знайти ймовірність попадання випадкової величини на проміжок (3;5).

8. Неперервна випадкова величина розподілена за показниковим законом:

F(x)= $\begin{cases} x, \ якщо\, x < 0, \\ 4e^{-4x}, якщо\, x \geq 0 \end{cases}$. Знати ймовірність того, що в результаті випробувань випадкова величина X попаде в інтервал (0,2; 0,5).

9. Результати вимірювання відстані між двома містами підпорядковані нормальному законові з параметрами a =16 км, s =100 м. Знайти ймовірність того, що відстань між цими містами знаходиться між 15,75 км і 16,3 км.

10. Довжина деталі, яка виготовляється автоматичним верстатом, є випадковою величиною, розподіленою за нормальним законом, математичне сподівання якої дорівнює 25 см, а дисперсія 1 см^2. Обчислити ймовірність того, що хоча б одна з вибраних навмання трьох деталей має довжину від 24 см до 26 см.

11. Випадкова величина X розподілена за нормальним законом з математичним сподіванням a = 10. Імовірність того, що ця випадкова величина потрапить в інтервал (10;15) дорівнює 0,4. Чому дорівнює ймовірність того, що вона потрапить в інтервал (5;15)?

12. Випадкова величина розподілена нормально з параметрами a = 30, s = 2. Знайти інтервал, симетричний відносно математичного сподівання, в який з ймовірністю 0,4843 потрапить X в результаті випробування.

13. Розмір діаметра деталі, що випускає цех, розподілений за нормальним законом з параметрами a = 10 см., $s^2 = 0{,}64$. Знайти ймовірність того, що діаметр навмання взятої деталі потрапить в інтервал 9,9-10,2 см.

14. Математичне сподівання та середнє квадратичне відхилення нормально розподіленої випадкової величини X відповідно дорівнюють 10 і 2. Знайти ймовірність того, що в результаті випробування X прийме значення з інтервалу $(12;\ 14)$.

15. $M(x) = 2;\ s(x) = 2$ нормально розподіленої випадкової величини X. Знайти ймовірність того, що в результаті випробування X прийме значення з інтервалу $(15;\ 25)$.

16. Цех виготовляє деталі, довжина яких є нормально розподіленою випадковою величиною з $M(x) = 15;\ s(x) = 0{,}1$. Знайти ймовірність того, що відхилення довжини деталі в ту або іншу сторону від M(X) не перевищить 0,25.

17. На станку виготовляється деталь. Її довжина x уявляє з себе випадкову величину, розподілену за нормальним законом зі середнім значенням 20 см і дисперсією 0,2 см. Знайти ймовірність того, що довжина деталі буде між 19,7 см і 20,3 см, тобто що уклін в той чи інший бік не перевищить 0,3 см.

18. Технічними умовами передбачено, що довжина заготівки деякої деталі має бути між 24 і 25 см. Якщо довжина деталі розподіляється нормально з $a = 24{,}6$ см і $\sigma = 0{,}4$ см, то яка частка заготівок матиме довжину, що виходить за межі, задані технічними умовами?

19. Визначити ймовірність того, що нормально розподілена величина потрапляє у проміжок [α; β), скориставшись таблицями функції $\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$.

20. Вантажі із залізничної станції вивозять автомобілями за кільцевими маршрутами. Визначити вантажопідйомність автомобіля на маршруті *MX*, якщо обсяг перевезень розподіляється за показниковим законом, коли $a = 0{,}25$. Яка ймовірність того, що всі вантажі буде вивезено? Як зміниться ця ймовірність, якщо взяти вантажопідйомність автомобіля $q = MX + \sigma(X)$?

21. Випадкова величина X має рівномірний розподіл на відрізку [-1;3]. Знайти:
1) щільність ймовірності *f(x)* і функцію розподілу F(*x*);
2) ймовірність події $\{X\in[-2;1]\}$.

22. Шкала кутового інструменту має ціну поділки 1^0. Відлік робиться з точністю до цілої поділки з округленням у найближчу сторону. Знайти закон розподілу випадкової величини X – похибки вимірів. Знайти ймовірність того, що допущена похибка не перевищить $20'$.

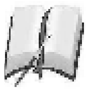
23. Валики, які виготовляє автомат, вважаються стандартними, якщо відхилення діаметра валика від проектного розміру не перевищує 2 мм. Випадкове відхилення діаметра валиків підкорюються нормальному закону із середнім квадратичним відхиленням 1,6 мм і математичним сподіванням $a = 0$. Скільки відсотків стандартних валиків виготовляє автомат?

24. Щільність ймовірності нормально розподіленої випадкової величини має вигляд $f(x)=Ce^{-\frac{(x-2)^2}{18}}$. Знайти коефіцієнт C і параметр s, а також ймовірність потрапляння X у відрізок [2;5].

25. Випадкова величина X розподілена за показниковим законом зі щільністю ймовірності $f(x)=\begin{cases}0, x\le 0\\ ae^{-ax}, x>0\end{cases}$. Знайти:

1) параметр *a*, якщо $P(0\le X\le 1)=1-e^{-2}$.
2) імовірність події $\{X\in[0;0{,}5]\cup[0{,}7;1]\}$.

26. Середня кількість викликів, які поступають на АТС за хвилину, дорівнює 2. Знайти ймовірність того, що за 5 хвилин поступить 1) 2 виклики 2) не менше двох викликів.



ВАРІАНТИ ІНДИВІДУАЛЬНИХ ЗАВДАНЬ

Відомі математичне сподівання *a* середнє квадратичне відхилення s нормально розподіленої випадкової величини *X*. Знайти:

1) імовірність попадання цієї величини в заданий інтервал $(a;\ b)$;

2) імовірність того, що абсолютна величина відхилення випадкової величини від свого математичного сподівання менша за додатне число $d=2$.

№	*a*	*s*	*a*	*b*	№	*a*	*s*	*a*	*b*
1	10	4	2	13	16	3	3	3	8
2	9	5	5	14	17	4	4	4	7
3	8	1	4	9	18	4	4	5	7
4	7	2	3	10	19	4	4	5	8
5	6	3	2	11	20	3	3	5	8
6	5	1	1	12	21	3	3	5	9
7	4	5	2	11	22	2	2	2	6
8	3	2	3	10	23	3	4	0	6
9	2	5	4	9	24	5	3	5	10
10	2	4	6	10	25	3	2	5	9
11	2	2	1	6	26	2	2	0	5
12	2	2	2	5	27	2	3	2	4
13	2	2	5	5	28	3	3	2	5
14	2	2	3	6	29	1	3	1	6
15	3	3	3	7	30	1	3	3	7

2. 4. ЗАКОН ВЕЛИКИХ ЧИСЕЛ

ОСНОВНІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

Однією з основних задач теорії ймовірності є встановлення закономірностей, що мають місто з імовірністю, близькою до одиниці, і особливо таких закономірностей, які виникають у результаті спільної дії незалежних випадкових факторів. Закон великих чисел і є одним із найважливіших тверджень такого типу.

***Нерівності Чебишева*.**

Перша форма: якщо випадкова величина *X* невід'ємна і $MX < \infty$, то $P(X \ge \varepsilon) \le \frac{MX}{\varepsilon}$.

Друга форма: Нехай випадкова величина X має скінчене математичне сподівання $M(X)$ і скінчену дисперсію $D(X)$. Тоді для будь-якого $e > 0$ справджується нерівність:

$$P\{|X - M(X)| < e\} \ge 1 - \frac{D(X)}{e^2}.$$

Переходячи до протилежної події, дістанемо

$$P\{|X - M(X)| \geq e\} \leq \frac{D(X)}{e^2}.$$

Нехай задано послідовність випадкових величин:

$$X_1, X_2, ..., X_n, ... \qquad (1)$$

Послідовність (1) задовольняє закон великих чисел, якщо

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} MX_i\right| < \varepsilon\right) = 1.$$

Теорема Чебишева (закон великих чисел). Нехай $X_1, X_2, ..., X_n$ - послідовність попарно незалежних випадкових величин з однаковими математичними сподіваннями a і дисперсіями, обмеженими однією тією же сталою

$$D(X_i) \leq c \quad (i = 1,\ 2,\ \mathbf{K}).$$

Тоді

$$\frac{X_1 + X_2 + \mathbf{K} + X_n}{n} \xrightarrow{\lim} a$$

або

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{n} - \frac{M_1(x_1) + M_2(x_2) + ... + M_n(x_n)}{n}\right| < e\right) = 1.$$

Тобто якщо випадкові величини в послідовності (1) незалежні, мають скінченні математичні сподівання і рівномірно обмежені дисперсії $(DX_i \leq C,\ i = 1,2,...)$, то до послідовності (1) можна застосувати закон великих чисел.

Теорема Хінчина. Якщо випадкові величини в послідовності (1) незалежні, однаково розподілені і мають скінченне математичне сподівання a, то

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - a\right| < e\right) = 1.$$

Теорема Бернуллі. Нехай m - число появ події A при n послідовних незалежних випробуваннях, в кожному з яких імовірність настання події A дорівнює p.

Тоді $\frac{m}{n} \xrightarrow{\lim} p$

або $\lim\limits_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{m}{n} - P\right| < e\right) = 1.$

Теорема Маркова. Нехай для кожної з випадкових величин $X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n$ існує скінчене математичне сподівання $M(X_i) = a_i$ і виконується умова:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{D(x_1 + x_2 + \mathbf{K} + x_n)}{n^2} = 0$$

Тоді $\left(\frac{(x_1 + x_2 + \mathbf{K} + x_n)}{n} - \frac{a_1 + a_2 + \mathbf{K} + a_n}{n}\right) \xrightarrow{\lim} 0\cdot$

Центральна гранична теорема. Нехай $X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n$ - послідовність взаємно незалежних однаково розподілених випадкових величин, $M(X_i) = a$, $D(X_i) = s^{\,2}$, $a,\ s$ - скінчені $i = (1, 2, \ldots)$ (i = 1, 2,…).

$$\text{Тоді} \lim_{n\to\infty} P\left\{\frac{x_1 + x_2 + \mathbf{K} + x_n - na}{s\sqrt{n}} < x\right\} = \frac{1}{\sqrt{2p}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Центральна гранична теорема пояснює велике поширення нормального закону розподілу. Якщо випадкова величина формується під впливом багатьох незалежних факторів, кожен із яких здійснює на неї незначний вплив, то розподіл цієї величини мало відрізняється від нормального.

Наслідком розглянутих теорем є ***інтегральна теорема Лапласа***.

У схемі незалежних повторних випробувань

$$P_n(m_1, m_2) \approx \Phi\left(\frac{m_2 - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) - \Phi\left(\frac{m_1 - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right),$$

де $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$

Це випливає з того, що частоту події можна подати як суму n випадкових величин — частот настання події в окремих випробуваннях. При достатньо великих значеннях n закон розподілу цієї суми близький до нормального.

Аналогічними міркуваннями для цієї схеми легко дістати формулу: $P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|<\varepsilon\right)\approx 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{p(1-p)}}\right)$, де m — частота події A у n випробуваннях.

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

1. Середнє споживання електроенергії протягом травня у місті дорівнює 360 000 кВт-год.

1) Оцінити ймовірність того, що споживання електроенергії у травні поточного року перевищить 1 000 000 кВт-год.

2) Оцінити ту саму ймовірність за умови, що середнє квадратичне відхилення споживання електроенергії за травень дорівнює 40 000 кВт-год.

Розв'язання.

1. Випадкова величина X – споживання електроенергії набуває невід'ємних значень. Математичне сподівання її дорівнює 360 000. Оцінимо ймовірність за допомогою першої форми нерівності Чебишева: $P(X\geq 1\,000\,000)\leq\frac{360\,000}{1\,000\,000}=0{,}36.$

2. Оцінимо цю саму нерівність, якщо відоме середнє квадратичне відхилення X. Скористаємося другою формою нерівності Чебишева:

$$P(X\geq 1\,000\,000)=1-P(X<1\,000\,000)=1-P(0<X<1\,000\,000)=$$

$$=1-P(-360\,000<X<-MX<640\,000)=1-P(|X-MX|<640\,000)\leq$$

$$\leq 1-1+\frac{(40\,000)^2}{(640\,000)^2}=\frac{1}{256}.$$

Отже, якщо існує момент другого порядку, оцінка ймовірності істотно менша.

2. Дано послідовність незалежних випадкових величин $X_1, X_2, ..., X_n, ...$. Випадкова величина X_k може набувати значень $-\sqrt{k},\ 0,\ \sqrt{k}$ з імовірностями, що дорівнюють відповідно $\frac{1}{k+1}$,

$1-\dfrac{2}{k+1}$, $\dfrac{1}{k+1}$. Чи можна застосувати до цієї послідовності закон великих чисел?

Розв'язання.

Знайдемо числові характеристики для випадкової величини X_k: $MX_k = 0;\ DX_k = MX_k^2 = \dfrac{2k}{k+1}$.

Дисперсії величин, які утворюють послідовність, обмежені зверху числом 2. Отже, закон великих чисел можна застосувати.

3. Пристрій складається з 10 незалежно працюючих елементів. Імовірність відмови кожного елемента за час *T* дорівнює 0,05. За допомогою нерівності Чебишева оцінити ймовірність того, що абсолютна величина різниці між числом елементів, що відмовили, і середнім числом (математичним сподіванням) відмови за час *T* буде:

а) менше двох;

б) не менше двох.

Розв'язання

а) Позначимо через *X* дискретну випадкову величину – число елементів, що відмовили, за час *T*. Тоді:

$$M(X) = n \cdot p = 10 \cdot 0{,}05 = 0{,}5.$$

$$D(X) = n \cdot p \cdot q = 10 \cdot 0{,}05 \cdot 0{,}95 = 0{,}475.$$

Скористаємося нерівністю Чебишева:

$$P(|X - M(X)| \le e) > 1 - \frac{D(x)}{e^2}.$$

Підставляючи $M(X) = 0{,}5;\ D(X) = 0{,}475;\ e = 2$, одержимо:

$$P(|X - 0{,}5| < 2) \ge 1 - \frac{0{,}475}{4} = 0{,}88.$$

б) Події $|X - 0{,}5| < 2$ й $|X - 0{,}5| \ge 2$ протилежні, тому сума ймовірностей дорівнює 1. Отже, $P(|X - 0{,}5| \ge 2) \le 1 - 0{,}88 = 0{,}12$.

4. Імовірність появи події *A* в кожному випробуванні дорівнює 0,5. Використовуючи нерівність Чебишева, оцінити ймовірність того, що число *X* появ події *A* знаходиться в межах від 40 до 60, якщо буде зроблено 100 незалежних випробувань.

Розв'язання

1) Знайдемо математичне сподівання й дисперсію випадкової величини X – числа появ події *A* в 100 незалежних випробуваннях.

$M(X) = n \cdot p = 100 \cdot \frac{1}{2} = 50$;

$D(X) = n \cdot p \cdot q = 50 \cdot \frac{1}{2} = 25$.

2) Знайдемо максимальну різницю між заданим числом появ подій і математичним сподіванням $a(x) = 50$:

$$e = 60 - 50 = 10.$$

3) Скористаємося нерівністю Чебишева у формі

$$P(|X - M(x)| < e) \geq 1 - \frac{D(x)}{e^2}.$$

Підставляючи $M(X) = 50$, $D(X) = 25$, $e = 10$, одержимо:

$$P(|X - 50| < 10) \geq 1 - \frac{25}{10^2} = 0,75.$$

5. Дискретна випадкова величина X задана законом розподілу:

X	0,3	0,6
p	0,2	0,8

Використовуючи нерівність Чебишева, оцінити ймовірність того, що $|x - M(x)| < 0,2$.

Розв'язання

1) Знайдемо математичне сподівання й дисперсію величини *X*:

$M(X) = 0,3 \cdot 0,2 + 0,6 \cdot 0,8 = 0,54$.

$D(X) = M(X^2) - M^2(X) = (0,3^2 \cdot 0,2 + 0,6^2 \cdot 0,8) - 0,54^2 = 0,0144$ 2)

Скористаємося нерівністю Чебишева у формі

$$P(|x - a| < e) > 1 - \frac{D(x)}{e^2}.$$

Підставляючи $M(X) = 0,54$; $D(X) = 0,0144$; $e = 0,2$,

одержимо $P(|x - 0,54| < 0,2) > 1 - \frac{0,0144}{0,04^2} = 0,64$.

6. Для визначення середньої тривалості горіння електролампочок в партії з 100 однакових ящиків було взято по одній електролампочці з кожного ящику. Оцінити імовірність того, що відхилення середньої тривалості горіння лампочки в усій партії не перевищить 8 год., якщо середнє квадратичне відхилення тривалості горіння електролампочки з кожного ящика не перевищує 10 год.

Розв'язання.

За нерівністю Чебишева

$$P\left(\left|\frac{X_1+X_2+...+X_n}{n}-\frac{M(X_1)+M(X_2)+...+M(X_n)}{n}\right|<e\right)\geq 1-\frac{c}{ne^2},$$

де c - число, що обмежує дисперсії випадкових величин X_1, $X_2, \ldots X_n$.

Вважаючи, що для кожного ящика середня тривалість горіння лампочки постійна, тобто $M(X_1)=M(X_2)=...=M(X_n)=a$, запишемо при $n=100;\ c=100;\ \varepsilon=9$:

$$P\left(\left|\frac{X_1+X_2+...X_n}{100}-a\right|<8\right)>1-\frac{100}{100\cdot 64}=0{,}984.$$

Відповідь. $P>0{,}984$.

ТРЕНУВАЛЬНІ ВПРАВИ

1. Середня витрата води в населеному пункті становить 50 000 л за день. Оцінити ймовірність того, що в цьому населеному пункті протягом одного певного дня витрата води не перевищить 150 000 л.

2. Задано послідовність незалежних випадкових величин $X_1, X_2,..., X_n$, які набувають значень $-\sqrt{n},\ 0,\ \sqrt{n}$ з імовірностями відповідно $\frac{2}{n},\quad 1-\frac{4}{n},\quad \frac{2}{n}$. Чи можна до цієї послідовності застосувати закон великих чисел?

3. Задано послідовність незалежних випадкових величин $X_1, X_2, ..., X_n$, які набувають значень $-n\alpha,\ 0,\ n\alpha\ (\alpha>0)$ з імовірностями відповідно $\frac{1}{2^n},\quad 1-\frac{1}{2^{n-1}},\quad \frac{1}{2^n}$. Чи можна до цієї послідовності застосувати закон великих чисел?

4. Задано послідовність незалежних випадкових величин $X_1, X_2,..., X_n$, які набувають значень $-\sqrt{n},\ 0,\ \sqrt{n}$ з імовірностями відповідно $\frac{2}{n},\quad 1-\frac{4}{n},\quad \frac{2}{n}$. Чи можна до цієї послідовності застосувати закон великих чисел?

5. Середнє споживання електроенергії протягом червня у місті дорівнює 160 000 кВт. год.
1) Оцінити ймовірність того, що споживання електроенергії у травні поточного року перевищить 500 000 кВт. год.
2) Оцінити ту саму ймовірність за умови, що середнє квадратичне відхилення споживання електроенергії за травень дорівнює 20 000 кВт. год.
6. Використовуючи нерівність Чебишева, оцінити ймовірність того, що випадкова величина Х відхилиться від свого математичного сподівання не менше, ніж на 3 середні квадратичні відхилення.
7. Середнє квадратичне відхилення похибки вимірювання азимуту дорівнює $20'$ (математичне сподівання її дорівнює нулю). Визначити ймовірність того, що похибка середнього арифметичного трьох вимірювань не перевищить одного градуса.
8. Імовірність настання події A в кожному випробуванні $p = \frac{1}{3}$.
Яку найменшу кількість випробувань потрібно виконати, щоб з імовірністю не менш як 0,99 можна було стверджувати, що частість настання події A відхилялась за абсолютною величиною від її ймовірності не більш ніж на 0,01?
9. Імовірність появи події А в кожному випробуванні p = 0,5. Використовуючи нерівність Чебишева, оцінити ймовірність того, що кількість появ події А міститиметься в межах від 40 до 60, якщо буде проведено 100 незалежних випробувань.
10. Використовуючи нерівність Чебишева, оцінити ймовірність того, що $|X - M(x)| < 0{,}1$, якщо $D(X) = 0{,}004$.
11. Задано: $P(|x - M(x)| < e) \geq 0{,}9$; $D(x) = 0{,}004$. Використовуючи нерівність Чебишева, знайти e.
12. Імовірність появи події А в кожному випробуванні p=0,25. Використовуючи нерівність Чебишева, оцінити ймовірність того, що кількість появ події А міститиметься в межах від 150 до 250, якщо буде проведено 800 незалежних випробувань.
13. Дискретна випадкова величина Х задана законом розподілу:

X	0,1	0,4	0,6
p	0,2	0,3	0,5

Користуючись нерівністю Чебишева, оцінити ймовірність того, що

$\left| X - M(x) \right| < \sqrt{0{,}4}$.

14. Імовірність вчасної реалізації одиниці продукції p=0,4. Оцінити ймовірність того, що для 100 незалежно реалізованих одиниць продукції відхилення відносної частоти реалізації від імовірності p за модулем буде меншим від 0,1 та порівняти оцінку з безпосередньо знайденим значенням імовірності.

15. Середній дохід на душу населення X розподілений за нормальним законом з параметрами *a*, σ. Оцінити за допомогою нерівності Чебишева ймовірність P{|X-*a*|≥2σ} та порівняти оцінку з безпосередньо знайденим значенням імовірності.

16. У 400 випробуваннях Бернуллі ймовірність успіху в кожному з них дорівнює 0,8. Використовуючи нерівність Чебишева, оцінити ймовірність того, що різниця між числом успіхів в цих випробуваннях і середнім числом успіхів буде менша за 20.

17. У продукції цеха кількість деталей відмінної якості складає 50%. Деталі укладають у коробки по 200 шт. у кожній. Яка ймовірність того, що кількість деталей відмінної якості в коробці відрізняється від 100 не більш, ніж на 5?

18. Доходи мешканців російського міста мають математичне сподівання 10 тис рублів і середнє квадратичне відхилення 2 тисячі рублів. Яка ймовірність того, що середній доход 100 випадково обраних мешканців цього міста від 9, 5 до 10, 5 тис. рублів.

19. Відомо, що $P\left\{ \left| X - M(X) \right| < \varepsilon \right\} \geq 0{,}9$ і $D(X) = 0{,}001$. Скориставшись нерівністю Чебишева, знайти ε.

20. Скориставшись нерівністю Чебишева, оцінити ймовірність того, що $\left| X - M(X) \right| < 3s$.

21. Дискретна випадкова величина X задана рядом розподілу

x_i	0	0,2	0,4
p_i	0,3	0,6	0,1

Скориставшись нерівністю Чебишева, оцінити ймовірність того, що $\left| X - M(X) \right| < 0{,}2$.

22. Імовірність появи події в кожному з 800 випробувань є величина стала і дорівнює 0,3. Скориставшись нерівністю Чебишева, оцінити ймовірність того, що число X появи події знаходиться в межах від 180 до 300.

23. Дисперсія кожної із 2500 незалежних випадкових величин не перевищує 5. Оцінити ймовірність того, що відхилення середнього арифметичного цих випадкових величин від середнього арифметичного їх математичних сподівань не перевищить 0,4.

24. Відомо, що цех виготовляє 80 % продукції вищого ґатунку. Оцінити ймовірність того, що відносна частота виробів вищого ґатунку серед 20 000 виготовлених відрізнятиметься від ймовірності виготовлення виробу вищого ґатунку не більше ніж на 0,02.

25. Використовуючи лему Чебишева, оцінити ймовірність того, що при 3000 незалежних киданнях гральної кістки число появ 3 очок буде не менше 800.

26. Середнє значення швидкості вітру безпосередньо над землею в даній місцевості дорівнює 20м/с. За допомогою нерівності Чебишева оцінити знизу ймовірність того, що при одному спостереженні швидкість вітру виявиться менш ніж 80 м/с.

27. Імовірність одержання з конвеєру виробу вищої якості дорівнює 0,6. Оцінити ймовірність того, що серед 600 виробів, отриманих з конвеєра, виявиться від 340 до 380 виробів вищої якості.

28. Імовірність влучення в ціль при кожному пострілі з гармати дорівнює $p = \frac{1}{3}$. Знайти найменше число n незалежних пострілів з гармати таке, що з імовірністю, не меншою ніж 0,99 частота влучення відхилиться від імовірності влучення не більше ніж на 0,01.

29. Чи задовольняє послідовність незалежних випадкових величин умові теореми Чебишева, якщо X_n рівномірно розподілена на відрізку :

1) $[0;n]$ 2) $[0;\sqrt{n}\,]$ 3) $[\frac{1}{\sqrt{n}};1]$

30. Математичне сподівання початкової швидкості снаряда дорівнює 500 м/с. За допомогою леми Чебишева оцінити зверху ймовірність того, що при іспиті чергового снаряда його швидкість виявиться не менша 800 м/с.

31. Середня температура в квартирі в період опалювального сезону дорівнює 20^0С, а середнє квадратичне відхилення 2^0С. За допомогою нерівності Чебишева оцініть знизу ймовірність того, що температура в квартирі відхилиться від середньої менш ніж на 4^0С.

32. Імовірність народження дівчинки приблизно 0,48. оцініть знизу ймовірність того, що число дівчаток серед 3000 немовлят буде відрізнятися математичного сподівання цього числа по абсолютній величині менш ніж на 55 дівчинок.

33. Імовірність деякої події А у кожному з п незалежних випробувань дорівнює р = 0,2. Використовуючи нерівність Чебишева, оцінити ймовірність того, що відносна частота події А відхилиться від імовірності р менш ніж на 0,01, якщо буде проведено 1) n = 9000 випробувань 2) n = 70 000 випробувань.

34. Дано послідовність незалежних дискретних випадкових величин, Закон розподілу Xn має вигляд:

x_i	$-\sqrt{n}$	0	$\sqrt{n}$
p_i	$\frac{1}{n}$	$1-\frac{2}{n}$	$\frac{1}{n}$

Чи задовольняє ця послідовність умовам теореми Чебишева?

35. У продукції цеха деталі відмінної якості складають 50%. Деталі укладають у коробки по 200 шт. у кожну. Яка ймовірність того, що число деталей відмінної якості в коробці відрізняється від 100 не більш ніж на 5?

36. За умовами попередньої задачі визначити, у яких межах з імовірністю 0,997 знаходиться число деталей відмінної якості у коробці.

ЗАДАЧІ НА ВСІ ТЕМИ ДРУГОГО РОЗДІЛУ

1. У партії деталей 10% нестандартних. Навмання обрано 4 деталі. Написати біноміальний закон розподілу випадкової величини X – числа нестандартних деталей серед 4-х відібраних і побудувати багатокутник отриманого розподілу.

2. Дві гральні кістки одночасно кидають 2 рази. Написати біноміальний закон розподілу випадкової величини X – числа випадань парного числа очок на двох гральних кістках і побудувати багатокутник цього розподілу.

3. У скриньці 4 білих і 4 чорних кулі. Навмання витягають одну кулю, потім кладуть назад у скриньку. Знайти закон розподілу, математичне сподівання і дисперсію кількості витягнутих білих куль у 3-х таких експериментах.

4. Написати біноміальний закон розподілу випадкової величини X – числа появ герба при 4-х киданнях монети.

5. Імовірність того, що стрілок влучить в ціль при одному пострілі, дорівнює 0,8. Йому видаються патрони доти, поки він не промахнеться. Написати закон розподілу випадкової величини X – числа патронів, виданих стрілку.

6. Довести, що математичне сподівання дискретної випадкової величини, яка може набувати скінченну кількість значень, міститься між її найменшим і найбільшим можливими значеннями.

7. Кидають 5 кубиків. Знайти математичне сподівання і дисперсію суми очок, які випадуть на всіх кубиках.

8. Імовірність виготовлення стандартної деталі із заготовки дорівнює 0,75. Знайти закон розподілу, математичне сподівання і дисперсію кількості заготовок, витрачених на виготовлення одної стандартної деталі.

9. Відбуваються послідовні незалежні випробування п'яти приладів на надійність. Кожен такий прилад випробується тільки в тому випадку, коли попередній виявився надійним. Написати ряд розподілу випадкової величини X – числа випробуваних приладів, якщо ймовірність витримати випробування для кожного з них дорівнює 0,9.

10. З партії, яка містить 100 виробів, є 10 дефектних. З неї випадковим образом обирають 5 виробів для перевірки їх якості. Побудувати ряд розподілу випадкової величини X – числа дефектних виробів у вибірці.

11. Проводяться незалежні випробування, в кожному з яких імовірність появи події A рівна p, а ймовірність її непояви відповідно рівна $q = 1 - p$. Випробування завершуються, як тільки відбудеться подія A. Знайти математичне сподівання і дисперсію кількості випробувань, які треба провести до першої появи події A.

12. Знайти математичне сподівання і дисперсію кількості кидань монети до першої появи «герба».

13. Знайти математичне сподівання і дисперсію кількості кидань кубика до першої появи «шістки».

14. При виготовленні довільного виробу інструмент з імовірністю $p = 0,2$ може бути пошкодженим і потребуватиме заміни. Знайти математичне сподівання і дисперсію кількості виробів, які будуть виготовлені цим інструментом.

15. Випадкова величина X розподілена рівномірно на (a; b). Знайти щільність її розподілу, якщо P{x ≥3}=0,4, а E(X) = 2 .

16. Похибка X, допущенна при вимірюванні довжини, розподілена нормально з a = 0,5 мм і σ=0,4 мм. Знайти ймовірність того, що виміряне значення відхилиться від істинного більш ніж на 1 мм.

17. Знайти дисперсію дискретної випадкової величини X – числа появ події А в двох незалежних випробуваннях, якщо ймовірності появи події в цих випробуваннях однакові і відомо, що M(X) = 0,9.

18. Відбуваються незалежні випробування з однаковою ймовірністю події А в кожному випробуванні. Знайти імовірність події А, якщо дисперсія числа появ події у трьох незалежних випробуваннях дорівнює 0,63.

19. Середній дохід на душу населення X розподілений за нормальним законом з параметрами a, σ. Оцінити за допомогою нерівності Чебишева ймовірність P{|X-a|≥2σ} та порівняти оцінку з безпосередньо знайденим значенням імовірності.

20. Дискретна випадкова величина X може приймати лише 2 значення x_1 та x_2, причому $x_2>x_1$. Знайти закон розподілу цієї випадкової величини, якщо її математичне сподівання M(X) = 2,6, а середнє квадратичне відхилення 0,8.

21. Дискретне випадкова величина X має три можливі значення: $x_1=1$, x_2, x_3, причому $x_1 <x_2< x_3$. Імовірність того, що X прийме значення x_1 і x_2, які відповідно дорівнюють 0,3 і 0,2. Знайти закон розподілу X, знаючи математичне сподівання M(X) = 2,2 та середнє квадратичне відхилення 0,76.

22. Знайти математичне сподівання та дисперсію випадкової величини, що в інтервалі ($-p$; p) має щільність розподілу $\frac{2}{p}\sin^2 x$.

23. Спортсмен виконав шість серій пострілів, по 10 пострілів у кожній. Імовірність влучення при кожному пострілі дорівнює 0,8. Знайти математичне сподівання дискретної випадкової величини X - кількості серій пострілів, у кожній з яких виявиться рівно дев’ять влучень.

24. Імовірність того, що лучник влучить у мішень при одному пострілі, дорівнює 0,8. Скласти закон розподілу дискретної випадкової величини X – кількості влучних пострілів із трьох проведених, а також $M(X)$.

25. Випадкова величина X - кількість підприємців із кожних десяти, які декларують не весь товар при перетині кордону, розподілена за таким законом:

X	0	1	2	3
p	0,4	0,3	0,2	...

Знайти числові характеристики випадкової величини X.

26. Підприємство використовує чотири види сировини. Імовірність зриву поставок кожної з них дорівнює відповідно 0,1; 0,05; 0,01; 0,08. Скласти закон розподілу випадкової величини X - кількості видів сировини, поставку яких буде зірвано. Знайти середню кількість таких видів сировими, а також оцінити розкид можливих значень X.

27. У зв'язці є шість ключів, тільки один із яких підходить до замка. Знайти $M(X)$ та $\sigma(X)$, де X – кількість ключів, випробовуваних при відкриванні замка, якщо ключ, який був у випробуванні, в наступному випробуванні участі не бере.

28. Імовірності зростання вартості кожного із чотирьох видів сировини за прогнозний період становлять відповідно 0,2, 0,8, 0,1, 0,5. Скласти закон розподілу випадкової величини X - кількості видів сировини, для яких не відбудеться зростання ціни за цей період, а також знайти $M(X)$ та $\sigma(X)$.

29. Троє стрільців виконують по чотири постріли. Імовірність влучення для першого стрільця становить 0,8, для другого – 0,9, для третього – 0,7. Знайти математичне сподівання і середнє квадратичне відхилення загальної кількості пробоїн у мішені.

30. Випробовується пристрій, який складається із п'яти ланок, що працюють незалежно. Імовірність виходу з ладу для кожної з ланок дорівнює відповідно 0,1; 0,7; 0,3; 0,6; 0,5. Знайти математичне сподівання і квадратичне відхилення кількості ланок, що вийдуть із ладу.

31. Знайти середнє квадратичне відхилення кількості появ події в 200 повторних незалежних випробуваннях, якщо математичне сподівання кількості появ цієї події у двох випробуваннях дорівнює 0,4.

32. Використовуючи нерівність Чебишева,оцінити ймовірність того, що $\left|X - M(X)\right| < 0{,}9$, якщо D(X) = 0,001.

33. Дано P($\left|X - M(X)\right| < e$) $\geq 0{,}9$, D(X)=0,004. Використовуючи нерівність Чебишева, знайти e.

34. У серії з 400 дослідів імовірність успіху в кожному з них дорівнює 0,8. За допомогою нерівності Чебишева оцінити ймовірність того, що різниця між числом успіхів в цих дослідах та середнім числом успіхів буде меншою 20.

35. Термін служби електричної лампи має показниковий розподіл з математичним сподіванням 1000 годин. Знайти ймовірність того, що середній термін служби для 100 ламп складає не менше 900 годин.

36. Щільність розподілу випадкової величини має вигляд $p_x(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [0{,}2], \\ Cx^2, & x \in [0{,}2]. \end{cases}$. Знайти константу С, побудувати функцію розподілу $F_\xi(x)$ і обчислити ймовірність $P\{-1 \leq x \leq 1\}$.

37. Випадкову величину *X* задано щільністю розподілу *f*(*x*). Потрібно:

1) знайти функцію розподілу ймовірностей;

2) обчислити середнє квадратичне відхилення величини *X*;

3) побудувати графіки функції розподілу ймовірностей та щільності розподілу;

4) знайти ймовірність того, що в трьох випробуваннях випадкова величина *X* двічі набере значення з інтервалу (α, β).

1. $f(x) = \begin{cases} 0{,}5\cos 0{,}5x, & x \in (0, \pi), \\ 0, & x \notin (0, \pi). \end{cases}$ $\alpha = 0,\ \beta = 4.$

2. $f(x) = \begin{cases} -2x + 4, & x \in [1, 2), \\ 0, & x \notin [1, 2). \end{cases}$ $\alpha = -4,\ \beta = 1{,}5.$

3. $f(x) = \begin{cases} x - 2{,}5, & x \in (3, 4], \\ 0, & x \notin (3, 4]. \end{cases}$ $\alpha = 3{,}5,\ \beta = 12.$

4. $f(x) = \begin{cases} 2x - 4, & x \in (2, 3], \\ 0, & x \notin (2, 3]. \end{cases}$ $\alpha = 2{,}5,\ \beta = 4.$

5. $f(x) = \begin{cases} 2x + 2, & x \in (-1, 0], \\ 0, & x \notin (-1, 0]. \end{cases}$ $\alpha = -0{,}5,\ \beta = 0{,}5.$

6. $f(x)=\begin{cases}8x-8, & x\in(1{,}3/2],\\ 0, & x\notin(1{,}3/2].\end{cases}$ $\alpha=-1{,}5,\ \beta=31$.

7. $f(x)=\begin{cases}2x-2, & x\in(1,2],\\ 0, & x\notin(1,2].\end{cases}$ $\alpha=1{,}5,\ \beta=6$.

8. $f(x)=\begin{cases}x/2+1, & x\in(-2,0],\\ 0, & x\notin(-2,0].\end{cases}$ $\alpha=-3,\ \beta=-1$.

9. $f(x)=\begin{cases}1/4, & x\in(0,4],\\ 0, & x\notin(0,4].\end{cases}$ $\alpha=2,\ \beta=5$.

10. $f(x)=\begin{cases}2x/9, & x\in[0,3),\\ 0, & x\notin[0,3).\end{cases}$ $\alpha=2,\ \beta=7$.

38. Задано функцію $f(x)$. Потрібно:

1) знайти значення параметра *a*, при якому вона стає щільністю розподілу деякої випадкової величини *X*;

2) знайти функцію розподілу ймовірностей для *X*;

3) обчислити $\sigma(X)$;

4) побудувати графіки функції розподілу та щільності розподілу.

1. $f(x)=\begin{cases}a(x-3), & x\in(3,4],\\ 0, & x\notin(3,4].\end{cases}$

2. $f(x)=\begin{cases}a(x-4), & x\in(4,5],\\ 0, & x\notin(4,5].\end{cases}$

3. $f(x)=\begin{cases}a\cos 0{,}5, & x\in(0,\pi],\\ 0, & x\notin(0,\pi].\end{cases}$

4. $f(x)=\begin{cases}a(x-2), & x\in(1,2],\\ 0, & x\notin(1,2].\end{cases}$

5. $f(x)=\begin{cases}a(x-4), & x\in(4,5],\\ 0, & x\notin(4,5].\end{cases}$

6. $f(x)=\begin{cases}a(x-5), & x\in(5,6],\\ 0, & x\notin(5,6].\end{cases}$

7. $f(x)=\begin{cases}a(x-6), & x\in(6,7],\\ 0, & x\notin(6,7].\end{cases}$

8. $f(x)=\begin{cases}a(x+1), & x\in(-1,0],\\ 0, & x\notin(-1,0].\end{cases}$

9. $f(x)=\begin{cases}a(x-1), & x\in(1{,}3/2],\\ 0, & x\notin(1{,}3/2].\end{cases}$

10. $f(x)=\begin{cases}a(x-1), & x\in(1,2],\\ 0, & x\notin(1,2].\end{cases}$

РОЗДІЛ 3
ЕЛЕМЕНТИ МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ

3.1. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ

ОСНОВНІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

Предмет математичної статистики полягає в розробці методів збору та обробки статистичних даних для одержання наукових та практичних висновків. Основна задача математичної статистики – розробка методів аналізу статистичних даних в залежності від мети дослідження.

Методи математичної статистики ефективно використовують при розв’язанні багатьох задач науки, організації технологічного процесу, планування, управління та ціноутворення.

Сукупність усіх подумки можливих об'єктів даного виду, над якими проводяться спостереження з метою одержання конкретних значень певної випадкової величини, або сукупність результатів всіх спостережень, проведених у незмінних умовах над однією з випадкових величин, пов'язаних з даним видом об’єктів, називається ***генеральною сукупністю*** (сукупністю об’єктів, з яких зроблено вибірку).

Генеральна сукупність може бути кінцевою або нескінченною, залежно від того, кінцева або нескінченна сукупність складових її елементів.

Частина відібраних об'єктів генеральної сукупності або результати спостережень над обмеженим числом об'єктів із цієї сукупності називаються вибірковою сукупністю або ***виборкою*** (сукупністю випадково відібраних об’єктів).

Число N об'єктів генеральної сукупності й число n об’єктів вибіркової сукупності будемо називати ***об’ємами генеральної й вибіркової сукупностей*** (число об'єктів цієї сукупності) ($N > n$).

Про властивості генеральної сукупності можна судити за даними спостережень над відібраними об'єктами, тобто вибіркою.

Для того щоб за вибіркою можна було досить упевнено судити про випадкову величину, вибірка повинна бути ***репрезентативною***. Репрезентативність вибірки означає, що об'єкти вибірки досить якісно представляють генеральну сукупність. Репрезентативність вибірки забезпечується випадковістю відбору.

Операція, що полягає у тому, що спостережувані значення випадкової величини, розташовують у порядку зростання (спадання), називається ***ранжуванням*** статистичних даних. Після ранжування дані легко об'єднати в групи так, щоб у кожній окремій групі дані були однаковими.

Значення випадкової величини, що відповідає окремій групі згрупованого ряду спостережуваних даних, називають ***варіантою***, а послідовність варіант, розміщених у зростаючому порядку – ***варіаційним рядом***.

Чисельність окремої групи згрупованого ряду спостережуваних даних називається ***частотою,*** яка позначається через k (або n_i).

Відношення частоти даної варіанти до загальної суми частот всіх варіант називають ***відносною частотою*** або **частістю** й позначається $P_i^* = \frac{n_i}{n}$, де n – об'єм вибірки. Відносна частота P_i^* є статистичною ймовірністю появи варіанти x_i.

Дискретним варіаційним рядом розподілу називається ранжована сукупність варіант x_i з відповідними їм частотами n_i або з відносними частотами. Інакше кажучи, це ***статистичний розподіл вибірки***. (У теорії ймовірностей під розподілом розуміють відповідність між можливими значеннями випадкової величини і їхніх ймовірностей, а в математичної статистиці – відповідність між спостережуваними варіантами і їхніми частотами або відносними частотами).

Якщо об'єм вибірки великий, то її елементи об'єднують у групи, зображуючи результати дослідів у вигляді згрупованого статистичного ряду.

Інтервальним варіаційним рядом називають впорядковану сукупність інтервалів варіювання значень випадкової величини з відповідними частотами або відносними частотами попадання у кожний з них значень випадкової величини.

Довжину часткового інтервалу h варто вибрати так, щоб побудований ряд не був громіздким й у той же час дозволяв би виявити характерні риси зміни випадкової величини, характерні риси досліджуваного явища.

Для визначення величини частотного інтервалу використовують формулу Стерджеса:

$$h = \frac{(x_{\max} - x_{\min})}{1 + 3{,}322 \lg n}.$$

За початок першого інтервалу рекомендується брати величину $x_{\text{поч}} = x_{\min} - \frac{h}{2}$.

Кінець останнього інтервалу повинен задовольняти умові $x_{\text{кін}} - h \le x_{\max} \le x_{\text{кін}}$.

Проміжні інтервали одержують, додаючи до кінця попереднього інтервалу довжину часткового інтервалу.

В інтервал включають значення випадкової величини, більші або рівні нижній границі й менші верхньої границі.

В інтервальному варіаційному ряді частота n_i показує, у скількох спостереженнях випадкова величина прийняла значення, що належать тому або іншому інтервалу. Такі частоти звичайно називають інтервальними, а їхнє відношення до загального числа спостережень – ***інтервальними відносними частотами*** (або ***частостями***).

Якщо поділити всі частоти на ширину інтервалу h, то отримаємо розподіл ***щільності частоти вибірки*** $\frac{n_i}{h}$.

Якщо поділити всі відносні частоти (частості) на ширину інтервалу h, то отримаємо розподіл **щільності відносної частоти** (частості) **вибірки** $\frac{W_i}{h}$.

Емпіричною функцією розподілу (функцією розподілу вибірки) називають функцію $F^*(x)$, яка визначає для кожного значення x відносну частоту події $X < x$.

Математично це значення має вигляд $F^*(x) = \frac{n_x}{n}$,

де n_x – кількість варіант, які менші за x; n – об'єм вибірки.

За великого об’єму вибірки емпірична функція розподілу буде наближеним значенням функції розподілу генеральної сукупності. Отже, емпірична функція розподілу вибірки служить для оцінки теоретичної функції розподілу генеральної сукупності:

$$F^*(x) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{x_i < x} n_i \cdot$$

Для наочного представлення статистичного розподілу використовують полігон і гістограму.

Полігоном частот називають ламану, відрізки якої з'єднують точки $(x_1, n_1), (x_2, n_2), \mathbf{K}, (x_{\text{к}}, n_{\text{к}})$.

На осі абсцис відкладають варіанти x_i, а на осі ординат – відповідні їм частоти n_i. Точки (x_1, n_1) з'єднують відрізками прямих.

Полігоном відносних частот називають ламану, відрізки якої з'єднують точки $(x_1, W_1), (x_2, W_2), \mathbf{K}, (x_{\text{к}}, W_{\text{к}})$. На осі абсцис відкладають варіанти x_i, а на осі ординат – відповідні їм відносні частоти W_i.

Полігони частот та частостей є аналогами щільності ймовірностей.

Гістограмою частот називають ступінчасту фігуру, що складається із прямокутників, основами яких є часткові інтервали варіант довжиною $h = x_k - x_{k-1}$, а висоти дорівнюють відношенню $\frac{n_i}{h}$ (щільність частоти). Площа гістограми частот дорівнює сумі всіх частот, тобто об'єму вибірки.

Гістограмою відносних частот (**частостей**) називають ступінчасту фігуру, яка складається із прямокутників, основами яких є часткові інтервали довжиною h, а висоти дорівнюють відношенню $\frac{W_i}{h}$ (щільність відносної частоти). Площа гістограми відносних частот дорівнює сумі всіх відносних частот, тобто одиниці.

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

1. Нехай 35 студентів дістали за розв'язання трьох завдань такі бали: 10, 10, 11, 9, 15, 12, 9, 12, 13, 9, 8, 11, 14, 13, 12, 9, 10, 14, 10, 7, 8, 7, 9, 11, 15, 12, 7, 10, 7, 7 8, 13, 13, 14, 10.

Побудувати статистичний розподіл цих даних.
Розв'язання.
Складемо таблицю, у верхній рядок якої занесемо значення варіант(тих балів, які отримали студенти), а у нижній – значення частот для кожної варіанти(підрахуємо, скільки разів зустрічається варіанта у наведеному ряді). Отримаємо статистичний розподіл, який має вигляд:

Варіанта (кількість балів)	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Частота (кількість студентів)	5	3	5	6	3	4	4	3	2

2. Задано розподіл частот вибірки об'єму $n = 20$:

x_i	2	6	12
n_i	3	10	7

Написати розподіл відносних частот.
Розв'язання.
Знайдемо відносні частоти, для чого розділимо частоти на об'єм вибірки:

$$W_1 = \frac{3}{20} = 0{,}15;\ W_2 = \frac{10}{20} = 0{,}5;\ W_3 = \frac{7}{20} = 0{,}35.$$

Отже, розподіл відносних частот:

x_i	2	6	12
W_i	0,15	0,50	0,35

Контроль: 0,15 + 0,5 + 0,35 = 1.
3. Знайти емпіричну функцію за даним розподілом вибірки:

варіанти	x_i	2	6	10
частоти	n_i	12	18	30

Розв'язання.
1) об'єм вибірки n =12+18+30 = 60..
2) $F^*(x) = 0$ для $x \le 2$ (спостережень менше 2 нема).

3) $x \le 6,\ x_1 = 2$ спостерігалося 12 разів, $F^*(x) = \frac{12}{60} = 0{,}2$, для $2 < x \le 6$.

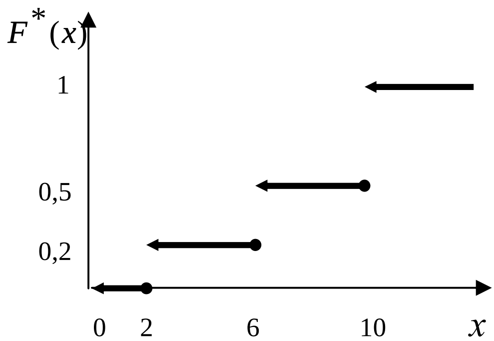
4) $x \le 10,\ x_1 = 2$ (12 разів), $x_2 = 6$ (18 разів), тобто $F^*(x) = \frac{30}{60} = 0{,}5$, для $6 < x \le 10$.

5) x = 10 – найбільша варіанта, $F^*(x) = 1,\ x > 10$.

Шукана емпірична функція:

$$F^*(x) = \begin{cases} 0, & x \le 2; \\ 0{,}2, & 2 < x \le 6; \\ 0{,}5, & 6 < x \le 10; \\ 1, & x > 10. \end{cases}$$

Графік цієї функції зображено на малюнку



4. Знайти емпіричну функцію за даним розподілом вибірки.

x_i	1	4	7
n_i	10	15	25

Розв'язання.

Знайдемо об'єм вибірки: $n = 10 + 15 + 25 = 50$.

Найменша варіанта дорівнює 1, тому $F^*(x) = 0$ при $x \le 1$.

Значення $x < 4$, $x_1 = 1$ спостерігалося 10 разів, а тому $F^*(x) = \frac{10}{50} = 0{,}2$ при $1 < x \le 4$.

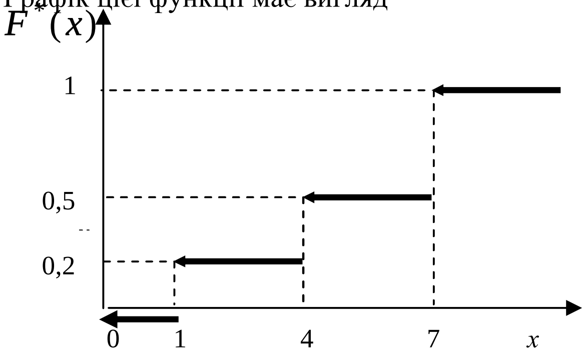
Значення $x < 7$, а саме x_1=1, x_2 = 4 спостерігалося 10+15 = 25 разів, звідки $F^*(x) = \frac{25}{50} = 0{,}5$ при $4 < x \le 7$.

$x = 7$ - найбільша варіанта і $F^*(x) = 1$ при $x > 7$.

Шукану емпіричну функцію запишемо у вигляді

$$F^x(x) = \begin{cases} 0, & x \le 1; \\ 0{,}2, & 1 < x \le 4; \\ 0{,}5, & 4 < x \le 7; \\ 1, & x > 7. \end{cases}$$

Графік цієї функції має вигляд

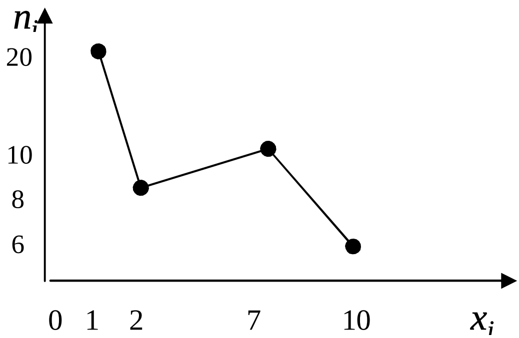


5. Побудувати полігон частот за даним розподілом вибірки**:**

x_i	1	2	7	10
n_i	20	8	10	6

*Розв'язання***.**

Відкладемо на осі $0x$ варіанти x_i, а на осі $0y$ відповідні їм частоти n_i. З'єднавши точки (x_i, y_i) відрізками прямих, побудуємо шуканий полігон частот.



6. У цеху встановлено 5 верстатів. Протягом 25 днів реєструвалась кількість верстатів, які не працювали. Здобуто такі значення: 0, 1, 2, 1, 1, 2, 3, 2, 1, 4, 2, 0, 0, 2, 2, 3, 3, 1, 0, 1, 2, 1, 3, 5, 0.

Побудувати статистичну функцію розподілу. Обчислити $\overline{x}$ і s^2.

Розв'язання.

На підставі вибіркових даних складемо статистичний ряд:

x_i	0	1	2	3	4	5
Частоти	5	7	7	4	1	1

Запишемо статистичну функцію розподілу, скориставшись формулою $F_n^*(x) = \sum\limits_{x_i < x} \frac{n(x_i)}{n}$.

$$F_n^*(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \le 0; \\ \frac{1}{5}, & \text{якщо } 0 < x \le 1; \\ \frac{12}{25}, & \text{якщо } 1 < x \le 2; \\ \frac{19}{25}, & \text{якщо } 2 < x \le 3; \\ \frac{23}{25}, & \text{якщо } 3 < x \le 4; \\ \frac{24}{25}, & \text{якщо } 4 < x \le 5; \\ 1, & \text{якщо } x > 5. \end{cases}$$

Знайдемо числові характеристики вибіркової сукупності.

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i n_i = \frac{1}{25}(7+14+12+4+5) = 1{,}68.$$

Дисперсію визначимо за формулою $s^2 = \overline{x}^2 - (\overline{x})^2$. Знайдемо середнє значення квадрата *x*:

$$\overline{x}^2 = \frac{1}{25}(7+28+36+16+25) = 4{,}48.$$

Отже, $s^2 = 4{,}48 - (1{,}68)^2 = 1{,}6576$.

7. Побудувати гістограму частот за даним розподілом вибірки об'єму $n = 100$.

Номер інтервалу i	Частковий інтервал $(x_i - x_{i+1})$	Сума частот варіант з інтервалу n_i	Щільність частоти $\frac{n_i}{h}$
1	1—5	8	2
2	5—9	20	5
3	9—13	52	13
4	13—17	12	3
5	17—21	8	2

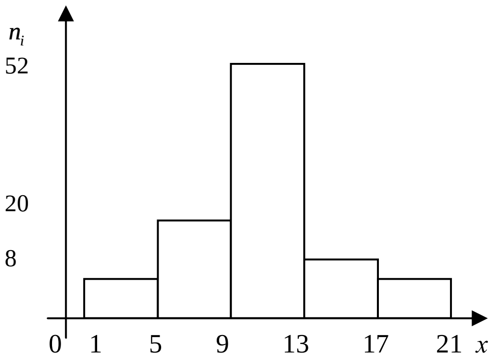
Розв'язання.

Побудуємо на осі абсцис вказані інтервали довжиною $h = 4$.

Проведемо над цими інтервалами відрізки, паралельні осі абсцис і які знаходяться від неї на відстанях, рівних відповідним частотам n_i.

Наприклад, над інтервалом (1; 5) побудуємо відрізок, паралельний осі абсцис, на відстані 8; аналогічно побудуємо інші відрізки.

Шукана гістограма має вигляд



8. Представити вибірку у вигляді таблиці частот згрупованої вибірки (першим інтервалом взяти указаний в умові), побудувати гістограму и полігон частот. Записати емпіричну функцію розподілу, побудувати її графік.

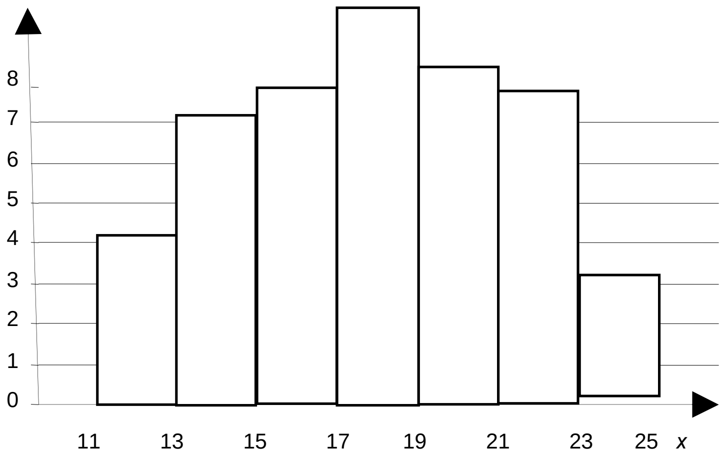
11,8	13,1	15,0	17,3	19,2	21,4	23,2	19,4	17,5	13,4
11,0	18,0	13,8	15,4	17,8	19,5	21,6	24,4	22,3	20,2
14,0	12,5	14,5	15,8	18,2	15,6	14,6	16,4	14,9	16,6
22,5	20,0	19,7	18,3	16,0	18,7	20,5	22,8	24,0	22,9
12,7	16,8	17,0	18,4	18,6	18,9	21,9	20,6	20,8	22,0

Перший інтервал 11 – 13

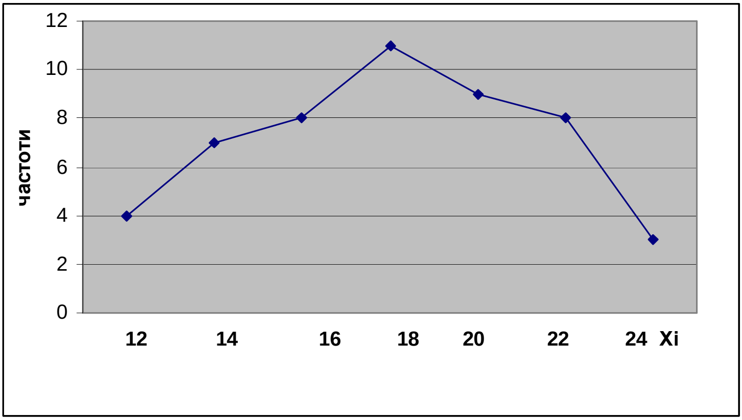
Розв'язання.

Складемо таблицю частот згрупованої вибірки:

i	границі інтервалу $(X_i; X_{i+1})$	середина інтервалу X_i^0	частота n_i	накопичена частота $\sum_{i=1}^{m} n_i$	відносна частота $\frac{n_i}{n}$	накопичена відносна частота $\sum_{i=1}^{m} \frac{n_i}{n}$
1	11 – 13	12	4	4	0,08	0,08
2	13 – 15	14	7	11	0,14	0,22
3	15 – 17	16	8	19	0,16	0,36
4	17 – 19	18	11	30	0,22	0,6
5	19 – 21	20	9	39	0,18	0,78
6	21 – 23	22	8	47	0,16	0,94
7	23 – 25	24	3	50	0,06	1



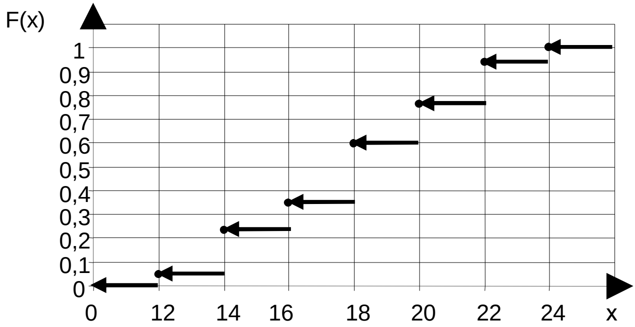
Стовпчаста діаграма, побудована за даними 2-го та 4-го стовпчиків таблиці, і є шукана гістограма.
Побудуємо полігон частот Для цього на осі абсцис відкладемо значення, які дорівнюють серединам інтервалів (третій стовпчик таблиці), а на осі ординат – відповідні їм частоти. Це будуть точки з координатами (12, 4), (14; 7), (16, 8) і т.д. Ці точки з'єднуються відрізками і отриманий графік і буде полігоном частот:



Емпірична функція розподілу визначається значеннями накопичених відносних частот:

$$F^*(x)=\begin{cases}0, & \text{якщо} \quad x\le 12;\\ 0{,}08, & \text{якщо} \quad 12<x\le 14;\\ 0{,}22, & \text{якщо} \quad 14<x\le 16;\\ 0{,}36, & \text{якщо} \quad 16<x\le 18;\\ 0{,}6, & \text{якщо} \quad 18<x\le 20;\\ 0{,}78, & \text{якщо} \quad 20<x\le 22;\\ 0{,}94, & \text{якщо} \quad 22<x\le 24;\\ 1, & \text{якщо} \quad x>24.\end{cases}$$

Графік емпіричної функції розподілу має вигляд:



ТРЕНУВАЛЬНІ ВПРАВИ

1. (У) Визначити об’єм вибірки: 3, 3, 2, 5, 3, 7, 5, 5, 7, 2, 5.

2. Скласти варіаційний ряд для вибірки: 5, 2, 8, -2, 5, 0, 0, 8, 5.

3. Скласти статистичний ряд для вибірки: 2, 0, 10, 6, 5, 6, 2, 5, 2, 10.

4. Побудувати полігон частот за розміром проданого жіночого взуття:

35	36	37	38	39
1	3	5	4	2

5. Побудуйте гістограму за таблицею

2-5	5-8	8-11	11-14	14-16
9	10	12	6	5

6. При перевірці техніки читання у учнів 1 класу отримали такі дані:

20-30	30-40	40-50	50-60	60-70
1	2	6	9	12

Побудуйте гістограму та графік емпіричної функції розподілу.

7. Задано розподіл частот вибірки.

x_i	2	6	12
n_i	3	10	7

Знайти об’єм вибірки та розподіл відносних частот.

8. Побудувати дискретний варіаційний ряд і накреслити полігон для розподілу 45 пар чоловічого взуття, проданого магазином за день: 40, 39, 41, 42, 41, 41, 42, 43, 40, 44, 41, 43, 42, 43, 39, 41, 42, 43, 43, 38, 41, 42, 43, 38, 41, 40, 42, 41, 40, 41, 42, 40, 41, 39, 40, 44, 38, 41, 40, 43, 42, 44, 42, 40, 41.

9. Вибірка містить 100 елементів. Обчислити оптимальну довжину інтервалу групування і кількість інтервалів.

10. При вивченні деякої дискретної випадкової величини в результаті *n* незалежних спостережень отримана вибірка: 10, 13, 10, 9, 9, 12, 12, 6, 7, 9, 8, 9, 11, 9, 14, 13, 9, 8, 8, 7, 10, 10, 11, 11. 11, 12. 8, 7, 9. 10, 14, 14, 13, 8, 8, 9, 10, 11, 11, 12, 12. Необхідно укласти варіаційний ряд і таблицю частот. Назвіть розмах варіації.

11. Знайти емпіричну функцію за даним розподілом вибірки та побудувати її графік.

а)

x_i	1	4	6
n_i	10	15	25

б)

x_i	2	5	7	8
n_i	1	3	2	4

в)

x_i	4	7	8
n_i	5	2	3

12. Побудувати полігон частот за даним розподілом вибірки:

а)

x_i	2	3	5	6
n_i	10	15	5	20

б)

x_i	15	20	25	30	35
n_i	10	15	30	20	25

13. Побудувати полігон відносних частот за даним розподілом вибірки:

а)

x_i	2	4	5	7	10
w_i	0,15	0,2	0,1	0,1	0,45

б)

x_i	1	4	5	8	9
w_i	0,15	0,25	0,3	0,2	0,1

14. Побудувати гістограму частот за даним розподілом вибірки:

а)

Номер інтервалу i	Частковий інтервал $x_i - x_{i+1}$	Сума частот варіант інтервалу n_i	Щільність частоти $\frac{n_i}{h}$
1	2—7	5	
2	7—12	10	
3	12—17	25	
4	17—22	6	
5	22—27	4	

б)

Номер інтервалу i	Частковий інтервал $x_i - x_{i+1}$	Сума частот варіант інтервалу n_i	Щільність частоти $\frac{n_i}{h}$
1	3—5	4	
2	5—7	6	
3	7—9	20	
4	9—11	40	
5	11—13	20	
6	13—15	4	
7	15—17	6	

15. Із генеральної сукупності зроблено вибірку обсягом n = 32. Здобуто такі значення випадкової величини: 2,2; 7,1; 6,3; 3,9; 5,9; 5,6; 5,6; 4,7; 7,9; 3,2; 6,1; 5,5; 6,4; 6,0; 6,9; 4,7; 6,4; 6,9; 6,7; 7,9; 4,2; 6,7; 6,0; 9,2; 5,5; 6,5; 3,5; 4,9; 7,2; 4,9; 8,9; 5,7. Скласти інтервальний ряд і побудувати гістограму.

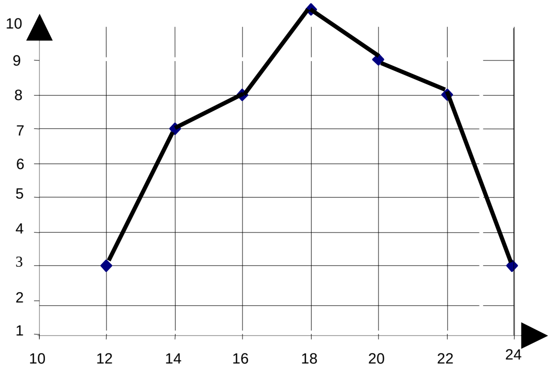
16. Кількість деталей, потрібних для ремонту обладнання на тиждень, визначалася на підставі спостережень, здійснюваних протягом 20 тижнів. У результаті було здобуто такі значення: 0, 1, 1, 1, 0, 0, 2, 3, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 4, 0, 5, 2, 3. Побудувати статистичну функцію розподілу.

17. У вимірювальному приладі установлено 5 однотипних опорів. Під час експлуатації 15 приладів протягом року кількість опорів, які довелося замінити, була такою: 1, 3, 2, 0, 4, 1, 5, 5, 5, 4, 3, 4, 2, 1, 2. Побудувати статистичну функцію розподілу. Обчислити $\bar{x}$ і s^2 за вибірковими даними.

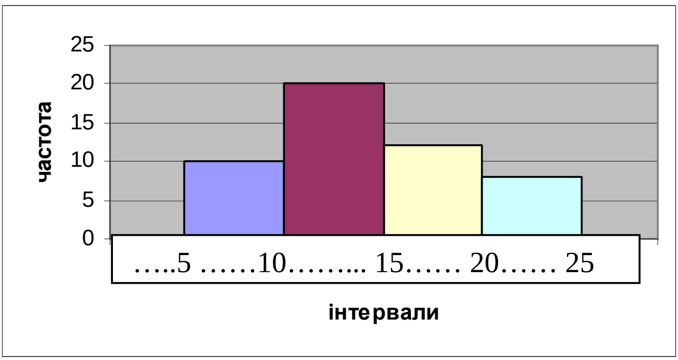
18. Маємо дані про строк служби радіоламп (у тисячах годин): 0,45; 0,21; 0,14; 0,15; 1,52; 0,1; 0,52; 1,59; 3,38; 2,25; 0,8; 1,26; 2,31; 0,84; 3,72; 2,11; 1,02; 4,2; 2,53; 0,78; 2,92; 0,71; 4,7; 3,02; 1,58; 4,12; 2,59; 0,88; 0,96; 1,76; 1,93; 4,9; 2,82; 1,14; 5,7; 1,21; 1,47; 3,52; 0,36; 0,64. Скласти інтервальний ряд і побудувати гістограму.

19. Із генеральної сукупності зроблено вибірку обсягом $n = 30$. Здобуто такі вибіркові значення: 4; 4,3; 5,68; 6,2; 5,64; 5,8; 4,25; 5,4; 5,3; 5,2; 4,55; 5,32; 6; 6,15; 4,56; 6,64; 6,5; 4,7; 6,8; 6,15; 5,6; 5,1; 4,2; 4,8; 6,9; 7; 4,9; 5; 5,25; 6,2. Скласти інтервальний ряд і побудувати гістограму. Обчислити $\bar{x}$ і s^2.

20. За полігоном частот скласти варіаційний ряд:



21. Скласти статистичний ряд за гістограмою. Обчислити площу гістограми.



ВАРІАНТИ ІНДИВІДУАЛЬНИХ ЗАВДАНЬ

Подати кожну вибірку у вигляді таблиці частот згрупованої вибірки (оптимальну довжину інтервалу визначити самостійно за формулою Стерджеса), побудувати гістограму та полігон частот, записати емпіричну функцію розподілу та побудувати її графік.

Варіант 1

50 59 42 54 60 43 48 39 65 67
40 30 55 44 45 41 72 47 35 61
30 61 58 42 32 58 48 28 47 76
59 54 57 14 49 49 46 47 52 68
60 53 21 45 42 33 51 41 60 38

Варіант 2

5 11 8 12 6 11 11 22 14 8
11 14 13 21 24 11 4 12 11 8
13 16 11 11 29 10 21 28 21 8
9 8 6 9 11 4 18 5 15 8
12 8 10 27 29 7 7 9 7 10
12 7 12 15 17 5 9 14 6 12 8

Варіант 3

29 27 30 25 25 24 20 19 22 18
23 22 20 28 17 16 21 25 25 26
30 33 29 25 24 21 20 14 34 18
13 20 23 28 34 38 28 19 15 12
24 27 33 36 31 27 24 19 11 15

Варіант 4

148 146 172 184 178 164 150 140 147 138
132 168 150 162 172 170 228 183 166 150
166 156 159 140 206 170 176 162 154 138
140 131 120 96 120 150 185 164 144 125
164 148 100 218 174 84 168 145 120 110

Варіант 5

135 135 130 148 148 144 134 122 129 120
126 116 118 162 152 158 159 143 138 128
126 127 129 139 136 146 148 155 148 138
134 115 112 122 130 143 146 155 168 101
120 130 132 160 150 101 142 130 123 110

Варіант 6

42,4 41,9 43,9 47,6 36,8 37,0 39,4 38,6 45,8 33,6
38,2 39,5 48,2 45,4 42,0 39,2 40,4 42,6 45,6 49,0
41,8 33,0 39,0 37,9 41,6 41,0 41,6 45,3 44,9 48,4
36,0 44,6 46,8 47,0 45,2 43,4 40,0 39,5 34,6 30,5
37,6 42,5 43,0 51,0 46,0 42,8 39,8 37,2 35,8 32,0

Варіант 7

32,5 35,2 37,2 39,8 35,8 35,6 35,0 35,4 33,0 33,0
37,8 33,8 33,4 35,5 37,5 39,6 36,4 37,0 37,6 39,4
31,6 31,4 32,8 34,8 35,0 36,5 38,8 37,4 36,2 34,5
35,9 33,6 31,2 29,5 41,8 41,0 38,4 36,0 34,1 32,4
30,8 32,0 30,6 28,0 40,2 38,2 36,0 34,0 32,6 30,2

Варіант 8

45,6 46,0 46,8 48,4 48,0 49,5 54,2 44,8 43,0 42,6
51,6 48,8 47,9 57,0 53,0 48,2 47,8 47,6 45,4 41,8
50,0 49,4 45,8 45,2 44,0 54,8 51,8 50,4 48,6 47,0
47,4 48,7 51,9 49,2 48,5 46,5 43,8 41,0 40,6 37,0
46,3 43,6 56,2 52,6 49,0 48,2 46,0 44,6 40,8 38,5

Варіант 9

22,0 20,8 20,6 21,9 18,9 18,6 18,4 17,0 16,8 12,7
22,9 24,0 22,8 20,5 18,7 16,0 18,3 19,7 20,0 22,5
16,6 14,9 16,4 14,6 15,6 18,2 15,8 14,5 12,5 14,0
20,2 22,3 24,4 21,6 19,5 17,8 15,4 13,8 18,0 11,0
13,4 17,5 19,4 23,2 21,4 19,2 17,3 15,0 13,1 11,8

Варіант 10

47 45 42 43 42 41 38 39 37 34
41 46 50 34 39 38 46 47 51 55
45 42 47 33 35 33 40 46 50 50
43 37 28 34 38 42 49 44 41 32
36 40 48 53 48 44 40 36 32 30

Варіант 11

35,6 34,2 32,6 31,9 30,9 29,8 28,9 28,2 27,2 25,8
29,6 31,8 20,6 23,9 29,0 31,5 30,8 32,4 33,5 35,8
26,4 41,5 37,9 34,8 33,9 27,6 35,3 36,8 35,4 32,9
30,5 32,1 31,4 30,2 29,4 28,5 27,8 24,5 23,0 26,7
38,5 39,0 37,4 36,2 32,7 32,3 29,8 26,9 23,6 22,1

Варіант 12

8,1 9,1 8,5 9,7 7,5 9,0 11,9 10,3 11,5 14,0
15,6 9,6 10,9 6,9 8,0 7,2 10,0 10,8 11,4 12,7

6,2 8,9 10,0 10,7 12,0 11,2 7,6 8,4 7,0 5,6
4,2 6,5 5,8 8,7 7,8 9,4 10,5 12,4 11,7 14,2
16,0 14,8 13,5 12,6 11,1 10,4 9,0 7,2 5,1 3,0

Варіант 13

40 38 37 36 34 32 31 30 30 25
41 38 35 33 29 27 32 35 39 42
36 46 41 40 39 33 35 30 28 24
44 32 33 21 27 31 34 37 39 43
27 36 39 48 43 38 35 31 26 23

Варіант 14

9 30 2 30 8 28 8 26 4 25
8 25 6 24 9 20 6 22 5 20
4 26 5 24 7 20 9 23 25 27
5 28 0 29 0 32 7 30 2 29
28 2 27 5 26 7 24 6 25 2
24 1 23 3 22 1 20

Варіант 15

74,2 68,8 72,5 70,0 68,0 67,0 65,9 63,7 62,5 61,5
70,4 60,8 64,2 66,5 65,6 65,8 71,0 70,8 72,5 73,0
77,2 76,0 69,5 70,2 67,5 67,0 66,0 65,0 63,7 59,4
62,2 56,4 64,8 62,5 65,5 66,9 69,8 70,0 72,0 74,8
63,4 66,0 69,0 71,6 68,5 65,6 64,0 62,8 60,2 58,6

Варіант 17

38,6 36,8 35,6 34,8 34,2 33,7 32,6 31,5 30,9 27,5
40,4 36,4 33,2 27,8 28,5 33,6 39,0 37,8 36,8 42,0
41,2 39,5 37,0 36,6 35,8 34,0 33,4 32,8 31,3 24,7
29,6 32,4 31,8 29,0 34,5 36,3 38,2 40,7 42,6 45,6
43,8 40,0 37,4 36,5 35,0 32,4 31,0 30,5 28,0 25,8

Варіант 18

17 13 22 21 20 18 15 14 13 9
8 23 25 11 7 10 12 16 19 26
16 13 9 30 25 21 18 17 14 8
17 22 18 14 8 13 17 21 23 4
12 16 20 25 28 24 19 15 11 7

Варіант 19

23,6 22,8 20,2 21,4 20,8 18,7 18,1 18,6 17,2 16,0
20,8 20,2 23,7 20,2 17,4 19,0 21,6 23,4 22,3 24,2
19,0 21,2 23,0 26,9 24,0 22,8 20,9 18,8 16,0 15,6
21,4 18,0 17,6 19,2 21,4 20,8 22,8 24,6 25,2 27,8

13,5 16,8 22,2 25,3 27,0 24,9 21,2 20,0 18,8 15

Варіант 20

39,0 39,4 38,0 37,8 35,2 35,0 31,2 30,8 26,8 25,5
40,3 41,0 41,1 37,3 36,6 34,0 33,2 34,5 36,4 43,2
44,2 39,0 38,9 37,0 36,4 35,8 32,4 31,4 28,5 23,3
29,0 28,6 32,7 31,3 32,9 34,2 38,0 40,7 39,9 41,5
42,8 38,4 37,2 36,0 35,5 33,8 30,0 32,2 27,0 24,0

Варіант 21

22,6 21,9 20,0 19,4 18,5 18,0 17,0 16,0 16,2 15,2
20,5 17,2 15,6 16,5 15,9 18,0 20,3 19,6 21,0 22,8
16,0 24,6 22,4 21,6 20,9 20,1 19,0 17,2 18,4 13,4
16,8 10,7 13,0 14,2 16,5 17,6 18,0 19,8 21,4 23,7
21,0 19,7 19,0 17,4 18,2 17,0 16,0 15,4 14,5 11,0

Варіант 22

1 76 64 56 40 58 43 41 45 33
20 62 48 28 31 45 48 54 68 68
74 70 75 67 51 60 52 50 48 22 22
53 15 20 34 39 43 50 68 61 82
82 72 65 58 44 40 42 36 25 10

Варіант 23

46 56 52 51 49 47 46 47 45 43
54 55 52 46 42 46 50 53 60 57
45 44 47 51 58 53 55 51 47 41
45 37 43 43 41 46 49 55 59 64
63 59 54 51 50 47 46 44 42 40

Варіант 24

74 71 73 70 67 71 69 76 75 66
69 72 67 71 67 70 68 72 72 72
74 66 71 69 77 70 69 70 70 78
65 64 70 68 71 71 68 76 70 66
81 67 77 80 73 61 68 79 73 69

Варіант 25

6,0 5,5 4,9 4,4 4,0 3,2 3,3 3,0 1,4 1,5
1,9 2,2 1,2 5,1 2,4 3,5 3,3 3,9 5,4 6,3
3,4 2,9 1,3 0,8 1,5 5,6 5,3 3,1 1,2 1,0
1,8 2,7 1,6 1,3 0,8 2,3 4,2 5,7 6,6 5,8
7,4 6,2 5,0 4,7 3,8 3,5 2,0 1,7 1,0 0,9

3.2. ВИБІРКОВІ ХАРАКТЕРИСТИКИ

ОСНОВНІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

У багатьох випадках треба дослідити кількісну ознаку X генеральної сукупності, використовуючи результати вибірки. Часто для цього достатньо знайти наближені значення математичного сподівання $M(X)$, дисперсію $D(X)$, середньоквадратичне відхилення $s(X)$, початкові або центральні моменти випадкової величини X.

Іноді з деяких міркувань вдається встановити закон розподілу X. Тоді треба вміти оцінювати параметри цього розподілу.

Точкова оцінка деякого параметру розподілу визначається за даними вибірки, характеризується одним числом і служить оцінкою параметра розподілу генеральної сукупності.

Приведемо основні точкові оцінки параметрів розподілу.

Середнім арифметичним (або генеральною середньою) $\overline{x_0}$ спостережуваних значень випадкової величини x називається частка від ділення суми всіх цих значень на їхню кількість, тобто $\overline{x_0} = \dfrac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i}{n}$.

Вибірковою середньою називають середню арифметичну варіант вибірки з урахуванням їх частостей і позначають

$$\overline{x_в} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{m} x_i \cdot n_i}{n},$$

де: x_i – значення i-ой варіанти; n_i – частота варіанти; n – об’єм вибірки; m – число різних варіант.

Властивості вибіркової середньої виражені у ***формулі моментів***

$$m = \frac{k}{n} \sum_{i=1}^{m} n_i \; \frac{x_i - c}{k}$$

Вибірковою дисперсією D_B називають середню квадратів відхилення варіант від вибіркової середньої з урахуванням відповідних частостей : $D_B = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m} n_i (x_i - \bar{x}_B)^2$.

Якщо дані спостережень представлені у вигляді дискретного варіаційного ряду, причому $x_1, x_2, ..., x_n$ – спостережувані варіанти, а $n_1, n_2, ..., n_n$ – відповідні їм частоти, то вибіркова дисперсія спрощується, якщо її знаходити за формулою

$$D_B = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m} n_i x_i^2 - (\bar{x}_B)^2,$$

Вибірковим середньоквадратичним відхиленням (стандартом) називають квадратний корінь із вибіркової дисперсії $s_B = \sqrt{D_B}$.

Властивості:

1) Дисперсія сталої величини дорівнює 0.

2) Якщо всі результати спостережень збільшити (зменшити) на деяке число *c*, то дисперсія й середнє квадратичне відхилення не зміниться, тобто $D_в(x \pm c) = D_в(x)$ и. $s_в(x \pm c) = s_в(x)$.

3) Якщо всі результати спостережень помножити на деяке число *c*, то має місце рівність: $D_в(x \cdot c) = c^2 \cdot D_в(x)$ або $s_в(x \cdot c) = |c| \cdot s_в(x)$.

4) Якщо всі частоти варіант помножити на деяке число, то вибіркові дисперсія й середнє квадратичне відхилення не зміняться.

5) Вибіркова дисперсія дорівнює різниці між середнім арифметичним квадратів спостережень над випадковою величиною *x* і квадратом її середнього арифметичного, тобто $D_в(x) = \overline{x_в^2} - (\overline{x_в})^2$.

Виправлена вибіркова дисперсія:

$$s^2 = \frac{n}{n-1} \cdot D_в.$$

Виправлене вибіркове середнє квадратичне відхилення: $s = \sqrt{s^2}$.

Вибіркова асиметрія: $A_S = \frac{1}{ns^3} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x}_в)^3$.

Вибірковий ексцес: $E_k = \frac{1}{ns^4} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x}_в)^4 - 3$.

Якщо вибірка задана дискретним статистичним рядом

x_i	x_1	x_2	...	x_k
n_i	n_1	n_2	...	n_k

то у цьому випадку розрахункові формули мають вид

$$\overline{x}_в = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot n_i ,$$

$$D_в = \overline{x^2} - (x_в)^2, \text{ де } \overline{x^2} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2} \cdot n_i ,$$

$$s_в = \sqrt{D_в}, \quad S^2 = \frac{n}{n-1} \cdot D_в, \quad S = \sqrt{S^2},$$

$$A_S = \frac{1}{ns^3} \cdot \sum_{i=1}^{n} n_i \cdot (x_i - \overline{x}_в)^3, \qquad E_k = \frac{1}{ns^4} \cdot \sum_{i=1}^{n} n_i \cdot (x_i - \overline{x}_в)^4 - 3.$$

Медіаною M_e^* називають значення варіанти, що знаходиться на середині ранжованого ряду спостережень.

Якщо проведено непарне число спостережень $n = 2q$-1, то $M_e^* = x_q$. При парному числі спостережень $n = 2q$ $M_e^* = \frac{x_q + x_{q+1}}{2}$.

Для інтервального варіаційного ряду медіану визначають за формулою $M_e^* = x_0 + h\frac{0{,}5 \cdot \sum m_i - S_{M_e^*-1}}{m_{M_e^*}}$,

де: x_0 – нижня границя медіанного інтервалу;

h – величина інтервалу;

$0{,}5 \cdot \sum m_i$ – половина суми накопичених частот інтервального ряду розподілу;

$S_{M_e^*-1}$ – сума накопичених частот інтервалу, що передує медіанному;

$m_{M_e^*}$ – частота медіанного інтервалу.

Модою M_0^* називають значення варіанти, що має найбільшу частоту в статистичному ряді розподілу.

У дискретних варіаційних рядах мода визначається без додаткових розрахунків за значенням варіанти, що має найбільшу частоту.

Для інтервального варіаційного ряду мода визначається за формулою

$$M_0^* = x_0 + h \cdot \frac{n_2 - n_1}{(n_2 - n_1) + (n_2 - n_3)},$$

де: x_0 – нижня (мінімальна) границя модального інтервалу;

h – величина інтервалу;

n_1 – частота інтервалу, що передує модальному;

n_2 – частота модального інтервалу;

n_3 – частота наступного за модальним інтервалу.

Коефіцієнтом варіації називають виражене у відсотках відношення виборочного середнього квадратичного відхилення до виборочного середнього: $V = \frac{s}{\overline{x}_в}100\%$. Якщо коефіцієнт варіації не перевищує 30%, то сукупність є однорідною.

ПРИКЛАДИ РОЗВ’ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

1. Вибіркова сукупність задана таблицею

x_i	1	2	3	4
n_i	20	15	10	5

Знайти вибіркові характеристики.

Розв’язання.

У даному випадку об'єм вибірки дорівнює $n = 20 + 15 + 10 + 5 = 50$.
Знаходимо вибіркову середню:

$$\overline{x}_B = \frac{1}{50}(1 \cdot 20 + 2 \cdot 15 + 3 \cdot 10 + 4 \cdot 5) = \frac{100}{50} = 2 \cdot$$

Знаходимо вибіркову дисперсію:

$$D_B = \frac{1}{50}(20 \cdot (1-2)^2 + 15 \cdot (2-2)^2 + 10 \cdot (3-2)^2 + 5 \cdot (4-2)^2) = \frac{50}{50} = 1 \cdot$$

Знаходимо вибіркове середньоквадратичне відхилення: $s_B = \sqrt{1} = 1$.

2. У результаті п'яти вимірів довжини виробу одним приладом (без систематичних похибок) отримані наступні результати в мм: 92; 94; 103; 105; 106.

Знайти:

а) вибіркове середнє довжини виробу;

б) вибіркову та виправлену дисперсії похибок приладу.

Розв'язання.

а) Знайдемо вибіркову середню

$$x_B = 92 + \frac{(0 + 2 + 11 + 13 + 14)}{5} = 92 + 8 = 100 \cdot$$

б) Знайдемо вибіркову дисперсію

$$D_B = \frac{\sum (x_i - \overline{x}_B)^2}{n} = \frac{(92-100)^2 + (94-100)^2 + (103-100)^2}{5} +$$

$$+ \frac{(105-100)^2 + (106-100)^2}{5} = 34 \cdot$$

в) Знайдемо виправлену вибіркову дисперсію

$$s^2 = \frac{n}{n-1} \cdot D_B = \frac{5}{4} \cdot 34 = 42{,}5 \cdot$$

3. Для варіаційного ряду знайти медіану й моду.

x_i	0	1	2	3	4	5	7
m_i	8	17	16	10	6	2	1

Обсяг вибірки дорівнює n = 8+17+16+10+6+2+1 = 60. Тому медіана – це середнє арифметичне між 30-ю та 31-ю варіантами. Обидві ці варіанти дорівнюють 2, отже медіана M_e = (2+2):2 = 2.

Мода – значення, яке зустрічається найчастіше. Найбільшу частоту має варіанта x =1(її частота 17), тому M_o = 1.

4. Для інтервального варіаційного ряду знайти медіану та моду.

x_i	14 – 18	18 – 22	22 – 26	26 – 30	30 – 34	34 – 38	38 – 42
m_i	9	15	16	24	18	12	6

Розв'язання.

1) Для розрахунку медіани попередньо обчислюється стовпець накопичених частот.

	інтервали	частоти	накопичені частоти
1	14,0 – 18,0	9	9
2	18,0 – 22,0	15	24
3	22,0 – 26,0	16	40
4	26,0 – 30,0	24	64
5	30,0 – 34,0	18	82
6	34,0 – 38,0	12	94
7	38,0 – 42,0	6	100

2) Медіанним є інтервал (26,0 – 30,0), тому що на цей інтервал доводиться перша накопичена частота, що перевищує половину всього об'єму сукупності ($64 > 0{,}5 \cdot \sum n_i = 50$).

3) Обчислимо M_e^*:

$$M_e^* = 26{,}0 + 4 \cdot \frac{50 - 40}{24} = 26{,}0 + 1{,}67 = 27{,}67,$$

де: $x_0 = 26{,}0$ – нижня границя медіанного інтервалу;

$h = 4{,}0$ – величина інтервалу;

$0{,}5 \cdot \sum n_i = 50$ – половина суми накопичених частот;

$S_{M_e^*} = 40$ – сума накопичених частот інтервалу, що передує медіанному;

$m_{M_e^*} = 24$ – частота медіанного інтервалу.

4) Обчислимо M_0^* (модальний інтервал (26,0 – 30,0), тому що цей інтервал має найбільшу інтервальну частоту):

$$M_0^* = 26{,}0 + 4 \cdot \frac{24 - 16}{(24 - 16) + (24 - 18)} = 28{,}29,$$

де: $x_0 = 26{,}0$ – нижня границя модального інтервалу;

$h = 4{,}0$ – величина модального інтервалу;

$n_1 = 16,\ n_2 = 24,\ n_3 = 18$ – відповідно частоти передмодального, модального й післямодального інтервалів.

ТРЕНУВАЛЬНІ ВПРАВИ

1. Знайти медіану сукупності даних: а) 12, 2, 9, 11, 15, 24, 10. б) 17, 43, 24, 17, 21, 26.

2. Протягом перших п’яти днів березня температура повітря о 8 ранку становила 3^0, 5^0, 4^0, 1^0, 2^0. Знайти середню температуру за ці дні.

3. Укласти варіаційний ряд, об’єм якого 10, мода – 15, медіана – 13.

4. (У)Відомо, що обсяг вибірки 50. Заповнити порожні клітинки таблиці, якщо мода – 18 (указати всі можливі варіанти).

12	14	18	20	21
4	16			14

5. У результаті 5 зважень отримали такі дані: 3,25; 3,14; 2,99; 3,05; 3,12. Знайти вибіркове середнє ваги виробу; вибіркову та виправлену дисперсії похибок приладу

6. Обчислити оптимальну довжину інтервалу групування, якщо маємо вибірку обсягом 50.

7. Дані опитування 100 респондентів потрібно представити у вигляді групованого статистичного ряду, використовуючи 7 інтервалів. Обчисліть довжину кожного з таких інтервалів. Яких даних не вистачає у завданні?

8. Інтервальний варіаційний ряд з розмахом варіації 56 містить 7 інтервалів групування. Якою є довжина кожного інтервалу?

9. Обчислити кількість груп (інтервалів), якщо отримано дані спостережень і з’ясовано, що розмах варіації дорівнює 32, довжина інтервалу групування – 4.

10. Довжина кожного інтервалу групування дорівнює 6, а кількість інтервалів – 7. Знайдіть розмах варіації.

11. Виборочна сукупність задана таблицею розподілу:

Xi	1	2	3	4
ni	20	15	10	5

Знайти вибіркову дисперсію.

12. Знайти дисперсію за заданим розподілом:

x_i	1	3	5	7
n_i	20	15	10	5

13. Обчисливши коефіцієнт варіації, з’ясувати, чи є сукупність однорідною, якщо вона задана розподілом:

Xi	2	3	4	5
n_i	20	45	80	5

14. Побудувати статистичний розподіл вибірки, записати емпіричну функцію розподілу та обчислити такі числові характеристики: вибіркове середнє, вибіркову дисперсію, вибіркове середнє квадратичне відхилення, підправлене середнє квадратичне відхилення, розмах вибірки, медіану, моду для вибірки: 7; 6; 7; 10; 9; 8; 11; 6; 5;10; 8; 7; 6; 9; 8; 10; 7; 10; 12; 7.

15. Обчислити моду групованої вибірки, якщо відомо, що четвертий інтервал групування є модальним інтервалом, його частота дорівнює 17, частота попереднього інтервалу – 6, наступного – 10.

16. Дані спостережень представили у вигляді інтервального ряду:

інтервали	(12-20)	(20-28)	(28-32)	(32-40)	(40-48)
частоти	2	8	12	10	5

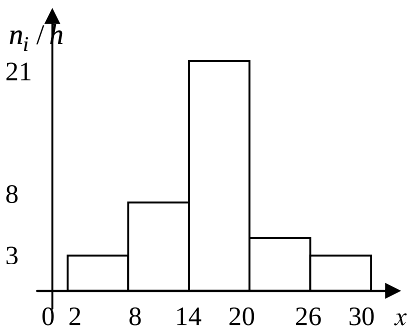
За цими даними визначити:

1) обсяг вибірки;
2) розмах варіації;
3) модальний інтервал.

Побудувати гістограму і за нею (графічно) визначити наближене значення моди. Зробити перевірку, обчисливши моду за формулою.

17. За даними попередньої задачі обчислити накопичені частоти та указати медіанний інтервал. Обчислити медіану за формулою.

18. За даними гістограми записати статистичний ряд. Обчислити моду та медіану графічно.



19. Дані спостережень представлені у вигляді групованого ряду. За даними таблиці побудуйте гістограму та знайдіть графічно наближене значення медіани.

інтервали	(12-22)	(22-32)	(32-42)	(42-52)	(52-62)	(62-72)
частоти	3	9	10	8	5	1

20. Є дані про розв’язання задачі з теорії ймовірностей (у секундах):

38	50	41	51	33	42	45	21	53	60
68	52	47	45	49	49	14	57	54	59
72	47	28	48	58	32	42	58	61	30
61	35	47	77	41	45	45	55	30	40
67	65	39	48	45	60	60	42	59	50

Представити вибірку у вигляді інтервального ряду, використовуючи 7 інтервалів. Назвати медіанний та модальний інтервали. Побудувати гістограму та полігон частот вибірки, полігон накопичених частот (кумуляту), полігон відносних накопичених частот. Знайти моду та медіану за формулою та за побудованим графіком (наближено).

21. Є дані, отримані в результаті виконання дорослими тесту на визначення коефіцієнта інтелекту IQ:

141	92	100	132	97	110	107	106	105	81	127	95
104	87	133	148	124	111	135	110	110	127	114	105
101	115	124	98	118	138	97	101	116	112	113	95
121	130	91	92	101	146	121	108	129	113	114	106
86	107	147	96	123	107	107	129	108	129	108	105
108	104	131	139	102	89	105	134	109	109	102	105

Представити вибірку у вигляді групованого статистичного ряду (кількість та довжину інтервалу групування визначити самостійно). Побудувати гістограму та полігон частот, полігон накопичених відносних частот. Обчислити моду та медіану аналітично та графічно.

ВАРІАНТИ ІНДИВІДУАЛЬНИХ ЗАВДАНЬ

Провести статистичне опитування серед студентів, викладачів, знайомих, учнів старших класів, батьків (опитати 50 осіб). Отриману вибірку представити у вигляді варіаційного та статистичного ряду. Побудувати гістограму та полігон частот, полігон накопичених відносних частот. Обчислити

1) розмах варіації;
2) оптимальну кількість інтервалів групування;
3) довжину інтервалу групування;
4) моду (за формулою та за графіком);
5) медіану (за формулою та за графіком);
6) вибіркову дисперсію та середнє квадратичне відхилення;
7) коефіцієнт варіації.

Визначити, чи є отримана вами сукупність даних однорідною.

Ознаки, які необхідно дослідити:

1. Розмір взуття.
2. Зріст.
3. Вага.
4. Вік.
5. Техніка читання (кількість слів, прочитаних за 1 хвилину).
6. Техніка списування.
7. Кількість художніх книжок, прочитаних за рік.
8. Кількість книжок у домашній бібліотеці.
9. Час, проведений щоденно в мережі Інтернет.
10. Час, витрачений щоденно на підготовку до занять.
11. Розмір (у Гб) флеш-карти.
12. Кількість періодичних видань, які виписує родина.
13. Час, який витрачається на дорогу до місця роботи (навчання) у хвилинах.
14. Кількість підтягувань, які може зробити респондент.
15. Час, за який респондент пробігає 100 м.(у секундах).
16. Середній бал атестата.
17. Сумарна кількість балів, отримана у ЗНО.
18. Вік, у якому почав читати.
19. Успішність за попередній семестр (середня кількість балів).
20. Кількість музичних файлів у мобільному телефоні.
21. Кількість картинок у мобільному телефоні.
22. Кількість пропущених занять (у академ. год.).
23. Час, який витрачається щоденно на розмови по мобільному телефону.
24. Час, який витрачається щоденно на перегляд телесеріалів.
25. Час, який людина витрачає на самоосвіту чи самовдосконалення (за місяць)

ПИТАННЯ ДО САМОКОНТРОЛЮ ТА САМОПЕРЕВІРКИ

Питання до модуля А

1. Предмет теорії ймовірностей.
2. Події та випробування
3. Види подій.
4. Дії над подіями.
5. Види сполук та формули для їх обчислення.
6. Імовірність та її властивості.
7. Класичне означення ймовірності. Застосування формул комбінаторики для обчислення ймовірності.
8. Геометричне означення ймовірності у лінійному, плоскому та просторовому випадках.
9. Теорема додавання ймовірностей.
10. Теорема множення ймовірностей.
11. Умовні ймовірності.
12. Залежні та незалежні події.

Питання до модуля В

1. Формула повної ймовірності.
2. Формула Байєса.
3. Схема Бернуллі.
4. Локальна теорема Лапласа.
5. Інтегральна теорема Лапласа.
6. Формула Пуассона.
7. Поняття випадкової величини.
8. Неперервні та дискретні випадкові величини.
9. Закон розподілу ймовірностей дискретної випадкової величини.
10. Математичне сподівання дискретної випадкової величини та його властивості.
11. Дисперсія та її властивості. Різні формули для обчислення дисперсії.
12. Середнє квадратичне відхилення випадкової величини.

Питання до модуля С

1. Неперервні випадкові величини.
2. Функція розподілу випадкової величини, її властивості.
3. Щільність розподілу випадкової величини, її властивості.

4. Зв’язок між функцією розподілу та щільністю випадкової величини.
5. Біноміальний закон розподілу випадкової величини.
6. Закон розподілу Пуассона.
7. Геометричний закон розподілу випадкової величини
8. Гіпергеометричний закон розподілу випадкової величини
9. Рівномірний закон розподілу випадкової величини.
10. Показниковий закон розподілу випадкової величини.
11. Нормальний закон розподілу випадкової величини.
12. Нерівності Чебишева.
13. Закон великих чисел.
14. Теорема Бернуллі.
15. Теорема Маркова.

Питання до модулю D

1. Предмет математичної статистики.
2. Основні задачі математичної статистики.
3. Статистична, генеральна та вибіркова сукупності, об’єм цих сукупностей.
4. Незгрупований і згрупований розподіл частоти вибірки.
5. Згрупований розподіл накопиченої частоти вибірки.
6. Побудова гістограми частот або частостей для згрупованих даних вибірки.
7. Який імовірностний зміст мають гістограма та полігон частот для згрупованих даних вибірки?
8. Мода та медіана не згрупованої вибірки.
9. Формули для обчислення моди та медіани згрупованого статистичного ряду.
10. Наближене обчислення моди та медіани за графіком.

Відповіді та вказівки

п.1.1.

13. ***1)*** *так* ***2)*** *ні* **14.** *ні* ***15****. ні*

п. 1.3

1. ***1)*** 80 ***2)***402 ***3)*** 42 ***4)*** 3 ***11)*** *m(m-1)* **2.** ***1)***8 ***2)*** 10 **6.** 12 **9.** 6. **10.** 25! ***11.*** 15. **12.** 12! **24.** C_{42}^{4}

п. 1.4.

2. В або Д**. 4.** 3) **5.** $\frac{5}{13}$ **8.** 0,3**. 9.** $\frac{8}{30}$ **11.** 20*%* **13.** $\frac{5}{6}$ **14**. 0,1

п. 1.5.

1. 50***%. 4.*** $\frac{7}{16}$ **5. 1)** $\frac{2}{p}$ **15.** $\frac{7}{16}$ **19.** ***50 %*** **21.** 0, 5.

п. 1. 6.

6. 0,025

п. 1.7.

10. 0,7565. **11.** 0,5. **12**. 0,5. **13**. $\frac{2}{3}$ **14**. $\frac{2}{3}$ **15.** $\frac{49}{78}$ **16**. 0,322. **17**. 0,58. **18.** 0,923. **19.** 0, 998

п. 1.8.

1. 1) 3) так;2)4) ні **34.** 0,1562**. 37.** 0,0782. **46**. 0, 0531**. 47**. 0,047. **53.** 0, 0231. **58.**0,047

п. 2.1.

1.дискретна **2.** не дискретна. **5.** М = 1, 125, D = 0,502. **6**.М = 1,1111. $D(X)$=0.1234. **7.** М =3, Д = 1,5. 8.

п. 2.2

17. б)М = 4,7, D=3,01 **в)** $M(X)=8;\ D(X)=8.$ г) $M(X)=152{,}5;\ D(X)=3118{,}75.$

18. $f(x)=\cos x,\ x\in\left(0,\frac{p}{2}\right)$, поза проміжком $f(x)=0$.

19. $$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ \frac{1}{2}(x^2-x), & 0<x\le 2\\ 1, & x>2\end{cases}$$

25. $Mo=M(x)=Me(x)=4$ **. 26**. $D(x)\ \frac{25}{18}$

п. 2.3.

5. задача на геометричний розподіл. р=0,096. **9.** 0,9924**. 10**. 0,9681

11. 0,8. **12.** (28,7; 31,3) **16.** $P(|x-15|<0,25)\approx 0,9876$ **23.** задача на розподіл Пуассона. 1) p = 0,00225 2) 0, 00495.

п. 2.4.

18. 0,9876

задачі на всі теми другого розділу

34. $P(|x-320|<20)\geq 1-\dfrac{Dx}{20^2}=1-\dfrac{64}{400}=0,84.$ **35.** 0,8413.

п. 3.1.

14. *вказівка:* знайти щільність частоти $\dfrac{n_i}{h}$ для кожного інтервалу і заповнити останній стовпець таблиці.

п. 3.2.

1. спочатку потрібно представити дані у вигляді варіаційного ряду.

ДОДАТКИ

Додаток 1 – таблиця значень функції

$$j\,(x) = \frac{1}{\sqrt{2p}}\,e^{-x^2/2}$$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3652	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0151	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061

2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

Додаток 2 – таблиця значень функції

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2p}} \int_0^x e^{-z^2/2}\, dz$$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,0000	0,31	0,1217	0,62	0,2324	0,93	0,3238
0,01	0,0040	0,32	0,1255	0,63	0,2357	0,94	0,3264
0,02	0,0080	0,33	0,1293	0,64	0,2389	0,95	0,3289
0,03	0,0120	0,34	0,1331	0,65	0,2422	0,96	0,3315
0,04	0,0160	0,35	0,1368	0,66	0,2454	0,97	0,3340
0,05	0,0199	0,36	0,1406	0,67	0,2486	0,98	0,3365
0,06	0,0239	0,37	0,1443	0,68	0,2517	0,99	0,3389
0,07	0,0279	0,38	0,1480	0,69	0,2549	1,00	0,3413
0,08	0,0319	0,39	0,1517	0,70	0,2580	1,01	0,3438
0,09	0,0359	0,40	0,1554	0,71	0,2611	1,02	0,3461
0,10	0,0398	0,41	0,1591	0,72	0,2642	1,03	0,3485
0,11	0,0438	0,42	0,1628	0,73	0,2673	1,04	0,3508
0,12	0,0478	0,43	0,1664	0,74	0,2703	1,05	0,3531
0,13	0,0517	0,44	0,1700	0,75	0,2734	1,06	0,3554
0,14	0,0557	0,45	0,1736	0,76	0,2764	1,07	0,3577
0,15	0,0596	0,46	0,1772	0,77	0,2794	1,08	0,3599
0,16	0,0636	0,47	0,1808	0,78	0,2823	1,09	0,3621
0,17	0,0675	0,48	0,1844	0,79	0,2852	1,10	0,3643

0,18	0,0714	0,49	0,1879	0,80	0,2881	1,11	0,3665
0,19	0,0753	0,50	0,1915	0,81	0,2910	1,12	0,3686
0,20	0,0793	0,51	0,1950	0,82	0,2939	1,13	0,3708
0,21	0,0832	0,52	0,1985	0,83	0,2967	1,14	0,3729
0,22	0,0871	0,53	0,2019	0,84	0,2995	1,15	0,3749
0,23	0,0910	0,54	0,2054	0,85	0,3023	1,16	0,3770
0,24	0,0948	0,55	0,2088	0,86	0,3051	1,17	0,3790
0,25	0,0987	0,56	0,2123	0,87	0,3078	1,18	0,3810
0,26	0,1026	0,57	0,2157	0,88	0,3106	1,19	0,3830
0,27	0,1064	0,58	0,2190	0,89	0,3133	1,20	0,3849
0,28	0,1103	0,59	0,2224	0,90	0,3159	1,21	0,3869
0,29	0,1141	0,60	0,2257	0,91	0,3186	1,22	0,3883
0,30	0,1179	0,61	0,2291	0,92	0,3212	1,23	0,3907
1,24	0,3925	1,57	0,4418	1,91	0,4719	2,50	0,4938
1,25	0,3944	1,58	0,4429	1,92	0,4726	2,52	0,4941
1,26	0,3962	1,59	0,4441	1,93	0,4732	2,54	0,4945
1,26	0,3962	1,60	0,4452	1,94	0,4738	2,56	0,4948
1,27	0,3980	1,61	0,4463	1,95	0,4744	2,58	0,4951
1,28	0,3997	1,62	0,4474	1,96	0,4750	2,60	0,4953
1,29	0,4015	1,63	0,4484	1,97	0,4756	2,62	0,4956
1,30	0,4032	1,64	0,4495	1,98	0,4761	2,64	0,4959
1,31	0,4049	1,65	0,4505	1,99	0,4767	2,66	0,4961
1,32	0,4066	1,66	0,4515	2,00	0,4772	2,68	0,4963
1,33	0,4082	1,67	0,4525	2,02	0,4783	2,70	0,4965
1,34	0,4099	1,68	0,4535	2,04	0,4793	2,72	0,4967
1,35	0,4115	1,69	0,4545	2,06	0,4803	2,74	0,4969
1,36	0,4131	1,70	0,4554	2,08	0,4812	2,76	0,4971
1,37	0,4147	1,71	0,4564	2,10	0,4821	2,78	0,4973
1,38	0,4162	1,72	0,4573	2,12	0,4830	2,80	0,4974
1,39	0,4177	1,73	0,4582	2,14	0,4838	2,82	0,4976
1,40	0,4192	1,74	0,4591	2,16	0,4846	2,84	0,4977
1,41	0,4207	1,75	0,4599	2,18	0,4854	2,86	0,4979
1,42	0,4222	1,76	0,4608	2,20	0,4861	2,88	0,4980
1,43	0,4236	1,77	0,4616	2,22	0,4868	2,90	0,4981
1,44	0,4251	1,78	0,4625	2,24	0,4875	2,92	0,4982
1,45	0,4265	1,79	0,4633	2,26	0,4881	2,94	0,4984
1,46	0,4279	1,80	0,4641	2,28	0,4887	2,96	0,4985

1,47	0,4292	1,81	0,4649	2,30	0,4893	2,98	0,4986
1,48	0,4306	1,82	0,4656	2,32	0,4898	3,00	0,4986
1,49	0,4319	1,83	0,4664	2,34	0,4904	3,20	0,4993
1,50	0,4332	1,84	0,4671	2,36	0,4909	3,40	0,4996
1,51	0,4345	1,85	0,4678	2,38	0,4913	3,60	0,49984
1,52	0,4357	1,86	0,4686	2,40	0,4918	3,80	0,49992
1,53	0,4370	1,87	0,4693	2,42	0,4922	4,00	0,49996
1,54	0,4382	1,88	0,4699	2,44	0,4927	4,50	0,49999
1,55	0,4394	1,89	0,4706	2,46	0,4931	5,00	0,49999
1,56	0,4406	1,90	0,4713	2,48	0,4934		

ЛІТЕРАТУРА

1. Бродський Я. С. Події, ймовірності, частоти / Я. С. Бродський – Х.: Вид. група «Основа»: «Тріада+», 2008. – 140 с.
2. Валєєв К. Г. Збірник задач з теорії ймовірностей та математичної статистики: навч. посіб. / К. Г Валєєв, І. А. Джалладова. – К.: КНЕУ, 2005. – 220 с..
3. Волощенко А. Б. Теорія ймовірностей та математична статистика: навч.-метод. посіб. для самост. вивч. дисц./ А. Волощенко, І. Джалладова. – К.: КНЕУ, 2003. – 256 с.
4. Вороная Л. В. Перші кроки в теорію ймовірностей. Задачі та їх розв'язання / Л. В. Вороная. – Х. Вид. група «Основа», 2009. – 175 с.
5. Гмурман В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике / В. Е. Гмурман. – М.: Высш. шк., 1979. – 334 с.
6. Гмурман В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика / В. Е. Гмурман. – М.: ИД Юрайт, 2010. – 479 с.
7. Данко П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах : учеб. пособ. / П. Данко, А Попов, Т. Кожевникова. – М.: Высш. шк., 2000. – 416 с.
8. Жерновий Ю. В. Збірник задач з теорії ймовірностей та математичної статистики / Ю. В. Жерновий. – Львів, 2009. – 18 с.
9. Задорожня Т. М. Збірник задач з теорії ймовірностей та математичної статистики: навч. посіб./ Т.М. Задорожня, Ю.В.Коляда, Г.В.Мамонова. – Ірпінь: Академія ДПС України, 2001. – 77 с.
10. Кабальський В. С. Теорія ймовірностей і математична статистика у задач та прикладах / В. С. Кабальський, Т. В.Токунова – Алчевськ, ДонДТУ, 2002. – 178 с.
11. Методичні вказівки для практичних занять з теорії ймовірностей для студентів спеціальностей «Математика та інформатика» / Укл. В. Могилевський. – Луганськ: Альма-матер, 2003. – 41 с.
12. Навчально-методичний комплекс з курсу теорії ймовірностей / Укл. Л.О. Горбатова, І. О. Смагіна, – Алчевськ: ДонДТУ, 2009. – 144 с.
13. Самостійно вивчаємо курс теорії ймовірностей і математичної статистики. Ч. І. Теорія ймовірностей: навч. посіб. / Т. В. Павленко, Т. М. Сукач. – Алчевськ: ДонДТУ, 2009. – 139 с.

14. Самостійно вивчаємо курс теорії ймовірностей і математичної статистики. Ч. ІІ. Математична статистика: навч. посіб./ Т. М. Сукач. – Алчевськ: ДонДТУ, 2009. – 150 с.
15. Сухарева Л. С. Нова змістовна лінія в сучасному шкільному курсі математики 5-6 класів / Л. С. Сухарева. – Х., 2008. – 144 с.
16. Теорія ймовірностей та математична статистика. Ч. 1: навч.-метод. посіб. для студентів математичних спеціальностей / Укл. О. М Іє., С. А. Сотникова – Луганськ, 2007. – 72 с.
17. Хургин Я. Как объять необъятное / Я. Хургин. – М.: Знание, 1985. – 192 с.
18. Шкіль М. І. Алгебра і початки аналізу : підруч. для 11 кл. загальноосвіт. навч. закл. / М. Шкіль та ін. – К.: Зодіак-ЕКО, 2002.– 384 с.

Навчальне видання

ПАНІШЕВА Ольга Вікторівна

ЗБІРНИК ЗАДАЧ З ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ ТА МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ

За редакцією автора

Комп’ютерний макет – Панішева О. В.

Здано до склад 14.02.2012 р. Підп. до друку 14.03.2012 р.
Формат 60x84 1/16. Папір офсет. Гарнітура Times New Roman.
Друк ризографічний. Ум. друк. арк. 13,25. Наклад 200 прим. Зам. № 57.

Видавець і виготовлювач
Видавництво Державного закладу
“Луганський національний університет імені Тараса Шевченка”
вул. Оборонна, 2, м. Луганськ, 91011. т/ф: (0642) 58-03-20.
e-mail: alma-mater@list.ru
Свідоцтво суб’єкта видавничої справи ДК 3459 від 09.04.2009 р.