А. В. Жучок

ВИБРАНІ ПИТАННЯ ЗАГАЛЬНОЇ АЛГЕБРИ

ТРІОЇДИ

Міністерство освіти і науки України
Державний заклад
„Луганський національний університет
імені Тараса Шевченка”

А. В. Жучок

ВИБРАНІ ПИТАННЯ ЗАГАЛЬНОЇ АЛГЕБРИ

ТРІОЇДИ

Навчальний посібник
для студентів фізико-математичних
факультетів вищих навчальних закладів

Луганськ
ДЗ „ЛНУ імені Тараса Шевченка”
2013

УДК 512.579(075.8)
ББК 22.144я73
Ж94

Р е ц е н з е н т и :

Бондаренко В. М. – доктор фізико-математичних наук, професор, провідний науковий співробітник відділу алгебри Інституту математики НАН України.

Кириченко В. В . – доктор фізико-математичних наук, професор, в. о. завідувача кафедри геометрії Київського національного університету імені Тараса Шевченка.

Семко М. М. – доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри вищої математики Національного університету податкової служби України, м. Ірпінь.

Жучок А. В.

Ж94 Вибрані питання загальної алгебри: тріоїди : навч. посіб. для студ. фіз.-мат. ф-тів вищ. навч. закл. / А. В. Жучок ; Держ. закл. „Луган. нац. ун-т імені Тараса Шевченка”. – Луганськ : Вид-во ДЗ „ЛНУ імені Тараса Шевченка”, 2013. – 116 с.

У посібнику розглядається новий тип алгебр з трьома асоціативними операціями – тріоїди. Досліджуються комбінаторні властивості операцій тріоїдів. Вивчаються найменші конгруенції на тріоїдах. Вводиться поняття трисполуки підтріоїдів та описуються декомпозиції тріоїдів у трисполуки підтріоїдів. Визначається та досліджується поняття напівретракції тріоїда. Побудовано приклади теоретико-тріоїдних конструкцій.

Для студентів і аспірантів фізико-математичних факультетів вищих навчальних закладів, наукових працівників у галузі алгебри.

УДК 512.579(075.8)
ББК 22.144я73

Рекомендовано до друку Вченою радою
Луганського національного університету імені Тараса Шевченка
(протокол № 3 від 1 листопада 2013 року)

ЗМІСТ

ВСТУП

Даний навчальний посібник має на меті познайомити читача з елементами нового напряму сучасної алгебри – теорією тріоїдів. Він призначений для студентів, аспірантів фізико-математичних факультетів вищих навчальних закладів та фахівців, зацікавлених у вивченні та розвитку цієї теорії. Усі наведені результати належать Ж.-Л. Лоде, М. О. Ронко та автору посібника.

Ж.-Л. Лоде та М. О. Ронко [1] побудували операди, асоційовані з ланцюговими модулями симпліксів та політопій Сташеффа. Відповідні алгебри мають три операції й називаються асоціативними триалгебрами та дендриформними триалгебрами. Триалгебри досліджувалися в роботах різних авторів (див., наприклад, [1 – 5]). Так, предметом вивчення роботи [2] є вільна дендриформна триалгебра на одному породжуючому елементі. Зв'язки між алгебрами Хопфа та триалгебрами описано в [3]. Робота [4] присвячена аналізу зв'язків між триалгебрами та 3-алгебрами Лейбніца. В останній роботі побудовано універсальну обгортуючу алгебру для 3-алгебри Лейбніца. Зв'язки між операторами Рота-Бакстера та дендриформними діалгебрами й дендриформними триалгебрами охарактеризовано в [5].

Тріоїдом [1] є множина з трьома бінарними асоціативними операціями, які задовольняють ті самі аксіоми, що й тріалгебра. Таким чином, тріалгебра є лінійним аналогом тріоїда. Це поняття було введено Ж.-Л. Лоде і М. О. Ронко. Якщо операції тріоїда збігаються, то він перетворюється в напівгрупу. Якщо дві певні операції тріоїда збігаються, то він перетворюється в дімоноїд. Дімоноїди були введені Ж.-Л. Лоде [6] для вивчення властивостей алгебр Лейбніца та вивчалися в роботах автора (див. наприклад, [7, 8]). З іншого боку, будь-який тріоїд є дімоноїдом з бінарною асоціативною операцією, яка задовольняє п’ять додаткових аксіом. Першим результатом про тріоїди є опис Ж.-Л. Лоде і М. О. Ронко вільного тріоїда, породженого заданою множиною [1]. Поняття тріоїда на наш час є маловивченим і потребує різноманітних досліджень. Природною у цьому напрямі є задача поширення результатів теорії напівгруп та теорії дімоноїдів на тріоїди. При цьому результати, отримані для тріоїдів, можуть бути застосовані й до триалгебр.

У цьому посібнику побудовано нові приклади тріоїдів, зокрема тріоїд, ізоморфний вільному тріоїду рангу 1, описаному Ж.-Л. Лоде і М. О. Ронко в [1]. Досліджено комбінаторні властивості операцій тріоїдів. Доведено, що кожний тріоїд з комутативною періодичною напівгрупою є напівструктурою уніпотентних підтріоїдів та кожний довільний тріоїд є напівструктурою s-простих підтріоїдів. Описано найменші конгруенції на тріоїдах з деякими обмеженнями на операції та охарактеризовано відповідні фактор-тріоїди. Отримано описи всіх напівструктурних та всіх групових конгруенцій на довільному тріоїді. Представлено найменші групові конгруенції на тріоїдах заданого класу. Вводиться та вивчається поняття лівої (правої, симетричної) напівретракції тріоїда. Побудовано нові теоретико-тріоїдні конструкції, для яких охарактеризовано деякі симетричні напівретракції.

Структура курсу за темами

Модуль 1

Лекція 1. Основні поняття та приклади тріоїдів.

Лекція 2. Комбінаторні властивості операцій тріоїдів.

Лекція 3. Вільні тріоїди.

Лекція 4. Трисполуки підтріоїдів.

Лекція 5. Найменші конгруенції на тріоїдах.

Модуль 2

Лекція 6. Напівструктурні конгруенції на тріоїдах.

Лекція 7. Групові конгруенції на тріоїдах.

Лекція 8. Напівретракції тріоїдів.

Лекція 9. Деякі теоретико-тріоїдні конструкції.

Критерії оцінювання модульних робіт

У процесі навчання реалізується модульний контроль знань студентів. Модульний контроль підсумовує результати засвоєння змістовних модулів та реалізується шляхом узагальнення результатів модульної контрольної роботи.

До проведення модульного контролю студенти допускаються без будь-яких обмежень. Захід модульного контролю здійснюється у письмовій формі.

При формуванні завдань для модульних робіт використовуються контрольні запитання до модулів.

Модульна контрольна робота оцінюється у 25 балів. Робота на практичних заняттях – до 20 балів. Самостійна робота студентів – до 30 балів.

Критерії оцінювання результатів роботи студентів наведено у таблиці.

За 100-бальною шкалою	За національною системою	
90-100	відмінно	5
75-89	добре	4
60-74	задовільно	3
1-59	незадовільно	2

МОДУЛЬ 1.

ЛЕКЦІЯ 1.

Основні поняття та приклади тріоїдів

У цьому розділі наведено основні визначення, які будуть використовуватися в подальшому, та побудовано нові приклади тріоїдів (див. також [9, 10]).

1.1. Непорожня множина T з визначеними на ній трьома бінарними асоціативними операціями $\dashv$, $\vdash$ і $\perp$, які задовольняють аксіоми:

$$(x \dashv y) \dashv z = x \dashv (y \vdash z), \tag{T1}$$

$$(x \vdash y) \dashv z = x \vdash (y \dashv z), \tag{T2}$$

$$(x \dashv y) \vdash z = x \vdash (y \vdash z), \tag{T3}$$

$$(x \dashv y) \dashv z = x \dashv (y \perp z), \tag{T4}$$

$$(x \perp y) \dashv z = x \perp (y \dashv z), \tag{T5}$$

$$(x \dashv y) \perp z = x \perp (y \vdash z), \tag{T6}$$

$$(x \vdash y) \perp z = x \vdash (y \perp z), \tag{T7}$$

$$(x \perp y) \vdash z = x \vdash (y \vdash z) \tag{T8}$$

для всіх $x, y, z \in T$, називається тріоїдом.

Наведемо еквівалентне визначення тріоїда. Для цього нагадаємо визначення дімоноїда [6 – 8].

Непорожня множина T з двома бінарними асоціативними операціями $\dashv$ та $\vdash$, які задовольняють аксіоми $(T1)-(T3)$, називається дімоноїдом. Дімоноїд $(T,\dashv,\vdash)$ з бінарною асоціативною операцією $\perp$, яка задовольняє аксіоми $(T4)$ – $(T8)$, називається тріоїдом.

Відображення f тріоїда T_1 у тріоїд T_2 називається гомоморфізмом, якщо

$$(x \dashv y)f = xf \dashv yf,$$

$$(x \vdash y)f = xf \vdash yf,$$

$$(x \perp y)f = xf \perp yf$$

для всіх $x, y \in T_1$. Якщо f є також біекцією, то f – ізоморфізм.

Підмножина A тріоїда $(T,\dashv,\vdash,\perp)$ називається підтріоїдом, якщо для будь-яких $a,b \in T$ з $a,b \in A$ випливає $a \dashv b, a \vdash b, a \perp b \in A$.

Тріоїд $(T,\dashv,\vdash,\perp)$ будемо називати комутативним (відповідно ідемпотентним, сепаративним), якщо напівгрупи $(T,\dashv)$, $(T,\vdash)$ і $(T,\perp)$ є комутативними (відповідно ідемпотентними, сепаративними).

1.2. В останніх пунктах цього розділу побудовано нові приклади тріоїдів.

а) Нехай $(T,\dashv,\vdash,\perp)$ – тріоїд. Якщо операції $\vdash$ та $\perp$ тріоїда збігаються, то він перетворюється на дімоноїд (див. п. 1.1). Таким чином, кожний дімоноїд можна розглядати як тріоїд. Приклади дімоноїдів розглядалися в [6 – 8].

b) Нехай $(T, \dashv, \vdash, \perp)$ – тріоїд. Якщо операції $\dashv$, $\vdash$ та $\perp$ тріоїда збігаються, то він перетворюється на напівгрупу. Таким чином, кожну напівгрупу можна розглядати як тріоїд.

c) Нехай S – напівгрупа та f – її ідемпотентний ендоморфізм. Визначимо на S операції $\dashv$, $\vdash$ та $\perp$ за правилами:

$$x \dashv y = x(yf),\ \ x \vdash y = (xf)y,\ \ x \perp y = (xy)f$$

для всіх $x, y \in S$.

Твердження. $(S, \dashv, \vdash, \perp)$ *є тріоїдом.*

Доведення. Згідно з твердженням 1 [11] $(S, \dashv, \vdash)$ є дімоноїдом. Для завершення доведення необхідно показати, що аксіоми $(T4)$ – $(T8)$ тріоїда та асоціативність операції $\perp$ виконуються.

Для всіх $x, y, z \in S$ отримуємо

$$(x \dashv y) \dashv z = x(yf) \dashv z = x(yf)(zf) = x((yz)f),$$

$$x \dashv (y \perp z) = x \dashv ((yz)f) = x((yz)f^2) = x((yz)f),$$

$$(x \perp y) \dashv z = (xy)f \dashv z = (xy)f(zf) = (xyz)f,$$

$$x \perp (y \dashv z) = x \perp (y(zf)) = (x(y(zf)))f =$$

$$= (xf)(yf)(zf^2) = (xy)f(zf) = (xyz)f,$$

$$(x \dashv y) \perp z = x(yf) \perp z = (x(yf)z)f =$$

$$= (xf)(yf^2)(zf) = (xf)(yf)(zf) = (xyz)f,$$

$$x \perp (y \vdash z) = x \perp ((yf)z) = (x((yf)z))f =$$

$$= (xf)(yf^2)(zf) = (xf)(yf)(zf) = (xyz)f,$$

$$(x \vdash y) \perp z = (xf)y \perp z = ((xf)yz)f =$$

$$= (xf^2)(yf)(zf) = (xf)((yz)f) = (xyz)f,$$

$$x \vdash (y \perp z) = x \vdash ((yz)f) = (xf)((yz)f) = (xyz)f,$$

$$(x \perp y) \vdash z = (xy)f \vdash z = (xy)f^2 z = (xy)fz,$$

$$x \vdash (y \vdash z) = x \vdash ((yf)z) = (xf)(yf)z = (xy)fz,$$

$$(x \perp y) \perp z = (xy)f \perp z = ((xy)fz)f =$$

$$= (xy)f^2(zf) = (xy)f(zf) = (xyz)f,$$

$$x \perp (y \perp z) = x \perp ((yz)f) = (x((yz)f))f =$$

$$= (xf)((yz)f^2) = (xf)((yz)f) = (xyz)f.$$

Порівнюючи отримані вирази, дійдемо висновку, що $(S, \dashv, \vdash, \perp)$ є тріоїдом.

Твердження доведено.

Щойно отриманий тріоїд будемо позначати через S^f.

1.3. Напівгрупу S назвемо прямокутною, якщо $xyz = xz$ для всіх $x, y, z \in S$.

Нехай S – прямокутна напівгрупа, P – довільна напівгрупа та $\theta : P \to S$ – гомоморфізм. Визначимо на $S \times P$ операції $\dashv$, $\vdash$ та $\perp$ за правилами:

$$(s,t)\dashv(p,g)=(s,tg),\quad (s,t)\vdash(p,g)=((t\theta)p,tg),$$

$$(s,t)\perp(p,g)=(sp,tg)$$

для всіх $(s,t),(p,g)\in S\times P$.

Твердження. $(S\times P,\dashv,\vdash,\perp)$ *є тріоїдом.*

Доведення. Згідно з твердженням 2 [11] $(S\times P,\dashv,\vdash)$ є дімоноїдом. Для завершення доведення необхідно показати, що аксіоми $(T4)$ – $(T8)$ тріоїда та асоціативність операції $\perp$ виконуються.

Очевидно, операція $\perp$ є асоціативною. Для всіх $(s,t),(p,g),(a,b)\in S\times P$ маємо

$$((s,t)\dashv(p,g))\dashv(a,b)=(s,tg)\dashv(a,b)=(s,tgb),$$

$$(s,t)\dashv((p,g)\perp(a,b))=(s,t)\dashv(pa,gb)=(s,tgb),$$

$$((s,t)\perp(p,g))\dashv(a,b)=(sp,tg)\dashv(a,b)=(sp,tgb),$$

$$(s,t)\perp((p,g)\dashv(a,b))=(s,t)\perp(p,gb)=(sp,tgb),$$

$$((s,t)\dashv(p,g))\perp(a,b)=(s,tg)\perp(a,b)=(sa,tgb),$$

$$(s,t)\perp((p,g)\vdash(a,b))=(s,t)\perp((g\theta)a,gb)=$$

$$=(s(g\theta)a,tgb)=(sa,tgb),$$

$$((s,t)\vdash(p,g))\perp(a,b)=((t\theta)p,tg)\perp(a,b)=$$

$$=((t\theta)pa,tgb),$$

$$(s,t)\vdash((p,g)\perp(a,b))=(s,t)\vdash(pa,gb)=((t\theta)pa,tgb),$$

$$((s,t)\perp(p,g))\vdash(a,b)=(sp,tg)\vdash(a,b)=((tg)\theta a,tgb),$$

$$(s,t)\vdash((p,g)\vdash(a,b))=(s,t)\vdash((g\theta)a,gb)=$$

$$=((t\theta)(g\theta)a,tgb)=((tg)\theta a,tgb).$$

Порівнюючи отримані вирази, дійдемо висновку, що $(S\times P,\dashv,\vdash,\perp)$ є тріоїдом.

Твердження доведено.

1.4. Нехай X^* – множина скінченних непорожніх слів у алфавіті X. Першу (відповідно останню) літеру слова $w\in X^*$ позначатимемо через $w^{(0)}$ (відповідно $w^{(1)}$).

Визначимо на X^* операції $\dashv,\vdash$ та $\perp$ за правилами:

$$w\dashv u=w^{(0)}w^{(1)},\quad w\vdash u=u^{(0)}u^{(1)},\quad w\perp u=w^{(0)}u^{(1)}$$

для всіх $w,u\in X^*$.

Твердження. $(X^*,\dashv,\vdash,\perp)$ *є тріоїдом.*

Доведення. Згідно з твердженням 3 [11] $(X^*,\dashv,\vdash)$ є дімоноїдом. Для завершення доведення необхідно показати, що аксіоми $(T4)$ – $(T8)$ тріоїда та асоціативність операції $\perp$ виконуються.

Для всіх $w,u,\omega\in X^*$ отримуємо

$$(w\dashv u)\dashv\omega=w^{(0)}w^{(1)}\dashv\omega=$$

$$=w^{(0)}w^{(1)}=w\dashv(u\perp\omega),$$

$$(w \perp u) \dashv \omega = w^{(0)}u^{(1)} \dashv \omega = w^{(0)}u^{(1)} =$$

$$= w \perp u^{(0)}u^{(1)} = w \perp (u \dashv \omega),$$

$$(w \dashv u) \perp \omega = w^{(0)}w^{(1)} \perp \omega = w^{(0)}\omega^{(1)} =$$

$$= w \perp \omega^{(0)}\omega^{(1)} = w \perp (u \vdash \omega),$$

$$(w \vdash u) \perp \omega = u^{(0)}u^{(1)} \perp \omega = u^{(0)}\omega^{(1)} =$$

$$= w \vdash u^{(0)}\omega^{(1)} = w \vdash (u \perp \omega),$$

$$(w \perp u) \vdash \omega = w^{(0)}u^{(1)} \vdash \omega = \omega^{(0)}\omega^{(1)} =$$

$$= w \vdash \omega^{(0)}\omega^{(1)} = w \vdash (u \vdash \omega).$$

Очевидно, операція $\perp$ є асоціативною.

Твердження доведено.

1.5. Нехай $(T, \perp)$ – довільна напівгрупа. Визначимо на T операції $\dashv$ та $\vdash$ за правилами:

$$x \dashv y = x, \quad x \vdash y = y$$

для всіх $x, y \in T$.

Твердження. $(T, \dashv, \vdash, \perp)$ *є тріоїдом.*

Доведення. Очевидно, операції $\dashv, \vdash$ та $\perp$ є асоціативними. Для всіх $x, y, z \in T$ отримуємо

$$(x \dashv y) \dashv z = x \dashv z = x =$$

$$= x \dashv (y \vdash z) = x \dashv (y \perp z),$$

$$(x \vdash y) \dashv z = y \dashv z = y =$$

$$= x \vdash y = x \vdash (y \dashv z),$$

$$(x \dashv y) \vdash z = z = x \vdash z =$$

$$= x \vdash (y \vdash z) = (x \perp y) \vdash z,$$

$$(x \perp y) \dashv z = x \perp y = x \perp (y \dashv z),$$

$$(x \dashv y) \perp z = x \perp z = x \perp (y \vdash z),$$

$$(x \vdash y) \perp z = y \perp z = x \vdash (y \perp z).$$

Це означає, що $(T, \dashv, \vdash, \perp)$ – тріоїд.

Твердження доведено.

Тріоїд $(T, \dashv, \vdash, \perp)$ будемо позначати через $T_{lr}^{\perp}$. Зрозуміло, що $T_{lr}^{\perp}$ є тріоїдом з ідемпотентними операціями $\dashv, \vdash$. Якщо операція $\perp$ є ідемпотентною, то $T_{lr}^{\perp}$ є ідемпотентним тріоїдом (див. п. 1.1).

1.6. Через N будемо позначати множину додатних цілих чисел. Нехай $2N$ – множина парних додатних цілих чисел та $2N$-1 – множина непарних додатних цілих чисел. Зафіксуємо $t, t_1, t_2, t_3 \in 2N$-1 та визначимо на N операції $\dashv, \vdash$ і $\perp$ за правилами:

$$x \dashv y = \begin{cases} x + y + t_1, \ x, y \in 2N, \\ t \quad \textit{в інших випадках}, \end{cases}$$

$$x \vdash y = \begin{cases} x+y+t_2, \; x, y \in 2N, \\ t \quad \textit{в інших випадках}, \end{cases}$$

$$x \perp y = \begin{cases} x+y+t_3, \; x, y \in 2N, \\ t \quad \textit{в інших випадках} \end{cases}$$

для всіх $x, y \in N$.

Твердження. $(N, \dashv, \vdash, \perp)$ *є комутативним тріоїдом.*

Доведення. Безпосередньо перевіряється, що $(N, \dashv, \vdash, \perp)$ – тріоїд. Зрозуміло, що операції $\dashv, \vdash$ та $\perp$ є комутативними.

Твердження доведено.

1.7. Нехай X – довільна множина така, що $0, a, b, c, d, e, f \in X$ та $a \neq b$, $b \neq c$, $c \neq d$, $d \neq a$, $f \neq a, b \neq e$, $d \neq e$, $f \neq c, e \neq f$. Визначимо на X операції $\dashv$, $\vdash$ та $\perp$ за правилами:

$$x \dashv y = \begin{cases} b, \; x = y = a, \\ 0 \quad \textit{в інших випадках}, \end{cases}$$

$$x \vdash y = \begin{cases} d, \; x = y = c, \\ 0 \quad \textit{в інших випадках}, \end{cases}$$

$$x \perp y = \begin{cases} f, \; x = y = e, \\ 0 \quad \textit{в інших випадках} \end{cases}$$

для всіх $x, y \in X$.

Твердження. $(X, \dashv, \vdash, \perp)$ *є комутативним тріоїдом.*

Доведення. Безпосередньо перевіряється, що $(X, \dashv, \vdash, \perp)$ – тріоїд. Зрозуміло, що операції $\dashv, \vdash$ та $\perp$ є комутативними.

Твердження доведено.

ЛЕКЦІЯ 2.

Комбінаторні властивості операцій тріоїдів

У цьому розділі (див. також [12]) вивчаються комбінаторні властивості операцій тріоїда. Описано дімоноїди, всі відношення еквівалентності на яких є конгруенціями. Наведено приклади тріоїдів з нулем.

2.1. У наш час існує небагато прикладів тріоїдів (див. [1, 9, 10, 12, 13]). Тому природньою є задача побудови нових тріоїдів та теоретико-тріоїдних конструкцій.

Наведемо приклад тріоїда з нулем.

Елемент 0 тріоїда $(T, \dashv, \vdash, \perp)$ назвемо нулем, якщо

$$x * 0 = 0 = 0 * x$$

для всіх $x \in T$ та $* \in \{\dashv, \vdash, \perp\}$.

Як і раніше, через N позначатимемо множину всіх натуральних чисел.

Нехай P^* – вільна напівгрупа на двохелементній множині $X = \{x, \overline{x}\}$, $n \in N$, $P_n \subset P^*$ – множина, яка містить слова довжини не більше ніж n, у запис яких елемент $\overline{x}$ входить принаймні один раз. Нехай далі w – довільне слово з P_n. Через $\tilde{w}$ позначимо слово, отримане з w заміною всіх літер $\overline{x}$ на x. Довжину слова w позначатимемо через l_w.

На множині $P_n \bigcup \{0\}$ визначимо операції $\dashv, \vdash$ та $\perp$ за правилами:

$$w \dashv u = \begin{cases} w\tilde{u}, & l_{wu} \le n, \\ 0, & l_{wu} > n, \end{cases}$$

$$w \vdash u = \begin{cases} \tilde{w}u, & l_{wu} \le n, \\ 0, & l_{wu} > n, \end{cases}$$

$$w \perp u = \begin{cases} wu, & l_{wu} \le n, \\ 0, & l_{wu} > n, \end{cases}$$

$$w * 0 = 0 * w = 0 * 0 = 0$$

для всіх $w, u \in P_n$ та $* \in \{\dashv, \vdash, \perp\}$. Алгебру $(P_n \bigcup \{0\}, \dashv, \vdash, \perp)$ позначимо через P_n^0.

Твердження. P_n^0 *є тріоїдом з нулем.*

Доведення. Безпосередньо перевіряється, що P_n^0 є тріоїдом з нулем 0.

Твердження доведено.

2.2. Введемо одну теоретико-тріоїдну конструкцію, яка поширює конструкцію ортогональної суми напівгруп [14].

Тріоїд $(T, \dashv, \vdash, \perp)$ з нулем 0 назвемо ортогональною сумою тріоїдів T_i, $i \in Y$, якщо $T_i \ne \{0\}$ для будь-якого $i \in Y$, $T = \bigcup_{i \in Y} T_i$ та $T_i \bigcap T_j = T_i * T_j = \{0\}$ для всіх $i, j \in Y, i \ne j$,

$* \in \{\dashv, \vdash, \perp\}$. Ортогональну суму тріоїдів T_i, $i \in Y$, позначимо через $O[T_i]_{i \in Y}$.

Нагадаємо, що підмножина A тріоїда $(T, \dashv, \vdash, \perp)$ називається підтріоїдом, якщо для будь-яких $a, b \in T$ з $a, b \in A$ випливає $a \dashv b, a \vdash b, a \perp b \in A$.

Опишемо всі підтріоїди ортогональної суми довільних тріоїдів.

Нехай $O[S_i]_{i \in I}$ – ортогональна сума довільних тріоїдів $S_i, i \in I$, T_i – довільний підтріоїд тріоїда $S_i, i \in I$. Для кожного $I' \subseteq I, |I'| > 1$ покладемо

$$T_{I'} = \bigcup_{i \in I'} T_i \,,\; T_{I'}^0 = T_{I'} \cup \{0\}\,.$$

Легко доводиться таке твердження.

Лема. *Повний список підтріоїдів ортогональної суми довільних тріоїдів $S_i, i \in I$, такий:*

1) *підтріоїди всіх тріоїдів $S_i, i \in I$;*

2) *підтріоїди $T_{I'}^0, I' \subseteq I, |I'| > 1$.*

2.3. У цьому пункті вивчаються комбінаторні властивості операцій тріоїда.

Через $\mathfrak{I}(X)$ позначатимемо множину всіх перетворень множини $X = \{1, 2, 3\}$. Для зручності кожний елемент $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ x & y & z \end{pmatrix} \in \Im(X)$ будемо позначати через (xyz), а тотожне перетворення множини X – через ε.

Для кожного $\sigma = (xyz) \in \Im(X)$ покладемо $T_\sigma = \left(T, *_x, *_y, *_z\right)$ – упорядкована четвірка, де T – непорожня множина, а $*_x, *_y, *_z$ – бінарні операції на T. Нехай

$$\Lambda = \{(111),(222),(333),(121),(122)\} \subset \Im(X).$$

Наступна теорема описує комбінаторні властивості операцій тріоїда.

Теорема. *Для будь-якого тріоїда* T_ε *алгебра* $T_\sigma, \sigma \in \Im(X), \sigma \neq \varepsilon$, *є тріоїдом, якщо* $\sigma \in \Lambda$. *Існує деякий тріоїд* T_ε, *для якого алгебра* $T_\sigma, \sigma \in \Im(X) \setminus \{\Lambda \bigcup \{\varepsilon\}\}$, *не є тріоїдом.*

Доведення. Нехай T_ε – тріоїд. Очевидно, що алгебри $T_{(111)}$, $T_{(222)}$, $T_{(333)}$ є тріоїдами. Покажемо, що T_σ є тріоїдом, коли σ дорівнює (121) або (122).

Нехай $\sigma = (121)$. Для всіх $w, u, v \in T_\sigma$ маємо

$$\left(w *_1 u\right) *_1 v = w *_1 \left(u *_2 v\right), \tag{2.1}$$

$$\left(w *_2 u\right) *_1 v = w *_2 \left(u *_1 v\right), \tag{2.2}$$

$$\left(w *_1 u\right) *_2 v = w *_2 \left(u *_2 v\right), \tag{2.3}$$

$$\left(w *_1 u\right) *_1 v = w *_1 \left(u *_1 v\right). \tag{2.4}$$

З $(2.1)-(2.4)$ випливає, що аксіоми $(T1)-(T8)$ тріоїда виконуються, тобто $T_{(121)}$ – тріоїд.

Нехай $\sigma = (122)$. Для всіх $w, u, v \in T_\sigma$ виконуються рівності (2.1) – (2.3) та

$$\left(w *_2 u\right) *_2 v = w *_2 \left(u *_2 v\right). \tag{2.5}$$

З $(2.1)-(2.3)$, (2.5) випливає, що аксіоми $(T1)-(T8)$ тріоїда виконуються та $T_{(122)}$ – тріоїд.

Доведемо другу частину теореми.

Нехай $F\left[A\right]$ – вільна напівгрупа на множині A та $F\left[A\right]_{lr}^{\perp}$ – тріоїд (див. твердження п. 1.5), у якого $\perp$ позначає операцію конкатенації на напівгрупі $F\left[A\right]$. Покладемо $T_\varepsilon = F\left[A\right]_{lr}^{\perp}$ та покажемо, що при будь-якому $\sigma \in \Im(X) \setminus \{\Lambda \bigcup \{\varepsilon\}\}$ алгебра T_σ не є тріоїдом.

Для довільних $w, u, v \in T_\sigma$ розглянемо наступні випадки.

Нехай $\sigma = (112)$ та $v \neq u$. Для T_σ перевіримо у цьому випадку аксіому $(T6)$:

$$\left(w *_1 u\right) *_2 v = w *_2 v = v \neq u = w *_2 u = w *_2 (u *_1 v).$$

Оскільки аксіома $(T6)$ не виконується, то T_σ не є тріоїдом.

Нехай $\sigma = (113)$. Перевіримо для T_σ аксіому $(T8)$:

$$\left(w *_3 u\right) *_1 v = wu *_1 v = wu \neq w = w *_1 (u *_1 v).$$

Отже, T_σ не є тріоїдом.

Візьмемо $\sigma = (223)$. Оскільки

$$\left(w *_3 u\right) *_2 v = wu *_2 v = v \neq wv = w *_3 (u *_2 v),$$

то в T_σ аксіома $(T5)$ не виконується.

Нехай $\sigma = (132)$. Перевіримо у цьому випадку аксіому $(T8)$:

$$\left(w *_2 u\right) *_3 v = u *_3 v = uv \neq wuv = w *_3 (u *_3 v).$$

Таким чином, T_σ не є тріоїдом.

Нехай $\sigma = (133)$. Для T_σ перевіримо аксіому $(T6)$:

$$\left(w *_1 u\right) *_3 v = w *_3 v = wv \neq wuv = w *_3 (u *_3 v).$$

Звідси випливає, що T_σ – не тріоїд.

Нехай $\sigma \in \{(211), (212), (213)\}$ та $v \neq u$. У цьому випадку в T_σ аксіома $(T1)$ не виконується, тому що

$$\left(w *_2 u\right) *_2 v = u *_2 v = v \neq u = w *_2 (u *_1 v).$$

Припустимо, що $\sigma \in \{(221),(231)\}$ та $v \neq u$. Для T_σ перевіримо аксіому $(T4)$:

$$\left(w *_2 u\right) *_2 v = u *_2 v = v \neq u = w *_2 (u *_1 v).$$

Алгебра T_σ не є тріоїдом, оскільки аксіома $(T4)$ не виконується.

Якщо $\sigma \in \{(311),(312),(313)\}$, то операції алгебри T_σ не задовольняють аксіому $(T2)$, оскільки

$$\left(w *_1 u\right) *_3 v = w *_3 v = wv \neq w = w *_1 (u *_3 v).$$

Далі безпосередньо перевіряється, що в алгебрах $T_{(232)}$, $T_{(321)}$, $T_{(331)}$, $T_{(332)}$ не виконується аксіома $(T6)$, в алгебрах $T_{(233)}$, $T_{(322)}$ – аксіома $(T4)$, в алгебрі $T_{(131)}$ – аксіома $(T8)$ та в алгебрі $T_{(323)}$ – аксіома $(T1)$, тобто щойно розглянуті алгебри не є тріоїдами.

Теорему доведено.

2.4. При доведенні теореми п. 2.3 ми використовували тріоїд $F[A]_{lr}^{\perp}$. Природньо охарактеризувати властивості тріоїда $T_{lr}^{\perp}$.

Безпосередньо доводяться наступні три леми.

Лема. *Перетворення τ тріоїда $T_{lr}^{\perp}$ є його ендоморфізмом (автоморфізмом) тоді й лише тоді, коли τ є ендоморфізмом (автоморфізмом) напівгрупи $\left(T,\perp\right)$.*

2.5. З останньої леми отримуємо наслідок.

Наслідок. $EndT_{lr}^{\perp} = End(T,\perp)$, $AutT_{lr}^{\perp} = Aut(T,\perp)$.

2.6. Лема. *Бінарне відношення ρ на тріоїді $T_{lr}^{\perp}$ є його конгруенцією тоді й лише тоді, коли ρ є конгруенцією на напівгрупі $(T,\perp)$.*

2.7. Лема. $T_{lr}^{\perp_1} \cong K_{lr}^{\perp_2} \Leftrightarrow (T,\perp_1) \cong (K,\perp_2)$.

2.8. Далі ми розглянемо дімоноїди, всі відношення еквівалентності на яких є конгруенціями.

Нагадаємо, що непорожня множина T з двома бінарними асоціативними операціями $\dashv$ та $\vdash$, які задовольняють аксіоми $(T1)-(T3)$, називається дімоноїдом. Тоді визначення тріоїда можна сформулювати, використовуючи поняття дімоноїда, а саме: дімоноїд $(T,\dashv,\vdash)$ з бінарною асоціативною операцією $\perp$, яка задовольняє аксіоми $(T4)-(T8)$, називається тріоїдом.

Нам необхідні наступні теорема та дві леми.

Теорема *([15], теорема 5.10). Нехай S – напівгрупа та $|S|>1$. Усі відношення еквівалентності на S є її конгруенціями в тому й лише в тому випадку, якщо виконується одна з наступних умов:*

1) S *– група з двох елементів;*

2) S *– напівгрупа з нульовим множенням;*

3) S *– напівгрупа правих нулів;*

4) S *– напівгрупа лівих нулів;*

5) S *– напіврешітка з двох елементів.*

Лема *([7], лема 3 (i)). Операції дімоноїда* $(D,\dashv,\vdash)$ *збігаються, якщо* $(D,\dashv)$ *– напіврешітка.*

Аналогічно можна показати, що операції дімоноїда $(D,\dashv,\vdash)$ збігаються, якщо $(D,\vdash)$ – напіврешітка.

2.9. Лема *([16], лема 1). Операції дімоноїда* $(D,\dashv,\vdash)$ *збігаються, якщо* $(D,\dashv)$ $((D,\vdash))$ *– моноїд.*

2.10. Теорема п. 2.3 встановлює зв'язки тріоїдів з дімоноїдами, показуючи, що будь-який дімоноїд можна вважати тріоїдом. Наступна теорема описує дімоноїди, всі відношення еквівалентності на яких є конгруенціями.

Теорема. *Нехай* $(D,\dashv,\vdash)$ *– дімоноїд та* $\dashv\neq\vdash$. *Усі відношення еквівалентності на* $(D,\dashv,\vdash)$ *є його конгруенціями в тому й лише в тому випадку, якщо виконується одна з наступних умов:*

1) $(D,\dashv)$ *– напівгрупа лівих нулів,* $(D,\vdash)$ *– напівгрупа правих нулів;*

2) $(D,\dashv)$ *– напівгрупа лівих нулів,* $(D,\vdash)$ *– напівгрупа з нульовим множенням;*

3) $(D,\dashv)$ *– напівгрупа з нульовим множенням,* $(D,\vdash)$ *– напівгрупа правих нулів.*

Доведення. Відмітимо, що згідно з [17] алгебра $(D,\dashv,\vdash)$, яка задовольняє умову 1) або 2), є $(lz;rs)$-дімоноїдом, а умову 3) – $(rs;rz)$-дімоноїдом.

Нехай $(D,*_1)$ – напівгрупа лівих нулів, $(D,*_2)$ – напівгрупа правих нулів, $(D,*_3)$ – напівгрупа з нульовим множенням. Неважко перевірити, що алгебри $(D,*_2,*_1)$, $(D,*_3,*_1)$, $(D,*_2,*_3)$ не є дімоноїдами. Використовуючи цей факт, теорему п. 2.8, лему п. 2.8, двоїсте твердження до леми п. 2.8 та лему п. 2.9, отримуємо, що якщо всі відношення еквівалентності на $\left(D,\dashv,\vdash\right)$ є його конгруенціями, то $\left(D,\dashv,\vdash\right)$ збігається або з $(D,*_1,*_2)$, або з $(D,*_1,*_3)$, або з $(D,*_3,*_2)$.

Навпаки, з теореми п. 2.8 отримуємо, що всі відношення еквівалентності на дімоноїдах, що задовольняють одну з умов 1) – 3), є конгруенціями.

Теорему доведено.

ЛЕКЦІЯ 3.

Вільні тріоїди

У цьому розділі (див. також [13]) побудовано тріоїд, ізоморфний вільному тріоїду рангу 1, описаному Ж.-Л. Лоде і М. О. Ронко в [1].

3.1. У цьому пункті розглянуто вільний тріоїд, описаний Ж.-Л. Лоде і М. О. Ронко в [1].

Нехай P^* – вільна напівгрупа на двохелементній множині $\{x, \bar{x}\}$, $P \subset P^*$ – піднапівгрупа, яка містить слова, до запису яких елемент $\bar{x}$ входить принаймні один раз. Неважко помітити, що P^* є сполукою напівгруп P та $P^* \setminus P$ [18] (див. також п. 4.1).

Нехай далі w – довільне слово з P. Через $\vec{w}$ позначимо слово, отримане з w заміною всіх літер $\bar{x}$ на x. Наприклад, якщо $w = x\bar{x}\bar{x}x\bar{x}$, то $\vec{w} = xxxxx$. Зрозуміло, що $\vec{w} \in P^* \setminus P$.

На множині P визначимо операції $\dashv$, $\vdash$ і $\perp$ за правилами:

$$w \dashv u = w\vec{u}, \quad w \vdash u = \vec{w}u, \quad w \perp u = wu$$

для всіх $w, u \in P$. З твердження 1.9 роботи [1] випливає, що $(P, \dashv, \vdash, \perp)$ – вільний тріоїд рангу 1. Позначимо його через $Frt(X)$.

У [1] показано, що вільна триалгебра над векторним простором цілком визначається вільною триалгеброю з одним породжуючим елементом, а опис останньої зводиться до опису вільного тріоїда рангу 1.

3.2. У цьому пункті побудовано тріоїд, ізоморфний вільному тріоїду рангу 1.

Нехай $A = \{0,1\}$ та $A_i = A$ для всіх $i \in N$. На множині

$$\Phi = \{(n;(t_1,...,t_i,...)) \in N \times \prod_{i \in N} A_i \mid \sum_{i=1}^{n} t_i > 0, \sum_{i=n+1}^{\infty} t_i = 0\}$$

визначимо операції $\dashv'$, $\vdash'$ і $\perp'$ за правилами:

$$(n;(t_1,...,t_i,...)) \dashv' (m;(p_1,...,p_i,...)) =$$

$$= (n+m;(t_1,...,t_n,0,...,0,...)),$$

$$(n;(t_1,...,t_i,...)) \vdash' (m;(p_1,...,p_i,...)) =$$
$$= (n+m;(\underbrace{0,...,0}_{n\ раз}, p_1,...,p_m,0,...,0,...)),$$

$$(n;(t_1,...,t_i,...)) \perp' (m;(p_1,...,p_i,...)) =$$
$$= (n+m;(t_1,...,t_n, p_1,...,p_m,0,...,0,...))$$

для всіх $(n;(t_1,...,t_i,...)),(m;(p_1,...,p_i,...)) \in \Phi.$

Має місце лема.

Лема. $(\Phi, \dashv', \vdash', \perp')$ *є тріоїдом.*

Доведення. Для всіх $(n;(t_1,...,t_i,...))$, $(m;(p_1,...,p_i,...))$, $(l;(s_1,...,s_i,...))\in\Phi$ отримуємо

$$((n;(t_1,...,t_i,...))\dashv^{'}(m;(p_1,...,p_i,...)))\dashv^{'}(l;(s_1,...,s_i,...))=$$

$$=(n+m;(t_1,...,t_n,0,...,0,...))\dashv^{'}(l;(s_1,...,s_i,...))=$$

$$=(n+m+l;(t_1,...,t_n,0,...,0,...)),$$

$$(n;(t_1,...,t_i,...))\dashv^{'}((m;(p_1,...,p_i,...))\dashv^{'}$$

$$\dashv^{'}(l;(s_1,...,s_i,...)))=(n;(t_1,...,t_i,...))\dashv^{'}$$

$$\dashv^{'}(m+l;(p_1,...,p_m,0,...,0,...))=$$

$$=(n+m+l;(t_1,...,t_n,0,...,0,...)),$$

$$(n;(t_1,...,t_i,...))\dashv^{'}((m;(p_1,...,p_i,...))\vdash^{'}$$

$$\vdash^{'}(l;(s_1,...,s_i,...)))=(n;(t_1,...,t_i,...))\dashv^{'}$$

$$\dashv^{'}(m+l;(\underbrace{0,...,0}_{m\ раз},s_1,...,s_l,0,...,0,...))=$$

$$=(n+m+l;(t_1,...,t_n,0,...,0,...)),$$

$$(n;(t_1,...,t_i,...))\dashv^{'}((m;(p_1,...,p_i,...))\perp^{'}$$

$$\perp^{'}(l;(s_1,...,s_i,...)))=(n;(t_1,...,t_i,...))\dashv^{'}$$

$$\dashv^{'}(m+l;(p_1,...,p_m,s_1,...,s_l,0,...,0,...))=$$

$$=(n+m+l;(t_1,...,t_n,0,...,0,...)),$$

$$((n;(t_1,...,t_i,...))\vdash'(m;(p_1,...,p_i,...)))\dashv'(l;(s_1,...,s_i,...))=$$

$$=(n+m;(\underbrace{0,...,0}_{n\ раз},p_1,...,p_m,0,...,0,...))\dashv'(l;(s_1,...,s_i,...))=$$

$$=(n+m+l;(\underbrace{0,...,0}_{n\ раз},p_1,...,p_m,0,...,0,...)),$$

$$(n;(t_1,...,t_i,...))\vdash'((m;(p_1,...,p_i,...))\dashv'$$

$$\dashv'(l;(s_1,...,s_i,...)))=(n;(t_1,...,t_i,...))\vdash'$$

$$\vdash'(m+l;(p_1,...,p_m,0,...,0,...))=$$

$$=(n+m+l;(\underbrace{0,...,0}_{n\ раз},p_1,...,p_m,0,...,0,...)),$$

$$((n;(t_1,...,t_i,...))\dashv'(m;(p_1,...,p_i,...)))\vdash'(l;(s_1,...,s_i,...))=$$

$$=(n+m;(t_1,...,t_n,0,...,0,...))\vdash'$$

$$\vdash'(l;(s_1,...,s_i,...))=(n+m+l;(\underbrace{0,...,0}_{n+m\ раз},s_1,...,s_l,0,...,0,...)),$$

$$(n;(t_1,...,t_i,...))\vdash'((m;(p_1,...,p_i,...))\vdash'$$

$$\vdash'(l;(s_1,...,s_i,...)))=(n;(t_1,...,t_i,...))\vdash'$$

$$\vdash'(m+l;(\underbrace{0,...,0}_{m\ раз},s_1,...,s_l,0,...,0,...))=$$

$$=(n+m+l;(\underbrace{0,\dots,0}_{n+m\ \text{раз}},s_1,\dots,s_l,0,\dots,0,\dots)),$$

$$((n;(t_1,\dots,t_i,\dots))\vdash'(m;(p_1,\dots,p_i,\dots)))\vdash'(l;(s_1,\dots,s_i,\dots))=$$

$$=(n+m;(\underbrace{0,\dots,0}_{n\ \text{раз}},p_1,\dots,p_m,0,\dots,0,\dots))\vdash'(l;(s_1,\dots,s_i,\dots))=$$

$$=(n+m+l;(\underbrace{0,\dots,0}_{n+m\ \text{раз}},s_1,\dots,s_l,0,\dots,0,\dots)),$$

$$((n;(t_1,\dots,t_i,\dots))\perp'(m;(p_1,\dots,p_i,\dots)))\dashv'(l;(s_1,\dots,s_i,\dots))=$$

$$=(n+m;(t_1,\dots,t_n,p_1,\dots,p_m,0,\dots,0,\dots))\dashv'(l;(s_1,\dots,s_i,\dots))=$$

$$=(n+m+l;(t_1,\dots,t_n,p_1,\dots,p_m,0,\dots,0,\dots)),$$

$$(n;(t_1,\dots,t_i,\dots))\perp'((m;(p_1,\dots,p_i,\dots))\dashv'$$

$$\dashv'(l;(s_1,\dots,s_i,\dots)))=(n;(t_1,\dots,t_i,\dots))\perp'$$

$$\perp'(m+l;(p_1,\dots,p_m,0,\dots,0,\dots))=$$

$$=(n+m+l;(t_1,\dots,t_n,p_1,\dots,p_m,0,\dots,0,\dots)),$$

$$((n;(t_1,\dots,t_i,\dots))\dashv'(m;(p_1,\dots,p_i,\dots)))\perp'(l;(s_1,\dots,s_i,\dots))=$$

$$=(n+m;(t_1,\dots,t_n,0,\dots,0,\dots))\perp'(l;(s_1,\dots,s_i,\dots))=$$

$$=(n+m+l;(t_1,\dots,t_n,\underbrace{0,\dots,0}_{m\ \text{раз}},s_1,\dots,s_l,0,\dots,0,\dots)),$$

$$(n;(t_1,\dots,t_i,\dots))\perp'((m;(p_1,\dots,p_i,\dots))\vdash'$$

$$\vdash' (l;(s_1,...,s_i,...))) = (n;(t_1,...,t_i,...)) \perp'$$

$$\perp' (m+l;(\underbrace{0,...,0}_{m\ раз}, s_1,...,s_l,0,...,0,...)) =$$

$$= (n+m+l;(t_1,...,t_n,\underbrace{0,...,0}_{m\ раз}, s_1,...,s_l,0,...,0,...)),$$

$$((n;(t_1,...,t_i,...)) \vdash' (m;(p_1,...,p_i,...))) \perp' (l;(s_1,...,s_i,...)) =$$

$$= (n+m;(\underbrace{0,...,0}_{n\ раз}, p_1,...,p_m,0,...,0,...)) \perp' (l;(s_1,...,s_i,...)) =$$

$$= (n+m+l;(\underbrace{0,...,0}_{n\ раз}, p_1,...,p_m,s_1,...,s_l,0,...,0,...)),$$

$$(n;(t_1,...,t_i,...)) \vdash' ((m;(p_1,...,p_i,...)) \perp'$$

$$\perp' (l;(s_1,...,s_i,...))) = (n;(t_1,...,t_i,...)) \vdash'$$

$$\vdash' (m+l;(p_1,...,p_m,s_1,...,s_l,0,...,0,...)) =$$

$$= (n+m+l;(\underbrace{0,...,0}_{n\ раз}, p_1,...,p_m,s_1,...,s_l,0,...,0,...)),$$

$$((n;(t_1,...,t_i,...)) \perp' (m;(p_1,...,p_i,...))) \vdash' (l;(s_1,...,s_i,...)) =$$

$$= (n+m;(t_1,...,t_n,p_1,...,p_m,0,...,0,...)) \vdash' (l;(s_1,...,s_i,...)) =$$

$$= (n+m+l;(\underbrace{0,...,0}_{n+m\ раз}, s_1,...,s_l,0,...,0,...)),$$

$$((n;(t_1,...,t_i,...)) \perp' (m;(p_1,...,p_i,...))) \perp' (l;(s_1,...,s_i,...)) =$$

$$= (n+m;(t_1,...,t_n,p_1,...,p_m,0,...,0,...)) \perp' (l;(s_1,...,s_i,...)) =$$

$$= (n+m+l;(t_1,...,t_n, p_1,..., p_m, s_1,..., s_l, 0,...,0,...)),$$

$$(n;(t_1,...,t_i,...)) \perp' ((m;(p_1,..., p_i,...)) \perp'$$

$$\perp' (l;(s_1,..., s_i,...))) = (n;(t_1,...,t_i,...)) \perp'$$

$$\perp' (m+l;(p_1,..., p_m, s_1,..., s_l, 0,...,0,...)) =$$

$$= (n+m+l;(t_1,...,t_n, p_1,..., p_m, s_1,..., s_l, 0,...,0,...)).$$

Порівнюючи отримані вирази, дійдемо висновку, що аксіоми $(T1)$ – $(T8)$ тріоїда та асоціативність операцій $\dashv'$, $\vdash'$ та $\perp'$ виконуються. Отже, $(\Phi, \dashv', \vdash', \perp')$ – тріоїд.

Лему доведено.

3.3. В умовах та позначеннях пунктів 3.1 та 3.2 має місце теорема.

Теорема. *Вільний тріоїд* $Frt(X)$ *рангу 1 є ізоморфним тріоїду* $(\Phi, \dashv', \vdash', \perp')$.

Доведення. Нехай $a_1...a_i...a_n, b_1...b_j...b_m \in Frt(X)$, $a_i, b_j \in \{x, \overline{x}\}$, $1 \le i \le n, 1 \le j \le m$. Визначимо відображення

$$\mu : Frt(X) \to (\Phi, \dashv', \vdash', \perp') : \ a_1...a_i...a_n \mapsto a_1...a_i...a_n\mu,$$

поклавши

$$a_1...a_i...a_n\mu = (n;(t_1,...,t_i,...)), \text{ де}$$

$$t_i = \begin{cases} 1, & \textit{якщо} \quad a_i = \overline{x} \quad \textit{та} \quad 1 \le i \le n, \\ 0 & \textit{в інших випадках.} \end{cases}$$

Неважко помітити, що μ є бієктивним відображенням. Покажемо, що μ – гомоморфізм.

Нехай

$$a_1 ... a_i ... a_n \mu = (n; (t_1, ..., t_n, 0, ..., 0, ...)),$$
$$b_1 ... b_j ... b_m \mu = (m; (p_1, ..., p_m, 0, ..., 0, ...)).$$

Тоді

$$(a_1 ... a_i ... a_n \dashv b_1 ... b_j ... b_m)\mu = (a_1 ... a_i ... a_n \overrightarrow{b_1 ... b_j ... b_m})\mu =$$
$$= (n+m; (t_1, ..., t_n, 0, ..., 0, ...)),$$

$$(a_1 ... a_i ... a_n \vdash b_1 ... b_j ... b_m)\mu = (\overrightarrow{a_1 ... a_i ... a_n} b_1 ... b_j ... b_m)\mu =$$
$$= (n+m; (\underbrace{0, ..., 0}_{n\ раз}, p_1, ..., p_m, 0, ..., 0, ...)),$$

$$(a_1 ... a_i ... a_n \perp b_1 ... b_j ... b_m)\mu = (a_1 ... a_i ... a_n b_1 ... b_j ... b_m)\mu =$$
$$= (n+m; (t_1, ..., t_n, p_1, ..., p_m, 0, ..., 0, ...)).$$

З іншого боку,

$$(n; (t_1, ..., t_n, 0, ..., 0, ...)) \dashv' (m; (p_1, ..., p_m, 0, ..., 0, ...)) =$$
$$= (n+m; (t_1, ..., t_n, 0, ..., 0, ...)),$$

$$(n; (t_1, ..., t_n, 0, ..., 0, ...)) \vdash' (m; (p_1, ..., p_m, 0, ..., 0, ...)) =$$
$$= (n+m; (\underbrace{0, ..., 0}_{n\ раз}, p_1, ..., p_m, 0, ..., 0, ...)),$$

$$(n;(t_1,...,t_n,0,...,0,...)) \perp' (m;(p_1,...,p_m,0,...,0,...)) =$$

$$= (n+m;(t_1,...,t_n,p_1,...,p_m,0,...,0,...)).$$

Порівнюючи отримані вирази, дійдемо висновку, що μ – гомоморфізм. Таким чином, μ – ізоморфізм.

Теорему доведено.

ЛЕКЦІЯ 4.

Трисполуки підтріоїдів

У цьому розділі введено поняття трисполуки підтріоїдів. Це поняття узагальнює поняття діспoлуки піддімоноїдів [7] і поняття сполуки напівгруп [18] та є ефективним при описі структурних властивостей тріоїдів. За допомогою цього поняття доведено, що кожний тріоїд з комутативною періодичною напівгрупою є напівструктурою уніпотентних підтріоїдів (див. також [9]). Цей результат узагальнює відому теорему Ш. Шварца [19] про декомпозицію комутативної періодичної напівгрупи в напівструктуру уніпотентних напівгруп та теорему [7] про декомпозицію дімоноїда з комутативною періодичною напівгрупою в напівструктуру уніпотентних піддімоноїдів. Наведено також приклади тріоїдів, які розкладаються в трисполуки підтріоїдів.

4.1. Ідемпотентний тріоїд (див. п. 1.1) називатимемо також трисполукою.

Визначимо поняття трисполуки підтріоїдів.

Якщо $\varphi : S \to M$ – гомоморфізм тріоїдів, то через Δ_{φ} будемо позначати відповідну конгруенцію на тріоїді S.

Нехай S – довільний тріоїд, J – деякий ідемпотентний тріоїд та $\alpha : S \to J : x \mapsto x\alpha$ – гомоморфізм. Тоді кожний клас конгруенції Δ_{α} є підтріоїдом тріоїда S, а сам тріоїд S є об'єднанням таких тріоїдів $S_{\xi}, \xi \in J$, що

$$x\alpha = \xi \Leftrightarrow x \in S_\xi = \Delta_\alpha^x = \{t \in S \,|\, (x,t) \in \Delta_\alpha\},$$

$$S_\xi \dashv S_\varepsilon \subseteq S_{\xi \dashv \varepsilon}, \quad S_\xi \vdash S_\varepsilon \subseteq S_{\xi \vdash \varepsilon}, \quad S_\xi \perp S_\varepsilon \subseteq S_{\xi \perp \varepsilon},$$

$$\xi \neq \varepsilon \Rightarrow S_\xi \bigcap S_\varepsilon = \varnothing.$$

Говоритимемо в цьому випадку, що S розкладається в трисполуку підтріоїдів (або S є трисполукою J підтріоїдів $S_\xi, \xi \in J$). Якщо J є напівгрупою ідемпотентів (сполукою), то S є сполукою J підтріоїдів S_ξ, $\xi \in J$. Якщо ж J є комутативною напівгрупою ідемпотентів, то S є напівструктурою J підтріоїдів S_ξ, $\xi \in J$.

Нехай S – трисполука J підтріоїдів S_ξ, $\xi \in J$. Якщо операції $\vdash$ та $\perp$ тріоїда S збігаються, то S є дісполукою піддімоноїдів (див. [7] або [11]). Якщо ж $\dashv = \vdash = \perp$, то S є сполукою напівгруп [18].

Нагадаємо, що комутативна напівгрупа ідемпотентів називається напівструктурою.

Лема. *Операції тріоїда* $(T, \dashv, \vdash, \perp)$ *збігаються, якщо* $(T, \dashv)$ *є напівструктурою.*

Доведення. Для всіх $x, y, z \in T$ маємо

$$(x \vdash y) \dashv z = z \dashv (x \vdash y) =$$

$$= (z \dashv x) \dashv y = x \dashv (y \dashv z) = x \vdash (y \dashv z)$$

згідно з комутативністю й асоціативністю операції $\dashv$ та аксіомами $(T1), (T2)$ тріоїда. Підставляючи $z = y$ в останню рівність і використовуючи ідемпотентність операції $\dashv$, отримуємо $x \dashv y = x \vdash y$.

Для всіх $x, y, z \in T$ маємо

$$(x \perp y) \dashv z = z \dashv (x \perp y) =$$

$$= (z \dashv x) \dashv y = x \dashv (y \dashv z) = x \perp (y \dashv z)$$

згідно з комутативністю та асоціативністю операції $\dashv$ та аксіомами $(T4), (T5)$ тріоїда. Підставляючи $z = y$ в останню рівність і використовуючи ідемпотентність операції $\dashv$, отримуємо $x \dashv y = x \perp y$.

Лему доведено.

4.2. Нехай $(T, \dashv, \vdash, \perp)$ – тріоїд та $a \in T$, $n \in N$. Через a^n позначимо n-степінь елемента a відносно операції $\dashv$.

Лема. *Нехай* $(T, \dashv, \vdash, \perp)$ *– тріоїд з комутативною операцією* $\dashv$. *Для всіх* $b, c \in T$, $m \in N, m > 1$, *маємо*

$$(b \dashv c)^m = b^m \perp c^m = (b \perp c)^m.$$

Доведення. Для будь-яких $b, c \in T$ маємо

$$(b \dashv c)^m = b^m \dashv c^m = b^m \dashv c^{m-1} \dashv c =$$

$$= (c \dashv b^m) \dashv c^{m-1} = c \dashv (b^m \perp c^{m-1}) =$$

$$= (b^m \perp c^{m-1}) \dashv c = b^m \perp (c^{m-1} \dashv c) =$$

$$= b^m \perp c^m$$

згідно з комутативністю та асоціативністю операції $\dashv$ та аксіомами $(T4)$, $(T5)$ тріоїда.

Доведемо, що $(b \dashv c)^m = (b \perp c)^m$ для $m > 1$, використовуючи індукцію за m. Для $m = 2$ маємо

$$(b \dashv c)^2 = (b \dashv c) \dashv (b \dashv c) =$$

$$= (b \dashv c) \dashv (b \perp c) = (b \perp c) \dashv (b \dashv c) =$$

$$= (b \perp c) \dashv (b \perp c) = (b \perp c)^2$$

згідно з комутативністю та асоціативністю операції $\dashv$ та аксіомою $(T4)$ тріоїда.

Нехай $(b \dashv c)^k = (b \perp c)^k$ для $m = k$. Тоді для $m = k+1$ отримуємо

$$(b \dashv c)^{k+1} = (b \dashv c)^k \dashv (b \dashv c) =$$

$$= (b \dashv c)^k \dashv (b \perp c) = (b \perp c)^k \dashv (b \perp c) =$$

$$= (b \perp c)^{k+1}$$

згідно з асоціативністю операції $\dashv$, аксіомою $(T4)$ тріоїда та припущенням.

Таким чином, $(b \dashv c)^m = (b \perp c)^m$ для $m > 1$.

Лему доведено.

4.3. У цьому пункті доведено, що кожний тріоїд з комутативною періодичною напівгрупою є напівструктурою уніпотентних підтріоїдів.

Тріоїд $(T,\dashv,\vdash,\perp)$ назвемо уніпотентним, якщо він містить лише один такий елемент $x \in T$, що $x \dashv x = x \vdash x = x \perp x = x$.

В умовах та позначеннях п. 4.1 має місце теорема.

Теорема. *Кожний тріоїд* $(T,\dashv,\vdash,\perp)$ *з комутативною періодичною напівгрупою* $(T,\dashv)$ *є напівструктурою* Y *уніпотентних підтріоїдів* T_i, $i \in Y$.

Доведення. Визначимо відношення γ на тріоїді $(T,\dashv,\vdash,\perp)$ з комутативною періодичною напівгрупою $(T,\dashv)$, поклавши

$a\gamma b$ тоді й лише тоді, коли існує

ідемпотент ε напівгрупи $(T,\dashv)$ такий,

що $a^l = b^k = \varepsilon$ для деяких $l, k \in N$.

З [7] випливає, що γ є напівструктурною конгруенцією на дімоноїді $(T,\dashv,\vdash)$. Покажемо, що γ є конгруенцією на напівгрупі $(T,\perp)$.

Нехай $a\gamma b$, $a,b,c \in T$. Тоді $a \dashv c\gamma b \dashv c$. Це означає, що існує ідемпотент e напівгрупи $(T,\dashv)$ такий, що $(a \dashv c)^n = (b \dashv c)^m = e$ для деяких $n,m \in N$. Звідси

$$(a \dashv c)^n \dashv (a \dashv c)^n = (a \dashv c)^{2n} = e, \qquad (4.1)$$

$$(b \dashv c)^m \dashv (b \dashv c)^m = (b \dashv c)^{2m} = e. \qquad (4.2)$$

Згідно з лемою п. 4.2 з (4.1) та (4.2) випливає, що $(a \perp c)^{2n} = (b \perp c)^{2m} = e$ і, таким чином, $a \perp c \gamma b \perp c$.

Аналогічно можна показати ліву стабільність відношення γ відносно операції $\perp$. Таким чином, γ є конгруенцією на $(T, \dashv, \vdash, \perp)$.

Оскільки $(T, \dashv)/\gamma$ – напівструктура, то згідно з лемою п. 4.1 операції фактор-тріоїда $(T, \dashv, \vdash, \perp)/\gamma$ збігаються і, отже, він є напівструктурою.

З [7] випливає, що кожний клас A конгруенції γ є уніпотентним піддімоноїдом дімоноїда $(T, \dashv, \vdash)$. Нехай $e \in A$ та e – єдиний ідемпотент піднапівгрупи A напівгрупи $(T, \dashv)$. Для довільного елемента $a \in A$ існує $p \in N,\ p > 1$, таке, що $a^p = e$. Звідси

$$e \perp e = a^p \perp a^p =$$

$$= a^p \perp (a^{p-1} \dashv a) = (a^p \perp a^{p-1}) \dashv a =$$

$$= a \dashv (a^p \perp a^{p-1}) = (a \dashv a^p) \dashv a^{p-1} =$$

$$= (a \dashv a^{p-1}) \dashv a^p = a^p \dashv a^p = e \dashv e = e$$

згідно з комутативністю та асоціативністю операції $\dashv$ та аксіомами $(T4)$, $(T5)$ тріоїда. Таким чином, A – уніпотентний підтріоїд тріоїда $(T, \dashv, \vdash, \perp)$.

Теорему доведено.

Остання теорема узагальнює теорему Ш. Шварца [19] про декомпозицію комутативної періодичної напівгрупи в напівструктуру уніпотентних напівгруп та теорему [7] про декомпозицію дімоноїда з комутативною періодичною напівгрупою в напівструктуру уніпотентних піддімоноїдів.

4.4. Побудуємо приклади тріоїдів, які розкладаються в трисполуки підтріоїдів.

Нехай $(X^*, \dashv, \vdash, \perp)$ – тріоїд з п. 1.4. Нехай далі $(X \times X, \dashv', \vdash', \perp')$ – ідемпотентний тріоїд з операціями

$$(x, y) \dashv' (a, b) = (x, y), \quad (x, y) \vdash' (a, b) = (a, b),$$

$$(x, y) \perp' (a, b) = (x, b)$$

для всіх $(x, y), (a, b) \in X \times X$. Позначимо його через $\overline{X}$ та для всіх $i, j \in X$ покладемо

$$A_{(i,j)} = \{w \in X^* \mid (w^{(0)}, w^{(1)}) = (i, j)\}.$$

Наступне твердження описує будову тріоїда $(X^*, \dashv, \vdash, \perp)$.

Лема. *Тріоїд* $(X^*, \dashv, \vdash, \perp)$ *є трисполукою* $\overline{X}$ *напівгруп з нульовим множенням* $A_{(i,j)}, (i, j) \in \overline{X}$.

Доведення. Визначимо відображення

$$\mu : (X^*, \dashv, \vdash, \perp) \to \overline{X} : w \mapsto (w^{(0)}, w^{(1)}).$$

Відображення μ є гомоморфізмом. Дійсно, якщо $w, u \in X^*$, то

$$(w \perp u)\mu = (w^{(0)}u^{(1)})\mu = (w^{(0)}, u^{(1)}) =$$

$$= (w^{(0)}, w^{(1)}) \perp' (u^{(0)}, u^{(1)}) = w\mu \perp' u\mu.$$

Рівності

$$(w \dashv u)\mu = w\mu \dashv' u\mu, \ \ (w \vdash u)\mu = w\mu \vdash' u\mu$$

для всіх $w, u \in X^*$ випливають з доведення твердження 4 [11].

Зрозуміло, що $A_{(i,j)}, (i, j) \in \overline{X}$, є довільним класом конгруенції Δ_μ (див. п. 4.1). Крім цього, якщо $w, u \in A_{(i,j)}$, то $w \dashv u = w \vdash u = w \perp u = ij$, звідси $A_{(i,j)}$ є напівгрупою з нульовим множенням з нулем ij.

Лему доведено.

4.5. Нехай S^f – тріоїд з п. 1.2 c).

Має місце лема.

Лема. *Існує гомоморфізм* $S^f \to S$.

Доведення. Визначимо відображення

$$\alpha : S^f \to S : t \mapsto t\alpha = tf.$$

Для всіх $t, s \in S^f$ маємо

$$(t \dashv s)\alpha = (t(sf))\alpha = (t(sf))f =$$

$$= (tf)(sf^2) = (tf)(sf) = (t\alpha)(s\alpha),$$

$$(t \vdash s)\alpha = ((tf)s)\alpha = ((tf)s)f =$$

$$= (tf^2)(sf) = (tf)(sf) = (t\alpha)(s\alpha),$$

$$(t \perp s)\alpha = ((ts)f)\alpha = (ts)f^2 =$$

$$= (ts)f = (tf)(sf) = (t\alpha)(s\alpha),$$

звідси α – гомоморфізм.

Лему доведено.

4.6. Нехай X – довільна непорожня множина. Нагадаємо: якщо $\varphi : X \to X$ – перетворення, то

$$\ker(\varphi) = \{(x, y) \in X \times X \mid x\varphi = y\varphi\}.$$

Нехай E – довільна напівгрупа ідемпотентів, f – її ідемпотентний ендоморфізм та T_x – довільний клас еквівалентності відношення $\ker(f)$ з представником $x \in Ef$.

В умовах та позначеннях п. 4.5 має місце лема.

Лема. *Тріоїд* E^f *є сполукою* Ef *підтріоїдів* T_x, $x \in Ef$.

Доведення. З леми п. 4.5 випливає, що існує гомоморфізм α з E^f в E, образом якого є піднапівгрупа ідемпотентів Ef напівгрупи E. Зрозуміло, що класами конгруенції, що визначається гомоморфізмом α, є множини T_x, $x \in Ef$, які є підтріоїдами тріоїда E^f.

Лему доведено.

ЛЕКЦІЯ 5.

Найменші конгруенції на тріоїдах

У цьому розділі описано найменшу ідемпотентну конгруенцію на тріоїді з комутативною операцією та показано, що відповідний фактор-тріоїд є напівструктурою. Цей результат узагальнює теорему Т. Тамури та Н. Кімури [20] про будову найменшої напівструктурної конгруенції на комутативній напівгрупі та опис [11] найменшої ідемпотентної конгруенції на дімоноїді з комутативною операцією. Охарактеризовано найменшу напівструктурну конгруенцію на тріоїді з ідемпотентною операцією. Цей результат узагальнює опис Д. Мак-Ліна [21] найменшої напівструктурної конгруенції на сполуці та опис [22] найменшої напівструктурної конгруенції на дімоноїді з ідемпотентною операцією. Представлено найменшу сепаративну конгруенцію на тріоїді з комутативною операцією та показано, що відповідний фактор-тріоїд є комутативною сепаративною напівгрупою. Цей результат узагальнює теорему Є. Хьюітта та Х. Цукермана [23] (див. також [24]) про будову найменшої сепаративної конгруенції на комутативній напівгрупі та опис [7] найменшої сепаративної конгруенції на дімоноїді з комутативною операцією.

5.1. У цьому пункті описано найменшу ідемпотентну конгруенцію на тріоїді з комутативною операцією та показано, що відповідний фактор-тріоїд є напівструктурою.

Якщо ρ – конгруенція на тріоїді $(T,\dashv,\vdash,\perp)$ така, що $(T,\dashv,\vdash,\perp)/\rho$ – ідемпотентний тріоїд (див. п. 1.1), то будемо говорити, що ρ – ідемпотентна конгруенція.

Нехай $(T,\dashv,\vdash,\perp)$ – тріоїд з комутативною операцією $\dashv$, $a,b\in T$. Говоритимемо, що a $\dashv$-ділить b, та писатимемо $a_{\dashv}|b$, якщо існує такий елемент x з напівгрупи $(T,\dashv)$ з одиницею, що $a\dashv x=b$.

Визначимо відношення η на тріоїді $(T,\dashv,\vdash,\perp)$ з комутативною операцією $\dashv$ за правилом:

$a\eta b$ тоді й лише тоді, коли

існують $k,l\in N$ такі, що $a_{\dashv}|b^k, b_{\dashv}|a^l$.

Теорема. *Відношення* η *на будь-якому тріоїді* $(T,\dashv,\vdash,\perp)$ *з комутативною операцією* $\dashv$ *є найменшою ідемпотентною конгруенцією, і* $(T,\dashv,\vdash,\perp)/\eta$ – *комутативний ідемпотентний тріоїд, який є напівструктурою.*

Доведення. Той факт, що відношення η є найменшою ідемпотентною конгруенцією на дімоноїді $(T,\dashv,\vdash)$, доведено в [11]. Покажемо, що η є стабільним відносно операції $\perp$.

Нехай $a\eta b$, $a,b,c\in T$. Тоді $a\dashv c\eta b\dashv c$. Це означає, що існують $x,y\in T$, $m,n\in N$, для яких

$$(a\dashv c)\dashv x=(b\dashv c)^m, \tag{5.1}$$

$$(b \dashv c) \dashv y = (a \dashv c)^n. \qquad (5.2)$$

Домножимо рівність (5.1) на $b \dashv c$ та рівність (5.2) на $a \dashv c$:

$$(a \dashv c) \dashv x \dashv (b \dashv c) = (b \dashv c)^{m+1}, \qquad (5.3)$$

$$(b \dashv c) \dashv y \dashv (a \dashv c) = (a \dashv c)^{n+1}. \qquad (5.4)$$

Розглядаючи обидві частини рівності (5.3), отримуємо

$$(a \dashv c) \dashv x \dashv (b \dashv c) = (x \dashv a) \dashv (c \dashv b \dashv c) =$$

$$= x \dashv (a \perp (c \dashv b \dashv c)) = x \dashv ((a \perp c) \dashv (b \dashv c)) =$$

$$= (a \perp c) \dashv (x \dashv b \dashv c)$$

згідно з комутативністю та асоціативністю операції $\dashv$ й аксіомами $(T4), (T5)$ тріоїда, та $(b \dashv c)^{m+1} = (b \perp c)^{m+1}$ згідно з лемою п. 4.2. Звідси

$$(a \perp c) \dashv (x \dashv b \dashv c) = (b \perp c)^{m+1}.$$

Таким чином, $a \perp c_{\dashv} \,|\, (b \perp c)^{m+1}$. Аналогічно з рівності (5.4) отримуємо, що $b \perp c_{\dashv} \,|\, (a \perp c)^{n+1}$. Це разом з попереднім означає, що $a \perp c \eta b \perp c$.

Двоїстим чином доводиться стабільність зліва відношення η відносно операції $\perp$. Таким чином, η є конгруенцією на $(T, \dashv, \vdash, \perp)$.

Оскільки ${(T,\dashv)}/{\eta}$ – напівструктура, то згідно з лемою п. 4.1 операції фактор-тріоїда ${(T,\dashv,\vdash,\perp)}/{\eta}$ збігаються і, отже, він є напівструктурою.

З [11] випливає, що η є найменшою ідемпотентною конгруенцією.

Теорему доведено.

Остання теорема узагальнює теорему Т. Тамури та Н. Кімури [20] про будову найменшої напівструктурної конгруенції на комутативній напівгрупі та опис [11] найменшої ідемпотентної конгруенції на дімоноїді з комутативною операцією.

Розглянемо комутативні тріоїди $(N,\dashv,\vdash,\perp)$ та $(X,\dashv,\vdash,\perp)$ з п. 1.6 та, відповідно, з п. 1.7. Відзначимо, що на $(N,\dashv,\vdash,\perp)$ та $(X,\dashv,\vdash,\perp)$ найменші ідемпотентні конгруенції збігаються з універсальними відношеннями на множинах N та, відповідно, X .

5.2. У цьому пункті описано найменшу напівструктурну конгруенцію на тріоїді з ідемпотентною операцією.

Якщо ρ – конгруенція на тріоїді $(T,\dashv,\vdash,\perp)$ така, що операції фактор-тріоїда ${(T,\dashv,\vdash,\perp)}/{\rho}$ збігаються та він є напівструктурою, то будемо говорити, що ρ – напівструктурна конгруенція.

Визначимо відношення $\Im$ на тріоїді $(T, \dashv, \vdash, \perp)$ з ідемпотентною операцією $\dashv$ за правилом:

$a \Im b$ тоді й лише тоді, коли

$$a = a \dashv b \dashv a, \quad b = b \dashv a \dashv b.$$

Теорема. *Відношення $\Im$ на будь-якому тріоїді $(T, \dashv, \vdash, \perp)$ з ідемпотентною операцією $\dashv$ є найменшою напівструктурною конгруенцією.*

Доведення. Той факт, що відношення $\Im$ є найменшою напівструктурною конгруенцією на дімоноїді $(T, \dashv, \vdash)$, доведено в [22]. Покажемо, що $\Im$ є стабільним відносно операції $\perp$.

Нехай $a \Im b$, $a, b, c \in T$. Тоді $a \dashv c \Im b \dashv c$. Це означає, що

$$(a \dashv c) \dashv (b \dashv c) \dashv (a \dashv c) = a \dashv c, \tag{5.5}$$

$$(b \dashv c) \dashv (a \dashv c) \dashv (b \dashv c) = b \dashv c. \tag{5.6}$$

Домножимо обидві частини рівності (5.5) на $a \perp c$ та рівності (5.6) на $b \perp c$:

$$(a \perp c) \dashv ((a \dashv c) \dashv (b \dashv c) \dashv (a \dashv c)) =$$

$$= ((a \perp c) \dashv (a \dashv c)) \dashv (b \dashv c) \dashv (a \dashv c) =$$

$$= ((a \perp c) \dashv (a \perp c)) \dashv (b \dashv c) \dashv (a \dashv c) =$$

$$= (a \perp c) \dashv (b \dashv c) \dashv (a \dashv c) =$$

$$= ((a \perp c) \dashv (b \perp c)) \dashv (a \dashv c) =$$

$$= (a \perp c) \dashv (b \perp c) \dashv (a \perp c) =$$

$$= (a \perp c) \dashv (a \dashv c) =$$

$$= (a \perp c) \dashv (a \perp c) = a \perp c,$$

$$(b \perp c) \dashv ((b \dashv c) \dashv (a \dashv c) \dashv (b \dashv c)) =$$

$$= ((b \perp c) \dashv (b \dashv c)) \dashv (a \dashv c) \dashv (b \dashv c) =$$

$$= ((b \perp c) \dashv (b \perp c)) \dashv (a \dashv c) \dashv (b \dashv c) =$$

$$= (b \perp c) \dashv (a \dashv c) \dashv (b \dashv c) =$$

$$= ((b \perp c) \dashv (a \perp c)) \dashv (b \dashv c) =$$

$$= (b \perp c) \dashv (a \perp c) \dashv (b \perp c) =$$

$$= (b \perp c) \dashv (b \dashv c) =$$

$$= (b \perp c) \dashv (b \perp c) = b \perp c$$

згідно з асоціативністю та ідемпотентністю операції $\dashv$ та аксіомою $(T4)$ тріоїда. Отже, $a \perp c \mathfrak{I} b \perp c$.

Аналогічно можна показати, що $c \perp a \mathfrak{I} c \perp b$. Таким чином, $\mathfrak{I}$ є конгруенцією на $(T, \dashv, \vdash, \perp)$.

Оскільки $(T, \dashv)/\mathfrak{I}$ – напівструктура, то згідно з лемою п. 4.1 операції фактор-тріоїда $(T, \dashv, \vdash, \perp)/\mathfrak{I}$ збігаються і, отже, він є напівструктурою.

З [22] випливає, що $\mathfrak{I}$ є найменшою напівструктурною конгруенцією.

Теорему доведено.

Ця теорема узагальнює опис Д. Мак-Ліна [21] найменшої напівструктурної конгруенції на сполуці та опис [22] найменшої напівструктурної конгруенції на дімоноїді з ідемпотентною операцією.

Відзначимо, що для ідемпотентного тріоїда $T_{lr}^{\perp}$ з п. 1.5 найменша напівструктурна конгруенція $\mathfrak{I} = T \times T$.

5.3. У цьому пункті описано найменшу сепаративну конгруенцію на тріоїді з комутативною операцією та показано, що відповідний фактор-тріоїд є комутативною сепаративною напівгрупою.

Якщо ρ – конгруенція на тріоїді $(T, \dashv, \vdash, \perp)$ така, що $(T, \dashv, \vdash, \perp)/\rho$ є сепаративним тріоїдом (див. п. 1.1), то будемо говорити, що ρ – сепаративна конгруенція.

Нехай $(T, \dashv, \vdash, \perp)$ – тріоїд, $a \in T$, $n \in N$. Нагадаємо, що через a^n ми позначаємо n-степінь елемента a відносно операції $\dashv$.

Визначимо відношення σ на тріоїді $(T, \dashv, \vdash, \perp)$ з комутативною операцією $\dashv$, поклавши

$a\sigma b$ тоді й лише тоді, коли існує

$n \in N$ таке, що $a \dashv b^n = b^{n+1}$ і $b \dashv a^n = a^{n+1}$.

Теорема. *Відношення* σ *на будь-якому тріоїді* $(T, \dashv, \vdash, \perp)$ *з комутативною операцією* $\dashv$ *є найменшою* *сепаративною конгруенцією і* $(T, \dashv, \vdash, \perp)/\sigma$ *є комутативною сепаративною напівгрупою.*

Доведення. Той факт, що відношення σ є найменшою сепаративною конгруенцією на дімоноїді $(T, \dashv, \vdash)$, доведено в [7]. Покажемо, що σ є стабільним відносно операції $\perp$.

Нехай $a\sigma b$, $a, b, c \in T$. Тоді $a \dashv c \sigma b \dashv c$. Це означає, що існує $m \in N$, для якого

$$(a \dashv c) \dashv (b \dashv c)^m = (b \dashv c)^{m+1}, \tag{5.7}$$

$$(b \dashv c) \dashv (a \dashv c)^m = (a \dashv c)^{m+1}. \tag{5.8}$$

Домножимо справа за операцією $\dashv$ рівність (5.7) на $b \dashv c$ та рівність (5.8) на $a \dashv c$, тоді отримуємо

$$(a \dashv c) \dashv (b \dashv c)^{m+1} = (b \dashv c)^{m+2}, \tag{5.9}$$

$$(b \dashv c) \dashv (a \dashv c)^{m+1} = (a \dashv c)^{m+2}. \tag{5.10}$$

Розглядаючи обидві частини рівності (5.9), отримуємо

$$(a \dashv c) \dashv (b \dashv c)^{m+1} = (b \perp c)^{m+1} \dashv (a \dashv c) =$$

$$= ((b \perp c)^{m+1} \dashv a) \dashv c = (b \perp c)^{m+1} \dashv (a \perp c) =$$

$$= (a \perp c) \dashv (b \perp c)^{m+1} = (b \perp c)^{m+2}$$

згідно з комутативністю та асоціативністю операції $\dashv$, аксіомою $(T4)$ тріоїда та лемою п. 4.2.

Аналогічно з рівності (5.10) отримуємо

$$(b \perp c) \dashv (a \perp c)^{m+1} = (a \perp c)^{m+2}.$$

Це разом з попереднім означає, що $a \perp c \sigma b \perp c$.

Двоїстим способом доводиться стабільність зліва відношення σ відносно операції $\perp$. Таким чином, σ є конгруенцією на $(T, \dashv, \vdash, \perp)$.

З [7] випливає, що операції фактор-дімоноїда $(T, \dashv, \vdash)/\sigma$ збігаються та він є комутативною сепаративною напівгрупою.

Згідно з лемою п. 4.2

$$(a \dashv b) \dashv (a \perp b)^{n+1} = (a \dashv b) \dashv (a \dashv b)^{n+1} =$$

$$= (a \dashv b)^{n+2} = (a \perp b)^{n+2},$$

$$(a \perp b) \dashv (a \dashv b)^{n+1} = (a \perp b) \dashv (a \perp b)^{n+1} =$$

$$= (a \perp b)^{n+2} = (a \dashv b)^{n+2}$$

для всіх $a, b \in T, n \in N$. Тоді $a \dashv b \sigma\, a \perp b$. Звідси операції $(T, \dashv, \perp)/\sigma$ збігаються. Таким чином, операції фактор-тріоїда $(T, \dashv, \vdash, \perp)/\sigma$ збігаються. Це означає, що $(T, \dashv, \vdash, \perp)/\sigma$ є комутативним сепаративним тріоїдом, який є комутативною сепаративною напівгрупою, та σ є сепаративною конгруенцією. Той факт, що σ є найменшою сепаративною конгруенцією, випливає з [7].

Теорему доведено.

Остання теорема узагальнює теорему Є. Хьюітта і Х. Цукермана [23] (див. також [24]) про будову найменшої сепаративної конгруенції на комутативній напівгрупі та опис [7] найменшої сепаративної конгруенції на дімоноїді з комутативною операцією.

Розглянемо комутативні тріоїди $(N, \dashv, \vdash, \perp)$ та $(X, \dashv, \vdash, \perp)$ з п. 1.6 та, відповідно, з п. 1.7. Відзначимо, що на $(N, \dashv, \vdash, \perp)$ та $(X, \dashv, \vdash, \perp)$ найменші сепаративні конгруенції збігаються з універсальними відношеннями на множинах N та, відповідно, X.

Контрольні запитання до модуля 1

1. Сформулювати визначення тріоїда та навести приклади тріоїдів.

2. Довести теорему про комбінаторні властивості тріоїдів.

3. Довести теорему про дімоноїди, всі відношення еквівалентності на яких є конгруенціями.

4. Побудувати тріоїд, ізоморфний вільному тріоїду рангу 1.

5. Що таке трисполука підтріоїдів? Довести теорему про будову дімоноїда з комутативною періодичною напівгрупою.

6. Охарактеризувати найменшу ідемпотентну конгруенцію на тріоїді з комутативною операцією та довести, що відповідний фактор-тріоїд є напівструктурою.

7. Охарактеризувати найменшу напівструктурну конгруенцію на тріоїді з ідемпотентною операцією.

8. Охарактеризувати найменшу сепаративну конгруенцію на тріоїді з комутативною операцією та довести, що відповідний фактор-тріоїд є комутативною сепаративною напівгрупою.

МОДУЛЬ 2.

ЛЕКЦІЯ 6.

Напівструктурні конгруенції на тріоїдах

У цьому розділі (див. також [25]) ми описуємо напівструктурні декомпозиції тріоїдів та встановлюємо деякі зв'язки між тріоїдами та дімоноїдами. Ямада [26] описав усі напівструктурні конгруенції на довільній напівгрупі та довів, що кожна напівгрупа є напівструктурою s-простих напівгруп. Ці результати було узагальнено на дімоноїди в [27]. У цьому розділі ми поширюємо результати роботи [27] на випадок тріоїдів.

6.1. Нехай $X = \{1, 2, 3\}$. Для кожної пари $(x, y) \in X \times X$ нехай $T^{(x,y)} = \left(T, *_x, *_y\right)$ – упорядкована трійка, де T – непорожня множина та $*_x, *_y$ – бінарні операції на T. Нехай

$$B = \{(1,1), (2,2), (3,3), (1,2)\} \subset X \times X .$$

Наступна лема описує зв'язки між тріоїдами та дімоноїдами (див. п. 1.1).

Лема. *Для будь-якого тріоїда* $(T, *_1, *_2, *_3)$ *алгебра* $T^{(x,y)}$, $(x, y) \in X \times X$, *є дімоноїдом, якщо* $(x, y) \in B$. *Існує деякий тріоїд* $(T, *_1, *_2, *_3)$, *для якого алгебра* $T^{(x,y)}$, $(x, y) \in X^2 \setminus B$, *не є дімоноїдом.*

Доведення. Нехай $(T,*_1,*_2,*_3)$ – тріоїд. Легко побачити, що алгебри $T^{(1,1)}$, $T^{(2,2)}$, $T^{(3,3)}$ та $T^{(1,2)}$ є дімоноїдами.

Доведемо другу частину леми.

Нехай $F[A]$ – вільна напівгрупа на множині A та $F[A]_{lr}^{\perp}$ – тріоїд (див. твердження п. 1.5) такий, що $\perp$ є конкатенацією на $F[A]$. Покладемо $(T,*_1,*_2,*_3)=F[A]_{lr}^{\perp}$ та покажемо, що для будь-якого $(x,y)\in X^2\setminus B$ алгебра $T^{(x,y)}$ не є дімоноїдом.

Нехай $w,u,\omega\in T^{(x,y)}$.

Для $T^{(1,3)}$ перевіримо аксіому $(T3)$:

$$\left(w*_1 u\right)*_3 \omega = w*_3 \omega = w\omega \neq wu\omega = w*_3 (u*_3 \omega).$$

Оскільки аксіома $(T3)$ не виконуєтся, то $T^{(1,3)}$ не є дімоноїдом.

Для $T^{(2,1)}$, $T^{(2,3)}$, $T^{(3,1)}$ та $T^{(3,2)}$ перевіримо аксіому $(T1)$.

Для $T^{(2,1)}$ маємо

$$\left(w*_2 u\right)*_2 \omega = \omega \neq u = w*_2 u = w*_2 (u*_1 \omega).$$

Для $T^{(2,3)}$:

$$\left(w*_2 u\right)*_2 \omega = \omega \neq u\omega = w*_2 (u*_3 \omega).$$

Для $T^{(3,1)}$:

$$\left(w *_3 u\right) *_3 \omega = wu\omega \neq wu = w *_3 (u *_1 \omega).$$

Для $T^{(3,2)}$:

$$\left(w *_3 u\right) *_3 \omega = wu\omega \neq w\omega = w *_3 (u *_2 \omega).$$

Аксіома $(T1)$ не виконується в кожному з чотирьох випадків, таким чином, $T^{(2,1)}$, $T^{(2,3)}$, $T^{(3,1)}$ та $T^{(3,2)}$ – не дімоноїди.

Лему доведено.

6.2. У цьому пункті ми опишемо всі напівструктурні конгруенції на довільному тріоїді та визначимо найменшу напівструктурну конгруенцію на цьому тріоїді. Ми також покажемо, що кожний тріоїд є напівструктурою s-простих підтріоїдів.

Нехай $(T, \dashv, \vdash, \perp)$ – довільний тріоїд. Ямада ввів поняття P-піднапівгрупи довільної напівгрупи (див. [26]). Позначимо через Ω сукупність всіх P-піднапівгруп напівгрупи $(T, \dashv)$ та через $T_\alpha, T_\beta, \ldots$ – елементи з Ω.

Нагадаємо, що якщо ρ – конгруенція на тріоїді $(T, \dashv, \vdash, \perp)$ така, що операції фактор-тріоїда $(T, \dashv, \vdash, \perp)/\rho$ збігаються та він є напівструктурою (див. п. 4.1), то будемо говорити, що ρ – напівструктурна конгруенція.

Для кожної підмножини Γ множини Ω визначимо відношення $\Gamma_{\dashv}$ на $(T, \dashv, \vdash, \perp)$ за правилом:

$$a\Gamma_{\dashv}b \text{ тоді й лише тоді, коли}$$

$$\{(x,y)\,|\,x \dashv a \dashv y \in T_\alpha\} = \{(x,y)\,|\,x \dashv b \dashv y \in T_\alpha\}$$

для кожного $T_\alpha \in \Gamma$.

Теорема. *Відношення* $\Gamma_{\dashv}$ *на будь-якому тріоїді* $(T,\dashv,\vdash,\perp)$ *є напівструктурною конгруенцією. Навпаки, будь-яка напівструктурна конгруенція на* $(T,\dashv,\vdash,\perp)$ *може бути отримана таким способом.*

Доведення. Той факт, що відношення $\Gamma_{\dashv}$ є напівструктурною конгруенцією на дімоноїді $(T,\dashv,\vdash)$, доведено в [27]. Покажемо, що $\Gamma_{\dashv}$ є стабільним відносно операції $\perp$.

Нехай $a\Gamma_{\dashv}b$, $a,b,c \in T$. Оскільки $a \dashv c\Gamma_{\dashv}b \dashv c$, то

$$\{(x,y)\,|\,x \dashv (a \dashv c) \dashv y \in T_\alpha\} = \{(x,y)\,|\,x \dashv (b \dashv c) \dashv y \in T_\alpha\}$$

для кожного $T_\alpha \in \Gamma$. Згідно з асоціативністю операції $\dashv$ та аксіомою $(T4)$ тріоїда отримуємо

$$x \dashv (a \dashv c) \dashv y = ((x \dashv a) \dashv c) \dashv y =$$

$$= (x \dashv (a \perp c)) \dashv y = x \dashv (a \perp c) \dashv y,$$

$$x \dashv (b \dashv c) \dashv y = ((x \dashv b) \dashv c) \dashv y =$$

$$= (x \dashv (b \perp c)) \dashv y = x \dashv (b \perp c) \dashv y.$$

Таким чином, $a \perp c \Gamma_{\dashv} b \perp c$. Аналогічно можна довести, що $c \perp a \Gamma_{\dashv} c \perp b$. Отже, $\Gamma_{\dashv}$ є конгруенцією на $(T, \dashv, \vdash, \perp)$.

Оскільки $(T, \dashv) / \Gamma_{\dashv}$ є напівструктурою, то згідно з лемою п. 4.1 операції фактор-тріоїда $(T, \dashv, \vdash, \perp) / \Gamma_{\dashv}$ збігаються та, отже, він є напівструктурою.

Обернене твердження випливає з [26] (див. також [27]).

Теорему доведено.

Остання теорема узагальнює теорему Ямади [26] про будову всіх напівструктурних конгруенцій на довільній напівгрупі та опис [27] всіх напівструктурних конгруенцій на довільному дімоноїді.

6.3. Тріоїд $(T, \dashv, \vdash, \perp)$ будемо називати s-простим, якщо його найменша напівструктурна конгруенція збігається з універсальним відношенням на T.

Використовуючи поняття трисполуки підтріоїдів (див. п. 4.1), сформулюємо таку теорему.

Теорема. *Відношення* $\Omega_{\dashv}$ *на будь-якому тріоїді* $(T, \dashv, \vdash, \perp)$ *є найменшою напівструктурною конгруенцією. Кожний тріоїд* $(T, \dashv, \vdash, \perp)$ *є напівструктурою* s*-простих підтріоїдів.*

Доведення. За теоремою п. 6.2 $\Omega_{\dashv}$ є напівструктурною конгруенцією. Якщо $a \Omega_{\dashv} b$, $a, b \in T$, то легко побачити, що $a\Gamma_{\dashv} b$ для будь-якого $\Gamma \subseteq \Omega$. Отже, $\Omega_{\dashv} \subseteq \Gamma_{\dashv}$.

Доведемо другу частину теореми.

Оскільки $\Omega_{\dashv}$ – конгруенція на $(T, \dashv, \vdash, \perp)$ та $(T, \dashv, \vdash, \perp)/\Omega_{\dashv}$ – напівструктура, то

$$(T, \dashv, \vdash, \perp) \to (T, \dashv, \vdash, \perp)/\Omega_{\dashv} : x \mapsto [x]$$

є гомоморфізмом ($[x]$ – клас конгруенції $\Omega_{\dashv}$, який містить x). З [27] випливає, що кожний клас A конгруенції $\Omega_{\dashv}$ є s-простим дімоноїдом відносно операцій $\dashv$ та $\vdash$. Звідси ми отримуємо s-простоту підтріоїда A тріоїда $(T, \dashv, \vdash, \perp)$.

Теорему доведено.

Остання теорема узагальнює теорему Ямади [26] про будову найменшої напівструктурної конгруенції на довільній напівгрупі та опис [27] найменшої напівструктурної конгруенції на довільному дімоноїді.

ЛЕКЦІЯ 7.

Групові конгруенції на тріоїдах

У цьому розділі (див. також [28]) описано всі групові конгруенції на довільному тріоїді та представлено найменшу групову конгруенцію на тріоїді з інверсною напівгрупою, найменшу групову конгруенцію на тріоїді з ортодоксальною напівгрупою та найменшу групову конгруенцію на тріоїді з регулярною напівгрупою. Результати, які при цьому отримано, узагальнюють відповідні описи [29 – 32, 16]. Крім цього, встановлено достатні умови, за якими операції довільного тріоїда збігаються. Деякі з отриманих результатів були анонсовані в [33].

7.1. Нагадаємо, що символом N ми позначаємо множину додатних цілих чисел.

Нехай $(T,\dashv,\vdash,\perp)$ – тріоїд та $a \in T$, $n \in N$. Через a^n (відповідно na) позначаємо n-степінь елемента a відносно операції $\dashv$ (відповідно $\vdash$).

Лема. *Нехай* $(T,\dashv,\vdash,\perp)$ *– тріоїд з комутативною операцією* $\vdash$. *Для всіх* $b,c \in T$, $m \in N, m > 1$, *маємо*

$$m(b \vdash c) = mb \perp mc = m(b \perp c) = m(b \dashv c).$$

Доведення. Для будь-яких $b,c \in T$ маємо

$$m(b \vdash c) = mb \vdash mc = b \vdash (m-1)b \vdash mc =$$

$$= (m-1)b \vdash (mc \vdash b) = ((m-1)b \perp mc) \vdash b =$$

$$= b \vdash ((m-1)b \perp mc) = (b \vdash (m-1)b) \perp mc = mb \perp mc$$

згідно з комутативністю та асоціативністю операції $\vdash$ й аксіомами тріоїда.

Доведемо, що $m(b \vdash c) = m(b \perp c)$ для $m > 1$, використовуючи індукцію за m. Для $m = 2$ маємо

$$2(b \vdash c) = (b \vdash c) \vdash (b \vdash c) = (b \perp c) \vdash (b \vdash c) =$$

$$= (b \vdash c) \vdash (b \perp c) = (b \perp c) \vdash (b \perp c) = 2(b \perp c)$$

згідно з асоціативністю й комутативністю операції $\vdash$ та аксіомою тріоїда.

Нехай $k(b \vdash c) = k(b \perp c)$ для $m = k$. Тоді для $m = k+1$ отримуємо

$$(k+1)(b \vdash c) = (b \vdash c) \vdash k(b \vdash c) = (b \perp c) \vdash k(b \vdash c) =$$

$$= (b \perp c) \vdash k(b \perp c) = (k+1)(b \perp c)$$

згідно з асоціативністю операції $\vdash$, аксіомою тріоїда та припущенням.

Таким чином, $m(b \vdash c) = m(b \perp c)$ для $m > 1$.

Нарешті, доведемо індукцією за m, що $m(b \dashv c) = m(b \perp c)$, $m > 1$.

Для $m = 2$ маємо

$$2(b \dashv c) = (b \dashv c) \vdash (b \dashv c) = (b \vdash c) \vdash (b \dashv c) =$$

$$= (b \dashv c) \vdash (b \vdash c) = (b \vdash c) \vdash (b \vdash c) =$$

$$= (b \perp c) \vdash (b \vdash c) = (b \vdash c) \vdash (b \perp c) =$$

$$= (b \perp c) \vdash (b \perp c) = 2(b \perp c)$$

згідно з асоціативністю й комутативністю операції $\vdash$ та аксіомами тріоїда.

Нехай $k(b \dashv c) = k(b \perp c)$ для $m = k$. Тоді для $m = k + 1$ отримуємо

$$(k+1)(b \dashv c) = (b \dashv c) \vdash k(b \dashv c) = (b \vdash c) \vdash k(b \dashv c) =$$

$$= (b \perp c) \vdash k(b \dashv c) = (b \perp c) \vdash k(b \perp c) = (k+1)(b \perp c)$$

згідно з асоціативністю операції $\vdash$, аксіомами тріоїда та припущенням.

Таким чином, $m(b \dashv c) = m(b \perp c)$ для $m > 1$.

Лему доведено.

7.2. Нагадаємо, що комутативна напівгрупа ідемпотентів називається напівструктурою. Комутативна напівгрупа S є сепаративною, якщо для будь-яких $s, t \in S$ з $s^2 = st = t^2$ випливає $s = t$. Напівгрупа S називається глобально ідемпотентною, якщо $S^2 = S$.

Нам необхідна наступна лема.

Лема ([7], лема 3). *Операції дімоноїда* $(D, \dashv, \vdash)$ *збігаються, якщо виконується одна з наступних умов:*

(i) $(D, \dashv)$ – *напівструктура;*

(ii) $(D,\dashv)$ – *напівгрупа з лівим (двобічним) скороченням;*

(iii) $(D,\dashv)$ – *комутативна сепаративна напівгрупа;*

(iv) $(D,\dashv)$ – *комутативна глобально ідемпотентна напівгрупа.*

7.3. Напівгрупа, яка задовольняє дві тотожності

$$x^2 = xy,\ \ y^2 = yx \Rightarrow x = y,$$

$$x^2 = yx,\ \ y^2 = xy \Rightarrow x = y,$$

називається слабко скороченою.

Лема. *Операції тріоїда* $(T,\dashv,\vdash,\perp)$ *збігаються, якщо виконується одна з наступних умов:*

(i) $(T,\dashv)$ – *слабко скорочена напівгрупа;*

(ii) $(T,\vdash)$– *слабко скорочена напівгрупа;*

(iii) $(T,\dashv)$ – *напівгрупа з лівим (двобічним) скороченням;*

(iv) $(T,\vdash)$ – *напівгрупа з правим (двобічним) скороченням;*

(v) $(T,\dashv)$ – *комутативна сепаративна напівгрупа;*

(vi) $(T,\vdash)$ – *комутативна сепаративна напівгрупа;*

(vii) $(T,\dashv)$ – *комутативна глобально ідемпотентна напівгрупа;*

(viii) $(T,\vdash)$ – *комутативна глобально ідемпотентна напівгрупа;*

(ix) $(T,\dashv)$ – *моноїд;*

(x) $(T,\vdash)$ – *моноїд;*

(xi) $(T,\vdash)$ – *напівструктура.*

Доведення. (i) Нехай x, y – довільні елементи T. Покладемо

$$a = x \dashv y,\ b = x \vdash y,\ c = x \perp y.$$

Тоді

$$a^2 = (x \dashv y) \dashv (x \dashv y) = (x \dashv y)^2,$$

$$a \dashv b = (x \dashv y) \dashv (x \vdash y) = (x \dashv y) \dashv (x \dashv y) = (x \dashv y)^2,$$

$$b \dashv a = (x \vdash y) \dashv (x \dashv y) = (x \vdash y) \dashv (x \vdash y) = (x \vdash y)^2,$$

$$b^2 = (x \vdash y) \dashv (x \vdash y) = (x \vdash y)^2,$$

$$a \dashv c = (x \dashv y) \dashv (x \perp y) = (x \dashv y) \dashv (x \dashv y) = (x \dashv y)^2,$$

$$c \dashv a = (x \perp y) \dashv (x \dashv y) = (x \perp y) \dashv (x \perp y) = (x \perp y)^2,$$

$$c^2 = (x \perp y) \dashv (x \perp y) = (x \perp y)^2$$

згідно з аксіомами тріоїда та асоціативністю операції $\dashv$. У силу слабкої скороченості напівгрупи $(T,\dashv)$ з $a^2 = a \dashv b$, $b^2 = b \dashv a$ випливає $a = b$ та з $a^2 = a \dashv c$, $c^2 = c \dashv a$ випливає $a = c$.

Отже, $a = b = c$, тобто $\dashv = \vdash = \perp$.

(ii) Для елементів $a, b, c \in T$, введених у (i), маємо

$$2a = (x \dashv y) \vdash (x \dashv y) = 2(x \dashv y),$$

$$a \vdash b = (x \dashv y) \vdash (x \vdash y) = (x \vdash y) \vdash (x \vdash y) = 2(x \vdash y),$$

$$b \vdash a = (x \vdash y) \vdash (x \dashv y) = (x \dashv y) \vdash (x \dashv y) = 2(x \dashv y),$$

$$2b = (x \vdash y) \vdash (x \vdash y) = 2(x \vdash y),$$

$$a \vdash c = (x \dashv y) \vdash (x \perp y) = (x \vdash y) \vdash (x \perp y) =$$

$$= (x \perp y) \vdash (x \perp y) = 2(x \perp y),$$

$$c \vdash a = (x \perp y) \vdash (x \dashv y) = (x \vdash y) \vdash (x \dashv y) =$$

$$= (x \dashv y) \vdash (x \dashv y) = 2(x \dashv y),$$

$$2c = (x \perp y) \vdash (x \perp y) = 2(x \perp y)$$

згідно з аксіомами тріоїда та асоціативністю операції $\vdash$. У силу слабкої скороченості напівгрупи $(T,\vdash)$ з $2a = b \vdash a$, $2b = a \vdash b$ випливає $a = b$ та з $2a = c \vdash a$, $2c = a \vdash c$ випливає $a = c$.

Отже, $a = b = c$, тобто $\dashv = \vdash = \perp$.

(iii) За твердженням (ii) леми п. 7.2 $\dashv = \vdash$. Для всіх $x, y, z \in T$ згідно з асоціативністю операції $\dashv$ та аксіомою тріоїда маємо

$$(x \dashv y) \dashv z = x \dashv (y \dashv z) = x \dashv (y \perp z),$$

звідки завдяки лівій скороченості отримуємо $y \dashv z = y \perp z$ для всіх $y, z \in T$. Таким чином, $\dashv = \vdash = \perp$. Аналогічно можна довести випадок двобічної скороченості.

(iv) Для всіх $x, y, z \in T$ згідно з асоціативністю операції $\vdash$ та аксіомами тріоїда маємо

$$x \vdash (y \vdash z) = (x \vdash y) \vdash z = (x \dashv y) \vdash z = (x \perp y) \vdash z,$$

звідки завдяки правій скороченості отримуємо $x \vdash y = x \dashv y = x \perp y$ для всіх $x, y \in T$. Таким чином, $\vdash = \dashv = \perp$. Аналогічно можна довести випадок двобічної скороченості.

(v) За твердженням (iii) леми п. 7.2 $\dashv = \vdash$. Для елементів $a, b, c \in T$, введених у (i), маємо

$$a^2 = (x \dashv y) \dashv (x \dashv y) = (x \dashv y)^2,$$

$$a \dashv c = (x \dashv y) \dashv (x \perp y) = (x \dashv y) \dashv (x \dashv y) = (x \dashv y)^2,$$

$$c^2 = (x \perp y) \dashv (x \perp y) = (x \perp y)^2 = (x \dashv y)^2$$

згідно з аксіомою тріоїда, асоціативністю операції $\dashv$ та лемою п. 4.2. У силу сепаративності комутативної напівгрупи $(T,\dashv)$ з $a^2 = a \dashv c = c^2$ випливає $a = c$. Отже, $\dashv = \vdash = \perp$.

(vi) Для елементів $a,b,c \in T$, введених у (i), маємо

$$2a = (x \dashv y) \vdash (x \dashv y) = 2(x \dashv y) = 2(x \vdash y) = 2(x \perp y)$$

згідно з лемою п. 7.1.

Згідно з викладками, зробленими в (ii), отримуємо

$$a \vdash b = 2\left(x \vdash y\right),\ 2b = 2\left(x \vdash y\right),$$

$$a \vdash c = 2\left(x \perp y\right),\ 2c = 2\left(x \perp y\right).$$

У силу сепаративності комутативної напівгрупи $\left(T,\vdash\right)$ з $2a = a \vdash b = 2b$ випливає $a = b$ та з $2a = a \vdash c = 2c$ випливає $a = c$.

Отже, $a = b = c$, тобто $\dashv = \vdash = \perp$.

(vii) За твердженням (iv) леми п. 7.2 $\dashv = \vdash$. Нехай $x, y \in T$ та $y = y_1 \dashv y_2$, $y_1, y_2 \in T$. Тоді

$$x \dashv y = x \dashv (y_1 \dashv y_2) = (y_2 \dashv x) \dashv y_1 =$$

$$= y_2 \dashv (x \perp y_1) = (x \perp y_1) \dashv y_2 = x \perp (y_1 \dashv y_2) = x \perp y$$

згідно з комутативністю та асоціативністю операції $\dashv$ й аксіомами тріоїда. Отже, $\dashv = \vdash = \perp$.

(viii) Нехай x, y – довільні елементи T та $x = x_1 \vdash x_2$, $x_1, x_2 \in T$. Тоді

$$x \vdash y = (x_1 \vdash x_2) \vdash y = x_2 \vdash (y \vdash x_1) = (x_2 \dashv y) \vdash x_1 =$$

$$= x_1 \vdash (x_2 \dashv y) = (x_1 \vdash x_2) \dashv y = x \dashv y,$$

$$x \vdash y = x_2 \vdash (y \vdash x_1) = (x_2 \perp y) \vdash x_1 =$$

$$= x_1 \vdash (x_2 \perp y) = (x_1 \vdash x_2) \perp y = x \perp y$$

згідно з комутативністю та асоціативністю операції $\vdash$ й аксіомами тріоїда.

Отже, $\vdash = \dashv = \perp$.

(ix) Нехай e – одиниця моноїда $(T, \dashv)$. Для всіх $x, y, z \in T$ маємо

$$(x \dashv y) \dashv z = x \dashv (y \dashv z) = x \dashv (y \vdash z) = x \dashv (y \perp z)$$

згідно з асоціативністю операції $\dashv$ та аксіомами тріоїда. Підставляючи $x = e$ в останній вираз, отримуємо $y \dashv z = y \vdash z = y \perp z$ для всіх $y, z \in T$.

(x) Нехай e – одиниця моноїда $(T, \vdash)$. Для всіх $x, y, z \in T$ маємо

$$x \vdash (y \vdash z) = (x \vdash y) \vdash z = (x \dashv y) \vdash z = (x \perp y) \vdash z$$

згідно з асоціативністю операції $\vdash$ та аксіомами тріоїда. Підставляючи $z = e$ в останній вираз, отримуємо $x \vdash y = x \dashv y = x \perp y$ для всіх $x, y \in T$.

(xi) Для всіх $x, y, z \in T$ маємо

$$x \vdash (y \dashv z) = (y \dashv z) \vdash x =$$

$$= y \vdash (z \vdash x) = (x \vdash y) \vdash z = (x \vdash y) \dashv z,$$

$$x \vdash (y \perp z) = (y \perp z) \vdash x =$$

$$= y \vdash (z \vdash x) = (x \vdash y) \vdash z = (x \vdash y) \perp z$$

згідно з комутативністю й асоціативністю операції $\vdash$ та аксіомами тріоїда. Підставляючи $x = y$ в останні вирази й використовуючи ідемпотентність операції $\vdash$, отримуємо $x \vdash z = x \dashv z = x \perp z$.

Лему доведено.

Відзначимо, що згідно з лемою 1 [9] операції тріоїда $(T, \dashv, \vdash, \perp)$ збігаються, якщо $(T, \dashv)$ – напівструктура.

7.4. У [29] описано всі групові конгруенції на довільній напівгрупі за допомогою деяких піднапівгруп цієї напівгрупи. У цьому пункті ми поширимо цей результат на тріоїди.

Якщо ρ – така конгруенція на тріоїді $(T, \dashv, \vdash, \perp)$, що операції фактор-тріоїда $(T, \dashv, \vdash, \perp)/\rho$ збігаються та він є групою, то будемо говорити, що ρ є груповою конгруенцією.

Нехай $(T, \dashv, \vdash, \perp)$ – довільний тріоїд. Для кожної піднапівгрупи H напівгрупи $(T, \dashv)$ і будь-якого $a \in T$ розглянемо множину пар

$$a : H_{\dashv} = \{(x, y) \in T \times T \mid x \dashv a \dashv y \in H\}.$$

Теорема. *Нехай* $(T,\dashv,\vdash,\perp)$ – *довільний тріоїд та* $H\subseteq(T,\dashv)$ – *піднапівгрупа така, що*

(i) $a:H_{\dashv}\neq\varnothing$ *для всіх* $a\in T$ *;*

(ii) $a:H_{\dashv}\bigcap b:H_{\dashv}\neq\varnothing\ (a,b\in T)\Rightarrow a:H_{\dashv}=b:H_{\dashv}$.

Тоді відношення $\rho_{H_{\dashv}}$*, визначене на* $(T,\dashv,\vdash,\perp)$ *за правилом:*

$$a\rho_{H_{\dashv}}b\Leftrightarrow a:H_{\dashv}=b:H_{\dashv},$$

є груповою конгруенцією. Навпаки, якщо ρ – *довільна групова конгруенція на тріоїді* $(T,\dashv,\vdash,\perp)$*, то одиничний клас* E *групи* $(T,\dashv)/\rho$ *є піднапівгрупою напівгрупи* $(T,\dashv)$*, яка задовольняє умови (i), (ii), та* $\rho=\rho_{E_{\dashv}}$ *.*

Доведення. Той факт, що відношення $\rho_{H_{\dashv}}$ є груповою конгруенцією на напівгрупі $(T,\dashv)$, доведено в [29]. Покажемо, що $\rho_{H_{\dashv}}$ є стабільним відносно операцій $\vdash$ та $\perp$.

Нехай $a\rho_{H_{\dashv}}b$, $a,b,c\in T$. Оскільки $a\dashv c\rho_{H_{\dashv}}b\dashv c$, то

$$(a\dashv c):H_{\dashv}=\{(x,y)\mid x\dashv(a\dashv c)\dashv y\in H\}=$$

$$=\{(x,y)\mid x\dashv(b\dashv c)\dashv y\in H\}=(b\dashv c):H_{\dashv}.$$

Згідно з асоціативністю операції $\dashv$ та аксіомами тріоїда отримуємо

$$x \dashv (a \dashv c) \dashv y = ((x \dashv a) \dashv c) \dashv y =$$

$$= (x \dashv (a \vdash c)) \dashv y = x \dashv (a \vdash c) \dashv y =$$

$$= (x \dashv (a \perp c)) \dashv y = x \dashv (a \perp c) \dashv y,$$

$$x \dashv (b \dashv c) \dashv y = ((x \dashv b) \dashv c) \dashv y =$$

$$= (x \dashv (b \vdash c)) \dashv y = x \dashv (b \vdash c) \dashv y =$$

$$= (x \dashv (b \perp c)) \dashv y = x \dashv (b \perp c) \dashv y.$$

Отже, з $(a \dashv c) : H_{\dashv} = (b \dashv c) : H_{\dashv}$ випливає, що

$$(a \vdash c) : H_{\dashv} = (b \vdash c) : H_{\dashv} = (a \perp c) : H_{\dashv} = (b \perp c) : H_{\dashv},$$

і таким чином, $a \vdash c \rho_{H_{\dashv}} b \vdash c$, $a \perp c \rho_{H_{\dashv}} b \perp c$. Аналогічно можна показати, що $c \vdash a \rho_{H_{\dashv}} c \vdash b$, $c \perp a \rho_{H_{\dashv}} c \perp b$. Отже, $\rho_{H_{\dashv}}$ є конгруенцією на $(T, \dashv, \vdash, \perp)$.

Оскільки $(T, \dashv) / \rho_{H_{\dashv}}$ є групою, то згідно з твердженням (ix) леми п. 7.3 операції фактор-тріоїда $(T, \dashv, \vdash, \perp) / \rho_{H_{\dashv}}$ збігаються і, таким чином, він є групою.

Обернене твердження випливає з [29].

Теорему доведено.

Остання теорема узагальнює теорему [29] про будову всіх групових конгруенцій на довільній напівгрупі.

7.5. З останньої теореми для дімоноїдів (див. п. 1.1) отримуємо такий наслідок.

Наслідок. *Нехай* $(T,\dashv,\vdash)$ *– довільний дімоноїд та* $H\subseteq(T,\dashv)$ *– піднапівгрупа така, що*

(i) $a:H_{\dashv}\neq\varnothing$ *для всіх* $a\in T$ *;*

(ii) $a:H_{\dashv}\bigcap b:H_{\dashv}\neq\varnothing\ (a,b\in T)\Rightarrow a:H_{\dashv}=b:H_{\dashv}$.

Тоді відношення $\rho_{H_{\dashv}}$, *визначене на* $(T,\dashv,\vdash)$ *за правилом:*

$$a\rho_{H_{\dashv}}b\Leftrightarrow a:H_{\dashv}=b:H_{\dashv},$$

є груповою конгруенцією. Навпаки, якщо ρ *– довільна групова конгруенція на дімоноїді* $(T,\dashv,\vdash)$, *то одиничний клас* E *групи* $(T,\dashv)\big/\rho$ *є піднапівгрупою напівгрупи* $(T,\dashv)$, *яка задовольняє умови (i), (ii), та* $\rho=\rho_{E_{\dashv}}$.

7.6. У цьому пункті представлено найменшу групову конгруенцію на тріоїді з інверсною напівгрупою, найменшу групову конгруенцію на тріоїді з ортодоксальною напівгрупою та найменшу групову конгруенцію на тріоїді з регулярною напівгрупою.

Інверсною напівгрупою S є напівгрупа, у якій кожний елемент $x\in S$ має єдиний інверсний $y\in S$ у тому сенсі, що $x=xyx$ і $y=yxy$. Напівгрупа S називається регулярною, якщо для кожного $x\in S$ існує деякий елемент $a\in S$ такий, що $xax=x$. Регулярна напівгрупа S

називається ортодоксальною, якщо в S множина ідемпотентів утворює піднапівгрупу.

На тріоїді $(T,\dashv,\vdash,\perp)$ з інверсною напівгрупою $(T,\dashv)$ визначимо відношення $\sigma_{\dashv}$, поклавши

$$a\sigma_{\dashv}b \text{ тоді й тільки тоді, коли існує ідемпотент}$$

$$e \text{ напівгрупи } (T,\dashv) \text{ такий, що } e\dashv a = e\dashv b,$$

та на тріоїді $(T,\dashv,\vdash,\perp)$ з ортодоксальною напівгрупою $(T,\dashv)$ визначимо відношення $\delta_{\dashv}$ за правилом:

$$a\delta_{\dashv}b \text{ тоді й тільки тоді, коли } e\dashv a\dashv e = e\dashv b\dashv e$$

$$\text{для деякого ідемпотента } e \text{ напівгрупи } (T,\dashv).$$

Через E_S позначатимемо множину ідемпотентів напівгрупи S. Підмножина P напівгрупи S називається рефлексивною, якщо для будь-яких $a,b\in S$ з того, що $ab\in P$ випливає, що $ba\in P$.

Нехай $(T,\dashv,\vdash,\perp)$ – довільний тріоїд з регулярною напівгрупою $(T,\dashv)$, $H\subseteq(T,\dashv)$ – рефлексивна піднапівгрупа, яка породжена множиною $E_{(T,\dashv)}$ та

$$H(\dashv)=\{x\in T \mid h\dashv x\in H \text{ для деякого } h\in H\}.$$

Визначимо відношення $\mu_{H(\dashv)}$ на $(T,\dashv,\vdash,\perp)$ за правилом:

$$a\mu_{H(\dashv)}b \Leftrightarrow x\dashv a, x\dashv b\in H(\dashv) \text{ для деякого } x\in T.$$

Має місце теорема.

Теорема. *Нехай* $(T,\dashv,\vdash,\perp)$ *– довільний тріоїд. Тоді*

(i) $\sigma_{\dashv}$ *на* $(T,\dashv,\vdash,\perp)$ *з інверсною напівгрупою* $(T,\dashv)$ *є найменшою груповою конгруенцією;*

(ii) $\delta_{\dashv}$ *на* $(T,\dashv,\vdash,\perp)$ *з ортодоксальною напівгрупою* $(T,\dashv)$ *є найменшою груповою конгруенцією;*

(iii) $\mu_{H(\dashv)}$ *на* $(T,\dashv,\vdash,\perp)$ *з регулярною напівгрупою* $(T,\dashv)$ *є найменшою груповою конгруенцією.*

Доведення. (i) Той факт, що відношення $\sigma_{\dashv}$ є найменшою груповою конгруенцією на дімоноїді $(T,\dashv,\vdash)$, доведено в [16]. Покажемо, що $\sigma_{\dashv}$ є стабільним відносно операції $\perp$.

Нехай $a\sigma_{\dashv}b$, $a,b,c\in T$. Тоді $a\dashv c\sigma_{\dashv}b\dashv c$. Це означає, що існує ідемпотент ε напівгрупи $(T,\dashv)$ такий, що $\varepsilon\dashv(a\dashv c)=\varepsilon\dashv(b\dashv c)$. Звідси

$$\varepsilon\dashv(a\dashv c)=(\varepsilon\dashv a)\dashv c=\varepsilon\dashv(a\perp c)=$$

$$=\varepsilon\dashv(b\dashv c)=(\varepsilon\dashv b)\dashv c=\varepsilon\dashv(b\perp c)$$

згідно з асоціативністю операції $\dashv$ та аксіомою тріоїда. Таким чином, $a\perp c\sigma_{\dashv}b\perp c$.

Двоїстим чином можна довести ліву стабільність відношення $\sigma_{\dashv}$ відносно операції $\perp$. Таким чином, $\sigma_{\dashv}$ є конгруенцією на $(T,\dashv,\vdash,\perp)$.

Оскільки $(T,\dashv)/\sigma_{\dashv}$ є групою, то згідно з твердженням (ix) леми п. 7.3 операції фактор-тріоїда $(T,\dashv,\vdash,\perp)/\sigma_{\dashv}$ збігаються і, таким чином, він є групою.

З [30] (див. також [16]) випливає, що $\sigma_{\dashv}$ є найменшою груповою конгруенцією.

(ii) Той факт, що відношення $\delta_{\dashv}$ є найменшою груповою конгруенцією на дімоноїді $(T,\dashv,\vdash)$, доведено в [16]. Покажемо, що $\delta_{\dashv}$ є стабільним відносно операції $\perp$.

Нехай $a\delta_{\dashv}b$, $a,b,c\in T$. Тоді $a\dashv c\delta_{\dashv}b\dashv c$. Це означає, що існує ідемпотент ε напівгрупи $(T,\dashv)$ такий, що $\varepsilon\dashv(a\dashv c)\dashv\varepsilon=\varepsilon\dashv(b\dashv c)\dashv\varepsilon.$ Звідси

$$\varepsilon\dashv(a\dashv c)\dashv\varepsilon=((\varepsilon\dashv a)\dashv c)\dashv\varepsilon=$$

$$=\varepsilon\dashv(a\perp c)\dashv\varepsilon=\varepsilon\dashv(b\dashv c)\dashv\varepsilon=$$

$$=((\varepsilon\dashv b)\dashv c)\dashv\varepsilon=\varepsilon\dashv(b\perp c)\dashv\varepsilon$$

згідно з асоціативністю операції $\dashv$ та аксіомою тріоїда. Таким чином, $a\perp c\delta_{\dashv}b\perp c$.

Двоїстим чином можна довести ліву стабільність відношення $\delta_{\dashv}$ відносно операції $\perp$. Таким чином, $\delta_{\dashv}$ є конгруенцією на $(T,\dashv,\vdash,\perp)$.

Оскільки ${(T,\dashv)}\big/{\delta_{\dashv}}$ є групою, то згідно з твердженням (ix) леми п. 7.3 операції фактор-тріоїда ${(T,\dashv,\vdash,\perp)}\big/{\delta_{\dashv}}$ збігаються та він є групою.

З [31] (див. також [16]) випливає, що $\delta_{\dashv}$ є найменшою груповою конгруенцією.

(iii) Той факт, що відношення $\mu_{H(\dashv)}$ є груповою конгруенцією на напівгрупі $(T,\dashv)$, доведено в [32]. Покажемо, що $\mu_{H(\dashv)}$ є стабільним відносно операцій $\vdash$ та $\perp$.

Нехай $a\mu_{H(\dashv)}b$, $a,b,c\in T$. Оскільки $a\dashv c\mu_{H(\dashv)}b\dashv c$, то $y\dashv(a\dashv c), y\dashv(b\dashv c)\in H(\dashv)$ для деякого $y\in T$. Згідно з асоціативністю операції $\dashv$ та аксіомами тріоїда отримуємо

$$y\dashv(a\dashv c)=(y\dashv a)\dashv c=y\dashv(a\vdash c)=y\dashv(a\perp c),$$

$$y\dashv(b\dashv c)=(y\dashv b)\dashv c=y\dashv(b\vdash c)=y\dashv(b\perp c).$$

Отже,

$$y\dashv(a\vdash c), y\dashv(b\vdash c), y\dashv(a\perp c), y\dashv(b\perp c)\in H(\dashv)$$

для деякого $y\in T$, і таким чином, $a\vdash c\mu_{H(\dashv)}b\vdash c$, $a\perp c\mu_{H(\dashv)}b\perp c$. Аналогічно можна показати, що $c\vdash a\mu_{H(\dashv)}c\vdash b$, $c\perp a\mu_{H(\dashv)}c\perp b$. Отже, $\mu_{H(\dashv)}$ є конгруенцією на $(T,\dashv,\vdash,\perp)$.

Оскільки $(T,\dashv)/\mu_{H(\dashv)}$ є групою, то згідно з твердженням (ix) леми п. 7.3 операції фактор-тріоїда $(T,\dashv,\vdash,\perp)/\mu_{H(\dashv)}$ збігаються і, таким чином, він є групою.

З [32] випливає, що $\mu_{H(\dashv)}$ є найменшою груповою конгруенцією.

Теорему доведено.

Твердження (i) останньої теореми узагальнює опис [30] найменшої групової конгруенції на інверсній напівгрупі та результат [16] про будову найменшої групової конгруенції на дімоноїді з інверсною напівгрупою. Твердження (ii) узагальнює опис [31] найменшої групової конгруенції на ортодоксальній напівгрупі та результат [16] про будову найменшої групової конгруенції на дімоноїді з ортодоксальною напівгрупою. Твердження (iii) узагальнює опис [32] найменшої групової конгруенції на регулярній напівгрупі.

7.7. З твердження (iii) останньої теореми для дімоноїдів отримуємо такий наслідок.

Наслідок. *Нехай* $(T,\dashv,\vdash)$ *– довільний дімоноїд з регулярною напівгрупою* $(T,\dashv)$, $H\subseteq(T\dashv)$ *– рефлексивна піднапівгрупа, яка породжена множиною* $E_{(T,\dashv)}$ *та* $H(\dashv)=\{x\in T\mid h\dashv x\in H$ *для деякого* $h\in H\}$. *Тоді відношення* $\mu_{H(\dashv)}$, *визначене на* $(T,\dashv,\vdash)$ *за правилом:*

$$a\mu_{H(\dashv)}b\Leftrightarrow x\dashv a, x\dashv b\in H(\dashv) \text{ для деякого } x\in T,$$

є найменшою груповою конгруенцією.

ЛЕКЦІЯ 8.

Напівретракції тріоїдів

Поняття напівретракції, яке було введено В. М. Усенком [34], є ефективним при описі конгруенцій на напівгрупах. Деякі застосування техніки напівретракцій напівгруп наведено в [35 – 38]. У [39] техніку В. М. Усенка напівретракцій моноїдів поширено на випадок дімоноїдів.

У цьому розділі (див. також [40]) визначається і вивчається поняття напівретракції тріоїда. Наведено приклади лівих, правих та симетричних напівретракцій тріоїдів.

8.1. У цьому пункті введено поняття лівої (правої, симетричної) напівретракції тріоїда.

Перетворення τ тріоїда $(T, \dashv, \vdash, \perp)$ називатимемо лівою напівретракцією, якщо

$$(x \dashv y)\tau = (x\tau \dashv y)\tau, \tag{8.1}$$

$$(x \vdash y)\tau = (x\tau \vdash y)\tau, \tag{8.2}$$

$$(x \perp y)\tau = (x\tau \perp y)\tau \tag{8.3}$$

при будь-яких $x, y \in T$. Якщо замість (8.1), (8.2), (8.3) виконуються тотожності

$$(x \dashv y) = (x \dashv y\tau)\tau, \tag{8.4}$$

$$(x \vdash y\tau)\tau = (x \vdash y\tau)\tau, \tag{8.5}$$

$$(x \perp y)\tau = (x \perp y\tau)\tau, \tag{8.6}$$

то будемо говорити про праву напівретракцію.

Якщо для перетворення τ тріоїда $(T, \dashv, \vdash, \perp)$ виконуються тотожності (8.1) – (8.6), то перетворення τ називатимемо (симетричною) напівретракцією тріоїда $(T, \dashv, \vdash, \perp)$.

8.2. У пунктах 8.2 – 8.7 досліджено загальні властивості лівих (правих, симетричних) напівретракцій тріоїда.

Для будь-якого перетворення τ тріоїда $(T, \dashv, \vdash, \perp)$ покладемо

$$\nabla_\tau = \{(x, y) \in T \times T \mid x\tau = y\tau\}.$$

Наступні чотири леми доводяться аналогічно відповідним лемам п.п. 1.1 – 1.4 роботи [39].

Лема. *Ідемпотентне перетворення τ тріоїда $(T, \dashv, \vdash, \perp)$ є його лівою напівретракцією тоді й лише тоді, коли відношення ∇_τ його рівнозначності є правою конгруенцією на цьому тріоїді.*

8.3. У двоїстий спосіб отримуємо лему.

Лема. *Ідемпотентне перетворення τ тріоїда $(T, \dashv, \vdash, \perp)$ є його правою напівретракцією тоді й лише тоді, коли відношення ∇_τ його рівнозначності є лівою конгруенцією на цьому тріоїді.*

8.4. Має місце лема.

Лема. *Для кожної правої конгруенції* ω *на тріоїді* $(T, \dashv, \vdash, \perp)$ *існує його ліва напівретракція* τ *така, що* $\nabla_\tau = \omega$.

8.5. У двоїстий спосіб отримуємо лему.

Лема. *Для кожної лівої конгруенції* ω *на тріоїді* $(T, \dashv, \vdash, \perp)$ *існує його права напівретракція* τ *така, що* $\nabla_\tau = \omega$.

8.6. Нехай τ – симетрична напівретракція тріоїда $\overline{T} = (T, \dashv, \vdash, \perp)$ (див. п. 8.1). На множині $Im\tau$ визначимо операції $\dashv_\tau, \vdash_\tau$ та $\perp_\tau$ за правилами:

$$x \dashv_\tau y = (x \dashv y)\tau, \; x \vdash_\tau y = (x \vdash y)\tau, \; x \perp_\tau y = (x \perp y)\tau$$

для всіх $x, y \in Im\tau$. Алгебру $(Im\tau, \dashv_\tau, \vdash_\tau, \perp_\tau)$ позначимо через $\overline{T}^\tau$.

Лема. $\overline{T}^\tau$ *є тріоїдом.*

Доведення. При будь-яких $x, y, z \in Im\tau$ матимемо

$$(x \perp_\tau y) \perp_\tau z = (x \perp y)\tau \perp_\tau z =$$

$$= ((x \perp y)\tau \perp z)\tau = ((x \perp y) \perp z)\tau =$$

$$= (x \perp (y \perp z))\tau = (x \perp (y \perp z)\tau)\tau =$$

$$= x \perp_\tau (y \perp z)\tau = x \perp_\tau (y \perp_\tau z),$$

$$(x \dashv_\tau y) \dashv_\tau z = ((x \dashv y)\tau \dashv z)\tau = ((x \dashv y) \dashv z)\tau =$$

$$= (x \dashv (y \perp z))\tau = (x \dashv (y \perp z)\tau)\tau =$$

$$= x \dashv_{\tau} (y \perp z)\tau = x \dashv_{\tau} (y \perp_{\tau} z),$$

$$(x \perp_{\tau} y) \dashv_{\tau} z = ((x \perp y)\tau \dashv z)\tau = ((x \perp y) \dashv z)\tau =$$

$$= (x \perp (y \dashv z))\tau = (x \perp (y \dashv z)\tau)\tau =$$

$$= x \perp_{\tau} (y \dashv z)\tau = x \perp_{\tau} (y \dashv_{\tau} z),$$

$$(x \dashv_{\tau} y) \perp_{\tau} z = ((x \dashv y)\tau \perp z)\tau = ((x \dashv y) \perp z)\tau =$$

$$= (x \perp (y \vdash z))\tau = (x \perp (y \vdash z)\tau)\tau =$$

$$= x \perp_{\tau} (y \vdash z)\tau = x \perp_{\tau} (y \vdash_{\tau} z),$$

$$(x \vdash_{\tau} y) \perp_{\tau} z = ((x \vdash y)\tau \perp z)\tau = ((x \vdash y) \perp z)\tau =$$

$$= (x \vdash (y \perp z))\tau = (x \vdash (y \perp z)\tau)\tau =$$

$$= x \vdash_{\tau} (y \perp z)\tau = x \vdash_{\tau} (y \perp_{\tau} z),$$

$$(x \perp_{\tau} y) \vdash_{\tau} z = ((x \perp y)\tau \vdash z)\tau = ((x \perp y) \vdash z)\tau =$$

$$= (x \vdash (y \vdash z))\tau = (x \vdash (y \vdash z)\tau)\tau =$$

$$= x \vdash_{\tau} (y \vdash z)\tau = x \vdash_{\tau} (y \vdash_{\tau} z)$$

згідно з аксіомами тріоїда $\overline{T}$, асоціативністю операції $\perp$ та тотожностями (8.1) – (8.6). Отже, аксіоми $(T4)-(T8)$ тріоїда та асоціативність операції $\perp_{\tau}$ виконуються. Справедливість аксіом $(T1)-(T3)$ та асоціативність операцій $\dashv_{\tau}$, $\vdash_{\tau}$ випливають з п. 3.1 роботи [39].

Таким чином, $\overline{T}^{\tau}$ – тріоїд.

Лему доведено.

Тріоїд $\overline{T}^{\tau}$ називатимемо τ-мутацією тріоїда $\overline{T}$. Легко побачити, що відображення

$$\tau^{\#} : \overline{T} \to \overline{T}^{\tau} : x \mapsto x\tau^{\#} = x\tau$$

є гомоморфізмом тріоїдів.

8.7. Загальну характеристику симетричних напівретракцій дає твердження.

Твердження. *Для ідемпотентного перетворення* π *тріоїда* $(T, \dashv, \vdash, \perp)$ *еквівалентними є твердження:*

1) π *є симетричною напівретракцією;*

2) π *є лівою напівретракцією, а відношення* ∇_{π} *її рівнозначності є конгруенцією на тріоїді* $(T, \dashv, \vdash, \perp)$*;*

3) π *є правою напівретракцією, а відношення* ∇_{π} *її рівнозначності є конгруенцією на тріоїді* $(T, \dashv, \vdash, \perp)$*;*

4) для всіх $x, y \in T$ *виконуються тотожності:*

$$(x \dashv y)\pi = (x\pi \dashv y\pi)\pi,$$

$$(x \vdash y)\pi = (x\pi \vdash y\pi)\pi,$$

$$(x \perp y)\pi = (x\pi \perp y\pi)\pi.$$

Доведення є аналогічним доведенню твердження п. 3.2 роботи [39].

Таким чином, задача опису конгруенцій на тріоїдах заданого класу зводиться до опису напівретракцій цих тріоїдів. Тобто, знаючи дію напівретракції на тріоїді, ми можемо побудувати єдину конгруенцію, що їй відповідає, і навпаки, знаючи будову конгруенції на тріоїді, можна задати клас напівретракцій, відношення рівнозначності за якими збігаються з заданою конгруенцією.

8.8. Один з прикладів лівих напівретракцій виникає при розгляді внутрішніх лівих зсувів тріоїдів.

Нехай $(T, \dashv, \vdash, \perp)$ – довільний тріоїд. Перетворення $\lambda_a, a \in T,$ тріоїда $(T, \dashv, \vdash, \perp)$ назвемо внутрішнім лівим зсувом $(T, \dashv, \vdash, \perp)$, якщо $x\lambda_a = a \vdash x$ для всіх $x \in T$.

Твердження. *Якщо $a \in T$ та $a \vdash a = a$, то внутрішній лівий зсув λ_a тріоїда $(T, \dashv, \vdash, \perp)$ є лівою напівретракцією. При цьому $Im\lambda_a$ – підтріоїд тріоїда $(T, \dashv, \vdash, \perp)$.*

Доведення. Згідно з доведенням твердження п. 2.2 [39] для λ_a виконуються умови (8.1), (8.2). Покажемо, що для λ_a має місце й умова (8.3).

Для будь-яких $x, y \in T$ маємо

$$(x \perp y)\lambda_a = a \vdash (x \perp y) = a \vdash (a \vdash (x \perp y)) =$$

$$= a \vdash ((a \vdash x) \perp y) = a \vdash (x\lambda_a \perp y) = (x\lambda_a \perp y)\lambda_a$$

завдяки умові $a \vdash a = a$, асоціативності операції $\vdash$ та аксіомі $(T7)$ тріоїда.

Отже, λ_a є лівою напівретракцією.

Згідно з доведенням твердження п. 2.2 [39] множина $Im\lambda_a$ є замкненою відносно операцій $\dashv$ та $\vdash$. Покажемо, що вона замкнута й відносно операції $\perp$.

Зрозуміло, що $Im\lambda_a = a \vdash T$. Візьмемо елементи $a \vdash x, a \vdash y \in Im\lambda_a$, для яких отримаємо

$$((a \vdash x) \perp (a \vdash y))\lambda_a = a \vdash ((a \vdash x) \perp (a \vdash y)) =$$

$$= (a \vdash (a \vdash x)) \perp (a \vdash y) = (a \vdash x) \perp (a \vdash y)$$

завдяки аксіомі $(T7)$ тріоїда, асоціативності операції $\vdash$ та умові $a \vdash a = a$. Звідси випливає, що $Im\lambda_a$ є замкненою відносно операції $\perp$. Таким чином, $Im\lambda_a$ – підтріоїд тріоїда $(T, \dashv, \vdash, \perp)$.

Твердження доведено.

8.9. Нехай $(T, \dashv, \vdash, \perp)$ – довільний тріоїд. Перетворення $\rho_a, a \in T$, тріоїда $(T, \dashv, \vdash, \perp)$ назвемо внутрішнім правим зсувом $(T, \dashv, \vdash, \perp)$, якщо $x\rho_a = x \dashv a$ для всіх $x \in T$.

У двоїстий спосіб (див. п. 8.8) доводиться наступне твердження.

Твердження. *Якщо $a \in T$ та $a \dashv a = a$, то внутрішній правий зсув ρ_a тріоїда $(T, \dashv, \vdash, \perp)$ є правою* *напівретракцією. При цьому* $Im\rho_a$ *– підтріоїд тріоїда* $(T, \dashv, \vdash, \perp)$.

8.10. У цьому пункті наведено праву напівретракцію вільного тріоїда рангу 1.

Нехай $w \in Frt(X)$ (див. п. 3.1). Через $\vec{w}$ ($\overleftarrow{w}$) позначатимемо початкове (кінцеве) слово мінімальної довжини слова w, яке закінчується (починається) літерою $\bar{x}$.

Нехай

$$\pi : Frt(X) \to Frt(X) : w \mapsto \vec{w}.$$

Твердження. *Перетворення* π *є правою напівретракцією вільного тріоїда* $Frt(X)$.

Доведення. Дійсно, для довільних $w, u \in Frt(X)$ отримуємо

$$(w \dashv u)\pi = (w\tilde{u})\pi = \vec{w} = (w\tilde{\vec{u}})\pi = (w \dashv \vec{u})\pi = (w \dashv u\pi)\pi,$$

$$(w \vdash u)\pi = (\tilde{w}u)\pi = \tilde{w}\vec{u} = (\tilde{w}\vec{u})\pi = (w \vdash \vec{u})\pi = (w \vdash u\pi)\pi,$$

$$(w \perp u)\pi = (wu)\pi = \vec{w} = (w\vec{u})\pi = (w \perp \vec{u})\pi = (w \perp u\pi)\pi,$$

звідки, за визначенням, π є правою напівретракцією.

Нарешті, покажемо, що π не є лівою напівретракцією:

$$(w \vdash u)\pi = (\tilde{w}u)\pi = \tilde{w}\vec{u} \neq \tilde{\vec{w}}\vec{u} = (\tilde{\vec{w}}u)\pi = (\vec{w} \vdash u)\pi = (w\pi \vdash u)\pi.$$

Твердження доведено.

8.11. Нехай

$$\pi^{'} : Frt(X) \to Frt(X) : w \mapsto \overleftarrow{w}.$$

У двоїстий спосіб (див. п. 8.10) доводиться таке твердження.

Твердження. *Перетворення* $\pi^{'}$ *є лівою напівретракцією вільного тріоїда* $Frt(X)$.

8.12. У цьому пункті встановлено необхідні та достатні умови, за якими ідемпотентне перетворення τ тріоїда $T_{lr}^{\perp}$ (див. п. 1.5) є його напівретракцією та охарактеризовано в цьому випадку відповідну τ -мутацію.

Відзначимо спочатку, що якщо операції довільного тріоїда збігаються, то з визначення лівої (правої, симетричної) напівретракції тріоїда (див. п. 8.1) отримуємо визначення лівої (правої, симетричної) напівретракції напівгрупи (див. [36]).

Розглянемо тріоїд $T_{lr}^{\perp}$, визначений у п. 1.5. У позначеннях п. 8.6 має місце теорема.

Теорема. *Ідемпотентне перетворення* τ *тріоїда* $T_{lr}^{\perp}$ *є його напівретракцією тоді й тільки тоді, коли* τ *є ідемпотентною напівретракцією напівгрупи* $(T, \perp)$. *При цьому* $(T_{lr}^{\perp})^{\tau} = (Im\tau)_{lr}^{\perp_\tau}$.

Доведення. Необхідність випливає з визначення напівретракції тріоїда.

Достатність. Нехай τ – ідемпотентна напівретракція напівгрупи $(T,\perp)$. Для всіх $x, y \in T$ маємо

$$(x \dashv y)\tau = x\tau = x\tau^2 = (x\tau \dashv y\tau)\tau,$$

$$(x \vdash y)\tau = y\tau = y\tau^2 = (x\tau \vdash y\tau)\tau.$$

Отже, згідно з твердженням п. 8.7 τ – ідемпотентна напівретракція тріоїда $T_{lr}^{\perp}$. Неважко перевірити, що τ-мутація $\left(T_{lr}^{\perp}\right)^{\tau}$ тріоїда $T_{lr}^{\perp}$ збігається з тріоїдом $(Im\tau)_{lr}^{\perp_\tau}$.

Теорему доведено.

8.13. У цьому пункті побудовано напівретракцію вільного тріоїда рангу 1 та описано відповідну мутацію.

Як і раніше, через N позначатимемо множину натуральних чисел.

Нехай $w \in Frt(X)$ (див. п. 3.1). Через $c(w)$ позначимо множину елементів з X, які входять до запису слова w. Визначимо перетворення α множини P, поклавши $w\alpha$ – слово, отримане з w видаленням усіх літер x, якщо $x \in c(w)$, та $w\alpha = w$ в іншому випадку. Наприклад, якщо $w = x\overline{x}\,\overline{x}\,x\overline{x}$, то $w\alpha = \overline{x}\,\overline{x}\,\overline{x}$.

У позначеннях п.п. 8.6, 3.1 має місце теорема.

Теорема. *Перетворення* α *є напівретракцією вільного тріоїда* $Frt(X)$. *При цьому* $Frt(X)^{\alpha} \cong N_{lr}^{+}$.

Доведення. Неважко побачити, що $\alpha^2=\alpha$ та α – ендоморфізм напівгрупи $(P,\perp)$. Для всіх $w,u\in Frt(X)$ маємо

$$(w\dashv u)\alpha=(w\tilde{u})\alpha=w\alpha=(w\alpha)\alpha=$$

$$=(w\alpha\,\widetilde{u\alpha})\alpha=(w\alpha\dashv u\alpha)\alpha,$$

$$(w\vdash u)\alpha=(\tilde{w}u)\alpha=u\alpha=(u\alpha)\alpha=$$

$$=(\widetilde{w\alpha}\,u\alpha)\alpha=(w\alpha\vdash u\alpha)\alpha,$$

$$(wu)\alpha=(w\perp u)\alpha=w\alpha\perp u\alpha=$$

$$=(wu)\alpha^2=(w\alpha\perp u\alpha)\alpha.$$

Отже, згідно з твердженням п. 8.7 α – напівретракція $Frt(X)$.

Зрозуміло, що $Im\alpha=\{\overline{x}^n \mid n\in N\}$. Визначимо відображення

$$\theta : Frt(X)^\alpha \to N^+_{lr}\ :\ \overline{x}^n\mapsto n.$$

Покажемо, що θ – ізоморфізм. Для довільних елементів $\overline{x}^n,\overline{x}^\kappa\in Frt(X)^\alpha$ маємо

$$(\overline{x}^n)\theta=n,\ (\overline{x}^\kappa)\theta=\kappa,$$

$$(\overline{x}^n\dashv_\alpha \overline{x}^\kappa)\theta=(\overline{x}^n\dashv\overline{x}^\kappa)\alpha\theta=$$

$$=\left(\overline{x}^{n}x^{\kappa}\right)\alpha\theta=\overline{x}^{n}\theta=n=n\dashv k=\overline{x}^{n}\theta\dashv\overline{x}^{k}\theta,$$

$$(\overline{x}^{n}\vdash_{\alpha}\overline{x}^{\kappa})\theta=(\overline{x}^{n}\vdash\overline{x}^{\kappa})\alpha\theta=(x^{n}\overline{x}^{\kappa})\alpha\theta=$$

$$=\overline{x}^{\kappa}\theta=\kappa=n\vdash\kappa=\overline{x}^{n}\theta\vdash\overline{x}^{\kappa}\theta,$$

$$(\overline{x}^{n}\perp_{\alpha}\overline{x}^{\kappa})\theta=(\overline{x}^{n}\perp\overline{x}^{\kappa})\alpha\theta=(\overline{x}^{n+\kappa})\alpha\theta=$$

$$=\overline{x}^{n+\kappa}\theta=n+\kappa=\overline{x}^{n}\theta+\overline{x}^{\kappa}\theta.$$

Таким чином,

$$\left(\overline{x}^{n}\dashv_{\alpha}\overline{x}^{\kappa}\right)\theta=\overline{x}^{n}\theta\dashv\overline{x}^{\kappa}\theta,$$

$$\left(\overline{x}^{n}\vdash_{\alpha}\overline{x}^{\kappa}\right)\theta=\overline{x}^{n}\theta\vdash\overline{x}^{\kappa}\theta,$$

$$\left(\overline{x}^{n}\perp_{\alpha}\overline{x}^{\kappa}\right)\theta=\overline{x}^{n}\theta+\overline{x}^{\kappa}\theta$$

для всіх $\overline{x}^{n},\overline{x}^{\kappa}\in Frt\left(X\right)^{\alpha}$, тобто θ – гомоморфізм. Неважко побачити, що θ – бієктивне відображення. Таким чином, θ – ізоморфізм.

Теорему доведено.

ЛЕКЦІЯ 9.

Деякі теоретико-тріоїдні конструкції

У цьому розділі (див. також [40]) розглянуто питання про можливість узагальнення конструкції дімоноїда Ріса [39] на випадок тріоїда. Знайдено необхідні та достатні умови існування тріоїдів Ріса. Вказано приклади тріоїда Ріса та алгебри, що узагальнює дімоноїд Ріса, але не є тріоїдом. Для тріоїдів Ріса побудовано один клас симетричних напівретракцій. Також розглянуто питання про можливість узагальнення конструкції дімоноїда з деформованими множеннями [39] на випадок тріоїда. Встановлено необхідні та достатні умови існування тріоїдів з деформованими множеннями. Вказано приклади тріоїда з деформованими множеннями та алгебри, що узагальнює дімоноїд з деформованими множеннями, але не є тріоїдом. Для тріоїдів з деформованими множеннями охарактеризовано симетричні напівретракції.

9.1. Нехай $\overline{T} = (T, \dashv, \vdash, \perp)$ – довільний тріоїд, $I, \mathcal{J}$ – довільні непорожні множини, для яких визначено відображення

$$p : \mathcal{J} \times I \to T : (j,i) \mapsto (j,i)p = p_{ji}.$$

Визначимо на множині $T' = I \times T \times \mathcal{J}$ операції за правилами:

$$(i,g,j) \dashv '(k,h,l) = (i, g \dashv p_{jk} \dashv h, l),$$

$$(i,g,j) \vdash '(k,h,l) = (i, g \vdash p_{jk} \vdash h, l),$$

$$(i,g,j)\perp'(k,h,l)=(i,g\perp p_{jk}\perp h,l)$$

для всіх $(i,g,j),(k,h,l)\in T'$. Алгебру $(T',\dashv',\vdash',\perp')$ позначимо через $M\left(I,\overline{T},\mathcal{J};p\right)$.

Якщо замість $(T,\dashv,\vdash,\perp)$ взяти дімоноїд $(T,\dashv,\vdash)$ (див. п. 1.1), то алгебра $(T',\dashv',\vdash')$ стає дімоноїдом Ріса, який вперше був побудований у [39]. Дімоноїд Ріса є узагальненням напівгрупи Ріса матричного типу над структурною напівгрупою [24].

Природним є питання про можливість узагальнення дімоноїда Ріса на випадок тріоїда. Наступне твердження дає необхідні та достатні умови, за якими алгебра $M\left(I,\overline{T},\mathcal{J};p\right)$ є тріоїдом.

Теорема. *Алгебра* $M\left(I,\overline{T},\mathcal{J};p\right)$ *є тріоїдом тоді й лише тоді, коли вона задовольняє аксіому* $(T6)$ *тріоїда.*

Доведення. Необхідність є очевидною.

Доведемо достатність. Нехай $M\left(I,\overline{T},\mathcal{J};p\right)$ задовольняє аксіому $(T6)$. Згідно з [24] операції $\dashv',\vdash'$ та $\perp'$ є асоціативними. Той факт, що $M\left(I,\overline{T},\mathcal{J};p\right)$ задовольняє аксіоми $(T1)-(T3)$, випливає з леми п. 3.3 роботи [39].

Нехай $(i,a,j),(k,b,t),(m,c,n)$ – довільні елементи алгебри $M\left(I,\overline{T},\mathcal{J};p\right)$. Тоді

$$\left(\left(i,a,j\right)\dashv'\left(k,b,t\right)\right)\dashv'\left(m,c,n\right)=$$

$$=\left(i,a\dashv p_{jk}\dashv b,t\right)\dashv'\left(m,c,n\right)=$$

$$=\left(i,\left(a\dashv p_{jk}\dashv b\right)\dashv p_{tm}\dashv c,n\right)=$$

$$=(i,((a\dashv p_{jk})\dashv b)\dashv p_{tm}\perp c,n)=$$

$$=\left(i,\left(a\dashv p_{jk}\right)\dashv\left(b\perp\left(p_{tm}\perp c\right)\right),n\right)=$$

$$=(i,a\dashv p_{jk}\dashv(b\perp p_{tm}\perp c),n)=$$

$$=\left(i,a,j\right)\dashv'\left(k,b\perp p_{tm}\perp c,n\right)=$$

$$=\left(i,a,j\right)\dashv'\left(\left(k,b,t\right)\perp'\left(m,c,n\right)\right),$$

$$\left(\left(i,a,j\right)\perp'\left(k,b,t\right)\right)\dashv'\left(m,c,n\right)=$$

$$=\left(i,a\perp p_{jk}\perp b,t\right)\dashv'\left(m,c,n\right)=$$

$$=\left(i,\left(a\perp p_{jk}\perp b\right)\dashv p_{tm}\dashv c,n\right)=$$

$$=\left(i,\left(\left(a\perp p_{jk}\right)\perp b\right)\dashv p_{tm}\dashv c,n\right)=$$

$$=\left(i,\left(a\perp p_{jk}\right)\perp\left(b\dashv\left(p_{tm}\dashv c\right)\right),n\right)=$$

$$=(i,a\perp p_{jk}\perp(b\dashv p_{tm}\dashv c),n)=$$

$$=\left(i,a,j\right)\perp'\left(k,b\dashv p_{tm}\dashv c,n\right)=$$

$$=(i,a,j)\perp'\left((k,b,t)\dashv'(m,c,n)\right),$$

$$\left((i,a,j)\vdash'(k,b,t)\right)\perp'(m,c,n)=$$

$$=\left(i,a\vdash p_{jk}\vdash b,t\right)\perp'(m,c,n)=$$

$$=\left(i,\left(a\vdash p_{jk}\vdash b\right)\perp p_{tm}\perp c,n\right)=$$

$$=\left(i,\left(\left(a\vdash p_{jk}\right)\vdash b\right)\perp p_{tm}\perp c,n\right)=$$

$$=\left(i,\left(a\vdash p_{jk}\right)\vdash\left(b\perp\left(p_{tm}\perp c\right)\right),n\right)=$$

$$=\left(i,a\vdash p_{jk}\vdash\left(b\perp p_{tm}\perp c\right),n\right)=$$

$$=(i,a,j)\vdash'\left(k,b\perp p_{tm}\perp c,n\right)=$$

$$=(i,a,j)\vdash'\left((k,b,t)\perp'(m,c,n)\right),$$

$$\left((i,a,j)\perp'(k,b,t)\right)\vdash'(m,c,n)=$$

$$=\left(i,a\perp p_{jk}\perp b,t\right)\vdash'(m,c,n)=$$

$$=\left(i,\left(a\perp p_{jk}\perp b\right)\vdash p_{tm}\vdash c,n\right)=$$

$$=\left(i,\left(\left(a\perp p_{jk}\right)\perp b\right)\vdash p_{tm}\vdash c,n\right)=$$

$$=\left(i,\left(a\perp p_{jk}\right)\vdash\left(b\vdash p_{tm}\vdash c\right),n\right)=$$

$$=(i,a\vdash p_{jk}\vdash b\vdash p_{tm}\vdash c,n)=$$

$$=(i,a,j)\vdash'(k,b\vdash p_{tm}\vdash c,n)=$$

$$=(i,a,j)\vdash'((k,b,t)\vdash'(m,c,n))$$

згідно з аксіомами тріоїда $\overline{T}$ та асоціативністю операцій $\dashv,\vdash,\perp$. Це означає, що $M\left(I,\overline{T},\mathcal{J};p\right)$ задовольняє аксіоми $(T4)$, $(T5)$, $(T7)$, $(T8)$.

Оскільки алгебра $M\left(I,\overline{T},\mathcal{J};p\right)$ задовольняє аксіоми $(T1)-(T8)$, то вона є тріоїдом.

Теорему доведено.

9.2. З останньої теореми отримуємо наслідок.

Наслідок. *Алгебра* $M\left(I,\overline{T},\mathcal{J};p\right)$ *задовольняє аксіоми* $(T1)-(T5)$, $(T7)$, $(T8)$ *тріоїда.*

9.3. Використовуючи позначення п. 9.1 та п. 1.5, покажемо, що існують алгебри $M\left(I,\overline{T},\mathcal{J};p\right)$, які є тріоїдами.

Твердження. *Нехай* T *– непорожня множина,* $g\in T$ *та*

$$p:T\times T\to T:(j,i)\mapsto(j,i)p=p_{ji}=g.$$

Тоді алгебра $M\left(T,T_{lr}^{\perp},T;p\right)$ *є тріоїдом.*

Доведення. Для всіх

$$(i,a,j),(k,b,t),(m,c,n)\in M\left(T,T_{lr}^{\perp},T;p\right)$$

маємо

$$\left((i,a,j)\dashv'(k,b,t)\right)\perp'(m,c,n)=$$

$$=\left(i,a\dashv p_{jk}\dashv b,t\right)\perp'(m,c,n)=$$

$$=(i,a,t)\perp'(m,c,n)=\left(i,a\perp p_{tm}\perp c,n\right)=$$

$$=(i,a\perp g\perp c,n)=\left(i,a\perp p_{jk}\perp c,n\right)=$$

$$=(i,a,j)\perp'(k,c,n)=(i,a,j)\perp'(k,b\vdash p_{tm}\vdash c,n)=$$

$$=(i,a,j)\perp'\left((k,b,t)\vdash'(m,c,n)\right).$$

Це означає, що $M\left(T,T_{lr}^{\perp},T;p\right)$ задовольняє аксіому $(T6)$. Звідси за теоремою п. 9.1 $M\left(T,T_{lr}^{\perp},T;p\right)$ є тріоїдом.

Твердження доведено.

Кожний тріоїд $M\left(I,\overline{T},\mathcal{J};p\right)$ називатимемо тріоїдом Ріса. Відмітимо, що тріоїд Ріса узагальнює дімоноїд Ріса [39] та напівгрупу Ріса матричного типу над структурною напівгрупою [24].

9.4. Як і раніше, через N будемо позначати множину натуральних чисел.

Наступне твердження дає приклад алгебри $M\left(I,\overline{T},\mathcal{J};p\right)$, яка не є тріоїдом.

Твердження. *Нехай*

$$p : N \times N \to N : (j,i) \mapsto (j,i)\, p = p_{ji} = j + i.$$

Тоді алгебра $M\left(N, N_{lr}^{+}, N; p\right)$ *не є тріоїдом.*

Доведення. Для довільних

$$(i,g,j),(k,h,l),(m,c,n) \in M(N, N_{lr}^{+}, N; p)$$

таких, що $l + m \neq j + k$, маємо

$$((i,g,j) \dashv' (k,h,l)) \perp' (m,c,n) =$$

$$= (i, g \dashv p_{jk} \dashv h, l) \perp' (m,c,n) =$$

$$= (i,g,l) \perp' (m,c,n) = (i, g + p_{lm} + c, n) =$$

$$= (i, g + l + m + c, n),$$

$$(i,g,j) \perp' ((k,h,l) \vdash' (m,c,n)) =$$

$$= (i,g,j) \perp' (k, h \vdash p_{lm} \vdash c, n) =$$

$$= (i,g,j) \perp' (k,c,n) = (i, g + p_{jk} + c, n) =$$

$$= (i, g + j + k + c, n).$$

Оскільки $l + m \neq j + k$, то

$$(i, g + l + m + c, n) \neq (i, g + j + k + c, n).$$

Отже, аксіома $(T6)$ тріоїда не виконується для $M(N, N_{lr}^{+}, N; p)$. Звідси $M(N, N_{lr}^{+}, N; p)$ не є тріоїдом.

Твердження доведено.

9.5. Побудуємо один клас симетричних напівретракцій (див. п. 8.1) тріоїдів Ріса.

Нехай $\overline{T} = (T, \dashv, \vdash, \perp)$ – деякий тріоїд, $M\left(I, \overline{T}, \mathcal{J}; p\right)$ – тріоїд Ріса (див. п. 9.3), τ – ідемпотентна напівретракція тріоїда $\overline{T}$, α та β – такі ідемпотенти симетричних напівгруп $\Im(I)$ та, відповідно, $\Im(\mathcal{J})$, що виконується умова:

$$p_{ji} = p_{j\beta i\alpha},\ j \in \mathcal{J},\ i \in I.$$

Визначимо перетворення $\sigma_{\tau}^{[\alpha;\beta]}$ тріоїда $M\left(I, \overline{T}, \mathcal{J}; p\right)$, поклавши

$$(i, a, j)\sigma_{\tau}^{[\alpha;\beta]} = (i\alpha, a\tau, j\beta)$$

для всіх $(i, a, j) \in M\left(I, \overline{T}, \mathcal{J}; p\right)$.

Аналогічно теоремі п. 3.4 [39] доводиться наступна теорема.

Теорема. *Будь-яке перетворення* $\sigma_{\tau}^{[\alpha;\beta]}$ *тріоїда Ріса* $M\left(I, \overline{T}, \mathcal{J}; p\right)$ *є напівретракцією.*

9.6. Нехай $(T, \dashv, \vdash, \perp)$ – довільний тріоїд, a – довільний, але фіксований елемент із T. На множині T визначимо операції $\dashv_a, \vdash_a$ та $\perp_a$ за правилами:

$$x \dashv_a y = x \dashv a \dashv y,\ x \vdash_a y = x \vdash a \vdash y,\ x \perp_a y = x \perp a \perp y$$

для всіх $x, y \in T$. Алгебру $(T, \dashv_a, \vdash_a, \perp_a)$ позначимо через $T^a_{\dashv,\vdash,\perp}$.

Якщо замість $(T, \dashv, \vdash, \perp)$ взяти дімоноїд $(T, \dashv, \vdash)$ (див. п. 1.1), то алгебра $(T, \dashv_a, \vdash_a)$ стає дімоноїдом з деформованими множеннями, який вперше був побудований у [39]. Дімоноїд з деформованими множеннями є узагальненням напівгрупи з деформованим множенням [41].

Природним є питання про можливість узагальнення дімоноїда з деформованими множеннями на випадок тріоїда. Наступне твердження дає необхідні та достатні умови, за якими алгебра $T^a_{\dashv,\vdash,\perp}$ є тріоїдом.

Теорема. *Алгебра* $T^a_{\dashv,\vdash,\perp}$ *є тріоїдом тоді й лише тоді, коли вона задовольняє аксіому* $(T6)$ *тріоїда.*

***Доведення*.** Необхідність є очевидною.

Доведемо достатність. Нехай $T^a_{\dashv,\vdash,\perp}$ задовольняє аксіому $(T6)$. Згідно з [41] операції $\dashv_a, \vdash_a$ та $\perp_a$ є асоціативними. Той факт, що $T^a_{\dashv,\vdash,\perp}$ задовольняє аксіоми $(T1)-(T3)$, випливає з леми п. 3.5 роботи [39].

Нехай $x, y, z \in T^a_{\dashv,\vdash,\perp}$. Тоді

$$(x \dashv_a y) \dashv_a z = x \dashv a \dashv y \dashv a \dashv z =$$

$$= (((x \dashv a) \dashv y) \dashv a) \dashv z =$$

$$=\big((x\dashv a)\dashv(y\perp a)\big)\dashv z=(x\dashv a)\dashv(y\perp a\perp z)=$$

$$=x\dashv a\dashv(y\perp_a z)=x\dashv_a(y\perp_a z),$$

$$(x\perp_a y)\dashv_a z=(x\perp a\perp y)\dashv a\dashv z=$$

$$=\big((x\perp a)\perp y\big)\dashv(a\dashv z)=(x\perp a)\perp\big(y\dashv(a\dashv z)\big)=$$

$$=x\perp a\perp(y\dashv a\dashv z)=x\perp_a(y\dashv_a z),$$

$$(x\vdash_a y)\perp_a z=(x\vdash a\vdash y)\perp a\perp z=$$

$$=\big((x\vdash a)\vdash y\big)\perp(a\perp z)=$$

$$=(x\vdash a)\vdash(y\perp a\perp z)=$$

$$=x\vdash a\vdash(y\perp_a z)=x\vdash_a(y\perp_a z),$$

$$(x\perp_a y)\vdash_a z=(x\perp a\perp y)\vdash a\vdash z=$$

$$=\big((x\perp a)\perp y\big)\vdash(a\vdash z)=(x\perp a)\vdash(y\vdash a\vdash z)=$$

$$=x\vdash(a\vdash y\vdash a\vdash z)=$$

$$=x\vdash a\vdash(y\vdash a\vdash z)=x\vdash_a(y\vdash_a z)$$

згідно з аксіомами тріоїда $(T,\dashv,\vdash,\perp)$ та асоціативністю операцій $\dashv,\vdash,\perp$. Таким чином, аксіоми $(T4)$, $(T5)$, $(T7)$, $(T8)$ виконуються для $T^a_{\dashv,\vdash,\perp}$.

Оскільки алгебра $T^{a}_{\dashv,\vdash,\perp}$ задовольняє аксіоми $(T1)-(T8)$, то вона є тріоїдом.

Теорему доведено.

9.7. З останньої теореми отримуємо наслідок.

Наслідок. *Алгебра* $T^{a}_{\dashv,\vdash,\perp}$ *задовольняє аксіоми* $(T1)-(T5)$, $(T7)$, $(T8)$ *тріоїда*.

9.8. Наступне твердження дає приклад алгебри $T^{a}_{\dashv,\vdash,\perp}$, яка є тріоїдом.

Твердження. *Нехай* $T^{\perp}_{lr}=\left(T,\dashv,\vdash,\perp\right)$ *(див. п. 1.5) та* $a\in T$. *Тоді алгебра* $\left(T,\dashv_a,\vdash_a,\perp_a\right)$ *є тріоїдом.*

Доведення. Для всіх $x,y,z\in T$ маємо

$$\left(x\dashv_a y\right)\perp_a z=\left(x\dashv a\dashv y\right)\perp a\perp z=x\perp a\perp z=$$

$$=x\perp a\perp\left(y\vdash a\vdash z\right)=x\perp a\perp\left(y\vdash_a z\right)=x\perp_a\left(y\vdash_a z\right).$$

Це означає, що $\left(T,\dashv_a,\vdash_a,\perp_a\right)$ задовольняє аксіому $(T6)$. Звідси за теоремою п. 9.6 $\left(T,\dashv_a,\vdash_a,\perp_a\right)$ є тріоїдом.

Твердження доведено.

Кожний тріоїд $T^{a}_{\dashv,\vdash,\perp}$ називатимемо тріоїдом з деформованими множеннями. Відмітимо, що тріоїд з деформованими множеннями узагальнює дімоноїд з деформованими множеннями [39] та напівгрупу з деформованим множенням [41].

9.9. Наведемо приклад алгебри $T^a_{\dashv,\vdash,\perp}$, яка не є тріоїдом.

Твердження. *Нехай* $Frt(X)$ *– вільний тріоїд рангу 1 (див. п. 3.1),* $\overline{x} \in X$ *. Тоді алгебра* $(Frt(X),\dashv_{\overline{x}},\vdash_{\overline{x}},\perp_{\overline{x}})$ *не є тріоїдом.*

Доведення. Для елемента $\overline{x} \in X$ маємо

$$(\overline{x} \dashv_{\overline{x}} \overline{x}) \perp_{\overline{x}} \overline{x} = (\overline{x} \dashv \overline{x} \dashv \overline{x}) \perp \overline{x} \perp \overline{x} = \overline{x}\,x\,x \perp \overline{x} \perp \overline{x} = \overline{x}\,x\,x\,\overline{x}\,\overline{x},$$
$$\overline{x} \perp_{\overline{x}} (\overline{x} \vdash_{\overline{x}} \overline{x}) = \overline{x} \perp \overline{x} \perp (\overline{x} \vdash \overline{x} \vdash \overline{x}) = \overline{x}\,\overline{x}\,x\,x\,\overline{x}.$$

Оскільки $\overline{x}\,x\,x\,\overline{x}\,\overline{x} \neq \overline{x}\,\overline{x}\,x\,x\,\overline{x}$, то

$$(\overline{x} \dashv_{\overline{x}} \overline{x}) \perp_{\overline{x}} \overline{x} \neq \overline{x} \perp_{\overline{x}} (\overline{x} \vdash_{\overline{x}} \overline{x}),$$

тобто аксіома ($T6$) тріоїда не виконується для $(Frt(X),\dashv_{\overline{x}},\vdash_{\overline{x}},\perp_{\overline{x}})$. Звідси $(Frt(X),\dashv_{\overline{x}},\vdash_{\overline{x}},\perp_{\overline{x}})$ не є тріоїдом.

Твердження доведено.

9.10. Аналогічно твердженню п. 3.6 [39] доводиться наступне твердження.

Твердження. *Нехай* $T^a_{\dashv,\vdash,\perp}$ *– довільний тріоїд з деформованими множеннями. Якщо ідемпотентне перетворення* τ *множини* T *є напівретракцією тріоїда* $(T,\dashv,\vdash,\perp)$*, то воно є напівретракцією і тріоїда* $T^a_{\dashv,\vdash,\perp}$.

Контрольні запитання до модуля 2

1. Описати всі напівструктурні конгруенції на довільному тріоїді; вказати найменшу напівструктурну конгруенцію.

2. Описати всі групові конгруенції на довільному тріоїді.

3. Охарактеризувати найменшу групову конгруенцію на тріоїді з інверсною (ортодоксальною, регулярною) напівгрупою.

4. Встановити достатні умови, за якими операції довільного тріоїда збігаються.

5. Навести загальну характеристику лівих (правих, симетричних) напівретракцій тріоїдів.

6. Вказати приклади лівих, правих та симетричних напівретракцій тріоїдів.

7. Довести теорему про необхідні та достатні умови існування тріоїдів Ріса.

8. Довести теорему про необхідні та достатні умови існування тріоїдів з деформованими множеннями.

9. Для тріоїдів Ріса та тріоїдів з деформованими множеннями побудувати симетричні напівретракції.

Список використаної літератури

1. Loday J.-L. Trialgebras and families of polytopes / J.-L. Loday, M. O. Ronco // Contemp. Math. – 2004. – 346. – P. 369 – 398.
2. Novelli J.-C. Construction of dendriform trialgebras / J.-C. Novelli, J.-Y. Thibon // C. R., Math., Acad. Sci. Paris 342. – 2006. – 6. – P. 365 – 369.
3. Novelli J.-C. Polynomial realizations of some trialgebras / J.-C. Novelli, J.-Y. Thibon // Formal Power Series and Algebraic Combinatorics. Series Formelles et Combinatoire Algébrique. San Diego, California. – 2006 [Електронний ресурс]. – Режим доступу: arXiv:math/0605061v1.
4. Casas J. M. Trialgebras and Leibniz 3-algebras / J. M. Casas // Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana. – 2006. – 12, № 2. – P. 165 – 178.
5. Ebrahimi-Fard K. Loday-type algebras and the Rota-Baxter relation / K. Ebrahimi-Fard // Lett. Math. Phys. – 2002. – 61, № 2. – P. 139 – 147.
6. Loday J.-L. Dialgebras / J.-L. Loday // Dialgebras and related operads: Lect. Notes Math. – Springer-Verlag, Berlin. – 2001. – 1763. – P. 7 – 66.
7. Жучок А. В. Димоноиды / А. В. Жучок // Алгебра и логика. – 2011. – Т. 50, № 4. – С. 471 – 496.
8. Жучок А. В. Діалгебри / А. В. Жучок – К. : Ін-т математики, 2011. – 256 с. – (Математика та її застосування) (Праці / Ін-т математики НАН України ; т. 87).

9. Zhuchok A. V. Tribands of subtrioids / A. V. Zhuchok // Труды Ин-та прикладной математики и механики. – 2010. – Т. 21. – С. 98 – 106.

10. Жучок А.В. Некоторые конгруэнции на триоидах / Жучок А.В. // Фундаментальная и прикладная математика. – 2011/2012. – Т. 17, № 3. – С. 39 – 49.

11. Zhuchok A. V. Commutative dimonoids / A. V. Zhuchok // Algebra and Discrete Mathematics. – 2009. – № 3. – P. 116 – 127.

12. Жучок А. В. Про комбінаторні властивості операцій тріоїдів / А. В. Жучок // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. – № 14. – 2013. – У друці.

13. Жучок А. В. Вільні тріоїди / А. В. Жучок // Вісник Київського національного ун-ту. Серія: фіз.-мат. науки. – 2010. – Вип. 4. – С. 23 – 26.

14. Bogdanovic S. Orthogonal sums of semigroups / S. Bogdanovic, M. Ciric // Israel Journal of Mathematics. – 1995. – 90. – P. 423 – 428.

15. Кожухов И.Б. Алгебры, у которых все отношения эквивалентности являются конгруэнциями / И. Б. Кожухов, А. В. Решетников // Фундаментальная и прикладная математика. – 2010. – Т. 16, № 3. – С. 161 – 192.

16. Zhuchok A. V. Some least congruences on dimonoids / A. V. Zhuchok // Вісник Київського національного ун-ту. Серія: фіз.-мат. науки. – 2011. – Вип. 4. – С. 7 – 10.

17. Жучок А. В. Дімоноїди з ідемпотентною операцією / А. В. Жучок // Труды Ин-та прикладной математики и механики. – 2011. – Вып. 22. – С. 99 – 107.

18. Clifford A. H. Bands of semigroups / A. H. Clifford // Proc. Amer. Math. Soc. – 1954. – 5. – P. 499 – 504.

19. Шварц Ш. К теории периодических полугрупп / Ш. Шварц // Чехослов. матем. журн. – 1953. – 3 (78). – С. 7 – 21.

20. Tamura T. On decomposition of a commutative semigroup / T. Tamura, N. Kimura // Kodai Math. Sem. Rep. – 1954. – 4. – P. 109 – 112.

21. McLean D. Idempotent semigroups / D. McLean // Amer. Math. Monthly. – 1954. – 61. – P. 110 – 113.

22. Zhuchok A. V. Semilattices of subdimonoids / A. V. Zhuchok // Asian-European Journal of Mathematics. – 2011. – V. 4, № 2. – P. 359 – 371.

23. Hewitt E. The ℓ_1-algebra of a commutative semigroup / E. Hewitt, H. S. Zuckerman // Trans. Amer. Math. Soc. – 1956. – 83. – P. 70 – 97.

24. Клиффорд А. Алгебраическая теория полугрупп / А. Клиффорд, Г. Престон. – М. : Мир, 1972. – Т.1 – 185 с. ; Т. 2. – 422 с.

25. Zhuchok A. V. Semilattice decompositions of trioids / A. V. Zhuchok // Buletinul Academiei de Ştiinţe a Republicii Moldova. Matematica. – 2013. – V.71, № 1. – P. 130 – 134.

26. Yamada M. On the greatest semilattice decomposition of a semigroup / M. Yamada // Kodai Math. Sem. Rep. – 1955. – 7. – P. 59 – 62.

27. Жучок А. В. Найменша напівструктурна конгруенція дімоноїду / А. В. Жучок // Вісник Київського національного ун-ту. Серія: фіз.-мат. науки. – 2009. – Вип. 3. – С. 22 – 24.

28. Жучок А. В. Групові конгруенції на тріоїдах / А. В. Жучок // Труды Ин-та прикладной математики и механики. – 2013. – Вып. 27. – У друці.

29. Croisot R. Equivalences principales bilatures definies dans un demiroupe / R. Croisot // J. Math. Pures Appl. – 1957. – 36. – P. 373 – 417.

30. Munn W. D. A class of irreducible matrix representations of an arbitrary inverse semigroup / W. D. Munn // Proc. Glasgow Math. Assoc. – 1961. – 5. – P. 41 – 48.

31. Meakin J. Congruences on orthodox semigroups II / J. Meakin // J. Austral. Math. Soc. – 1972. – 13. – P. 259 – 266.

32. Masat F. Right group and group congruences on a regular semigroup / F. Masat // Duke Math. J. – 1973. – 40. – P. 393 – 402.

33. Zhuchok A. V. Congruences on trioids / A. V. Zhuchok // Intern. Conf. on Algebra devoted to the centenary of S. Chernikov: Abstracts. – Kiev, 2012. – P. 160.

34. Усенко В. М. Напівретракції моноїдів / В. М. Усенко // Труды Ин-та прикладной математики и механики. – 2000. – Т. 5. – С. 155 – 164.

35. Жучок А. В. Свободные полугруппы идемпотентов / А. В. Жучок // Известия Гомельского гос. ун-та им. Ф. Скорины. – 2003. – 19, № 4. – С. 55 – 58.

36. Жучок А. В. Напівретракції вільних моноїдів / А. В. Жучок // Труды Ин-та прикладной математики и механики. – 2005. – Вып. 11. – С. 81 –88.

37. Жучок А. В. Вільні нормальні напівгрупи ідемпотентів / А. В. Жучок // Труды Ин-та прикладной математики и механики. – 2006. – Вып. 12. – С. 57 – 62.

38. Усенко В. М. Напівретракції та симетричні зображення / В. М. Усенко // Вісник Київського ун-ту. Серія: фіз.-мат. науки. – 2002. – Вип. 1. – С. 81 – 85.

39. Жучок А. В. Напівретракції дімоноїдів / А. В. Жучок // Труды Ин-та прикладной математики и механики. – 2008. – Вып. 17. – С. 42 – 50.

40. Жучок А. В. Напівретракції тріоїдів / А. В. Жучок // Український математичний журнал. – 2014. – Т. 66, № 2. – У друці.

41. Ляпин Е. С. Полугруппы / Е. С. Ляпин. – М.: Физматгиз, 1960. – 592 с.

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

Жучок А. В. Вибрані питання загальної алгебри: тріоїди. – Навчальний посібник.

У посібнику побудовано нові приклади тріоїдів, зокрема тріоїд, ізоморфний вільному тріоїду рангу 1, описаному Ж.-Л. Лоде та М. О. Ронко. Досліджено комбінаторні властивості операцій тріоїдів. Побудовано конструкцію ортогональної суми тріоїдів, для якої вказано всі підтріоїди. Отримано повний опис дімоноїдів, усі відношення еквівалентності на яких є конгруенціями. Введено поняття трисполуки підтріоїдів. За допомогою цього поняття доведено, що кожний тріоїд з комутативною періодичною напівгрупою є напівструктурою уніпотентних підтріоїдів та кожний довільний тріоїд є напівструктурою s-простих підтріоїдів. Описано найменшу ідемпотентну конгруенцію на тріоїді з комутативною операцією та показано, що відповідний фактор-тріоїд є напівструктурою. Охарактеризовано найменшу напівструктурну конгруенцію на тріоїді з ідемпотентною операцією. Представлено найменшу сепаративну конгруенцію на тріоїді з комутативною операцією та показано, що відповідний фактор-тріоїд є комутативною сепаративною напівгрупою. Описано всі напівструктурні та всі групові конгруенції на довільному тріоїді. Представлено найменшу групову конгруенцію на тріоїді з інверсною (ортодоксальною, регулярною) напівгрупою. Введено та вивчається поняття лівої (правої, симетричної) напівретракції тріоїда. Побудовано нові теоретико-тріоїдні конструкції, для яких охарактеризовано деякі симетричні напівретракції.

Ключові слова: тріоїд, дімоноїд, напівгрупа, конгруенція, трисполука підтріоїдів, вільний тріоїд, напівретракція, тріоїд Ріса, тріоїд з деформованими множеннями.

Жучок А. В. Избранные вопросы общей алгебры: триоиды. – Учебное пособие.

В пособии построены новые примеры триоидов, в частности триоид, изоморфный свободному триоиду ранга 1, описанному Ж.-Л. Лоде и М. О. Ронко. Исследованы комбинаторные свойства операций триоидов. Построена конструкция ортогональной суммы триоидов, для которой указаны все подтриоиды. Введено понятие трисвязки подтриоидов. С помощью этого понятия доказано, что каждый триоид с коммутативной периодической полугруппой является полуструктурой унипотентных подтриоидов и каждый произвольный триоид является полуструктурой s-простых подтриоидов. Описана наименьшая идемпотентная конгруэнция на триоиде с коммутативной операцией и показано, что соответствующий фактор-триоид является полуструктурой. Охарактеризована наименьшая полуструктурная конгруэнция на триоиде с идемпотентной операцией. Представлена наименьшая сепаративная конгруэнция на триоиде с коммутативной операцией и показано, что соответствующий фактор-триоид является коммутативной сепаративной полугруппой. Описаны все полуструктурные и все групповые конгруэнции на произвольном триоиде. Представлены наименьшая групповая конгруэнция на триоиде с инверсной (ортодоксальной, регулярной) полугруппой. Введено и изучается понятие левой (правой, симметрической) полуретракции триоида. Построены новые теоретико-триоидные конструкции, для которых охарактеризованы некоторые симметрические полуретракции.

Ключевые слова: триоид, димоноид, полугруппа, конгруэнция, трисвязка подтриоидов, свободный триоид, полуретракция, триоид Риса, триоид с деформированными умножениями.

Zhuchok A. V. Selected questions of general algebra: trioids. – Study guide.

New examples of trioids are constructed, in particular, a trioid which is isomorphic to the free trioid of rank 1 described by J.-L. Loday and M. O. Ronco. Combinatorial properties of operations on a trioid are investigated and dimonoids whose equivalence relations are congruences are described. We give the construction of an orthogonal sum of trioids for which indicate all subtrioids. The notion of a triband of subtrioids is introduced. With the help of this notion we prove that a trioid with a commutative periodic semigroup is a semilattice of unipotent subtrioids and every arbitrary trioid is a semilattice of s-simple subtrioids. The least idempotent congruence on a trioid with a commutative operation, the least semilattice congruence on a trioid with an idempotent operation and the least separative congruence on a trioid with a commutative operation are presented. Properties of the corresponding quotient trioids are described. All semilattice and all group congrurnces on an arbitrary trioid are described. The least group congruence on a trioid with an inverse (orthodox, regular) semigroup is presented. We introduce and study the notion of a left (right, symmetric) semiretraction of a trioid. New trioid theoretical constructions are given. Necessary and sufficient conditions for existence of Rees trioids and trioids with deformed multiplications are found. Examples of a Rees trioid and a trioid with deformed multiplications are indicated. For Rees trioids one class of symmetric semiretractions is described. For trioids with deformed multiplications symmetric semiretractions are characterized.

Key words: trioid, dimonoid, semigroup congruence, triband of subtrioids, free trioid, semiretraction, Rees trioid, trioid with deformed multiplications.

Навчальне видання

ЖУЧОК Анатолій Володимирович

ВИБРАНІ ПИТАННЯ ЗАГАЛЬНОЇ АЛГЕБРИ

ТРІОЇДИ

Навчальний посібник
для студентів фізико-математичних
факультетів вищих навчальних закладів

За редакцією автора
Коректор – Л. Д. Жучок

Здано до склад. 01.10.2013 р. Підп. до друку 01.11.2013 р.
Формат 60×84 1/16. Папір офсет. Гарнітура Times New Roman.
Друк ризографічний. Ум. друк. арк. 6,74. Наклад 300 прим. Зам. № 222.

Видавець і виготовлювач
Видавництво Державного закладу
„Луганський національний університет імені Тараса Шевченка”
вул. Оборонна, 2, м. Луганськ, 91011. Тел./факс: (0642) 58-03-20.
e-mail: alma-mater@list.ru
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 3459 від 09.04.2009 р.