НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК УКРАИНЫ

ТРУДЫ ИНСТИТУТА ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

ТОМ 5

Донецк
2000

УДК 517 : 519 : 531

В сборнике представлены работы по широкому кругу вопросов из разных областей математики, механики и кибернетики: теории функций, теории вероятностей и математической статистики, алгебре, дифференциальным уравнениям, динамике твердого тела и теории упругости, теории автоматов, а также их приложениям.

Для научных работников, преподавателей, аспирантов и студентов вузов соответствующих специальностей.

Объем : 12 п.листов.

В збірнику представлено роботи з широкого кола питань у різних галузях математики, механіки і кібернетики: теорії функцій, теорії ймовірностей і математичної статистики, алгебри, диференціальних рівнянь, динаміки твердого тіла і теорії пружності, теорії автоматів, а також їх застосувань.

Для науковців, викладачів, аспірантів і студентів вузів відповідних спеціальностей.

Обсяг : 12 друк. арк.

Адрес редколлегии:

83114 Донецк 114, ул. Р.Люксембург, 74
Институт прикладной математики и механики НАН Украины
Тел. 55 51 75

Утверждено к печати ученым советом
Института прикладной математики и механики НАН Украины

СОДЕРЖАНИЕ

УДК 519.21

© О.Н.Ие

ВЫЧИСЛЕНИЕ СКОРОСТИ УБЫВАНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ОШИБОК КРИТЕРИЯ НЕЙМАНА-ПИРСОНА ДЛЯ ПРОЦЕССОВ НОРМАЛЬНОЙ АВТОРЕГРЕССИИ

Рассмотрен метод вычисления показателей экспонент убывания вероятностей ошибок критерия Неймана-Пирсона в задаче различения процессов авторегрессии.

1. Введение.

При исследовании скорости убывания вероятностей ошибок в задаче проверки статистических гипотез важную роль играют теоремы о больших уклонениях [1-5]. При этом при вычислении показателей экспонент убывания вероятностей ошибок 1-го и 2-го рода в случае двух простых гипотез требуется находить решение уравнений $\kappa'(\varepsilon) = \gamma$ и $I(\gamma) = a,$ где $\kappa(\varepsilon)$ - функция уклонений, а $\varepsilon(\gamma)$ - ее преобразование Лежандра-Фенхеля [5]. Однако решение этих уравнений удается найти крайне редко. Кроме того, преобразование Лежандра-Фенхеля $I(\gamma)$ можно найти тоже лишь в некоторых частных случаях.

Настоящая работа посвящена вычислению показателей экспонент убывания вероятностей ошибок критерия Неймана-Пирсона в задаче различения процессов авторегрессии. Ранее эта задача рассматривалась в работе [6], однако предполагалось, что при нулевой гипотезе процесс авторегрессии является эргодическим, а при альтернативной является любым с постоянными параметрами. Случай, когда при нулевой гипотезе процесс является эргодическим, а альтернатива является близкой неконтигуальной, рассмотрен в работе [7]. В работе [8] рассмотрен общий случай, когда при нулевой гипотезе процесс является любым с постоянными параметрами, а альтернатива является либо постоянной, либо близкой неконтигуальной, а процесс при альтернативной гипотезе может быть любым. В настоящей работе предложенный в [6] метод вычисления показателей экспонент убывания вероятностей ошибок распространяется на случай, когда при нулевой и при альтернативной гипотезах процесс авторегрессии является любым с постоянными параметрами. Отметим также работу [9], в которой рассматривается задача различения процессов нормальной авторегрессии с ненулевым асимптотическим уровнем.

2. Предварительные факты и понятия.

Пусть $\xi^n = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$, $n = 1,2,\ldots,$ - наблюдения процесса авторегрессии вида

$$\xi_i = \theta\, \xi_{i-1} + w_i, \qquad i = 1,2,\ldots,$$

где $\xi_0 = 0$, $\theta \in R^1$ - неизвестный параметр, $w_1, w_2, \ldots$ - независимые стандартные гауссовы величины, независящие от θ. Пусть $\mathbf{P}_\theta^n$ - мера, задающая распределение наблюдения ξ^n, когда параметр равен θ. Обозначим через H^n (соответственно $\widetilde{H}^n$) гипотезу, состоящую в том, что распределение ξ^n задается мерой $\mathbf{P}_\theta^n$ (соответственно $\mathbf{P}_{\widetilde{\theta}}^n$), где θ и $\widetilde{\theta}$ - точки из R^1 и $\theta \neq \widetilde{\theta}$. Пусть $H_n(\varepsilon) = H(\varepsilon; \mathbf{P}_{\widetilde{\theta}}^n, \mathbf{P}_\theta^n)$ - интеграл

Хеллингера порядка ε для мер $\mathbf{P}^n_{\tilde\theta}$ и $\mathbf{P}^n_\theta$ [10].

Введем обозначения

$$c(\varepsilon) = \varepsilon(\tilde\theta^{\,2} - \theta^{\,2}) + \theta^{\,2} + 1, \qquad b(\varepsilon) = -\varepsilon(\tilde\theta - \theta) - \theta,$$

$$\varepsilon_1 = -\frac{(1+\theta)^2}{(\tilde\theta - \theta)(\tilde\theta + \theta + 2)}, \quad \varepsilon_2 = \frac{(1-\theta)^2}{(\tilde\theta - \theta)(2 - \tilde\theta - \theta)}, \tag{1}$$

где ε_1 определено лишь при $\tilde\theta + \theta \neq -2$, а ε_2 - при $\tilde\theta + \theta \neq 2$. Заметим, что ε_1 и ε_2 - корни уравнения $c^2(\varepsilon) - 4b^2(\varepsilon) = 0$. Положим

$$\begin{aligned}\varepsilon_- = {} & \varepsilon_1 \mathrm{I}(\{\theta\tilde\theta \le 1, -1 < \theta < \tilde\theta\} \cup \{-1 < \theta \le \tilde\theta^{-1}, \tilde\theta < -1\}) \\ & + \varepsilon_2 \mathrm{I}(\{\theta\tilde\theta < 1, \tilde\theta < \theta < 1\} \cup \{\tilde\theta^{-1} < \theta < 1, \tilde\theta > 1\}), \\ \varepsilon_+ = {} & \varepsilon_1 \mathrm{I}(\{\theta\tilde\theta \le 1, -1 < \tilde\theta < \theta\} \cup \{-1 < \tilde\theta \le \theta^{-1}, \theta < -1\}) \\ & + \varepsilon_2 \mathrm{I}(\{\theta\tilde\theta < 1, \theta < \tilde\theta < 1\} \cup \{\theta^{-1} < \tilde\theta < 1, \theta > 1\}) + \mathrm{I}(|\tilde\theta| \ge 1),\end{aligned}$$

где $\mathrm{I}(A)$ - индикатор множества A.

Справедлива следующая лемма о поведении интеграла Хеллингера $H_n(\varepsilon)$ при $n \to \infty$, доказанная в [8].

Лемма 1. *Для любого* $\varepsilon \in R^1$ *существует предел*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln H_n(\varepsilon) = \kappa(\varepsilon),$$

где для всех $\varepsilon \in (\varepsilon_-, \varepsilon_+)$

$$\kappa(\varepsilon) = -2^{-1} \ln(2^{-1}(c(\varepsilon) + \sqrt{c^2(\varepsilon) - 4b^2(\varepsilon)})), \tag{2}$$

$\kappa(\varepsilon_-)$ *в случае* $|\theta| \le 1$ *и* $\kappa(\varepsilon_+)$ в случае $|\tilde\theta| \le 1$ *вычисляются по формуле (2),* $\kappa(\varepsilon_-) = 0$ *в случае* $|\theta| > 1$, $\kappa(\varepsilon_+) = 0$ *в случае* $|\tilde\theta| > 1$ *и* $\kappa(\varepsilon) = \infty$ *для всех* $\varepsilon \notin [\varepsilon_-, \varepsilon_+]$.

Обозначим

$$\gamma_0 = \kappa'(0), \quad \gamma_1 = \kappa'(1), \quad \gamma_- = \kappa'(\varepsilon_- +), \quad \gamma_+ = \kappa'(\varepsilon_+ -),$$

где γ_0 и γ_1 определены только в случаях $|\theta| < 1$ и $|\tilde\theta| < 1$, соответственно, причем

$$\gamma_0 = -\frac{(\tilde\theta - \theta)^2}{2(1 - \theta^{\,2})}, \quad \gamma_1 = \frac{(\tilde\theta - \theta)^2}{2(1 - \tilde\theta^{\,2})}.$$

Пусть $I(\gamma) = \sup_\varepsilon (\gamma\varepsilon - \kappa(\varepsilon))$ - преобразование Лежандра-Фенхеля функции $\kappa(\varepsilon)$ [11]. Обозначим через δ_n критерий Неймана-Пирсона уровня α_n для различения гипотез H^n и $\tilde H^n$ по наблюдениям ξ^n [10]. Следующая лемма доказана в работе [8] и устанавливает взаимосвязь между скоростями убывания уровня α_n и вероятности ошибок 2-го рода β_n критерия δ_n.

Лемма 2. *Для любого* $a \in (I(\Gamma_0), I(\Gamma_1))$

$$\lim_{n\to\infty} n^{-1} \ln \alpha_n = -a \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} n^{-1} \ln \beta_n = -b(a),$$

где $b(a) = a - \gamma(a) \in (I(\Gamma_1) - \Gamma_1, I(\Gamma_0) - \Gamma_0)$ *и* $\gamma(a)$ *- единственное решение уравнения* $I(\gamma) = a$, *а величины* Γ_0 *и* Γ_1 *имеют следующий вид*

$$\Gamma_0 = \gamma_0 \mathrm{I}(|\theta| < 1) + \gamma_- \mathrm{I}(|\theta| \ge 1),$$

$$\Gamma_1 = \gamma_1 \mathrm{I}(|\tilde\theta| < 1) + \gamma_+ \mathrm{I}(|\tilde\theta| \ge 1).$$

3. Представление функции $I(\gamma)$.

Из равенства (2) видно, что для всех $\varepsilon \in (\varepsilon_-, \varepsilon_+)$ функция $\kappa(\varepsilon)$ строго выпукла и дифференцируема. Тогда для любого $\gamma \in (\gamma_-, \gamma_+)$ существует единственное решение $\varepsilon(\gamma)$ уравнения $\kappa'(\varepsilon) = \gamma$ при $\varepsilon \in (\varepsilon_-, \varepsilon_+)$. Значит, при $\gamma \in (\gamma_-, \gamma_+)$ преобразование Лежандра-Фенхеля $I(\gamma)$ функции $\kappa(\varepsilon)$ имеет вид $I(\gamma) = \gamma\,\varepsilon(\gamma) - \kappa(\varepsilon(\gamma))$.

После несложных преобразований получаем, что уравнение $\kappa'(\varepsilon) = \gamma$ имеет вид

$$(\tilde{\theta} - \theta)(1 - \theta\tilde{\theta}) = (\tilde{\theta} - \theta - 2\gamma\, b(\varepsilon))\sqrt{c^2(\varepsilon) - 4b^2(\varepsilon)}. \tag{3}$$

Не находя решения $\varepsilon(\gamma)$ уравнения (3), найдем выражение для $I(\gamma)$ через $z(\gamma) = \sqrt{c^2(\varepsilon(\gamma)) - 4b^2(\varepsilon(\gamma))}$.

Используя очевидное равенство $c(\varepsilon) = 1 - \theta\tilde{\theta} - b(\varepsilon)(\tilde{\theta} + \theta)$, получаем, что для всех $\gamma \in (\gamma_-, \gamma_+)$

$$z(\gamma) = \sqrt{b^2(\varepsilon(\gamma))((\tilde{\theta} + \theta)^2 - 4) - 2b(\varepsilon(\gamma))(\tilde{\theta} + \theta)(1 - \theta\tilde{\theta}) + (1 - \theta\tilde{\theta})^2}. \tag{4}$$

Из уравнения (3) вытекает тождество $(\tilde{\theta} - \theta)(1 - \theta\tilde{\theta}) = (\tilde{\theta} - \theta - 2\gamma\, b(\varepsilon(\gamma)))z(\gamma)$. Отсюда следует

$$\gamma = -\frac{(\tilde{\theta} - \theta)}{2b(\varepsilon(\gamma))}\left(\frac{1 - \theta\tilde{\theta}}{z(\gamma)} - 1\right). \tag{5}$$

Кроме того, очевидно, $\varepsilon = -(\theta + b(\varepsilon)) / (\tilde{\theta} - \theta)$, и, значит,

$$\gamma\,\varepsilon(\gamma) = \frac{\theta + b(\varepsilon(\gamma))}{2b(\varepsilon(\gamma))}\left(\frac{1 - \theta\tilde{\theta}}{z(\gamma)} - 1\right).$$

Так как $c(\varepsilon) = 1 - \theta\tilde{\theta} - b(\varepsilon)(\tilde{\theta} + \theta)$, то в силу (2)

$$\kappa(\varepsilon(\gamma)) = -\frac{1}{2}\ln\frac{1 - \theta\tilde{\theta} - b(\varepsilon(\gamma))(\tilde{\theta} + \theta) + z(\gamma)}{2}.$$

Следовательно, из равенства $I(\gamma) = \gamma\,\varepsilon(\gamma) - \kappa(\varepsilon(\gamma))$ для всех $\gamma \in (\gamma_-, \gamma_+)$ получаем представление

$$I(\gamma) = \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1 - \theta\tilde{\theta}}{z(\gamma)} - 1\right)\left(1 + \frac{\theta}{b(\varepsilon(\gamma))}\right) + \ln\frac{1 - \theta\tilde{\theta} - b(\varepsilon(\gamma))(\tilde{\theta} + \theta) + z(\gamma)}{2}\right\}. \tag{6}$$

Отсюда видно, что для того, чтобы выразить $I(\gamma)$ через $z(\gamma)$, необходимо найти зависимость $b(\varepsilon(\gamma))$ от $z(\gamma)$. Для этого используем равенство (4), которое запишем в виде

$$z^2(\gamma) = b^2(\varepsilon(\gamma))((\tilde{\theta} + \theta)^2 - 4) - 2b(\varepsilon(\gamma))(\tilde{\theta} + \theta)(1 - \theta\tilde{\theta}) + (1 - \theta\tilde{\theta})^2. \tag{7}$$

Для $|\tilde{\theta} + \theta| < 2$ введем обозначения

$$\tilde{\varepsilon} = \frac{(\tilde{\theta} + \theta)(1 + \theta^2) - 4\theta}{(\tilde{\theta} - \theta)(4 - (\tilde{\theta} + \theta)^2)}, \quad \tilde{\gamma} = \kappa'(\tilde{\varepsilon}), \quad \tilde{z} = z(\tilde{\gamma}), \quad \tilde{b} = b(\tilde{\varepsilon}),$$

$$z_0 = z(\gamma_0)\mathrm{I}(|\theta| < 1) + z(\gamma_-)\mathrm{I}(|\theta| \ge 1).$$

Нетрудно показать, что

$$\tilde{z} = \frac{2(1 - \theta\tilde{\theta})}{\sqrt{4 - (\tilde{\theta} + \theta)^2}}, \qquad \tilde{b} = \frac{(\tilde{\theta} + \theta)(1 - \theta\tilde{\theta})}{(\tilde{\theta} + \theta)^2 - 4},$$

$$z_0 = 1-\theta^2,\ \text{если } |\theta|<1,\ \text{и } z_0=\theta^2-1,\ \text{если } |\theta|\geq 1,$$

$$\tilde{\gamma} = \begin{cases} (\tilde{\theta}-\theta)(4-(\tilde{\theta}+\theta)^2)(\sqrt{4-(\tilde{\theta}+\theta)^2}-2)/(4(\tilde{\theta}+\theta)(1-\theta\tilde{\theta})), & \text{если } \tilde{\theta}+\theta\neq 0; \\ 0, & \text{если } \tilde{\theta}+\theta=0. \end{cases}$$

Для любого $z \geq 0$ рассмотрим квадратное уравнение относительно b вида

$$b^2((\tilde{\theta}+\theta)^2-4)-2b(\tilde{\theta}+\theta)(1-\theta\tilde{\theta})+(1-\theta\tilde{\theta})^2-z^2=0, \tag{8}$$

которое при $z=z(\gamma)$ и $b=b(\varepsilon(\gamma))$ превращается в тождество (7). Поэтому для нахождения зависимости $b(\varepsilon(\gamma))$ от $z(\gamma)$ достаточно найти корни b_1^z и b_2^z уравнения (8), а затем для каждого $\gamma \in (\gamma_-, \gamma_+)$ найти индекс $j(\gamma)$ такой, что $b_{j(\gamma)}^{z(\gamma)} = b(\varepsilon(\gamma))$. Решение этой задачи дано ниже в теореме 1.

Если $|\tilde{\theta}+\theta| \neq 2$, то корни уравнения (8) имеют вид

$$b_1^z = \frac{(\tilde{\theta}+\theta)(1-\theta\tilde{\theta})+\sqrt{4(1-\theta\tilde{\theta})^2+z^2((\tilde{\theta}+\theta)^2-4)}}{(\tilde{\theta}+\theta)^2-4}, \tag{9}$$

$$b_2^z = \frac{(\tilde{\theta}+\theta)(1-\theta\tilde{\theta})-\sqrt{4(1-\theta\tilde{\theta})^2+z^2((\tilde{\theta}+\theta)^2-4)}}{(\tilde{\theta}+\theta)^2-4}. \tag{10}$$

Если $|\tilde{\theta}+\theta|>2$, то подкоренное выражение в (9) и (10) положительно, и, значит, корни b_1^z и b_2^z вещественны при любом z. Если $|\tilde{\theta}+\theta|<2$, то $4(1-\theta\tilde{\theta})^2+z^2((\tilde{\theta}+\theta)^2-4)\geq 0$ лишь при $z\leq\tilde{z}$. Следовательно, при $|\tilde{\theta}+\theta|<2$ корни b_1^z и b_2^z вещественны лишь при $z\leq\tilde{z}$. Заметим, что из (4) следует, что для всех $\gamma\in(\gamma_-,\gamma_+)$ имеем $0<z(\gamma)\leq\tilde{z}$. Кроме того, можно показать, что при $z=0$ корни b_1^z и b_2^z имеют вид

$$\begin{aligned} b_1^0 &= b(\varepsilon_2)\,\mathrm{I}(1-\theta\tilde{\theta}\geq 0)+b(\varepsilon_1)\,\mathrm{I}(1-\theta\tilde{\theta}<0), \\ b_2^0 &= b(\varepsilon_1)\,\mathrm{I}(1-\theta\tilde{\theta}\geq 0)+b(\varepsilon_2)\,\mathrm{I}(1-\theta\tilde{\theta}<0), \end{aligned} \tag{11}$$

где ε_1 и ε_2 определены выше.

Если $|\tilde{\theta}+\theta|=2$, то уравнение (8) является линейным и его корень имеет вид

$$b^z = \frac{(1-\delta\,\theta)^4-z^2}{4\delta\,(1-\delta\,\theta)^4},$$

где $\delta=\mathrm{sign}(\tilde{\theta}+\theta)$.

Справедлива следующая лемма, указывающая связь b^z с b_1^z и b_2^z.

Лемма 3. *Для любого* $z\geq 0$ *имеет место равенство*

$$b^z = \begin{cases} b_1^z, & \textit{если}\quad \tilde{\theta}+\theta=-2; \\ b_2^z, & \textit{если}\quad \tilde{\theta}+\theta=2. \end{cases}$$

Доказательство. Если $\tilde{\theta}+\theta=2$, то в (10) имеем неопределенность 0/0. Раскрывая эту неопределенность предельным переходом при $\tilde{\theta}+\theta\to 2$, получаем равенство $b^z=b_2^z$. Аналогично рассматривается случай $\tilde{\theta}+\theta=-2$. □

Для формулировки следующей теоремы, дающей выражение $I(\gamma)$ через $z(\gamma)$, введем функции

$$f_i(z)=\frac{1}{2}\left(\frac{1-\theta\widetilde{\theta}}{z}-1\right)\left(1+\frac{\theta}{b_i^z}\right)+\frac{1}{2}\ln\frac{1-\theta\widetilde{\theta}-b_i^z(\widetilde{\theta}+\theta)+z}{2}, i=1,2 \qquad (12)$$

для всех $z>0$ при $|\widetilde{\theta}+\theta|\geq 2$ и для всех $z\in(0,\widetilde{z}]$ при $|\widetilde{\theta}+\theta|<2$, где b_i^z, $i=1,2$, определены формулами (9) и (10).

Теорема 1. *Для всех* $\gamma\in(\gamma_-,\gamma_+)$ *справедливо равенство*

$$I(\gamma)=f_{i(\gamma)}(z(\gamma)), \qquad (13)$$

где функция $i(\gamma)=i(\gamma;\widetilde{\theta},\theta)$ *имеет вид*

$$i(\gamma;\widetilde{\theta},\theta)=\begin{cases} \mathrm{I}(\widetilde{\gamma}<\gamma<\gamma_+)+2\mathrm{I}(\gamma_-<\gamma\leq\widetilde{\gamma}), & \text{если } \frac{4\theta}{1+\theta^2}<\widetilde{\theta}+\theta<\frac{4\widetilde{\theta}}{1+\widetilde{\theta}^2},\\ \mathrm{I}(\gamma_-<\gamma\leq\widetilde{\gamma})+2\mathrm{I}(\widetilde{\gamma}<\gamma<\gamma_+), & \text{если } \frac{4\widetilde{\theta}}{1+\widetilde{\theta}^2}<\widetilde{\theta}+\theta<\frac{4\theta}{1+\theta^2},\\ 1, & \text{если } \widetilde{\theta}+\theta\leq\frac{4\theta}{1+\theta^2}\wedge\frac{4\widetilde{\theta}}{1+\widetilde{\theta}^2},\\ 2, & \text{если } \widetilde{\theta}+\theta\geq\frac{4\theta}{1+\theta^2}\vee\frac{4\widetilde{\theta}}{1+\widetilde{\theta}^2}.\end{cases}$$

Доказательство. Рассмотрим сначала $\widetilde{\theta}>\theta$. Пусть $\widetilde{\theta}+\theta\geq 2$. Из теоремы 4.1 [8] следует, что $\kappa(\varepsilon)<\infty$ для всех $\varepsilon\in(0,1)$, причем $\varepsilon_2<\varepsilon_1$, если $1-\theta\widetilde{\theta}\geq 0$, и $\varepsilon_1<\varepsilon_2$, если $1-\theta\widetilde{\theta}<0$. Кроме того, так как $b(\varepsilon)=-\varepsilon(\widetilde{\theta}-\theta)-\theta$ и $\widetilde{\theta}>\theta$, то $b(\varepsilon)$ строго монотонно убывает по ε. Тогда из (7) следует, что для всех $\gamma\in(\gamma_-,\gamma_+)$ функция $z(\gamma)$ строго монотонно возрастает. Значит, между $b(\varepsilon(\gamma))$ и $z(\gamma)$ существует взаимнооднозначное соответствие. Из (11) и леммы 3, в силу непрерывности $b(\varepsilon)$, получаем, что для всех $\gamma\in(\gamma_-,\gamma_+)$ верно равенство $b(\varepsilon(\gamma))=b_2^{z(\gamma)}$. Отсюда, а также из (6) и (12) следует (13), где $i(\gamma)=2$.

Пусть теперь $|\widetilde{\theta}+\theta|<2$. Сначала полагаем $\widetilde{\theta}+\theta\geq 4\widetilde{\theta}/(1+\widetilde{\theta}^2)$. Тогда нетрудно проверить выполнение неравенств $\widetilde{b}<b(\varepsilon_+)<b(\varepsilon_-)$, где $\varepsilon_+=\mathrm{I}(\widetilde{\theta}\geq 1)+\varepsilon_2\mathrm{I}(\widetilde{\theta}<1)$ и $\varepsilon_-=\varepsilon_1\mathrm{I}(\theta>-1)$. В силу этих неравенств из (7) получаем, что $z(\gamma)$ строго монотонно возрастает для всех $\gamma\in(\gamma_-,\gamma_+)$. Тогда, учитывая (11) и непрерывность $b(\varepsilon)$, убеждаемся, что $b(\varepsilon(\gamma))=b_2^{z(\gamma)}$ для всех $\gamma\in(\gamma_-,\gamma_+)$. Таким образом, опять из (6) и (12) получаем $I(\gamma)=f_2(z(\gamma))$ для всех $\gamma\in(\gamma_-,\gamma_+)$, то есть справедливо равенство (13), где $i(\gamma)=2$.

Далее рассмотрим $\widetilde{\theta}+\theta\leq 4\theta/(1+\theta^2)$. Тогда легко убедиться, что справедливо $b(\varepsilon_+)<b(\varepsilon_-)<\widetilde{b}$, где $\varepsilon_-=\varepsilon_1\mathrm{I}(\theta>-1)$ и $\varepsilon_+=\mathrm{I}(\widetilde{\theta}\geq 1)+\varepsilon_2\mathrm{I}(\widetilde{\theta}<1)$. Таким образом, в силу этих неравенств из (7) следует, что $z(\gamma)$ строго монотонно убывает для всех $\gamma\in(\gamma_-,\gamma_+)$. Тогда из (11) учитывая непрерывность $b(\varepsilon)$, получаем, что для всех $\gamma\in(\gamma_-,\gamma_+)$ верно $b(\varepsilon(\gamma))=b_1^{z(\gamma)}$. Откуда, а также из (6) и (12) следует (13), $i(\gamma)=1$.

Теперь пусть $4\theta/(1+\theta^2)<\widetilde{\theta}+\theta<4\widetilde{\theta}/(1+\widetilde{\theta}^2)$. Тогда легко убедиться, что справедливо $b(\varepsilon_+)\leq b(1)<\widetilde{b}<b(0)<b(\varepsilon_-)$, где $\varepsilon_-=\varepsilon_1\mathrm{I}(\theta>-1)$, а $\varepsilon_+=\mathrm{I}(\widetilde{\theta}\geq 1)+\varepsilon_2\mathrm{I}(\widetilde{\theta}<1)$. Из (7) следует, что для всех $\gamma\in(\gamma_-,\widetilde{\gamma}]$ функция $z(\gamma)$ строго монотонно возрастает. А из (11) и непрерывности $b(\varepsilon)$ вытекает $b(\varepsilon(\gamma))=b_2^{z(\gamma)}$ для всех $\gamma\in(\gamma_-,\widetilde{\gamma}]$. Тогда, очевидно для $\gamma\in(\gamma_-,\widetilde{\gamma}]$ справедливо равенство $I(\gamma)=f_2(z(\gamma))$.

Если $\gamma \in [\widetilde{\gamma}, \gamma_+)$, то как и в предыдущем случае, получаем $b(\varepsilon(\gamma)) = b_1^{z(\gamma)}$, а следовательно, $I(\gamma) = f_1(z(\gamma))$. Таким образом, в случае $|\widetilde{\theta} + \theta| < 2$ равенство (13) также доказано.

Далее рассмотрим $\widetilde{\theta} + \theta \le -2$. Из теоремы 4.1 [8] следует, что $\kappa(\varepsilon) < \infty$ для всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_+)$, причем $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$, если $1 - \theta\widetilde{\theta} \ge 0$, и $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$, если $1 - \theta\widetilde{\theta} < 0$. Кроме того, функция $b(\varepsilon)$ строго монотонно убывает по ε. Тогда из (7) следует, что для всех $\gamma \in (\gamma_-, \gamma_+)$ $z(\gamma)$ строго монотонно убывает. Из (11) и леммы 3, в силу непрерывности $b(\varepsilon)$, получаем, что для всех $\gamma \in (\gamma_-, \gamma_+)$ верно равенство $b(\varepsilon(\gamma)) = b_1^{z(\gamma)}$. Откуда, а также из (6) и (12) следует (13), $i(\gamma) = 1$.

Заметим, что при $\widetilde{\theta} > \theta$ выполняется неравенство $4\theta/(1+\theta^2) < 4\widetilde{\theta}/(1+\widetilde{\theta}^2)$ и, значит, случай $4\widetilde{\theta}/(1+\widetilde{\theta}^2) < \widetilde{\theta} + \theta < 4\theta/(1+\theta^2)$ не существует. А для всех $\widetilde{\theta} < \theta$ выполняется неравенство $4\widetilde{\theta}/(1+\widetilde{\theta}^2) < 4\theta/(1+\theta^2)$.

Случай $\widetilde{\theta} < \theta$ рассматривается аналогично. □

Замечание 1. Если $|\widetilde{\theta} + \theta| < 2$ и $\gamma = \widetilde{\gamma}$, то функция $i(\gamma)$ определяется неоднозначно. Нетрудно заметить, что в этом случае $b_1^{\widetilde{z}} = b_2^{\widetilde{z}} = \widetilde{b}$. Значит, $I(\widetilde{\gamma}) = f_{i(\widetilde{\gamma})}(\widetilde{z}) = f_1(\widetilde{z}) = f_2(\widetilde{z})$ и можно полагать либо $i(\gamma) = 1$, либо $i(\gamma) = 2$.

4. Вычисление функции b(a).

Как следует из леммы 2, для вычисления $b(a)$ необходимо найти решение $\gamma(a)$ уравнения $I(\gamma) = a$ в области $\gamma \in (\Gamma_0, \Gamma_1)$ при $a \in (I(\Gamma_0), I(\Gamma_1))$. Функция $\kappa(\varepsilon)$ дифференцируема на $(\varepsilon_-, \varepsilon_+)$. Поэтому на основании свойств преобразования Лежандра-Фенхеля функции $\kappa(\varepsilon)$ получаем, что $I(\gamma)$ строго выпукла, имеет минимум в точке Γ_0 и строго монотонно возрастает при $\gamma \in (\Gamma_0, \gamma_+)$ [11]. Значит, для всех $a \in (I(\Gamma_0), I(\gamma_+))$ уравнение $I(\gamma) = a$ имеет единственное решение $\gamma(a)$ в области $\gamma \in (\Gamma_0, \gamma_+)$. Согласно теореме 1 имеем $I(\gamma) = f_{i(\gamma)}(z(\gamma))$, и, значит, задача сводится к нахождению решения уравнения $f_{i(\gamma)}(z(\gamma)) = a$. Решение этой задачи дано в теореме 2. Для ее формулировки введем обозначения

$$a_0 = f_{i(\gamma_0)}(z(\gamma_0))\mathrm{I}(|\theta| < 1) + f_{i(\gamma_{-+})}(z(\gamma_-))\mathrm{I}(|\theta| \ge 1),$$

$$a_1 = f_{i(\gamma_1)}(z(\gamma_1))\mathrm{I}(|\widetilde{\theta}| < 1) + f_{i(\gamma_{+-})}(z(\gamma_+))\mathrm{I}(|\widetilde{\theta}| \ge 1),$$

$$\widetilde{a} = I(\widetilde{\gamma}),\ \ z_1 = z(\gamma_1)\mathrm{I}(|\widetilde{\theta}| < 1) + z(\gamma_+)\mathrm{I}(|\widetilde{\theta}| \ge 1).$$

Нетрудно показать, что $z_1 = 1 - \widetilde{\theta}^2$, если $|\widetilde{\theta}| < 1$, и $z_1 = \widetilde{\theta}^2 - 1$, если $|\widetilde{\theta}| \ge 1$.

Теорема 2. *Для любого* $a \in (a_0, a_1)$

$$b(a) = a + \frac{\widetilde{\theta} - \theta}{2b_{j(a)}^{z_a}}\left(\frac{1 - \theta\widetilde{\theta}}{z_a} - 1\right), \tag{14}$$

где $j(a) = j(a; \widetilde{\theta}, \theta)$, *причем*

$$j(a;\tilde{\theta},\theta)=\begin{cases}1, & \text{если } \tilde{\theta}+\theta\le\frac{4\theta}{1+\theta^2}\wedge\frac{4\tilde{\theta}}{1+\tilde{\theta}^2},\\ 2, & \text{если } \tilde{\theta}+\theta\ge\frac{4\theta}{1+\theta^2}\vee\frac{4\tilde{\theta}}{1+\tilde{\theta}^2},\\ \mathrm{I}(\tilde{a}<a<a_1)+2\mathrm{I}(a_0<a\le\tilde{a}), & \text{если } \frac{4\theta}{1+\theta^2}<\tilde{\theta}+\theta<\frac{4\tilde{\theta}}{1+\tilde{\theta}^2},\\ \mathrm{I}(a_0<a\le\tilde{a})+2\mathrm{I}(\tilde{a}<a<a_1), & \text{если } \frac{4\tilde{\theta}}{1+\tilde{\theta}^2}<\tilde{\theta}+\theta<\frac{4\theta}{1+\theta^2},\end{cases}$$

а z_a - единственное решение уравнения $f_{j(a)}(z)=a$ в соответствующей области изменения z.

Доказательство. Рассмотрим сначала $\tilde{\theta}>\theta$. Пусть $\tilde{\theta}+\theta\le 4\theta/(1+\theta^2)$. Выполнение указанного условия влечет справедливость неравенства $\tilde{\gamma}\le\Gamma_0<\Gamma_1$. Из теоремы 1 следует, что для всех $\gamma\in(\Gamma_0,\gamma_+)$ справедливо равенство $I(\gamma)=f_1(z(\gamma))$. В теореме 1 показано, что в данном случае функция $z(\gamma)$ строго монотонно убывает и принимает значения из интервала (z_1,z_0). Кроме того, в рассматриваемых условиях функция $I(\gamma)$ строго монотонно возрастает на интервале (Γ_0,γ_+). Поэтому $f_1(z)$ строго монотонно убывает при $z\in(z_1,z_0)$ и принимает значения из интервала (a_0,a_1). Пусть $z_{a,1}$ - единственное решение уравнения $f_1(z)=a$ в области $z\in(z_1,z_0)$ для $a\in(a_0,a_1)$. Так как $\gamma(a)$ - решение уравнения $I(\gamma)=a$ в области $\gamma\in(\Gamma_0,\gamma_+)$, то $z_{a,1}=z(\gamma(a))$ и из (5) получаем

$$\gamma(a)=\frac{(\tilde{\theta}-\theta)}{2b_1^{z_a}}\left(\frac{1-\theta\tilde{\theta}}{z_a}-1\right),$$

где $z_a=z_{a,1}$. Соотношение (14) в данном случае доказано.

Пусть теперь $4\tilde{\theta}/(1+\tilde{\theta}^2)\le\tilde{\theta}+\theta$. Из теоремы 1 получаем, что для всех $\gamma\in(\Gamma_0,\gamma_+)$ верно равенство $I(\gamma)=f_2(z(\gamma))$. В этих условиях $z(\gamma)$ строго монотонно возрастает при $\gamma\in(\Gamma_0,\gamma_+)$, следовательно, $f_2(z)$ строго монотонно возрастает при $z\in(z_0,z_1)$, и, кроме того, $f_2(z_0)=a_0$, $f_2(z_1)=a_1$. Если $a\in(a_0,a_1)$ и $z_{a,2}$ - решение уравнения $f_2(z)=a$ в области $z\in(z_0,z_1)$, то, очевидно, $z_{a,2}=z(\gamma(a))$. Тогда из (5) следует, что для всех $a\in(a_0,a_1)$

$$\gamma(a)=-\frac{(\tilde{\theta}-\theta)}{2b_2^{z_a}}\left(\frac{1-\theta\tilde{\theta}}{z_a}-1\right),$$

где $z_a=z_{a,2}$, то есть выполняется соотношение (14).

Наконец, пусть $4\theta/(1+\theta^2)<\tilde{\theta}+\theta<4\tilde{\theta}/(1+\tilde{\theta}^2)$. Тогда выполняется неравенство $\Gamma_0<\tilde{\gamma}<\Gamma_1$. Из теоремы 1 следует, что для всех $\gamma\in(\Gamma_0,\gamma_+)$ верно равенство $I(\gamma)=f_1(z(\gamma))\mathrm{I}(\tilde{\gamma}<\gamma<\gamma_+)+f_2(z(\gamma))\mathrm{I}(\Gamma_0<\gamma<\tilde{\gamma})$. Если $\gamma\in(\Gamma_0,\tilde{\gamma})$, то функция $z(\gamma)$ строго монотонно возрастает от z_0 до $\tilde{z}$. Поэтому функция $f_2(z)$ также строго монотонно возрастает от a_0 до $\tilde{a}$ при $z\in(z_0,\tilde{z}]$. Тогда для всех $a\in(a_0,\tilde{a}]$ имеем $z_{a,2}=z(\gamma(a))$, где $z_{a,2}$ - решение уравнения $f_2(z)=a$ в области $z\in(z_0,\tilde{z}]$. Если $\gamma\in(\tilde{\gamma},\gamma_+)$, то $z(\gamma)$ строго монотонно убывает от $\tilde{z}$ до z_1. Тогда $f_1(z)$ строго монотонно убывает при $z \in (z_1, \widetilde{z})$ и принимает значения из интервала $(\widetilde{a}, a_1)$. Значит, для всех $a \in (\widetilde{a}, a_1)$ имеем $z_{a,1} = z(\gamma(a))$, где $z_{a,1}$ - решение уравнения $f_1(z) = a$ в области $z \in (z_1, \widetilde{z})$ при $a \in (\widetilde{a}, a_1)$. Следовательно, в рассматриваемом случае для всех $a \in (a_0, a_1)$

$$\gamma(a) = -\frac{(\widetilde{\theta} - \theta)}{2b_{j(a)}^{z_a}}\left(\frac{1 - \theta\widetilde{\theta}}{z_a} - 1\right),$$

где $j(a) = \mathrm{I}(\widetilde{a} < a < a_1) + 2\mathrm{I}(a_0 < a \le \widetilde{a})$ и $z_a = z_{a,1}\mathrm{I}(\widetilde{a} < a < a_1) + z_{a,2}\mathrm{I}(a_0 < a \le \widetilde{a})$. Соотношение (14) полностью доказано.

Как замечено в доказательстве теоремы 1, при $\widetilde{\theta} > \theta$ выполняется неравенство $4\theta/(1+\theta^2) < 4\widetilde{\theta}/(1+\widetilde{\theta}^2)$ и, значит, случай $4\widetilde{\theta}/(1+\widetilde{\theta}^2) < \widetilde{\theta} + \theta < 4\theta/(1+\theta^2)$ не существует. А для всех $\widetilde{\theta} < \theta$ выполняется неравенство $4\widetilde{\theta}/(1+\widetilde{\theta}^2) < 4\theta/(1+\theta^2)$.

В случае $\widetilde{\theta} < \theta$ теорема доказывается аналогично. □

Замечание 2. Из теорем 1 и 2 видно, что для всех $a \in (a_0, a_1)$ справедливы равенства $I(\gamma(a)) = f_{i(\gamma(a);\widetilde{\theta},\theta)}(z(\gamma(a))) = f_{j(a;\widetilde{\theta},\theta)}(z(\gamma(a))) = a$ при всех значениях параметров θ и $\widetilde{\theta}$. Отсюда легко получаем $j(a;\widetilde{\theta},\theta) = i(\gamma(a);\widetilde{\theta},\theta)$.

Замечание 3. Доказательства теорем 1 и 2 в случае $|\theta| < 1$ подробно изложены в работе [6], теоремы 1 и 2. В настоящей работе параметр θ может быть любым из интервала $(-\infty, +\infty)$.

5. Пример.

Пусть $\widetilde{\theta} + \theta = 0$. Тогда $\varepsilon_1 = (1+\theta)^2/(4\theta)$ и $\varepsilon_2 = -(1-\theta)^2/(4\theta)$. Согласно лемме 1 для всех $\varepsilon \in (\varepsilon_-, \varepsilon_+)$ функция $\kappa(\varepsilon)$ имеет вид

$$\kappa(\varepsilon) = -2^{-1}\ln(2^{-1}(1+\theta^2 + \sqrt{(1+\theta^2)^2 - 4\theta^2(2\varepsilon-1)^2}\,)),$$

где $\varepsilon_- = \varepsilon_1\mathrm{I}(-1 < \theta < \widetilde{\theta}) + \varepsilon_2\mathrm{I}(\widetilde{\theta} < \theta < 1)$ и $\varepsilon_+ = \varepsilon_1\mathrm{I}(-1 < \widetilde{\theta} < \theta) + \varepsilon_2\mathrm{I}(\theta < \widetilde{\theta} < 1) + \; + \mathrm{I}(|\widetilde{\theta}| \ge 1)$. Из (4), используя условие $\widetilde{\theta} + \theta = 0$, получаем $z(\gamma) = ((1+\theta^2)^2 - 4\theta^2(2\varepsilon(\gamma)-1)^2)^{1/2}$, где $\varepsilon(\gamma)$ - решение уравнения $1+\theta^2 = (1+(2\varepsilon-1)\gamma)((1+\theta^2)^2 - 4\theta^2(2\varepsilon-1)^2)^{1/2}$. Нетрудно показать, что в данном примере $\gamma_- = -2(\theta^2-1)^{-1}\mathrm{I}(|\theta| > 1)$ - $\mathrm{I}(|\theta| \le 1)$, $\gamma_+ = 2(\theta^2-1)^{-1}\mathrm{I}(|\theta| > 1) + \; + \mathrm{I}(|\theta| \le 1)$, $\gamma_0 = 2\theta^2(\theta^2-1)^{-1}{}_{+}-)$, $\gamma_1 = 2\theta^2(1-\theta^2)^{-1}{}_{+}-)$, $\widetilde{\gamma} = 0$ и $\widetilde{z} = 1+\theta^2$. Из (12) следует, что для всех $z \in (0, \widetilde{z}]$ функции $f_i(z)$ имеют вид

$$f_i(z) = \frac{1}{2}\left(\frac{1+\theta^2}{z} - 1\right)\left(1 + \frac{\theta}{b_i^z}\right) + \frac{1}{2}\ln\frac{1+\theta^2+z}{2},\ i = 1,2,$$

где $b_i^z = (-1)^i((1+\theta^2)^2 - z^2)^{1/2}/2, i = 1,2$. Тогда из теоремы 1 получаем, что для всех $\gamma \in (\gamma_-, \gamma_+)$ справедливо равенство $I(\gamma) = f_{i(\gamma)}(z(\gamma))$, где $i(\gamma) = \mathrm{I}(0 < \gamma < \gamma_+) + 2\mathrm{I}(\gamma_- < \gamma \le 0)$ при $\widetilde{\theta} > \theta$ и $i(\gamma) = \mathrm{I}(\gamma_- < \gamma \le 0) + \; + 2\mathrm{I}(0 < \gamma < \gamma_+)$ при $\widetilde{\theta} < \theta$. Легко получаем

$a_0 = \theta^2(1 + \mathrm{sign}\,\theta)(1-\theta^2)^{-1}\,\mathrm{I}(|\theta| < 1) + ((1 - \mathrm{sign}\,\theta)(\theta^2 - 1)^{-1} + \ln|\theta|)\,\mathrm{I}(|\theta| \ge 1)$,

$a_1 = \theta^2(1 - \mathrm{sign}\,\theta)(1-\theta^2)^{-1}\,\mathrm{I}(|\theta| < 1) + ((1 + \mathrm{sign}\,\theta)(\theta^2 - 1)^{-1} + \ln|\theta|)\,\mathrm{I}(|\theta| \ge 1)$, $\widetilde{a} = 2^{-1}\ln(1+\theta^2)$,

$z_0 = z_1 = (1-\theta^2)\mathrm{I}(|\theta|<1)+(\theta^2-1)\mathrm{I}(|\theta|\geq 1)$.

Вычислим функцию $b(a)$ для $a \in (a_0, a_1)$. Пусть z_a - решение уравнения $f_{j(a)}(z)=a$, где $j(\mathrm{a}) = \mathrm{I}(\widetilde{a} < a < a_1) + 2\mathrm{I}(a_0 < a \leq \widetilde{a})$ при $\widetilde{\theta} > \theta$ и $j(\mathrm{a}) = \mathrm{I}(a_0 < a \leq \widetilde{a}) + 2\mathrm{I}(\widetilde{a} < a < a_1)$ при $\widetilde{\theta} < \theta$. Здесь решение ищется в области $z \in (z_0, \widetilde{z}]$ при $a \in (a_0, \widetilde{a}]$ и в области $z \in (\widetilde{z}, z_1)$ при $a \in (\widetilde{a}, a_1)$. Тогда из теоремы 2 следует, что для всех $a \in (a_0, a_1)$

$$b(a) = a - \frac{(-1)^{j(a)} 2\theta}{\sqrt{(1+\theta^2)^2 - z_a^2}} \left(\frac{1+\theta^2}{z_a} - 1 \right).$$

Заметим, что при $\gamma = \widetilde{\gamma} = 0$ верно равенство $I(\widetilde{\gamma}) = f_1(\widetilde{z}) = f_2(\widetilde{z}) = \widetilde{a}$. Тогда для $a = \widetilde{a} = 2^{-1}\ln(1+\theta^2)$ имеем $b(a) = a$.

1. *Bahadur R.R.* Some limit theorems in statistics. - Philadelfia: SIAM. - 1971.
2. *Chernoff H.* A measure of asymptotic efficiency for tests of hypothesis based on the sum of observations//Ann. Math. Stat. - 1952. -**23**, № 4.- P. 443-507.
3. *Боровков А.А., Могульский А.А.* Большие уклонения и проверка статистических гипотез. - Новосибирск: Наука. - 1992.
4. *Birge L.* Vitesses maximales de decroissance des erreurs et test optimaux associes// Z. Wahrscheinlichkeitstheor. und verw. Geb. -1981. - **55**, № 2. - P. 261-273.
5. *Lin'kov Yu.N.* Large deviation theorems in the hypotheses testing problems//Exploring Stochastic Laws: Festschrift in honour of the 70th birthday of V.S. Korolyuk (A.V. Skorochod and Yu.V. Borovskikh, eds.). - Utrecht: VSP. - 1995. - P. 263-273.
6. *Линьков Ю.Н., Медведева М.И.* Об одном методе вычисления скорости убывания вероятностей ошибок критерия Неймана-Пирсона при различении процессов авторегрессии//Теория случайных процессов. - 1995. - **1** (17). - №. 1. - С. 60-70.
7. *Ліньков Ю.М.* Розрізнення процесів авторегресіі з нульовим асимптотичним рівнем// Теорія ймовірнгостей та математична статистика. - 1996. - 54. - С. 82-91.
8. *Lin'kov Yu.N., Ladan O.N.* Large deviations in the testing problems for the normal autoregressive processes//Theory of Stochastic Processes. - 1998. - **4** (20), № 1-2. - P. 37-53.
9. *Линьков Ю.Н.* Асимптотическое различение процессов авторегрессии// Укр. мат. журн. - 1996. - 48, № 5. - С. 620-626.
10. *Линьков Ю.Н.* Асимптотические методы статистики случайных процессов. - Киев: Наукова думка. - 1993.
11. *Рокафеллар Р.* Выпуклый анализ. - М.: Мир. - 1973.

Институт прикладной математики и механики НАН Украины