ISSN 1683-4720

НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК УКРАИНЫ

ирф

ТРУДЫ

ИНСТИТУТА ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

ТОМ 8

Донецк
2003

УДК 517 : 519 : 531

В сборнике представлены работы по широкому кругу вопросов из разных областей математики, механики и кибернетики: теории функций, теории вероятностей и математической статистике, алгебре, дифференциальным уравнениям, динамике твердого тела и теории упругости, теории автоматов, а также их приложениям.

Для научных работников, преподавателей, аспирантов и студентов вузов соответствующих специальностей.

Объем : 15 п.листов.

В збірнику представлено роботи з широкого кола питань у різних галузях математики, механіки і кібернетики: теорії функцій, теорії ймовірностей і математичної статистики, алгебри, диференціальних рівнянь, динаміки твердого тіла і теорії пружності, теорії автоматів, а також їх застосувань.

Для науковців, викладачів, аспірантів і студентів вузів відповідних спеціальностей.

Обсяг : 15 друк. арк.

Адрес редколлегии:

83114 Донецк 114, ул. Р.Люксембург, 74
Институт прикладной математики и механики НАН Украины
Тел. 55 51 75

Утверждено к печати ученым советом
Института прикладной математики и механики НАН Украины

СОДЕРЖАНИЕ

ISSN 1683-4720. Труды ИПММ НАН Украины. 2003. Вып. 8

УДК 531.38

©2003. **О.Н. Ие**

БОЛЬШИЕ УКЛОНЕНИЯ В ЗАДАЧЕ РАЗЛИЧЕНИЯ АСИМПТОТИЧЕСКИ КРИТИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ АВТОРЕГРЕССИИ

Доказаны предельные теоремы для интеграла Хеллингера в задаче различения двух асимптотически критических процессов экспоненциальной авторегрессии. На основании этих теорем получены теоремы о больших уклонениях для логарифма соответствующего отношения правдоподобия. Доказаны теоремы об асимптотическом поведении вероятностей ошибок критериев Неймана-Пирсона.

Введение. Пусть $\xi^n = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$, $n \geq 2$ – наблюдения процесса авторегрессии вида

$$\xi_i = \theta\xi_{i-1} + \varepsilon_i, \quad i = 1, 2, ..., \tag{1.1}$$

где ξ_0, $\theta \in (0, \infty)$ – неизвестный параметр, а $\varepsilon_1, \varepsilon_2, ...,$ – независимые одинаково распределенные случайные величины, имеющие показательное распределение с плотностью $p(x) = e^{-x}$ при $x \geq 0$ и $p(x) = 0$ при $x < 0$. Обозначим через $\mathbf{P}_\theta^n$ меру, задающую распределение вектора ξ^n. Рассмотрим задачу проверки двух простых гипотез H^n и $\tilde{H}^n$ по наблюдению ξ^n, состоящих в том, что распределение наблюдения ξ^n задается мерами $\mathbf{P}_\theta^n$ и $\mathbf{P}_{\tilde{\theta}}^n$ соответственно, где $\theta \neq \tilde{\theta}$.

Нетрудно показать, что при $\tilde{\theta} > \theta$ мера $\mathbf{P}_{\tilde{\theta}}^n$ абсолютно непрерывна относительно меры $\mathbf{P}_\theta^n$ ($\mathbf{P}_{\tilde{\theta}}^n \ll \mathbf{P}_\theta^n$), а при $\tilde{\theta} < \theta$ мера $\mathbf{P}_\theta^n$ абсолютно непрерывна относительно меры $\mathbf{P}_{\tilde{\theta}}^n$ ($\mathbf{P}_\theta^n \ll \mathbf{P}_{\tilde{\theta}}^n$).

Вычислим логарифм плотности меры $\mathbf{P}_{\tilde{\theta}}^n$ относительно меры $\mathbf{P}_\theta^n$. Из вида авторегрессии (1.1) имеем

$$p_\theta(x_1, x_2, ..., x_n) = \begin{cases} p_\theta(x_1)p_\theta(x_2/x_1)...p_\theta(x_n/x_{n-1}), & \text{если } x_i > 0 \text{ для всех } i = 1, 2, ..., n, \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases} \tag{1.2}$$

Из (1.2), учитывая равенство $p_\theta(x/y) = p(x - \theta y)$, в случае $x_1 > 0, x_2 > 0, ..., x_n > 0$ получаем, что

$$p_\theta(x_1, x_2, ..., x_n) = \begin{cases} \prod\limits_{i=1}^{n} e^{-(x_i - \theta x_{i-1})}, & \text{если } x_i > \theta x_{i-1} \text{ для всех } i = 1, 2, ..., n, \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases} \tag{1.3}$$

где полагаем $x_0 = 0$.

Аналогично

$$p_{\tilde{\theta}}(x_1, x_2, ..., x_n) = \begin{cases} \prod\limits_{i=1}^{n} e^{-(x_i - \tilde{\theta} x_{i-1})}, & \text{если } x_i > \tilde{\theta} x_{i-1} \text{ для всех } i = 1, 2, ..., n, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases} \tag{1.4}$$

Рассмотрим отношение правдоподобия

$$z_n(x_1, ..., x_n) = \frac{p_{\tilde{\theta}}(x_1, ..., x_n)}{p_\theta(x_1, ..., x_n)}, \quad x_i \in (-\infty, \infty) \text{ для всех } i = 1, 2, ..., n,$$

где полагаем $0/0 = 0$ и $a/0 = \infty$ при $a > 0$. Учитывая равенства (1.3) и (1.4), имеем

$$z_n(x_1, ..., x_n) = \begin{cases} \exp\left\{(\tilde{\theta} - \theta)\sum\limits_{i=1}^{n} x_{i-1}\right\}, & \text{если } x_i > (\tilde{\theta} \vee \theta)x_{i-1}, \text{ для всех } i = 1, ..., n, \\ 0, & \text{если } x_i < (\tilde{\theta} \wedge \theta)x_{i-1}, \text{ для всех } i = 1, ..., n, \\ & \text{или } x_i < \tilde{\theta}x_{i-1}, \ \tilde{\theta} > \theta, \ i = 1, ..., n, \\ \infty, & \text{если } \tilde{\theta}x_{i-1} < x_i < \theta x_{i-1}, \ \tilde{\theta} < \theta, \\ & \text{для всех } i = 1, ..., n. \end{cases}$$

Тогда логарифм отношения правдоподобия $\Lambda_n = \ln z_n(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$ имеет вид

$$\Lambda_n = \begin{cases} (\tilde{\theta} - \theta)\sum\limits_{i=1}^{n} \xi_{i-1}, & \text{если } \xi_i > (\tilde{\theta} \vee \theta)\xi_{i-1}, \text{ для всех } i = 1, ..., n, \\ -\infty, & \text{если } \xi_i < (\tilde{\theta} \wedge \theta)\xi_{i-1}, \text{ для всех } i = 1, ..., n, \\ & \text{или } \xi_i < \tilde{\theta}\xi_{i-1}, \ \tilde{\theta} > \theta, \ i = 1, ..., n, \\ \infty, & \text{если } \tilde{\theta}\xi_{i-1} < \xi_i < \theta\xi_{i-1}, \ \tilde{\theta} < \theta, \ i = 1, ..., n. \end{cases}$$

Пусть δ_n – критерий Неймана-Пирсона уровня $\alpha_n \in (0, 1)$ для различения гипотез H^n и $\tilde{H}^n$ по наблюдениям ξ^n. Тогда [1]

$$\delta_n = I(\Lambda_n > d_n) + q_n I(\Lambda_n = d_n), \tag{1.5}$$

где $I(A)$ – индикатор множества A, а $d_n \in (-\infty, \infty)$ и $q_n \in [0, 1]$ – параметры критерия δ_n, определяемые из условия $\mathbf{E}_\theta^n \delta_n = \alpha_n$ (здесь $\mathbf{E}_\theta^n$ – математическое ожидание по мере $\mathbf{P}_\theta^n$). Обозначим через β_n вероятность ошибки 2-го рода критерия δ_n.

Цель данной работы – установить зависимость между скоростями убывания вероятностей ошибок α_n и β_n при $n \to \infty$ для критерия Неймана-Пирсона в условиях справедливости теоремы о больших уклонениях для Λ_n как при гипотезе H^n, так и при гипотезе $\tilde{H}^n$. При этом будем использовать общую методику решения этой задачи, развитую в [2–5]. Ранее эта задача рассматривалась в случае, когда θ и $\tilde{\theta}$ не зависят от n [6]. Кроме того, в работе [6] рассмотрен случай, когда θ не зависит от n, а $\tilde{\theta} = \tilde{\theta}_n$ зависит от n, причем $\tilde{\theta}_n \to \theta$ при $n \to \infty$. В данной работе предполагаем, что $\theta = \theta_n$ и $\tilde{\theta} = \tilde{\theta}_n$ зависят от n, причем $\theta_n \to 1$ и $\tilde{\theta}_n \to 1$ при $n \to \infty$. Случай, когда для процесса экспоненциальной авторегрессии в (1.1) модуль параметра θ равен 1, является критическим, так как при $|\theta| < 1$ процесс является устойчивым (эргодическим), а при $|\theta| > 1$ – неустойчивым. Поэтому исследуемый в данной работе случай можно рассматривать как случай приближенно (асимптотически) критических процессов экспоненциальной авторегрессии. Заметим, что ранее эта задача рассматривалась для процесса нормальной авторегрессии [7]. Ниже в §2 введен интеграл Хеллингера порядка ε для распределений $\mathbf{P}^n_{\tilde\theta}$ и $\mathbf{P}^n_{\theta}$, даны формулы для вычисления $H_n(\varepsilon)$ в случаях $\tilde\theta > \theta$ и $\tilde\theta < \theta$, полученные в работе [6]. В §3 доказаны теоремы о поведении интеграла Хеллингера $H_n(\varepsilon)$ при $n \to \infty$ для различных способов стремления θ_n и $\tilde\theta_n$ к 1, а в §4 на основании этих теорем получена теорема о больших уклонениях для Λ_n как при гипотезе H^n, так и при гипотезе $\tilde H^n$. В §5 на основании теоремы о больших уклонениях доказана теорема о зависимости между скоростями убывания вероятностей ошибок α_n и β_n критерия Неймана-Пирсона.

1. Интегралы Хеллингера. Введем интеграл Хеллингера $H_n(\varepsilon)$ порядка $\varepsilon \in (-\infty, \infty)$ для мер $\mathbf{P}^n_{\tilde\theta}$ и $\mathbf{P}^n_{\theta}$, полагая [1]

$$H_n(\varepsilon) = H(\varepsilon; \mathbf{P}^n_{\tilde\theta}, \mathbf{P}^n_{\theta}) = \int_0^\infty \dots \int_0^\infty p^\varepsilon_{\tilde\theta}(x_1, \dots, x_n) p^{1-\varepsilon}_{\theta}(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n. \tag{2.1}$$

Если $\mathbf{P}^n_{\theta}(\Lambda_n = -\infty) > 0$, то представление (2.1) определено при $\varepsilon \neq 0$ и $H_n(\varepsilon) = \infty$ для всех $\varepsilon < 0$. В точке $\varepsilon = 0$ определим

$$H_n(0) = \mathbf{P}^n_{\theta}(\Lambda_n > -\infty) = \mathbf{P}^n_{\theta}(p_{\tilde\theta}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) > 0).$$

Если $\mathbf{P}^n_{\tilde\theta}(\Lambda_n = \infty) > 0$ то формула (2.1) определена при $\varepsilon \neq 0$ и $H_n(\varepsilon) = \infty$ для всех $\varepsilon > 1$, а в точке $\varepsilon = 1$ полагаем

$$H_n(1) = \mathbf{P}^n_{\tilde\theta}(\Lambda_n < \infty) = \mathbf{P}^n_{\tilde\theta}(p_{\theta}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) > 0).$$

Нетрудно показать, что при $\tilde\theta > \theta$ мера $\mathbf{P}^n_{\tilde\theta}$ абсолютно непрерывна относительно меры $\mathbf{P}^n_{\theta}(\mathbf{P}^n_{\tilde\theta} \ll \mathbf{P}^n_{\theta})$, а при $\tilde\theta < \theta$ мера $\mathbf{P}^n_{\tilde\theta}$ не является абсолютно непрерывной относительно меры $\mathbf{P}^n_{\theta}$. Аналогично при $\tilde\theta < \theta$ мера $\mathbf{P}^n_{\theta}$ абсолютно непрерывна относительно меры $\mathbf{P}^n_{\tilde\theta}$, а при $\tilde\theta > \theta$ мера $\mathbf{P}^n_{\theta}$ не является абсолютно непрерывной относительно меры $\mathbf{P}^n_{\tilde\theta}$. Отсюда в силу определения интеграла Хеллингера получаем, что в случае $\tilde\theta > \theta$ имеем $H_n(\varepsilon) = \infty$ для всех $\varepsilon < 0$, $H_n(0) = \mathbf{P}^n_{\theta}(p_{\tilde\theta}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) > 0)$ и $H_n(\varepsilon)$ и определяется по формуле (2.1) для всех $\varepsilon > 0$. Аналогично в случае $\tilde\theta < \theta$ имеем $H_n(\varepsilon) = \infty$ для всех $\varepsilon > 1$, $H_n(1) = \mathbf{P}^n_{\tilde\theta}(p_{\theta}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) > 0)$ и $H_n(\varepsilon)$ определяется по формуле (2.1) для всех $\varepsilon < 1$. Справедливо следующее представление для интеграла Хеллингера $H_n(\varepsilon)$ [6].

При $\tilde\theta > \theta$

$$H_n(\varepsilon) = \begin{cases} \prod\limits_{i=0}^{n-2} \left\{ 1 + (1-\varepsilon)\,(\tilde\theta - \theta) \sum\limits_{j=0}^{i} \tilde\theta^j \right\}^{-1}, & \text{если } \ 0 \le \varepsilon < \varepsilon_+^{(n)}, \\ \\ \infty, & \text{если } \ \varepsilon \notin [0, \varepsilon_+^{(n)}), \end{cases} \tag{2.2}$$

а при $\tilde\theta < \theta$

$$H_n(\varepsilon) = \begin{cases} \prod\limits_{i=0}^{n-2} \left\{ 1 + \varepsilon\,(\theta - \tilde\theta) \sum\limits_{j=0}^{i} \theta^j \right\}^{-1}, & \text{если } \ \varepsilon_-^{(n)} \le \varepsilon \le 1, \\ \\ \infty, & \text{если } \ \varepsilon \notin (\varepsilon_-^{(n)}, 1]. \end{cases} \tag{2.3}$$

где

$$\varepsilon_-^{(n)} = -\left((\theta - \tilde\theta)\sum_{j=0}^{n-2}\theta^j\right)^{-1}, \quad \varepsilon_+^{(n)} = 1 + \left((\tilde\theta - \theta)\sum_{j=0}^{n-2}\tilde\theta^j\right)^{-1}. \tag{2.4}$$

2. Предельные теоремы для интеграла Хеллингера $H_n(\varepsilon)$. В данном параграфе предполагаем, что рассматривается выборка $\xi^n = (\xi_{n,1}, \xi_{n,2}, ..., \xi_{n,n})$, $n \geq 2$ в схеме серий наблюдений процесса авторегрессии вида

$$\xi_{n,i} = \theta_n \xi_{n,i-1} + \varepsilon_{n,i}, \quad i = 1, 2, ..., n,$$

где $\xi_{n,0} = 0$, а $\varepsilon_{n,1}, \varepsilon_{n,2}, ...,$ – независимые одинаково распределенные случайные величины, имеющие показательное распределение с плотностью $p(x) = e^{-x}$ при $x \geq 0$ и $p(x) = 0$ при $x < 0$. При этом предполагаем, что θ_n и $\tilde\theta_n$ зависят от n так, что $\Delta_n = \tilde\theta_n - \theta_n \to 0$ при $n \to \infty$. Более того $\theta_n \to 1$ и $\tilde\theta_n \to 1$ при $n \to \infty$.

Следующие теоремы дают условия существования предела

$$\lim_{n\to\infty} \psi_n^{-1} \ln H_n(\varepsilon) = \varkappa(\varepsilon) \tag{3.1}$$

при различных способах стремления $\theta_n \to 1$ и $\tilde\theta_n \to 1$ и дают вид функции $\varkappa(\varepsilon)$ и нормировки ψ_n.

Теорема 3.1. Пусть $\theta_n = 1 - \Delta_n$, $\Delta_n > 0$ и $\tilde\theta_n = 1 - \tilde\Delta_n$, $\tilde\Delta_n > 0$.

1) Если θ_n и $\tilde\theta_n$ зависят от n так, чтобы $\tilde\Delta_n = c\Delta_n$, $0 < c < 1$, $\Delta_n \to 0$, и $n\Delta_n \to \infty$ при $n \to \infty$. Тогда для всех $\varepsilon \in (-\infty, +\infty)$ существует предел (3.1), где $\psi_n = n$ и $\varkappa(\varepsilon) = -\ln\left(1 + (1-\varepsilon)\frac{(1-c)}{c}\right)$ при $\varepsilon \in \left[0, \frac{1}{1-c}\right)$ и $\varkappa(\varepsilon) = \infty$ при $\varepsilon \notin \left[0, \frac{1}{1-c}\right)$.

2) Если θ_n и $\tilde\theta_n$ зависят от n так, чтобы $\Delta_n = c\tilde\Delta_n$, $0 < c < 1$, $\tilde\Delta_n \to 0$ и $n\tilde\Delta_n \to \infty$ при $n \to \infty$. Тогда для всех $\varepsilon \in (-\infty, +\infty)$ существует предел (3.1), где функция $\varkappa(\varepsilon) = -\ln\left(1 + \varepsilon\frac{1-c}{c}\right)$ при $\varepsilon \in \left(-\frac{c}{1-c}, 1\right]$ и $\varkappa(\varepsilon) = \infty$ при $\varepsilon \notin \left(-\frac{c}{1-c}, 1\right]$, а $\psi_n = n$.

Доказательство. Рассмотрим сначала случай, когда $\tilde\Delta_n = c\Delta_n$, $0 < c < 1$. Тогда для всех $\varepsilon \in \left[0, 1 + \left((\tilde\theta_n - \theta_n)\sum_{j=0}^{n-2}\tilde\theta_n^j\right)^{-1}\right)$ из (2.2)

$$\ln H_n(\varepsilon) = -\sum_{i=0}^{n-2} \ln\left(1 + (1-\varepsilon)(1-c)\Delta_n \sum_{j=0}^{j}(1 - c\Delta_n)^j\right). \tag{3.2}$$

Так как

$$\sum_{j=0}^{i}(1 - c\Delta_n)^j = \frac{1 - (1 - c\Delta_n)^{i+1}}{c\Delta_n},$$

тогда

$$\ln H_n(\varepsilon) = -\sum_{i=0}^{n-2} \ln\left(1 + (1-\varepsilon)\frac{1-c}{c}(1 - (1 - c\Delta_n)^{i+1})\right). \tag{3.3}$$

Заметим, что для любого $\delta > 0$ существует номер $n_0 = n_0(\delta)$, такой что

$$e^{-c}(1-\delta) < (1 - c\Delta_n)^{\frac{1}{\Delta_n}} < e^{-c}(1+\delta), \quad \text{для всех } \; n \geq n_0. \tag{3.4}$$

Найдем оценку снизу и сверху для (3.3). Получаем

$$\sum_{i=1}^{n+1}\ln\left(1+(1-\varepsilon)\tfrac{1-c}{c}(1-(1-c\Delta_n)^i)\right)\geq$$
$$\geq\int_0^n\ln\left(1+(1-\varepsilon)\tfrac{1-c}{c}(1-(1-c\Delta_n)^x)\right)dx, \tag{3.5}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\ln\left(1+(1-\varepsilon)\tfrac{1-c}{c}(1-(1-c\Delta_n)^i)\right)\leq$$
$$\leq\int_1^{n+1}\ln\left(1+(1-\varepsilon)\tfrac{1-c}{c}(1-(1-c\Delta_n)^x)\right)dx. \tag{3.6}$$

Обозначим через $A=(1-\varepsilon)\frac{1-c}{c}$. Используя (3.4), из (3.5) получаем

$$\int_0^n\ln(1+A-A(1-c\Delta_n)^x)dx>\int_0^n\ln(1+A-A(e^{-c}(1+\delta))^{x\Delta_n})dx.$$

Произведем замену $x\Delta_n=y$, тогда имеем

$$\int_0^n\ln(1+A-A(e^{-c}(1+\delta))^{x\Delta_n})dx=\frac{1}{\Delta_n}\int_0^{n\Delta_n}\ln(1+A-A(e^{-c}(1+\delta))^{y})dy. \tag{3.7}$$

Так как при $n\Delta_n\to\infty$ для каждого фиксированного $\varepsilon\in\left[0,\frac{1}{1-c}\right)$

$$\frac{1}{\Delta_n}\int_0^{n\Delta_n}\ln(1+A-A(e^{-c}(1+\delta))^{y})dy=\frac{1+o(1)}{\Delta_n}n\Delta_n\ln(1+A)=n(1+o(1))\ln(1+A). \tag{3.8}$$

Аналогичным образом получаем оценку сверху для (3.6)

$$\sum_{i=0}^{n}\ln(1+A-A(1-c\Delta_n)^i)\leq\tfrac{1}{\Delta_n}\int_{\Delta_n}^{(n+1)\Delta_n}\ln(1+$$
$$+A-A(e^{-c}(1-\delta))^{y})dy=n(1+o(1))\ln(1+A). \tag{3.9}$$

Таким образом, из (3.8), (3.9), учитывая, что $\varepsilon_+^{(n)}\to\frac{1}{1-c}$ при $n\Delta_n\to\infty$, для всех $\varepsilon\in\left[0,\frac{1}{1-c}\right)$ получаем

$$\lim_{n\to\infty}n^{-1}\ln H_n(\varepsilon)=-\ln\left(1+(1-\varepsilon)\frac{(1-c)}{c}\right).$$

Случай, когда $\Delta_n=c\tilde\Delta_n$, $0<c<1$, рассматривается аналогично. □

Теорема 3.2.

Пусть $\theta_n=1+\Delta_n$, $\tilde\theta_n=1+\tilde\Delta_n$.

1) Если $\tilde\Delta_n=c\Delta_n$, $\Delta_n>0$, $-1<c<1$, $c\neq0$ и $\Delta_n\to0$, $n\Delta_n\to\infty$ при $n\to\infty$. Тогда для всех $\varepsilon\in(-\infty,+\infty)$ существует предел (3.1), где $\psi_n=n$ и $\varkappa(\varepsilon)=-\ln(1-\varepsilon(1-|c|))$ при $\varepsilon\in(0,1]$ и $\varkappa(\varepsilon)=\infty$ при $\varepsilon\notin(0,1]$.

2) Если $\Delta_n=c\tilde\Delta_n$, $\tilde\Delta_n>0$, $-1<c<1$, $c\neq0$ и $\tilde\Delta_n\to0$, $n\tilde\Delta_n\to\infty$ при $n\to\infty$. Тогда для всех $\varepsilon\in(-\infty,+\infty)$ существует предел (3.1), где функция $\varkappa(\varepsilon)=-\ln(1-(1-\varepsilon)(1-|c|))$ при $\varepsilon\in[0,1)$ и $\varkappa(\varepsilon)=\infty$ при $\varepsilon\notin[0,1)$, а $\psi_n=n$.

Доказательство. Рассмотрим сначала случай, когда $\tilde{\Delta}_n = c\Delta_n$, $\Delta_n > 0$, $0 < c < 1$. Тогда для всех $\varepsilon \in \left(-\left((\theta_n - \tilde{\theta}_n) \sum\limits_{j=0}^{n-2} \theta_n^j \right)^{-1}, 1 \right]$ из (2.3)

$$\ln H_n(\varepsilon) = -\sum_{i=0}^{n-2} \ln \left(1 + \varepsilon(1-c)\Delta_n \sum_{j=0}^{i} (1+\Delta_n)^j \right). \tag{3.10}$$

Так как

$$\sum_{j=0}^{i} (1+\Delta_n)^j = -\frac{1-(1+\Delta_n)^{i+1}}{\Delta_n},$$

тогда

$$\ln H_n(\varepsilon) = -\sum_{i=0}^{n-2} \ln \left(1 - \varepsilon(1-c)(1-(1+\Delta_n)^{i+1}) \right). \tag{3.11}$$

Заметим, что для любого $\delta > 0$ существует номер $n_0 = n_0(\delta)$, такой что

$$e(1-\delta) < (1+\Delta_n)^{\frac{1}{\Delta_n}} < e(1+\delta), \quad \text{для всех} \quad n \geq n_0. \tag{3.12}$$

Оценим (3.11) снизу и сверху. Получаем

$$\sum_{i=1}^{n+1} \ln(1-\varepsilon(1-c)(1-(1+\Delta_n)^i)) \geq \int_0^n \ln(1-\varepsilon(1-c)(1-(1+\Delta_n)^x))dx, \tag{3.13}$$

$$\sum_{i=0}^{n} \ln(1-\varepsilon(1-c)(1-(1+\Delta_n)^i)) \leq \int_1^{n+1} \ln(1-\varepsilon(1-c)(1-(1+\Delta_n)^x))dx. \tag{3.14}$$

Обозначим через $A = -\varepsilon(1-c)$. Используя (3.12), (3.13) получаем

$$\int_0^n \ln(1+A(1-(1+\Delta_n)^x))dx > \int_0^n \ln(1+A(1-(e(1+\delta))^{x\Delta_n}))dx.$$

Произведем замену $x\Delta_n = y$, тогда имеем

$$\int_0^n \ln(1+A(1-(e(1+\delta))^{x\Delta_n}))dx = \frac{1}{\Delta_n} \int_0^{n\Delta_n} \ln(1+A(1-(e(1+\delta))^y))dy. \tag{3.15}$$

Обозначим через $\operatorname{dilog}(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{1-t} dt$. Далее, сделав замену $e^y = t$ и интегрируя по частям интеграл в правой части (3.15), получаем

$$\begin{aligned} &\tfrac{1}{\Delta_n} \textstyle\int_0^{n\Delta_n} \ln(1+A(1-(e(1+\delta))^y))dy = \\ &= \tfrac{1+o(1)}{\Delta_n} \left[n\Delta_n \ln(1+A) - \operatorname{dilog}\left(\tfrac{1+A(1-e^{n\Delta_n})}{1+A}\right) - \operatorname{dilog}(1+A) - \tfrac{1}{2}\ln(1+A)^2 \right]. \end{aligned} \tag{3.16}$$

Учитывая, что $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\operatorname{dilog}(x)}{x} = 0$ и $n\Delta_n \to \infty$ для каждого фиксированного $\varepsilon \in (0,1]$

$$\frac{1}{\Delta_n} \int_0^{n\Delta_n} \ln(1+A(1-(e(1+\delta))^y))dy = n(1+o(1))\ln(1+A). \tag{3.17}$$

Аналогичным образом получаем оценку сверху для (3.14)

$$\sum_{i=0}^{n} \ln(1 + A(1 - (1 + \Delta_n)^i)) \leq \tfrac{1}{\Delta_n} \int_{\Delta_n}^{(n+1)\Delta_n} \ln(1+ \\ +A(1 - (e(1-\delta))^y)) = n(1 + o(1)) \ln(1 + A). \tag{3.18}$$

Таким образом, из (3.17), (3.18), учитывая, что $\varepsilon_-^{(n)} \to 0$ при $n\Delta_n \to \infty$, для всех $\varepsilon \in (0, 1]$ получаем

$$\lim_{n\to\infty} n^{-1} \ln H_n(\varepsilon) = -\ln(1 - \varepsilon(1 - c)).$$

Далее рассмотрим $\tilde{\Delta}_n = c\Delta_n$, $\Delta_n > 0$, $-1 < c < 0$. Тогда

$$\ln H_n(\varepsilon) = -\sum_{i=0}^{n-2} \ln\left(1 + \varepsilon(1 + c)\Delta_n \sum_{j=0}^{i} (1 + \Delta_n)^j\right)$$

для всех $\varepsilon \in \left(-\left((\theta_n - \tilde{\theta}_n)\sum\limits_{j=0}^{n-2}\theta_n^j\right)^{-1}, 1\right]$. Проводя рассуждения, как и для предыдущего случая, получаем для всех $\varepsilon \in (0, 1]$

$$\lim_{n\to\infty} n^{-1} \ln H_n(\varepsilon) = -\ln(1 - \varepsilon(1 + c)).$$

Случай, когда $\Delta_n = c\tilde{\Delta}_n$, $-1 < c < 1$, рассматривается аналогично и поэтому его доказательство опускается. □

3. Теоремы о больших уклонениях. Из теорем 3.1, 3.2 вытекает, что при всех $\varepsilon \in (-\infty, +\infty)$ существует предел (3.1), в котором функция $\varkappa(\varepsilon)$ строго выпукла и дифференцируема на интервале $(\varepsilon_-, \varepsilon_+)$. Для формулировки следующих теорем введем обозначения

$$\gamma_- = \varkappa'(\varepsilon_- +), \quad \gamma_0 = \varkappa'(0), \quad \gamma_1 = \varkappa'(1), \quad \gamma_+ = \varkappa'(\varepsilon_+ -),$$

где γ_0 определено лишь при $\tilde{\theta}_n < \theta_n$, а γ_1 – лишь при $\tilde{\theta}_n > \theta_n$.

Так как при $\varepsilon \in (\varepsilon_-, \varepsilon_+)$

$$\varkappa'(\varepsilon) = \begin{cases} \frac{1-|c|}{1-\varepsilon(1-|c|)}, & \text{в случае } \theta_n = 1 - \Delta_n, \tilde{\theta}_n = 1 - \tilde{\Delta}_n, \Delta_n > 0, \tilde{\Delta}_n > 0, \tilde{\theta}_n > \theta_n, \\ & \text{или } \theta_n = 1 + \Delta_n, \tilde{\theta}_n = 1 + \tilde{\Delta}_n, \Delta_n > 0, \tilde{\theta}_n < \theta_n, \\ -\frac{1-|c|}{|c|+\varepsilon(1-|c|)}, & \text{в случае } \theta_n = 1 - \Delta_n, \tilde{\theta}_n = 1 - \tilde{\Delta}_n, \Delta_n > 0, \tilde{\Delta}_n > 0, \tilde{\theta}_n < \theta_n, \\ & \text{или } \theta_n = 1 + \Delta_n, \tilde{\theta}_n = 1 + \tilde{\Delta}_n, \tilde{\Delta}_n > 0, \tilde{\theta}_n > \theta_n, \end{cases} \tag{4.1}$$

то

$$\gamma_- = \begin{cases} 1 - |c|, & \text{если } \theta_n = 1 - \Delta_n, \tilde{\theta}_n = 1 - \tilde{\Delta}_n, \Delta_n > 0, \tilde{\Delta}_n > 0, \tilde{\theta}_n > \theta_n, \\ & \text{или } \theta_n = 1 + \Delta_n, \tilde{\theta}_n = 1 + \tilde{\Delta}_n, \Delta_n > 0, \tilde{\theta}_n < \theta_n, \\ -\frac{1-|c|}{|c|}, & \text{если } \theta_n = 1 + \Delta_n, \tilde{\theta}_n = 1 + \tilde{\Delta}_n, \tilde{\Delta}_n > 0, \tilde{\theta}_n > \theta_n, \\ -\infty, & \text{если } \theta_n = 1 - \Delta_n, \tilde{\theta}_n = 1 - \tilde{\Delta}_n, \Delta_n > 0, \tilde{\Delta}_n > 0, \tilde{\theta}_n < \theta_n; \end{cases} \tag{4.2}$$

$$\gamma_+ = \begin{cases} |c|-1, & \text{если } \theta_n = 1-\Delta_n, \tilde\theta_n = 1-\tilde\Delta_n, \Delta_n>0, \tilde\Delta_n>0, \tilde\theta_n<\theta_n, \\ & \text{или } \theta_n = 1+\Delta_n, \tilde\theta_n = 1+\tilde\Delta_n, \tilde\Delta_n>0, \tilde\theta_n>\theta_n, \\ \frac{1-|c|}{|c|}, & \text{если } \theta_n = 1+\Delta_n, \tilde\theta_n = 1+\tilde\Delta_n, \Delta_n>0, \tilde\theta_n<\theta_n, \\ \infty, & \text{если } \theta_n = 1-\Delta_n, \tilde\theta_n = 1-\tilde\Delta_n, \Delta_n>0, \tilde\Delta_n>0, \tilde\theta_n>\theta_n. \end{cases} \quad (4.3)$$

$$\gamma_0 = \begin{cases} \frac{c-1}{c}, & \text{если } \theta_n = 1-\Delta_n, \tilde\theta_n = 1-\tilde\Delta_n, \Delta_n>0, \tilde\Delta_n>0, \\ 1-|c|, & \text{если } \theta_n = 1+\Delta_n, \tilde\theta_n = 1+\tilde\Delta_n, \Delta_n>0; \end{cases} \quad (4.4)$$

$$\gamma_1 = \begin{cases} \frac{1-c}{c}, & \text{если } \theta_n = 1-\Delta_n, \tilde\theta_n = 1-\tilde\Delta_n, \Delta_n>0, \tilde\Delta_n>0, \\ |c|-1, & \text{если } \theta_n = 1+\Delta_n, \tilde\theta_n = 1+\tilde\Delta_n, \tilde\Delta_n>0. \end{cases} \quad (4.4)$$

Также введем обозначения

$$\Gamma_0 = \gamma_0 I(\varepsilon_- < 0) + \gamma_- I(\varepsilon_- = 0), \quad \Gamma_1 = \gamma_1 I(\varepsilon_+ > 1) + \gamma_+ I(\varepsilon_+ = 1). \quad (4.6)$$

Определим через $I(\gamma) = \sup\limits_{\varepsilon}(\varepsilon\gamma - \varkappa(\varepsilon))$ преобразование Лежандра-Фенхеля функции $\varkappa(\varepsilon)$ [8].

Учитывая результаты теоремы 3.1, получаем, что для каждого имеет место равенство

$$I(\gamma) = \gamma\varepsilon(\gamma) - \varkappa(\varepsilon(\gamma)), \quad (4.7)$$

где $\varepsilon(\gamma)$ – единственное решение уравнения $\varkappa'(\varepsilon) = \gamma$. Поскольку

$$\varepsilon(\gamma) = \begin{cases} \frac{1}{1-|c|} - \frac{1}{\gamma}, & \text{в случае } \theta_n = 1-\Delta_n, \tilde\theta_n = 1-\tilde\Delta_n, \Delta_n>0, \tilde\Delta_n>0, \tilde\theta_n>\theta_n, \\ & \text{или } \theta_n = 1+\Delta_n, \tilde\theta_n = 1+\tilde\Delta_n, \Delta_n>0, \tilde\theta_n<\theta_n, \\ -\frac{|c|}{1-|c|} - \frac{1}{\gamma}, & \text{в случае } \theta_n = 1-\Delta_n, \tilde\theta_n = 1-\tilde\Delta_n, \Delta_n>0, \tilde\Delta_n>0, \tilde\theta_n<\theta_n, \\ & \text{или } \theta_n = 1+\Delta_n, \tilde\theta_n = 1+\tilde\Delta_n, \Delta_n>0, \tilde\theta_n>\theta_n, \end{cases} \quad (4.8)$$

то легко получаем

$$I(\gamma) = \begin{cases} z(\gamma) - 1 - \ln z(\gamma) - \ln c, & \text{если } \theta_n = 1-\Delta_n, \tilde\theta_n = 1-\tilde\Delta_n, \Delta_n>0, \tilde\Delta_n>0, \tilde\theta_n> \\ z(\gamma) - 1 - \ln z(\gamma), & \text{если } \theta_n = 1+\Delta_n, \tilde\theta_n = 1+\tilde\Delta_n, \Delta_n>0, \tilde\theta_n<\theta_n, \\ \tilde z(\gamma) - 1 - \ln \tilde z(\gamma), & \text{если } \theta_n = 1-\Delta_n, \tilde\theta_n = 1-\tilde\Delta_n, \Delta_n>0, \tilde\Delta_n>0, \tilde\theta_n< \\ \tilde z(\gamma) - 1 - \ln \tilde z(\gamma) - \ln|c| & \text{если } \theta_n = 1+\Delta_n, \tilde\theta_n = 1+\tilde\Delta_n, \tilde\Delta_n>0, \tilde\theta_n>\theta_n. \end{cases} \quad (4$$

где

$$z(\gamma) = \gamma \frac{1}{1-|c|}, \quad \tilde{z}(\gamma) = \gamma \frac{c}{|c|-1}. \tag{4.10}$$

Теорема 4.1. Справедливы следующие соотношения:

1) для любого $\gamma \in (\Gamma_0, \gamma_+)$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln P_\theta^n \left(\frac{\Lambda_n}{n} > \gamma \right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln P_\theta^n \left(\frac{\Lambda_n}{n} \geq \gamma \right) = -I(\gamma), \tag{4.11}$$

где Γ_0 и γ_+ заданы равенствами (4.6) и (4.3), а функция $I(\gamma)$ – соотношениями (4.9) и (4.10);

2) если $\varepsilon_- < 0$, то для любого $\gamma \in (\gamma_-, \gamma_0)$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln P_\theta^n \left(\frac{\Lambda_n}{n} < \gamma \right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln P_\theta^n \left(\frac{\Lambda_n}{n} \leq \gamma \right) = -I(\gamma), \tag{4.12}$$

где γ_- и γ_0 определены равенствами (4.2) и (4.4).

Доказательство. Для доказательства достаточно заметить, что в силу теоремы 3.1 выполняется условие (**H**) из [5] и применить теорему 4.1 [5], где $\psi_n = n$. □

Справедлива следующая теорема о больших уклонениях для Λ_n в случае альтернативной гипотезы $\tilde{H}^n$ при $n \to \infty$.

Теорема 4.2. Справедливы следующие соотношения:

1) для любого $\gamma \in (\gamma_-, \Gamma_1)$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln P_{\tilde\theta}^n \left(\frac{\Lambda_n}{n} < \gamma \right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln P_{\tilde\theta}^n \left(\frac{\Lambda_n}{n} \leq \gamma \right) = -I(\gamma) + \gamma, \tag{4.13}$$

где γ_-, Γ_1 и $I(\gamma)$ заданы равенствами (4.2), (4.6) и (4.9) – (4.10);

2) если $\varepsilon_+ > 1$, то для всякого $\gamma \in (\gamma_1, \gamma_+)$если , то для

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln P_{\tilde\theta}^n \left(\frac{\Lambda_n}{n} > \gamma \right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln P_{\tilde\theta}^n \left(\frac{\Lambda_n}{n} \geq \gamma \right) = -I(\gamma) + \gamma, \tag{4.14}$$

где γ_1 и γ_+ заданы равенствами (4.5) и (4.3).

Доказательство. Для доказательства достаточно заметить, что выполняется условие (**H**) из [5] и применить теорему 4.3 из [5]. □

4. Скорости убывания вероятностей ошибок критерия Неймана-Пирсона. Пусть δ_n – критерий Неймана-Пирсона уровня $\alpha \in (0,1)$ для различения гипотез H^n и $\tilde{H}^n$ по наблюдениям ξ^n процесса авторегрессии, определяемый равенством (1.5).

Следующая теорема устанавливает взаимосвязь между скоростями убывания уровня α_n и вероятностью ошибки 2-го рода критерия δ_n.

Теорема 5.1. Верны следующие утверждения:

1) для любого $a \in (I(\Gamma_0), I(\Gamma_1))$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln \alpha_n = -a \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln \beta_n = -b(a), \tag{5.1}$$

где $b(a) = a - \gamma(a) \in (I(\Gamma_1) - \Gamma_1, I(\Gamma_0) - \Gamma_0)$, а $\gamma(a)$ – единственное решение уравнения $I(\gamma) = a$ относительно $\gamma \in (\Gamma_0, \Gamma_1)$;

2) для любого $a \in [0, I(\Gamma_0)]$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln \alpha_n = -a \quad \Rightarrow \quad \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln \beta_n \le \Gamma_0 - I(\Gamma_0), \tag{5.2}$$

а для любого $a \in [I(\Gamma_1), \infty)$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln \alpha_n = -a \quad \Rightarrow \quad \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln \beta_n \ge \Gamma_1 - I(\Gamma_1); \tag{5.3}$$

3) для любого $b \in [0, I(\Gamma_1) - \Gamma_1]$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln \beta_n = -b \quad \Rightarrow \quad \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln \alpha_n \le -I(\Gamma_1), \tag{5.4}$$

для любого $b \in [I(\Gamma_0) - \Gamma_0, \infty)$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln \beta_n = -b \quad \Rightarrow \quad \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln \alpha_n \ge -I(\Gamma_0). \tag{5.5}$$

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 3.2 [9] и поэтому опускается.

1. *Линьков Ю.Н.* Асимптотические методы статистики случайных процессов. – Киев: Наукова думка. – 1993. – 256 с.
2. *Lin'kov Yu.N.* Large deviation theorems in the hypotheses testing problems // Exploring Stochastic Laws: Festschrift in Honour of the 70th Birthday of Academician V.S. Korolyuk (A.V. Skorokhod and Yu.V. Borovskikh, eds.), VSP, Utrecht. – 1995b. – P. 263 – 273.
3. *Lin'kov Yu.N.* Large deviation theorems for extended random variables and some applications // J.Math. Sci. – 1999. – 93, no. 4. – P. 563–573.
4. *Lin'kov Yu.N.* Large deviation theorems for extended random variables in the hypotheses testing problems // Theory of Stochastic Processes. – 1999. – 5(21), no. 3–4. – P. 137-151.
5. *Lin'kov Yu.N.* Large deviation theorems in asymptotical statistics // Theory of Stochastic Processes. – 1997. – 3(19), no. 1–2. – P. 259–269.
6. *Ие О.Н., Линьков Ю.Н.* Теоремы о больших уклонениях в задаче различения процессов экспоненциальной авторегрессии // Прикладна статистика. Актуарна та фінансова математика. – 2001, №2. – С. 68–79.
7. *Линьков Ю.Н., Познахарева О.С.* Теоремы о больших уклонениях в задаче различения асимптотически критических процессов нормальной авторегрессии // Прикладна статистика. Актуарна та фінансова математика. – 2001, №2. – С. 80–110.
8. *Рокафеллар Р.* Выпуклый анализ. – М.: Мир. – 1973. – 471 с.
9. *Ліньков Ю.М.* Теореми про великі відхилення та їх застосування // Теорія ймовірностей та математична статистика. – 1997. – 57. – С. 96–102.

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк
Донецкий нац. ун-т
olgaie@ukr.net

Получено 4.04.2003