СЕРИЯ
«СЛОЖНЫЕ СИСТЕМЫ: МОДЕЛИ, АНАЛИЗ И УПРАВЛЕНИЕ»

Выходит четыре раза в год

Выпуск 2

СОДЕРЖАНИЕ

Журнал индексируется
в Российском индексе
научного цитирования.
Статьям присваиваются
международные индексы DOI

Над номером работали

С.В. Морозов,
редактирование и корректура

А.М. Моисеев,
верстка и дизайн

Подготовлено к печати
Редакционно-издательским
домом РосНОУ

111024, Москва,
ул. Авиамоторная,
д. 55, корп. 31, офис 526.
Тел. (495) 544-41-67
Сайт: http://vestnik-rosnou.ru
Электронная почта:
rid@rosnou.ru

Формат 70×100/16.
Бумага офсетная.
Объем 8,25 печ. л.
Тираж 200 экз.
Подписано в печать 16.07.2021.

Отпечатано
в типографии «Паблит»
127214, г. Москва,
Полярная ул. , д. 31В, стр. 1
Сайт: www.publitprint.ru

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

DOI: 10.25586/RNU.V9187.21.02.P.003 УДК 519.622

Р.В. Киричевский, А.В. Скринникова

РЕАЛИЗАЦИЯ МЕТОДА РУНГЕ – КУТТЫ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ОДУ С РАЗРЫВНОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ

Рассмотрено решение задачи Коши для ОДУ первого порядка с разрывом 2-го рода по переменной x в правой части методом Рунге – Кутты. Установлено, что стандартные подходы Каратеодори, Филиппова не применимы для численных расчетов таких задач. Анализ решений численных примеров показал, что метод Рунге – Кутты целесообразно применять с уменьшением сетки разбиения в окрестности точки разрыва по определенному правилу, предложенному в работе.
Ключевые слова: численные методы решения задачи Коши, абсолютная погрешность, метод Рунге – Кутты.

R.V. Kirichevskij, A.V. Skrinnikova

IMPLEMENTATION OF THE RUNGE – KUTTA METHOD FOR SOLVING ODES WITH A DISCONTINUOUS RIGHT-HAND SIDE

In this paper considers the solution of the Cauchy problem for first-order ODEs with a second-order discontinuity by the variable x on the right-hand side using the Runge – Kutta method. The standard Karateodori and Filippov approaches are not applicable for numerical calculations of such problems. An analysis of the solutions the numerical examples showes that the Runge – Kutta method should be applied with decreasing the mesh in the neighborhood of the discontinuity point according to a certain rule proposed in the paper.
Keywords: numerical methods for solving the Cauchy problem, absolute error, Runge – Kutta method.

Вводные замечания

Специалистами, занимающимися разрывными системами, было предложено трактовать дифференциальные уравнения (ДУ) с разрывной правой частью как уравнения с многозначной правой частью или дифференциальные включения [7]. В настоящее время такой подход к определению решений разрывных систем является наиболее употребительным, и не удивительно, почему начало интенсивного развития теории дифференциальных включений, теории ДУ с разрывной правой частью и теории автоматического регулирования совпадают по времени.

Одно из направлений исследования систем ДУ с разрывной правой частью обосновано в работах М.А. Айзермана и Е.С. Пятницкого [2]. Это направление условно назвали физическим в отличие от математического направления, развитого, в частности, в работах А.Ф. Филиппова [6].

Из анализа работ, посвященных различным методам исследования качественного поведения разрывных систем, следует отметить еще один содержательный и общий метод эквивалентного управления, получивший развитие в работах В.И. Уткина [7].

Численное решение дифференциальных уравнений

Киричевский Ростислав Викторович
кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры пожарной безопасности Института гражданской защиты Луганского государственного университета имени Владимира Даля. Сфера научных интересов: математическое моделирование, численные методы, программные комплексы, САПР в механике эластомеров. Автор 70 опубликованных научных работ.
E-mail: rost71@mail.ru

Скринникова Анна Владимировна
старший преподаватель кафедры фундаментальной математики Луганского государственного педагогического университета. Сфера научных интересов: биотехнические системы, системный анализ, математическое моделирование, численные методы, методика преподавания математических дисциплин. Автор 48 опубликованных научных работ.
E-mail: ann3005@rambler.ru

Начало систематического изучения разрывных систем относится к 60-м гг. XX в. в связи с возникновением и развитием теории автоматического регулирования. В настоящее время существуют такие системы релейного действия, в которых хотя бы в одном звене при непрерывном изменении входной величины в некоторых точках процесса выходная величина изменяется скачкообразно. Такое звено называется релейным, где статическая характеристика имеет точки разрыва. Для определения этих характеристик используется ДУ с разрывной правой частью.

Дадим обзор некоторых подходов к решению таких уравнений. По теореме Пеано, задача Коши

$$y' = f(x, y), \;\; y(x_0) = x_0 \tag{1}$$

локально разрешима в случае непрерывной функции $f(x, y)$. Иначе утверждение теоремы Пеано в общем случае неверно [3]. Если функция $f(x, y)$ удовлетворяет определенным условиям – имеет разрыв по y или является кусочно-непрерывной по x – подходы к решению ОДУ предлагаются в научной литературе [7, 9]. Иногда используют известные численные методы, меняя сетку разбиения при подходе к точке разрыва, значение функции в этой точке доопределяют по А.Ф. Филиппову [6]. Однако общего алгоритма для построения сетки не предложено.

Для устранения разрыва 1-го рода по x Л. Лопесом и Н. Буоно предложен подход, который заключается в решении уравнения [9]

$$y_{i+1}(\sigma h) = y_i + h\sum_{j=0}^{k-1} \gamma_j(\sigma)\Delta^j f_{i-j}, \qquad ,$$

где $\sigma \in (0; 1)$, $\gamma_j(\sigma)$ – коэффициенты, взятые из метода Адамса – Башфорта, h – шаг, $\Delta f_{i-1} = f_t - f_{i-1}$, $\Delta^2 f_{i-2} = f_i - 2f_{i-1} + f_{i-2}$,... - конечные разности. Для 4-го порядка точности имеем:

$$y_{i+1}(\sigma h)=y_i+h\left(\Delta^0 f_i\sigma+\Delta^1 f_{i-1}\frac{\sigma^2}{2}+\Delta^2 f_{i-2}\left(\frac{\sigma^3}{6}+\frac{\sigma^2}{4}\right)+\right.$$
$$\left.+\Delta^3 f_{i-3}\left(\frac{\sigma^4}{24}+\frac{{}^3}{6}+\frac{\sigma^2}{6}\right)+\Delta^4 f_{i-4}\left(\frac{\sigma^5}{120}+\frac{\sigma^4}{16}+\frac{11\sigma^3}{72}+\frac{\sigma^2}{8}\right)\right).$$

Однако для решения ОДУ с разрывом 2-го рода такой подход не работает.

А.Ф. Филипповым разработаны мощные инструменты для анализа существования решений ОДУ и систем ДУ с разрывом. Однако подходы к численному решению ОДУ, если $f(x, y)$ имеет разрыв 2-го рода по x, не представлены в открытом доступе.

Предложим подход к решению ОДУ с разрывной правой частью по x методом Рунге – Кутты со специально подобранным шагом в окрестности точки разрыва.

Описание предложенного подхода

Для численного решения (1) применим метод Рунге – Кутты в случаях, когда $f(x, y)$ имеет вид дробно-рациональной, -иррациональной, -обратной тригонометрической функции, то есть имеет разрыв 2-го рода по x. В качестве расчетных формул применим [2]:

$$y_{i+1}=y_i+\Delta y_i \tag{2}$$

где

$$\Delta y_i=\frac{1}{6}(k_1^{(i)}+2k_2^{(i)}+2k_3^{(i)}+k_4^{(i)}), \tag{3}$$

$$\begin{cases} k_1^{(i)}=hf(x_i,y_i),\\ k_2^{(i)}=hf\left(x_i+\dfrac{h}{2},y_i+\dfrac{k_1^{(i)}}{2}\right),\\ k_3^{(i)}=hf\left(x_i+\dfrac{h}{2},y_i+\dfrac{k_2^{(i)}}{2}\right),\\ k_4^{(i)}=hf(x_i+h,y_i+k_3^{(i)}), \end{cases} \tag{4}$$

$x_i=x_0+ih$, $y_i=y(x_i)$ $(i=0,1,2,...)$, h – шаг.

Отметим, что для явных методов Рунге – Кутты 4-го порядка радиус области абсолютной устойчивости, если правая часть ОДУ удовлетворяет условию Липшица, определяется равенством

$$R(z)=1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\frac{z^4}{4!}+O(z^5),$$

которое следует из того, что $e^{\lambda y}$ является точным решением задачи $y'=\lambda f(x,y)$, $y_0=1$, и из равенств $y_{n+1}=R(\lambda h)y_n$, $e^z-R(z)=O(z^5)$. Выбор параметров выражения (4) можно проводить не только из условия минимальной локальной погрешности, но и из расширения области устойчивости (для ОДУ с разрывом 2-го рода в правой части, исключая точки разрыва).

Проверим различные варианты при подходе к точке разрыва: за один шаг интервал разбиения уменьшим на 20, 50 и 80%. Затем после «перескока» точки разрыва пересчет осуществим уже с обычным шагом. В случае поиска решения при наличии одной точки разрыва наилучшие решения в сравнении с точными решениями (абсолютные погрешности минимальны) дал вариант: к точке x_{i-1}, предшествующей точке разрыва x_i, добавим $0{,}2h$, при этом в формулах (4) для точек x_{i-1}, x_i, x_{i+1} шаг остается $0{,}2h$. В точке разрыва решение доопределим значением, следующим сразу за точкой разрыва.

Применение предложенного подхода, когда нет точного решения, предлагаем с использованием правила Рунге: формулы для оценки погрешности решения ОДУ методом Рунге – Кутты

$$\frac{\left|y_{2i}(h)-y_i(2h)\right|}{2^p-1}<\varepsilon, \tag{5}$$

где p – порядок метода Рунге –Кутты, в нашем случае $p = 4$, ε – заданная точность. То есть для обеспечения требуемой точности применим выбор шага методом двойного просчета, чтобы для каждой точки численного решения значения отличались на величину, не превышающую заданной погрешности.

Нетрудно показать, что погрешность этого метода на каждом шаге есть величина порядка h^5 в предложении, что $f(x, y) \in C_5(G)$, где G – область, на которой отыскивается решение задачи Коши.

Ниже приведено несколько примеров, иллюстрирующих точность, предложенного подхода.

Численный пример 1

Рассмотрим решение задачи Коши

$$y'=\frac{1}{1-2x}, \quad y(0)=0, \tag{6}$$

на отрезке $[0;3]$, приняв шаг $h = 0{,}05$ и $h = 0{,}025$ [1–8].

Задача (6) представляет собой ОДУ с разделяющимися переменными. Его решение $y = -0{,}5\ln\left|1-2x\right|$ легко получается интегрированием правой части. Правая часть (6) $f(x,y)=\dfrac{1}{1-2x}$ имеет разрыв 2-го рода в точке $x = 0{,}5$, не является кусочно-непрерывной и удовлетворяет условиям Каратеодори [7]: 1) $f(x, y)$ непрерывна почти $\forall\, x$, 2) множество точек разрыва правой части имеет нулевую меру Лебега, 3) существует локально суммируемая функция $m : R \to R$ такая, что при каждом фиксированном y почти $\forall\, x$ выполняется неравенство $\left\|f(x, y)\right\| \le m(x)$.

Кривые решений задачи (6) представлены на рисунке 1: точного, с шагом 0,025 и 0,05 методом Рунге – Кутты. Решения методом Рунге – Кутты, полученные при уменьшении сетки разбиения в два раза, дали абсолютные погрешности вычислений минимум в 3,9 раза меньше, кроме точки, ближайшей к разрыву, хотя на рисунке 1 этого не заметно.

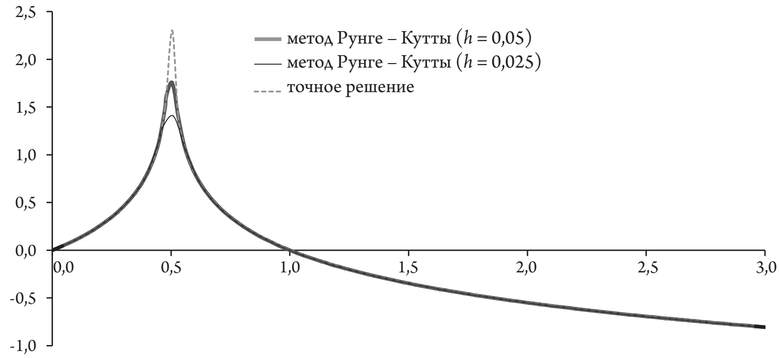

Рис. 1. Графики решений задачи (6)

Численный пример 2

Рассмотрим решение задачи Коши

$$y' = \frac{x}{x - 1}, \ y(0) = 0 , \qquad (7)$$

на отрезке $[0;3]$, приняв шаг $h = 0{,}05$ и $h = 0{,}025$.

ДУ задачи (7) аналогично (6). Его численное решение также можно сравнить с точным. Различие заключается в выпуклости решения. Кривые решений задачи (7) представлены на рисунке 2: точного, с шагом 0,025 и 0,05 методом Рунге – Кутты. Решение методом Рунге – Кутты, полученное при уменьшении сетки разбиения в два раза, даже на графике (рис. 2) заметно ближе к точному. Максимальная абсолютная погрешность после точки разрыва с шагом 0,025 составила 0,03939.

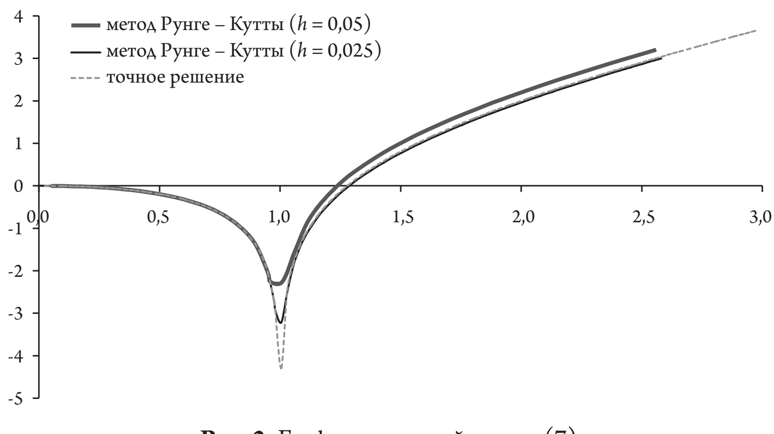

Рис. 2. Графики решений задачи (7)

Численный пример 3

Рассмотрим решение задачи Коши

$$y' = \frac{x}{\frac{\pi}{4} - \arcsin(2x)}, \ \ y(0) = 0, \qquad (8)$$

на отрезке $[0;0{,}5]$, приняв шаг $h = 0{,}005$ и $h = 0{,}01$.

Задача представляет собой ОДУ с разделяющимися переменными. Правая часть (8) имеет разрыв 2-го рода в точке $x=\frac{\sqrt{2}}{4}\approx 0{,}353553$, не является кусочно-непрерывной, удовлетворяет условиям Каратеодори. Точного решения нет, поскольку интеграл от правой части не выражается через элементарные функции, но представляет собой при подстановке $\sin x=\frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}$ интегральную экспоненту.

На рисунке 3 представлены решения задачи (8) при h = 0,01 стандартным методом Рунге – Кутты и по предложенному подходу с измененной сеткой разбиения при h = 0,01 и h = 0,005 методом Рунге – Кутты. К концу интервала абсолютная погрешность между решением с шагом 0,005 и решениями с шагом 0,01 увеличилась на 0,0714 при применении стандартного метода Рунге – Кутты.

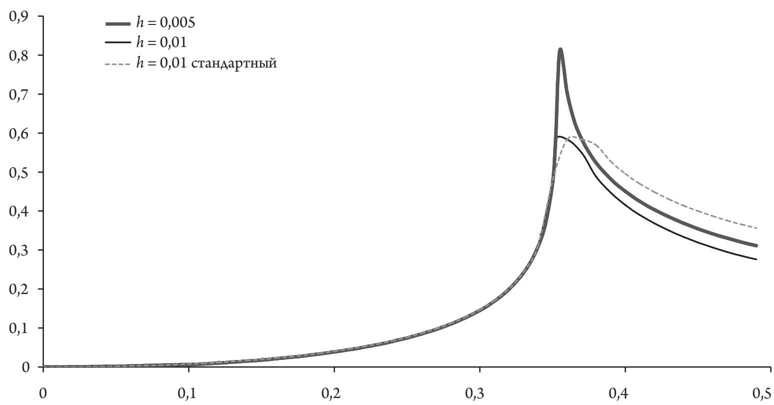

Рис. 3. Графики решений задачи (8)

Заключение

В работе проанализированы решения задачи Коши на примерах ОДУ первого порядка с разрывом 2-го рода в правой части на предмет сходимости численного решения в окрестности точки разрыва и после нее: использование метода Рунге – Кутты с измененной сеткой и коэффициентами в окрестности точки разрыва целесообразно. При этом в формулах (4) для точек x_{i-1}, x_i, x_{i+1} шаг равен $0{,}2h$, поскольку он дал наилучшие решения в сравнении с точными решениями (абсолютные погрешности минимальны), в точке разрыва решение доопределяется значением, следующим сразу за точкой разрыва. Предложенная схема изменения шага сетки представлена на рисунке 4.

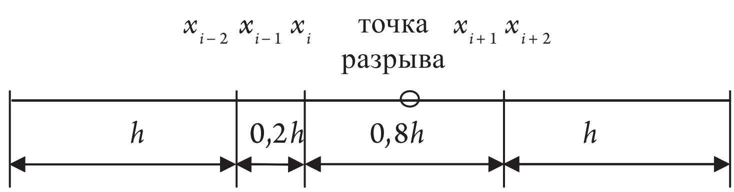

Рис. 4. Схема изменения шага

Литература

1. *Бабенко К.И.* Основы численного анализа. М.: Наука, 1986. 744 с.
2. *Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М.* Численные методы. 8-е изд. (эл.). М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2015. 639 с.
3. *Егоров А.И.* Обыкновенные дифференциальные уравнения с приложениями. 2-е изд., испр. М.: Физматлит, 2005. 384 с.
4. *Егоров А.И.* Теорема Коши и особые решения дифференциальных уравнений. М.: Физматлит, 2008. 254 с.
5. *Киричевский В.В., Левчук С.А., Киричевский Р.В.* Численные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений: монография. Киев: Наукова думка, 2005. 316 с.
6. *Филиппов А.Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985. 226 с.
7. *Финогенко И.А.* О дифференциальных уравнениях с разрывной правой частью // Известия Иркутского государственного университета. Серия: Математика. 2010. Т. 3, № 2. С. 88–102.
8. *Чезари Л.* Асимптотическое поведение и устойчивость решений обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1964. 477 с.
9. *Buono N.D., Lopez L.* Direct Event Location Techniques Based on Adams Multistep Methods for Discontinuous ODEs // Applied Mathematics Letters. 2015. Vol. 49. Pp. 152–158. DOI: 10.1016/j.aml.2015.05.012.

References

1. Babenko K.I. (1986) *Osnovy chislennogo analiza* [Basics of Numerical Analysis]. Moscow, Nauka Publishing. 744 p. (in Russian).
2. Bahvalov N.S., Zhidkov N.P., Kobelkov G.M. (2015) *Chislennye metody* [Numerical Methods]. 8th Digital Ed., Moscow, Publishing House “BINOM. Laboratoriya Znanij”. 639 p. (in Russian).
3. Egorov A.I. (2005) *Obyknovennye differentsial’nye uravneniya s prilozheniyami* [Ordinary Differential Equations with Applications]. 2nd Rev. Ed., Moscow, Fizmatlit Publishing. 384 p. (in Russian).
4. Egorov A.I. (2008) *Teorema Koshi i osobye resheniya differentsial’nykh uravnenij* [Cauchy Theorem and Special Solutions of Differential Equations]. Moscow, Fizmatlit Publishing. 254 p. (in Russian).
5. Kirichevskij V.V., Levchuk S.A., Kirichevskij R.V. (2005) *Chislennye metody resheniya differentsial’nykh i integral’nykh uravnenij: monografiya* [Numerical Methods for Solving Differential and Integral Equations]. Kiev, “Naukova dumka” Publishing. 316 p. (in Russian).
6. Filippov A.F. (1985) *Differentsial’nye uravneniya s razryvnoj pravoj chast’yu* [Differential Equations with Discontinuous Right-Hand Part]. Moscow, Nauka Publishing. 226 p. (in Russian).
7. Finogenko I.A. (2010) O differentsial’nykh uravneniyakh s razryvnoj pravoj chast’yu [On Differential Equations with Discontinuous Right-Hand Part]. *The Bulletin of Irkutsk State University. Series “Mathematics”*, vol. 3, no. 2, pp. 88–102 (in Russian).
8. Chesari L. (1964) *Asimptoticheskoe povedenie i ustojchivost’ reshenij obyknovennykh differentsial’nykh uravnenij* [Asymptotic Behavior and Stability of Solutions of Ordinary Differential Equations]. Moscow, Mir Publishing. 477 p. (in Russian).
9. Buono N.D., Lopez L. (2015) Direct Event Location Techniques Based on Adams Multistep Methods for Discontinuous ODEs. *Applied Mathematics Letters*, vol. 49, pp. 152–158. DOI: 10.1016/j.aml.2015.05.012.

РЕКОМЕНДАЦИИ АВТОРАМ

1. Статьи, направляемые для публикации в журнал, должны освещать результаты исследований и/или практический опыт и содержать информацию, открытую для печати и представляющую научный и практический интерес. Статьи аспирантов, докторантов, соискателей ученой степени, указываемые в списках научных трудов, как правило, должны отражать основные результаты их диссертационных исследований.

Статьи представляются на русском или английском языках.

Объем статьи должен составлять 12 000–18 000 знаков с пробелами (включая аннотацию и список литературы).

2. В состав статьи необходимо включать:

– УДК (см., например, УДК по электронному адресу: http://www.naukapro.ru/metod.htm);

– фамилии и инициалы авторов на русском и английском языках;

– название на русском и английском языках;

– аннотацию, как правило, объемом 200–270 слов на русском и английском языках;

– ключевые слова (5–7 слов или словосочетаний) на русском и английском языках;

– список литературы на русском языке и его транслитерацию латинской графикой. Список литературы необходимо оформлять в соответствии с требованиями ГОСТ Р 7.0.5–2008. Рекомендуемое число ссылок в одной статье: 15–20. Ссылки на работы, находящиеся в печати, не приводятся;

– сведения об авторах, включающие фамилию, имя, отчество, ученую степень, ученое звание (полностью), место работы с указанием почтового адреса, телефона организации и адреса электронной почты, должности, контактного телефона, сферу научных интересов и число опубликованных научных работ. Все эти данные помещаются на отдельной странице.

3. Статьи представляются в электронном варианте в виде файла формата *MS Word для Windows (*.doc)* по электронной почте на адреса rid@rosnou.ru и universitas@mail.ru. Название файла должно состоять из фамилии автора и названия статьи.

В тексте допускаются выделения шрифтами: **полужирный прямой**, ***полужирный курсив***, *светлый курсив*. Примеры рекомендуется выделять *курсивом*; заголовки, подзаголовки, новые термины и понятия – полужирным шрифтом.

Не рекомендуется использовать для выделения элементов текста ПРОПИСНЫЕ БУКВЫ, р а з р я д к у через пробел и подчеркивание, а также подстрочные ссылки.

4. Рисунки могут быть включены в файл текста и иметь сквозную нумерацию. Кроме этого, они обязательно должны быть представлены отдельным файлом в формате (*.tiff), (*.jpeg) с разрешением не менее 300 dpi, в цветном или черно-белом изображении. Подрисуночные подписи следует набирать сразу же после ссылки на рисунок. То же самое относится и к таблицам. Текст таблиц не должен выходить за пределы ячеек. Таблицы должны быть представлены в формате *MS Word* для *Windows*.

Не принимаются к публикации сканированные рисунки, таблицы.

5. При наборе формул следует использовать программу *MathType*; шрифт для набора символов – *Euclid Symbol*.

При наборе графиков использовать гарнитуры *Times New Roman, Arial*.

Графики, выполненные в программе *Microsoft Excel,* присылаются отдельным файлом вместе с табличными данными.

Не принимаются сканированные графики, формулы.

6. Список литературы должен содержать все цитируемые и упоминаемые в тексте работы в алфавитном порядке. Библиографическая запись, содержащая данные о литературном источнике, дается в следующем формате: для книг и других непериодических изданий – фамилия и инициалы автора, полное название работы, место издания, год издания; для периодических изданий – фамилия и инициалы автора, полное название работы, название издания, год выпуска, номер (том), страницы. При ссылке на литературный источник в тексте приводится порядковый номер работы по списку литературы в квадратных скобках и через запятую номер страницы, на которой содержится цитируемый фрагмент.

Не принимается список литературы в виде подстраничных ссылок, вынесенных в сноску.

7. Авторы несут ответственность за оригинальность представленных к публикации статей, за отсутствие в них заимствований, достоверность приводимых фактов, статистических данных, имен собственных, географических названий и прочих сведений.

8. Рекомендуется учитывать, что все статьи, поступающие в журнал, проходят рецензирование и проверку на оригинальность.

CONTENTS

MATHEMATICAL MODELING

Numerical Solution of Differential Equations

Methods of Data Processing

CONTROL OF COMPLEX SYSTEMS

Information Technologies and Optimization of Control

Information Security

COMPUTER SCIENCE AND ENGINEERING

Current Trends of Development of Computer and Information Technologies

Practice of Programming