

ISSN 0136-4545

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ,
МОЛОДЕЖИ И СПОРТА УКРАИНЫ
ДОНЕЦКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

**ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ
И ПРИКЛАДНАЯ
МЕХАНИКА**

№ 1 (47)

2010

УДК 539.3

И. Ю. ХОМА, д-р физ.-мат. наук,
О. А. СТРЫГИНА, канд. физ.-мат. наук

НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ПОЛОГОЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ С КРУГОВЫМ ОТВЕРСТИЕМ, НА ПОВЕРХНОСТИ КОТОРОГО ЗАДАНЫ КАСАТЕЛЬНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ

Даны решения задач о напряженном состоянии пологой трансверсально-изотропной сферической оболочки с круговой цилиндрической полостью, на поверхности которой заданы тангенциальные касательные напряжения, нелинейно изменяющиеся по толщине, и поперечные касательные напряжения, представляющие уравновешенную пару сил, старающиеся расщепить оболочку вдоль срединной поверхности.

Ключевые слова: трансверсально-изотропная сферическая оболочка, круговое отверстие, касательные напряжения

В работах [2, 4, 6] методом разложения искомых функций в ряды Фурье по полиномам Лежандра координаты толщины получены уравнения упругого равновесия нетонких анизотропных оболочек и соответствующие им граничные условия. На основе полученных в них уравнений в данной работе дается решение задачи о напряженном состоянии пологой трансверсально-изотропной сферической оболочки с круговым отверстием, на поверхности которого заданы тангенциальные и поперечные касательные напряжения.

Постановка задачи и исходные уравнения. Рассмотрим трансверсально изотропную сферическую оболочку постоянной толщины $2h$ ($h = \text{const}$) с радиусом срединной поверхности равным R . Предположим, что оболочка отнесена к ортогональной криволинейной системе координат x_i ($i = 1, 2, 3$), нормально связанной со срединной поверхностью S . При этом допускается, что x_3 изменяется на отрезке $[-h, h]$, а x_1, x_2 образуют на S изометрическую систему координат, относительно которой первая квадратичная форма принимает вид [1]: $ds^2 = \Lambda(dx_1^2 + dx_2^2)$, $\Lambda > 0$.

Для определения напряженного состояния оболочки воспользуемся методом разложения по толщине. Следуя [3], представим компоненты вектора перемещений $u_j(x_1, x_2, x_3)$ и тензора напряжений $\sigma_{ij}(x_1, x_2, x_3)$ в виде конечного ряда Фурье по полиномам Лежандра $P_k(\zeta)$ координаты толщины

$$\{u_j(x_1, x_2, x_3), \sigma_{ij}(x_1, x_2, x_3)\} = \sum_{k=0}^N \{u_j^{(k)}(x), h^{-1}\sigma_{ij}^{(k)}(x)\} P_k(\zeta), \quad (1)$$

где $x = (x_1, x_2)$, $\zeta = h^{-1}x_3$, $u_j^{(k)}(x)$, $\sigma_{ij}^{(k)}(x)$ – коэффициенты разложений,

именуемые моментами, N – натуральное число, которое будем считать четным, т.е. $N = 2n$ ($n = 0, 1, \dots, < \infty$).

Относительно моментов напряжений уравнения упругого равновесия оболочки в комплексной форме записываются таким образом [5]:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Lambda} \frac{\partial}{\partial z} (\sigma_{11}^{(k)} - \sigma_{22}^{(k)} + 2i\sigma_{12}^{(k)}) + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \frac{1}{\Lambda} (\sigma_{11}^{(k)} + \sigma_{22}^{(k)}) + \frac{1}{R} \sigma_+^{(k)} - \\ - \frac{2k+1}{h} \sum_{s=0}^{[K]} \sigma_+^{(k-2s-1)} = 0, \\ \frac{1}{\Lambda} \left(\frac{\partial \sigma_+^{(k)}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{\sigma}_+^{(k)}}{\partial \bar{z}} \right) - \frac{1}{R} \frac{1}{\Lambda} (\sigma_{11}^{(k)} + \sigma_{22}^{(k)}) - \\ - \frac{2k+1}{h} \sum_{s=0}^{[K]} \sigma_{33}^{(k-2s-1)} + X_3^{(k)} = 0 \quad k = \overline{0, N}. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь $X_3^{(k)} = (k+1/2)[\sigma_{33}^+ - (-1)^k \sigma_{33}^-]$; $\sigma_+^{(m)} = \sigma_{13}^{(m)} + i\sigma_{23}^{(m)}$; $K = (k-1)/2$; символ $[K]$ обозначает целую часть числа K ; σ_{33}^+ и σ_{33}^- – значения нормальных напряжений на лицевых граничных поверхностях $x = h$ и $x = -h$. Соотношения упругости для трансверсально изотропной оболочки имеют вид

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^{(k)} + \sigma_{22}^{(k)} &= 2h\Lambda \left[(c_{12} + c_{66}) \left(e^{(k)} + \frac{2}{R} u_3^{(k)} \right) + \frac{c_{13}}{h} u_3'^{(k)} \right], \\ \sigma_{11}^{(k)} - \sigma_{22}^{(k)} + 2i\sigma_{12}^{(k)} &= 4c_{66} h \Lambda \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\frac{1}{\Lambda} u_+^{(k)} \right), \\ \sigma_{33}^{(k)} &= h \left[c_{13} \left(e^{(k)} + \frac{2}{R} u_3^{(k)} \right) + \frac{c_{33}}{h} u_3'^{(k)} \right], \\ \sigma_+^{(k)} &= c_{44} h \left(2 \frac{\partial u_3^{(k)}}{\partial \bar{z}} - \frac{1}{R} u_+^{(k)} + \frac{1}{h} u_3'^{(k)} \right), \end{aligned} \quad (3)$$

где c_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$), c_{44} , c_{66} – упругие постоянные материала;

$$\begin{aligned} u_+^{(k)} &= u_1^{(k)} + iu_2^{(k)}, \quad e^{(k)} = \frac{1}{\Lambda} \left(\frac{\partial \bar{u}_+^{(k)}}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial u_+^{(k)}}{\partial z} \right), \\ u_j^{(2k-1)} &= (4k-1) \sum_{s=k}^n u_j^{(2s)}, \quad u_j^{(2k)} = (4k+1) \sum_{s=k+1}^n u_j^{(2s-1)}. \end{aligned}$$

Подставив (3) в равенства (2), получим систему уравнений относительно функций $u_j^{(k)}$

$$\frac{4c_{66}}{\Lambda} \frac{\partial}{\partial z} \Lambda \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\frac{u_+^{(2k)}}{\Lambda} \right) + 2(c_{12} + c_{66}) \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(e^{(2k)} + \frac{2}{R} u_3^{(2k)} \right) +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{c_{44}}{R} \left(2 \frac{\partial u_3^{(2k)}}{\partial \bar{z}} - \frac{1}{R} u_+^{(2k)} \right) + \frac{4k+1}{h} \sum_{s=1}^n \left[2 \lambda_{2s-1}^{(k)} \frac{\partial u_3^{(2s-1)}}{\partial \bar{z}} - \right. \\
& \left. - \frac{c_{44}}{h} \left(\beta_{2s}^{(k)} u_+^{(2s)} - \frac{h}{R} u_+^{(2s-1)} \right) \right] = 0 \quad k = \overline{0, n}; \tag{4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_{44} \left(\nabla^2 u_3^{(2k)} - \frac{1}{R} e^{(2k)} \right) - \frac{2(c_{12} + c_{66})}{R} \left(e^{(2k)} + \frac{2}{R} u_3^{(2k)} \right) + \\
+ \frac{4k+1}{h} \sum_{s=1}^n \left[\tilde{\lambda}_{2s-1}^{(k)} e^{(2s-1)} - \frac{c_{33}}{h} \left(\beta_{2s}^{(k)} u_3^{(2s)} + \frac{2c_{13}h}{c_{33}R} u_3^{(2s-1)} \right) \right] + \\
+ \left(2k + \frac{1}{2} \right) \frac{1}{h} (\sigma_{33}^+ - \sigma_{33}^-) = 0 \quad k = \overline{0, n}. \tag{5}
\end{aligned}$$

Аналогичный вид имеют уравнения при нечетных значениях k при старших производных, т.е.

$$\begin{aligned}
\frac{4c_{66}}{\Lambda} \frac{\partial}{\partial z} \wedge \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\frac{u_+^{(2k-1)}}{\Lambda} \right) + 2(c_{12} + c_{66}) \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(e^{(2k-1)} + \frac{2}{R} u_3^{(2k-1)} \right) + \\
+ \frac{c_{44}}{R} \left(2 \frac{\partial u_3^{(2k-1)}}{\partial \bar{z}} - \frac{1}{R} u_+^{(2k-1)} \right) + \frac{4k-1}{h} \sum_{s=0}^n \left[2 \lambda_{2s}^{(k)} \frac{\partial u_3^{(2s)}}{\partial \bar{z}} - \right. \\
\left. - \frac{c_{44}}{h} \left(\alpha_{2s-1}^{(k)} u_+^{(2s-1)} - \frac{h}{R} u_+^{(2s)} \right) \right] = 0 \quad k = \overline{1, n}; \tag{6}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_{44} \left(\nabla^2 u_3^{(2k-1)} - \frac{1}{R} e^{(2k-1)} \right) - \frac{2(c_{12} + c_{66})}{R} \left(e^{(2k)} + \frac{2}{R} u_3^{(2k-1)} \right) + \\
+ \frac{4k-1}{h} \sum_{s=0}^n \left[\tilde{\lambda}_{2s}^{(k)} e^{(2s)} - \frac{c_{33}}{h} \left(\alpha_{2s-1}^{(k)} u_3^{(2s-1)} + \frac{2c_{13}h}{c_{33}R} u_3^{(2s)} \right) \right] + \\
+ \left(2k - \frac{1}{2} \right) \frac{1}{h} (\sigma_{33}^+ + \sigma_{33}^-) = 0 \quad k = \overline{1, n}, \tag{7}
\end{aligned}$$

где $\nabla^2 = 4 \Lambda^{-1} \partial^2 / \partial z \partial \bar{z}$ - оператор Лапласа на поверхности сферы;

$$\begin{aligned}
\lambda_{2s-1}^{(k)} = \begin{cases} -c_{44}, & 1 \leq s \leq k, \\ c_{13}, & k < s \leq n, \end{cases} & \lambda_{2s}^{(k)} = \begin{cases} -c_{44}, & 0 \leq s < k, \\ c_{13}, & k \leq s \leq n, \end{cases} \\
\tilde{\lambda}_{2s-1}^{(k)} = \begin{cases} -c_{13}, & 1 \leq s \leq k, \\ c_{44}, & k < s \leq n, \end{cases} & \tilde{\lambda}_{2s}^{(k)} = \begin{cases} -c_{13}, & 0 \leq s < k, \\ c_{44}, & k \leq s \leq n, \end{cases}
\end{aligned}$$

$\alpha_{2s-1}^{(k)}$ и $\beta_{2s}^{(k)}$ - абсолютные константы вида

$$\alpha_{2s-1}^{(k)} = \begin{cases} s(2s-1), & 1 \leq s \leq k, \\ k(2k-1), & k < s \leq n, \end{cases} \quad \beta_{2s}^{(k)} = \begin{cases} s(2s+1), & 0 \leq s < k, \\ k(2k+1), & k \leq s \leq n. \end{cases}$$

Равенства (4) – (7) образуют замкнутую систему уравнений для определения всех неизвестных функций. Полагая $\sigma_{33}^+ = \sigma_{33}^- = 0$, запишем общее аналитическое решение системы (4) – (7). Согласно [5] оно определяется формулами

$$\begin{aligned} c_{66} u_+^{(k)} &= h \sum_{m=1}^{4n+2} a_m^{(k)} \partial_{\bar{z}} V_m + ih \sum_{s=1}^{2n+1} b_s^{(k)} \partial_{\bar{z}} \omega_s, \\ c_{66} u_3^{(k)} &= \sum_{m=1}^{4n+2} c_m^{(k)} V_m, \quad c_{66} h e^{(k)} = \sum_{m=1}^{4n+2} \tilde{c}_m^{(k)} V_m, \end{aligned} \quad (8)$$

где $\partial_{\bar{z}} = \partial / \partial \bar{z}$, $a_m^{(k)}$, $b_s^{(k)}$, $c_m^{(k)}$, $\tilde{c}_m^{(k)}$ – безразмерные постоянные, V_m и ω_s – метагармонические функции, удовлетворяющие равенствам

$$\nabla^2 V_m - k_m h^{-2} V_m = 0, \quad \nabla^2 \omega_s - \lambda_s h^{-2} \omega_s = 0, \quad (9)$$

в которых параметрами k_m и λ_s служат корни соответствующих характеристических уравнений, V_m ($m = 1, 2, \dots, 4n+2$), ω_s – функции, представляющие потенциальную и вихревую части решения системы.

Заметим, что для пологих оболочек, срединная поверхность которых незначительно отличается от плоскости, величину Λ можно принять равной единице, а оператор ∇^2 заменить оператором Δ на плоскости. Принимая во внимание данное предположение, введем в области S полярную систему координат r , ϑ и воспользуемся формулами преобразования для компонент тензора напряжений. Тогда равенства (3) с учетом формул (8) примут вид

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^{(k)} + \sigma_{\vartheta\vartheta}^{(k)} &= 2 \sum_{m=1}^{4n+2} d_m^{(k)} V_m, \quad \sigma_{33}^{(k)} = \sum_{m=1}^{4n+2} d_{3m}^{(k)} V_m, \\ \sigma_{rr}^{(k)} - \sigma_{\vartheta\vartheta}^{(k)} + 2i \sigma_{r\vartheta}^{(k)} &= 4h^2 e^{-2i\vartheta} \left(\sum_{m=1}^{4n+2} a_m^{(k)} \partial_{\bar{z}}^2 V_m + i \sum_{s=1}^{2n+1} b_s^{(k)} \partial_{\bar{z}}^2 \omega_s \right), \\ \sigma_{r3}^{(k)} + i \sigma_{\vartheta 3}^{(k)} &= 2he^{-i\vartheta} \left(\sum_{m=1}^{4n+2} p_m^{(k)} \partial_{\bar{z}} V_m + i \sum_{s=1}^{2n+1} q_s^{(k)} \partial_{\bar{z}} \omega_s \right), \end{aligned} \quad (10)$$

где $d_m^{(k)}$, $d_{3m}^{(k)}$, $p_m^{(k)}$ и $q_s^{(k)}$ – постоянные величины.

Метод решения. На основе приведенных формул рассмотрим две задачи об определении напряженного состояния пологой сферической оболочки с круговой полостью радиуса r_0 , на поверхности $r_0 \times [-h, h]$ которой заданы касательные напряжения σ_{r3} и $\sigma_{r\vartheta}$. В первой задаче предполагается, что на поверхности полости радиальные напряжения σ_{rr}

равны нулю, а поперечные касательные напряжения заданы выражением $\sigma_{r\theta} = q\zeta(1 - \zeta^2)$, $q = const$. Очевидно, такое задание внешней нагрузки приводит к возникновению у верхней $\zeta > 0$ и нижней $\zeta < 0$ областях оболочки равных по величине, но противоположно направленных сил, которые стремятся расщепить оболочку вдоль срединной поверхности S . Сформулированные условия на контуре r_0 поверхности S сводятся к таким:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^{(k)} &= 0 \quad (k = \overline{0, N}), \quad \sigma_{r\theta}^{(k)} = 0 \quad (k = \overline{0, N}, k \neq 1; 3), \\ \sigma_{r3}^{(1)} &= 0,4(qh), \quad \sigma_{r3}^{(3)} = -0,4(qh). \end{aligned} \quad (11)$$

Во второй задаче предполагаются заданными касательные напряжения $\sigma_{r\theta}$, изменяющиеся по толщине нелинейно, т.е. $\sigma_{r\theta} = \tau(1 + \alpha\zeta^3)$, $\tau = const$, $\alpha \in [0, 1]$. Отсюда следует, что на контуре r_0 области S имеют место равенства

$$\begin{aligned} \sigma_{r\theta}^{(0)} &= 1(\tau h), \quad \sigma_{r\theta}^{(k)} = 0 \quad (k = \overline{1, N}, k \neq 1; 3), \\ \sigma_{r3}^{(1)} &= 0,6\alpha(\tau h), \quad \sigma_{r3}^{(3)} = 0,4\alpha(\tau h). \end{aligned} \quad (12)$$

Учитывая выражения (10), записываются граничные условия (11) и (12) через метагармонические функции V_m и ω_m , которые представляются цилиндрическими функциями. Вид цилиндрических функций зависит от значений корней соответствующих характеристических уравнений. Они могут быть действительными и комплексными. Пусть, в частности, имеется $2l+1$ — вещественных отрицательных, $2p+1$ — вещественных положительных и $2(2n-l-p)$ комплексно-сопряженных корней (или же $2l$, $2p$, $(2n-l-p+1)$). В условиях осевой симметрии будем иметь

$$\begin{aligned} V_m &= A_0^{(m)} Y_0(\rho x_m), \quad m \in [1, 2l+1], \\ V_m &= B_0^{(m)} K_0(\rho x_m), \quad m \in [2l+2, 2(l+p+1)], \\ V_{2m+1} &= C_0^{(2m+1)} H_0^{(1)}(\rho x_{2m+1}), \\ V_{2m+2} &= D_0^{(2m+2)} H_0^{(2)}(\rho x_{2m+2}), \quad m \in [l+p+1, 2n]. \end{aligned} \quad (13)$$

где $Y_0(\rho x_m)$, $K_0(\rho x_m)$, $H_0^{(1)}(\rho x_{2m+1})$ и $H_0^{(2)}(\rho x_{2m+2})$ — цилиндрические функции Бесселя, Ханкеля первого и второго рода,

$$\begin{aligned} \rho &= r/r_0, \quad x_m = r_0 h^{-1} \sqrt{-k_m}, \quad m \in [1, 2l+1], \\ x_m &= r_0 h^{-1} \sqrt{k_m}, \quad m \in [2l+2, 2(l+p+1)], \\ x_{2m+1} &= r_0 h^{-1} \sqrt{-k_m}, \quad x_{2m+2} = \bar{x}_{2m+1}, \quad m \in [l+p+1, 2n]; \end{aligned}$$

$A_0^{(m)}$, $B_0^{(m)}$, $C_0^{(2m+1)}$ и $D_0^{(2m+1)}$ – постоянные, определяющиеся из граничных условий (11).

Что касается характеристического уравнения для метагармонических функций ω_s , то оно имеет вещественные положительные и отрицательные корни. Поэтому

$$\omega_s = \tilde{A}_0^{(s)} Y_0(\rho y_s), \quad s \in [1, \tilde{l}], \quad \omega_s = \tilde{B}_0^{(s)} K_0(\rho y_s), \quad s \in [\tilde{l} + 1, 2n + 1], \quad (14)$$

где

$$y_s = r_0 h^{-1} \sqrt{-\lambda_s}, \quad s \in [1, \tilde{l}]; \quad y_s = r_0 h^{-1} \sqrt{\lambda_s}, \quad s \in [\tilde{l} + 1, 2n + 1];$$

$\tilde{A}_0^{(s)}$ и $\tilde{B}_0^{(s)}$ – константы.

Результаты численных исследований. Численные исследования были проведены для пологой трансверсально – изотропной сферической оболочки с коэффициентами Пуассона $\nu = 0,25$, $\nu' = 0,25$ соответственно в области изотропии и нормальной к ней плоскости при отношении модулей упругости $E/E' = 1$ и $R/h = 20$. Выявлено, что при действии на поверхности полости расслаивающей силы доминирующими становятся поперечные напряжения.

На рис. 1 представлены кривые изменения нормальных поперечных напряжений σ_{33} в точках на граничной $\zeta = -1$ (кривая 1) и срединной $\zeta = 0$ (кривая 2) поверхностях оболочки при удалении от поверхности полости. Наибольшего значения они достигают на срединной поверхности $\zeta = 0$. Напряжения на граничных поверхностях $\zeta = 1$ и $\zeta = -1$ по абсолютной величине существенно меньше и почти одинаковые (небольшое отличие сказывается за счет кривизны поверхностей). При удалении от полости они быстро затухают, приближаясь к нулю.

Результаты численных исследований при заданных на поверхности полости касательных напряжениях $\sigma_{r\theta}$ представлены на рис. 2 в предположении, что $\alpha = 1$. Кривые характеризуют изменение на срединной по-

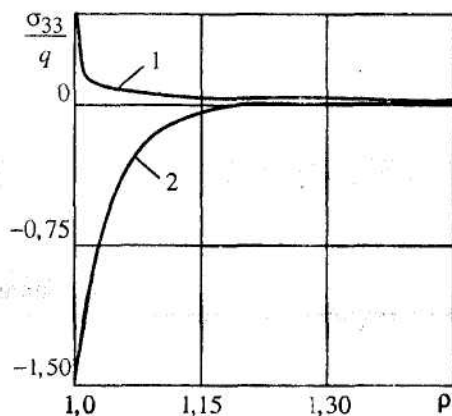


Рис. 1

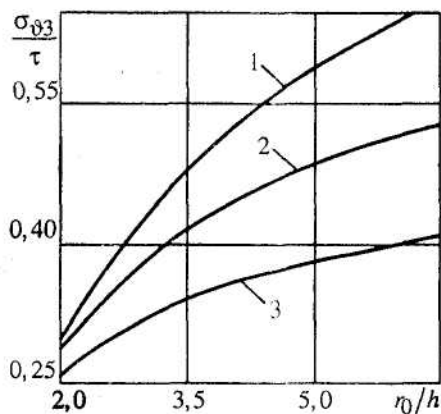


Рис. 2

верхности $\zeta = 0$ поперечных напряжений $\sigma_{\theta\theta}$ в зависимости от параметра относительной толщины r_0/h при некоторых значениях отношения модуля упругости E к поперечному модулю сдвига G' , т.е. при $E/G' = 10$ (кривая 1), $E/G' = 5$ (кривая 2) и $E/G' = 2,5$ (кривая 3). Приведенные кривые характеризуют изменение напряжений от изменения упругих постоянных материала и от геометрических параметров оболочки.

РЕЗЮМЕ. Приведені розв'язки задач про напружений стан пологої трансверсально-ізотропної сферичної оболонки з циліндричною порожниною, на поверхні якої задані тангенціальні дотичні напруження, які представляють собою пару сил, що стараються розщепити оболонку по серединній поверхні.

Ключові слова: трансверсально-ізотропна сферична оболонка, круговий отвір, дотичні напруження.

SUMMARY. Solutions of problems of a stress strain state for a transversally-isotropic spherical shell with a cylindrical hole, the surfaces of which are subjected with tangential stresses, represented as a pair of forces which split a middle surface are given.

Key words: transversally-isotropic spherical shell, circular hole, tangential stresses.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Векуа И. Н. Теория тонких пологих оболочек переменной толщины // Тр. Тбилис. матем. ин-та. - 1965. - 30. - С. 3-103.

2. Хома И. Ю. Некоторые нелинейные соотношения математической теории нетонких оболочек // Прикладная механика. - 2000. - Т. 36, №8. - С. 104-112.

3. Хома И. Ю., Стрыгина О. А. О решении смешанной задачи для полой трансверсально-изотропной сферической оболочки с круговым отверстием // Theoretical Foundations of Civil Engineering, Warsaw. - 2009, № 17. - P. 119-126.

4. Хома И. Ю. Трехмерное напряженно-деформированное состояние нетонких упругих оболочек // Докл. расш. заседаний семинара ин-та прикл. математики им. И.Н.Векуа - 1989. - 4, №2. - С. 171-174.

5. Khoma I. Yu. Complex representation of the equations of a transversely isotropic spherical shell with prestresses // Int. Appl. Mech. 2007. - Vol. 43, № 2. - P. 228-237.

6. Khoma I. Yu. Thermopiezoelectric equations for nonthin ceramic shells // Int. Appl. Mech. - 2005. - Vol. 41, № 2. - P. 118-128.

*Институт механики НАН Украины, г. Киев
Луганский национальный университет*

Поступила 9.10.2010