

ИНСТИ

МЕЖДУ

ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА

АНГ

48

И. Ю. Хома, О. А. Стрыгина

О ВЛИЯНИИ УПРУГИХ СВОЙСТВ НА НАПРЯЖЕННОЕ
СОСТОЯНИЕ НЕТОНКОЙ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНОЙ
ПЛАСТИНЫ С КРУГОВЫМ ОТВЕРСТИЕМ

*Институт механики им. С.П.Тимошенко НАНУ,
ул. Нестерова, 3, 03057, Киев, Украина; e-mail: Reolog@imech*

Abstract. A method of constructing a general analytical solution for the system of equilibrium equations of the non-thin transversally isotropic plates is expounded when the method of expansion of functions in the Fourier series through the Legendre polynomials of the thickness coordinate being used.

Key words: non-thin transversally isotropic plate, circular cylindrical hole, general analytical solution, stress state.

Введение.

Решения задач о распределении напряжений около кругового отверстия в изотропной упругой пластине изложены в работах [1, 2, 14, 19, 20]. Для определения трехмерного напряженного состояния в трансверсально-изотропных пластинах с отверстиями развиты разные способы. Методом однородных решений в [3 – 6, 9, 13] проведены исследования напряженного состояния толстых односвязных и многосвязных плит. В работах [8, 10 – 12] при решении граничных задач о распределении напряжений около отверстий в нетонких трансверсально-изотропных пластинах принят метод разложения по толщине с привлечением полиномов Лежандра. Для сведения трехмерной задачи к двумерной в [10] использован метод разложения по полиномам Лежандра с весом $(k+1/2)$. Проведено интегрирование полученных уравнений. Решению задачи Кирша для трансверсально-изотропной пластины посвящена работа [11]. Она же в рамках метода однородных решений рассмотрена ранее в [9, 13]. В работе [11] исследована задача о распределении напряжений около круговой цилиндрической полости в трансверсально-изотропной пластине, находящейся в поле касательных напряжений при смешанных граничных условиях на поверхности полости.

Аналізу існуючих багачисленних досліджень, проведених по вказаним напрямкам, присвячені обзорні статті [17, 18].

В данной работе редукция трехмерной задачи к двумерной осуществлена по ортогональной системе функций, содержащих полиномы Лежандра с весом, равным единице, что существенно упрощает аналитические выкладки. Приведена система уравнений равновесия пластины и изложен метод представления ее общего аналитического решения. В качестве приложения полученного решения рассмотрена задача о напряженном состоянии нетонкой трансверсально-изотропной пластины с круговым отверстием, поверхность которой свободна от напряжений, а на бесконечности пластина находится под действием сдвигающих усилий. Приведены числовые примеры, на которых выявлено ряд механических эффектов.

§1. Постановка задачи. Уравнения равновесия.

Рассмотрим трансверсально-изотропную пластину постоянной толщины $2h$ ($h = \text{const}$). Отнесем ее к декартовой системе координат x_i ($i = 1, 2, 3$) и примем, что x_1, x_2 принадлежат срединной плоскости S , а $x_3 \in [-h, h]$. Представим при сим-

метричном (относительно срединной плоскости S) деформировании пластины компоненты вектора перемещений $u_j(x_1, x_2, x_3)$ и тензора напряжений $\sigma_{ij}(x_1, x_2, x_3)$ в виде конечного ряда Фурье по полиномам Лежандра $P_k(\zeta)$ [15]

$$\begin{aligned} \{u_\alpha, \sigma_{\alpha\beta}, \sigma_{33}\} &= \sum_{k=0}^n \left\{ u_\alpha^{(2k)}(x), h^{-1} \sigma_{\alpha\beta}^{(2k)}(x); h^{-1} \sigma_{33}^{(2k)}(x) \right\} P_{2k}(\zeta); \\ \{u_3, \sigma_{\alpha 3}\} &= \sum_{k=0}^n \left\{ u_3^{(2k+1)}(x), h^{-1} \sigma_{\alpha 3}^{(2k+1)}(x) \right\} P_{2k+1}(\zeta) \quad (\alpha, \beta = 1, 2), \end{aligned} \quad (1.1)$$

где $x = (x_1, x_2)$ – точка срединной плоскости S ; $\zeta = h^{-1}x_3$; $u_j^{(m)}(x), \sigma_{ij}^{(m)}(x)$ – коэффициенты разложений, именуемые ниже моментами; $m = 2k, 2k+1$; $n = 0, 1, 2, \dots, < \infty$.

Уравнения равновесия в моментах напряжений имеют вид [15]

$$\begin{aligned} \partial_z(\sigma_{11}^{(2k)} - \sigma_{22}^{(2k)} + 2i\sigma_{12}^{(2k)}) + \partial_{\bar{z}}(\sigma_{11}^{(2k)} + \sigma_{22}^{(2k)}) - (4k+1)h^{-1} \sum_{s=0}^{k-1} \sigma_+^{(2s+1)} + hf_+^{(2k)} = 0; \\ \partial_z \sigma_+^{(2k+1)} + \partial_{\bar{z}} \bar{\sigma}_+^{(2k+1)} - (4k+3)h^{-1} \sum_{s=0}^k \sigma_{33}^{(2s)} + hf_3^{(2k+1)} = 0 \quad (k = 0, 1, \dots, n), \end{aligned} \quad (1.2)$$

где обозначено: $2\partial_z = \partial/\partial x_1 - i\partial/\partial x_2$; $2\partial_{\bar{z}} = \partial/\partial x_1 + i\partial/\partial x_2$; $\sigma_+^{(m)} = \sigma_{13}^{(m)} + i\sigma_{23}^{(m)}$; $f_+^{(2k)} = (2k+1/2)((\sigma_{31}^+ - \sigma_{31}^-)/h)$; $f_3^{(2k+1)} = (2k+3/2)((\sigma_{33}^+ + \sigma_{33}^-)/h)$; $(\sigma_{31}^+ = \sigma_{31}^+ + i\sigma_{32}^+; \sigma_{31}^- = \sigma_{31}^- + i\sigma_{32}^-)$; σ_{ij}^+ ; и $\sigma_{ij}^- (j = 1, 2, 3)$ – значения напряжений на лицевых граничных плоскостях $x_3 = h$ и $x_3 = -h$, соответственно).

Соотношения упругости для трансверсально-изотропной пластины представим в комплексной форме таким образом [16]:

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^{(2k)} - \sigma_{22}^{(2k)} + 2i\sigma_{12}^{(2k)} &= 4hc_{66}\partial_z u_+^{(2k)}; \\ \sigma_{11}^{(2k)} + \sigma_{22}^{(2k)} &= 4h \left[(c_{12} + c_{66})e^{(2k)} + (4k+1)c_{13}h^{-1} \sum_{s=k}^n u_3^{(2s+1)} \right]; \\ \sigma_{33}^{(2k)} &= h \left[c_{13}e^{(2k)} + (4k+1)c_{33}h^{-1} \sum_{s=k}^n u_3^{(2s+1)} \right]; \\ \sigma_+^{(2k+1)} &= hc_{44} \left[2\partial_z u_3^{(2k+1)} + (4k+3)h^{-1} \sum_{s=k+1}^n u_+^{(2s)} \right] \quad (k = 0, 1, \dots, n), \end{aligned} \quad (1.3)$$

где $c_{11}, c_{12}, \dots, c_{66}$ – упругие постоянные материала, причем $c_{11} = c_{12} + 2c_{66}$;

$$u_+^{(2k)} = u_1^{(2k)} + iu_2^{(2k)}; \quad e^{(2k)} = \partial_z u_+^{(2k)} + \partial_{\bar{z}} \bar{u}_+^{(2k)}. \quad (1.4)$$

Примем далее, что граничные плоскости $x_3 = h$ и $x_3 = -h$ свободны от напряжений. Если внести (1.3) в равенства (1.2) и учесть, что $\sigma_{3j}^+ = \sigma_{3j}^- = 0$, то получим систему уравнений

$$\begin{aligned} c_{66}\Delta u_+^{(2k)} + 2(c_{12} + c_{66})\partial_z e^{(2k)} + \\ + (4k+1)h^{-1} \left[-2c_{44} \sum_{s=0}^{k-1} \partial_z u_3^{(2s+1)} + 2c_{13} \sum_{s=k}^n \partial_z u_3^{(2s+1)} - c_{44}h^{-1} \sum_{s=1}^n \beta_{2s}^{(k)} u_+^{(2s)} \right] = 0 \end{aligned} \quad (1.5)$$

$$(k = 0, 1, \dots, n);$$

$$c_{44}\Delta u_3^{(2k+1)} + (4k+3)h^{-1} \left[-c_{13} \sum_{s=0}^k e^{(2s)} + c_{44} \sum_{s=k+1}^n e^{(2s)} - c_{33}h^{-1} \sum_{s=0}^n \alpha_{2s+1}^{(k)} u_3^{(2s+1)} \right] = 0, \quad (1.6)$$

где $\Delta = 4\partial^2 / \partial_z \partial_{\bar{z}}$ – оператор Лапласа, $\alpha_{2s+1}^{(k)}$ и $\beta_{2s}^{(k)}$ – абсолютные константы вида

$$\alpha_{2s+1}^{(k)} = \begin{cases} (s+1)(2s+1), & 0 \leq s \leq k; \\ (k+1)(2k+1), & k \leq s \leq n; \end{cases} \quad \beta_{2s}^{(k)} = \begin{cases} s(2s+1), & 1 \leq s \leq k; \\ k(2k+1), & k \leq s \leq n. \end{cases}$$

§2. Представление аналитического решения.

Изложим метод построения общего аналитического решения системы уравнений (1.5), (1.6). Продифференцировав (1.5) по переменной z , в полученном уравнении рассмотрим действительную часть. Учитывая при этом обозначение (1.4), будем иметь

$$c_{11}\Delta e^{(0)} + c_{13}h^{-1} \sum_{s=0}^n \Delta u_3^{(2s+1)} = 0 \quad (k=0); \quad (2.1)$$

$$c_{11}\Delta e^{(2k)} + (4k+1)h^{-1} \left[-c_{44} \sum_{s=0}^{k-1} \Delta u_3^{(2s+1)} + c_{13} \sum_{s=k}^n \Delta u_3^{(2s+1)} - c_{44}h^{-1} \sum_{s=1}^n \beta_{2s}^{(k)} e^{(2s)} \right] = 0 \quad (2.2)$$

$$(k=1, 2, \dots, n).$$

Из выражения (2.1) приходим к равенству

$$e^{(0)} = -\frac{c_{13}}{c_{11}h} \sum_{s=0}^n u_3^{(2s+1)} + \frac{2c}{c_1 c_{11}} u, \quad (2.3)$$

где u – произвольная гармоническая функция; $c = 1 - c_{13}^2 / c_{11}c_{33}$; $c_1 = c - c_{66} / c_{11}$.

Согласно (2.3), уравнения (1.6) преобразуются к виду

$$\Delta u_3^{(1)} - \frac{3cc_{33}}{c_{44}h^2} \sum_{s=0}^n u_3^{(2s+1)} + \frac{3}{h} \sum_{s=1}^n e^{(2s)} = \frac{3\mu}{c_{44}h} u \quad (k=0); \quad (2.4)$$

$$\Delta u_3^{(2k+1)} + \frac{(4k+3)}{c_{44}h} \left[-c_{13} \sum_{s=1}^k e^{(2s)} + c_{44} \sum_{s=k+1}^n e^{(2s)} - \frac{c_{11}}{h} \sum_{s=0}^n (\tilde{\alpha}_{2s+1}^{(k)} + c) u_3^{(2s+1)} \right] = \frac{(4k+3)\mu}{c_{44}h} u \quad (2.5)$$

$$(k=1, 2, \dots, n),$$

где принято: $\mu = 2cc_{13} / c_1 c_{11}$; $\tilde{\alpha}_{2s+1}^{(k)} = \begin{cases} s(2s+3), & 1 \leq s \leq k; \\ k(2k+3), & k \leq s \leq n. \end{cases}$

Записав уравнение (2.5) в виде

$$-c_{13} \sum_{s=1}^k e^{(2s)} + c_{44} \sum_{s=k+1}^n e^{(2s)} = b_{2k+1} \quad (k=1, 2, \dots, n), \quad (2.6)$$

где

$$b_{2k+1} = -\frac{c_{44}h}{4k+3} \Delta u_3^{(2k+1)} + \frac{c_{33}}{h} \sum_{s=0}^n (\tilde{\alpha}_{2s+1}^{(k)} + c) u_3^{(2s+1)} + \mu u,$$

из (2.6) как алгебраической системы определим моменты деформаций $e^{(2k)}$, т.е.

$$e^{(2)} = \frac{h}{c} \left\{ \frac{1}{7} \Delta u_3^{(3)} + \frac{c_{44}}{(4n+3)c_{13}} \Delta u_3^{(2n+1)} - \frac{cc^* c_{33}}{c_{13}h^2} u_3^{(1)} - \right.$$

$$-\frac{c_{33}}{c_{13}h^2} \sum_{s=1}^n [(s-1)(2s+3) + c^*(c+5)] u_3^{(2s+1)} - \frac{c^* \mu}{c_{13}h} u \}; \quad (2.7)$$

$$u^{(2k)} = \frac{h}{c^*} \left\{ \frac{1}{4k-1} \Delta u_3^{(2k-1)} + \frac{1}{4k+3} \Delta u_3^{(2k+1)} - \frac{(4k+1)c_{11}}{c_{44}h^2} \sum_{s=k}^n u_3^{(2s+1)} \right\} \quad (k=2, 3, \dots, n).$$

Складывая эти равенства, получим формулу

$$\sum_{s=1}^n e^{(2s)} = \frac{c_{44}h}{(4n+3)c_{11}} \Delta u_3^{(2n+1)} - \frac{c_{33}}{c_{11}h^2} \sum_{s=0}^n [s(2s+3) + c^*] u_3^{(2s+1)} - \frac{2c}{c_{11}c_{13}} u. \quad (2.8)$$

Учитывая (2.8), уравнение (2.4) принимает вид

$$\frac{1}{3} \Delta u_3^{(1)} + \frac{c_{44}}{(4n+3)c_{13}} \Delta u_3^{(2n+1)} - \frac{c_{33}}{c_{13}h^2} \sum_{s=0}^n [s(2s+3) + cc^*] u_3^{(2s+1)} = \frac{c_{11}\mu_1}{3c_{44}c_{66}h} u. \quad (2.9)$$

Если внести значения функций (2.7) в равенства (2.5), то получим такие уравнения:

$$\frac{1}{7} \Delta \Delta u_3^{(3)} + \frac{c_{44}}{(4k+3)c_{11}} \Delta \Delta u_3^{(2n+1)} - \frac{c^*c_{33}}{c_{11}h^2} \left(c + \frac{5c_{13}c_{44}}{c_{11}c_{13}} \right) \Delta u_3^{(1)} - \frac{15c^*c_{44}^2}{(4n+3)c_{11}c_{13}} \Delta u_3^{(2n+1)} - \frac{c_{33}}{c_{13}h^2} \sum_{s=1}^n [s(2s+3) + cc^* + 5c_2c_{13}/c_{44}] \Delta u_3^{(2s+1)} + \quad (2.10)$$

$$+ \frac{15c^*c_{13}c_{44}}{c_{11}c_{13}h^4} \sum_{s=0}^n [s(2s+3) + c^*] u_3^{(2s+1)} = -\frac{5\mu_1}{c_{66}h^3} u;$$

$$\frac{1}{4k+3} \Delta \Delta u_3^{(2k+1)} - \frac{1}{4k-1} \Delta \Delta u_3^{(2k-1)} -$$

$$-\frac{(4k+1)c_{33}}{c_{11}h^2} \left\{ \frac{c^*c_{44}}{c_{33}} \Delta u_3^{(1)} + \frac{c_{44}}{(4n+3)c_{33}} \left[k(2k+1) + \frac{3c_{44}}{c_{13}} \right] \Delta u_3^{(2n+1)} + \quad (2.11)$$

$$+ \frac{c_{13}}{c_{33}} \sum_{s=1}^{k-1} \Delta u_3^{(2s+1)} + \frac{c_2c_{11}}{c_{44}} \sum_{s=k}^n \Delta u_3^{(2s+1)} - \frac{3c_{44}}{c_{13}h^2} \sum_{s=0}^n B_{2s+1}^{(k)} u_3^{(2s+1)} \right\} = -\frac{(4k+1)\mu_1}{c_{66}h^3} u$$

$$(k=2, 3, \dots, n);$$

$$(c^* = 1 + c_{13}/c_{44}; \quad c_2 = c - c_{13}c_{44}/c_{11}c_{33}; \quad \mu_1 = 6cc^*c_{44}c_{66}/c_{11}c_{11}^2);$$

$$B_{2s+1}^{(k)} = s(2s+1) + cc^* + \frac{c_{13}}{3c_{44}} \sum_{l=0}^s (4l+1) \beta_{2l}^{(k)}.$$

Приведенные равенства (2.9) – (2.11) образуют систему уравнений $2(2n+1)$ -го порядка относительно моментов перемещений $u_3^{(2k+1)}$ ($k=0, 1, \dots, n$). Решение ее представим в виде суммы:

$$c_{66}u_3^{(1)} = -\alpha_1^* hu + u_0; \quad c_{66}u_3^{(2k+1)} = u_k \quad (k=1, 2, \dots, n), \quad (2.12)$$

т.е. частного решения $-\alpha_1^* h u$, где $\alpha_1^* = 2c_{13}c_{66} / c_1c_{11}c_{33}$, и общего u_0, u_1, \dots, u_n решения однородной системы, которую в стандартной форме запишем таким образом:

$$\sum_{k=0}^n L_{sk}(\Delta) u_k = 0 \quad (s = 0, 1, \dots, n); \quad (2.13)$$

$L_{sk}(\Delta)$ – дифференциальный оператор вида $L_{sk}(\Delta) = \alpha_{sk} h^4 \Delta \Delta - \beta_{sk} h^2 \Delta + \gamma_{sk}$; $\alpha_{sk}, \beta_{sk}, \gamma_{sk}$ – константы (некоторые из них могут быть равными нулю).

Для интегрирования системы (2.13) используем операторный метод [7]. Для этого введем функцию V по формулам

$$u_k = A_{sk}(\Delta) V, \quad (2.14)$$

где $A_{sk}(\Delta) = (-1)^{s+k} M_{sk}(\Delta)$, $M_{sk}(\Delta)$ – миноры, $A_{sk}(\Delta)$ – алгебраические дополнения элементов $L_{sk}(\Delta)$ операторной матрицы $\|L_{sk}(\Delta)\|_{(n+1) \times (n+1)}$. Подставив (2.14) в s -ое, ($s \in [1, n]$), равенство системы (2.13), получим уравнение

$$\sum_{k=0}^n L_{sk}(\Delta) A_{sk}(\Delta) V = 0,$$

которое после некоторых преобразований приводится к виду

$$a_0 V + a_1 h^2 \Delta V + \dots + a_{2n} h^{4n} \Delta^{2n} V + a_{2n+1} h^{2(2n+1)} \Delta^{(2n+1)} V = 0 \quad (2.15)$$

($a_0, a_1, \dots, a_{2n+1}$ – константы, причем $a_0 \neq 0$).

Раскрывая определители в (2.14), получаем выражения для функции u_k , т.е.

$$u_k = \sum_{l=0}^{2n+1} c_l^{(k)} h^{2l} \Delta^l V. \quad (2.16)$$

Рассмотрим характеристическое уравнение системы (2.13). Его можно представить в матричной форме

$$\det \|\alpha_{sk} k^2 - \beta_{sk} k + \gamma_{sk}\| = 0 \quad (2.17)$$

или записать в виде

$$a_0 + a_1 k + \dots + a_{2n} k^{2n} + a_{2n+1} k^{2n+1} = 0, \quad (2.18)$$

соответствующему уравнению (2.15). Предположим, что все корни k_m ($m=1, 2, \dots, 2n+1$) разные и не равны нулю. В этом случае уравнение (2.15) может быть представлено в виде произведения операторов второго порядка, т.е.

$$(\Delta - k_1 h^{-2}) \cdot (\Delta - k_2 h^{-2}) \cdot \dots \cdot (\Delta - k_{2n+1} h^{-2}) V = 0, \quad (2.19)$$

откуда следует, что

$$V = \sum_{m=1}^{2n+1} V_m, \quad (2.20)$$

где V_m – метагармонические функции, удовлетворяющие равенствам

$$\Delta V_m - k_m h^{-2} V_m = 0. \quad (2.21)$$

Учитывая (2.20) и (2.21), из соотношения (2.16) определяем функции

$$u_k = \sum_{m=1}^{2n+1} c_m^{(2k+1)} V_m \left(c_m^{(2k+1)} - \text{постоянные вида } c_m^{(2k+1)} = \sum_{l=0}^{2n-1} k_m^l \tilde{c}_m^{(k)} \right). \quad (2.22)$$

Если внести значения функций (2.22) в формулы (2.12) и принять гармоническую функцию u в виде вещественной части некоторой аналитической функции $\varphi'(z)$ (штрих обозначает производную по переменной z), т.е.

$$u = \varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)}, \quad (2.23)$$

тогда получим

$$c_{66} u_3^{(1)} = -\alpha_1^* h \left[\varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)} \right] + \sum_{m=1}^{2n+1} c_m^{(1)} V_m;$$

$$c_{66} u_3^{(2k+1)} = \sum_{m=1}^{2n+1} c_m^{(2k+1)} V_m \quad (k = 1, 2, \dots, n). \quad (2.24)$$

Согласно равенствам (2.23) и (2.24) моменты деформаций $e^{(0)}$ и $e^{(2k)}$ из (2.3) и (2.6) примут вид

$$c_{66} e^{(0)} = \alpha_c^* \left[\varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)} \right] + h^{-1} \sum_{m=1}^{2n+1} c_m^{(0)} V_m; \quad c_{66} e^{(2k)} = h^{-1} \sum_{m=1}^{2n+1} c_m^{(2k)} V_m \quad (k = 1, 2, \dots, n); \quad (2.25)$$

$$\alpha_c^* = 2c_{66} / c_{11} c_{11};$$

$$c_m^{(0)} = \frac{c_{11}}{c_{11}} \sum_{s=1}^n c_m^{(2s+1)}; \quad c_m^{(2k)} = \frac{1}{c_{11}} \left[\frac{1}{4k+1} k_m^{(2k+1)} + \frac{1}{4k+1} k_m^{(2k+1)} - \frac{(4k+1)c_{11}}{c_{44}} \sum_{s=1}^n c_m^{(2s+1)} \right] \quad (k = 1, 2, \dots, n); \quad (2.26)$$

$$c_m^{(2)} = \frac{1}{c^*} \left\{ \frac{1}{7} k_m c_m^{(3)} + \frac{c_{44}}{(4n+3)c_{13}} k_m c_m^{(2n+1)} - \frac{c c^* c_{33}}{c_{13}} c_m^{(1)} - \frac{c_{33}}{c_{13}} \sum_{s=1}^n [(s-1)(2s+5) + c^*(c+5)] c_m^{(2s+1)} \right\}.$$

Очевидно, равенства (2.25) можно представить таким образом:

$$c_{66} \left(\partial_z u_+^{(0)} + \partial_{\bar{z}} \bar{u}_+^{(0)} \right) = \alpha_c^* \left[\varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)} \right] + 2h \sum_{m=1}^{2n+1} a_m^{(0)} \partial_z \partial_{\bar{z}} V_m; \quad (2.27)$$

$$c_{66} \left(\partial_z u_+^{(2k)} + \partial_{\bar{z}} \bar{u}_+^{(2k)} \right) = 2h \sum_{m=1}^{2n+1} a_m^{(2k)} \partial_z \partial_{\bar{z}} V_m \quad (k = 1, 2, \dots, n),$$

где $a_m^{(2k)} = 2k_m^{-1} c_m^{(2k)}$. Отсюда находим моменты перемещений $u_+^{(2k)}$, т.е.

$$c_{66} u_+^{(0)} = \alpha_c^* \varphi(z) + h \sum_{m=1}^{2n+1} a_m^{(0)} \partial_{\bar{z}} V_m + ih \partial_{\bar{z}} Y_0;$$

$$c_{66} u_+^{(2k)} = h \sum_{m=1}^{2n+1} a_m^{(2k)} \partial_{\bar{z}} V_m + ih \partial_{\bar{z}} Y_{2k} \quad (k = 1, 2, \dots, n). \quad (2.28)$$

Здесь Y_{2k} – произвольные достаточно гладкие вещественные функции. Их необходимо выбрать такими, чтобы выполнялись равенства (1.5). Следовательно, если внести в (1.5) значения функций (2.24), (2.25) и (2.28), то получим относительно Y_{2k} такие уравнения:

$$\begin{aligned} i\partial_{\bar{z}}\Delta Y_0 + \frac{2c_{11}}{c_{66}h} \sum_{m=1}^{2n+1} O_m^{(0)} \partial_{\bar{z}} V_m &= -\frac{4}{h} \overline{\varphi'(z)}; \\ i\partial_{\bar{z}} \left[\Delta Y_{2k} - \frac{(4k+1)c_{44}}{c_{66}h^2} \sum_{s=1}^n \beta_{2s}^{(k)} Y_{2s} \right] + \frac{2c_{11}}{c_{66}h} \sum_{m=1}^{2n+1} O_m^{(2k)} \partial_{\bar{z}} V_m &= \\ &= -(4k+1) \frac{3c_{44}\alpha_2^*}{c_{66}h} \overline{\varphi'(z)} \quad (k=1, 2, \dots, n), \end{aligned} \quad (2.29)$$

где $\alpha_2^* = 4c_{13}c_{66}/3c_{11}c_{33}$; $O_m^{(2k)}$ – постоянные вида

$$O_m^{(2k)} = c_m^{(2k)} + \frac{4k+1}{c_{11}} \left[-c_{44} \sum_{s=0}^{k-1} c_m^{(2s+1)} + c_{13} \sum_{s=k}^n c_m^{(2s+1)} - c_{44} \sum_{s=1}^n \beta_{2s}^{(k)} k_m^{-1} c_m^{(2s)} \right].$$

Легко показать, что постоянные $O_m^{(2k)} = 0 \quad \forall k \in [0, n]$: при $k=0$ это следует из первого равенства (2.26). Для остальных значений k следует воспользоваться равенствами (2.2). Если внести в (2.2) выражения для моментов (2.24) и (2.25), то будем иметь тождества

$$\sum_{m=1}^{2n+1} O_m^{(2k)} k_m V_m = 0 \quad (k=1, 2, \dots, n).$$

Поскольку метагармонические функции V_m линейно независимы и k_m не равны нулю, то отсюда следует, что коэффициенты этой суммы равны нулю.

Учитывая изложенное выше, уравнения (2.29) после интегрирования по переменным \bar{z} примут вид

$$\Delta Y_0 = 4ih^{-1} [\overline{\varphi'(z)} - \varphi'(z)]; \quad (2.30)$$

$$\Delta Y_{2k} - \frac{(4k+1)c_{44}}{c_{66}h^2} \sum_{s=1}^n \beta_{2s}^{(k)} Y_{2s} = \frac{3(4k+1)c_{44}\alpha_2^*}{c_{66}h} [\overline{\varphi'(z)} - \varphi'(z)] \quad (k=1, 2, \dots, n). \quad (2.31)$$

Из равенства (2.30) следует, что

$$Y_0 = ih^{-1} [z\overline{\varphi(z)} - \bar{z}\varphi(z) + \overline{\psi_*(z)} - \psi_*(z)], \quad (2.32)$$

где $\psi_*(z)$ – произвольная аналитическая функция.

Представим решение уравнений (2.31) в виде суммы частного решения

$$\hat{Y}_2 = -i\alpha_2^* h [\overline{\varphi'(z)} - \varphi'(z)]; \quad \hat{Y}_{2k} = 0 \quad (k=2, \dots, n) \quad (2.33)$$

и общего решения $\vec{Y}_{2k} = y_k$ однородной системы, которую в стандартной форме запишем таким образом:

$$\sum_{l=1}^n (q_{kl} - \delta_{kl} h^2 \Delta) y_l = 0 \quad (2.34)$$

(δ_{kl} – символ Кронекера; $q_{kl} = (4k+1)\beta_{2l}^{(k)} c_{44}/c_{66}$).

Рассмотрим характеристическое уравнение

$$\det \|q_{kl} - \lambda \delta_{kl}\| = 0 \quad (2.35)$$

и предположим, что оно имеет простые и отличные от нуля корни λ_s . Тогда аналогичным выше способом находим функции y_k , т.е.

$$y_k = \sum_{s=1}^n b_s^{(2k)} w_s, \quad (2.36)$$

где w_s – метагармонические функции, обеспечивающие выполнение равенств

$$\Delta w_s - \lambda_s h^{-2} w_s = 0; \quad (2.37)$$

постоянные $b_s^{(2k)}$ определяются алгебраическими дополнениями элементов какой-либо строки определителя $\|q_{kl} - \lambda_s \delta_{kl}\|_{n \times n}$.

Складывая равенства (2.33) и (2.36), получаем формулы

$$Y_2 = -i \alpha_2^* h [\overline{\varphi'(z)} - \varphi'(z)] + \sum_{s=1}^n b_s^{(2)} w_s; \quad Y_{2k} = \sum_{s=1}^n b_s^{(2k)} w_s \quad (k = 2, \dots, n). \quad (2.38)$$

Согласно формулам (2.32) и (2.38), моменты перемещений $u_*^{(2k)}$ примут вид

$$\begin{aligned} c_{66} u_*^{(0)} &= \alpha^* \varphi(z) - z \overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)} + h \sum_{m=1}^{2n+1} a_m^{(0)} \partial_{\bar{z}} V_m; \\ c_{66} u_*^{(1)} &= \alpha_2^* h^2 \varphi''(z) + h \sum_{m=1}^{2n+1} a_m^{(1)} \partial_{\bar{z}} V_m + i h \sum_{s=1}^n b_s^{(1)} \partial_{\bar{z}} w_s; \\ c_{66} u_*^{(2k)} &= h \sum_{m=1}^{2n+1} a_m^{(2k)} \partial_{\bar{z}} V_m + i h \sum_{s=1}^n b_s^{(2k)} \partial_{\bar{z}} w_s \quad (k = 2, \dots, n), \end{aligned} \quad (2.39)$$

где $\alpha^* = 1 + \alpha_2^*$; $\overline{\psi(z)} = \overline{\psi'(z)}$.

Полученные значения функций (2.24), (2.25) и (2.39) представляют общее аналитическое решение системы уравнений (1.5), (1.6). Подставляя данное решение в соотношения (1.3) и переходя согласно формул

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^{(m)} - \sigma_{\theta\theta}^{(m)} + 2i\sigma_{r\theta}^{(m)} &= e^{-2i\theta} (\sigma_{11}^{(m)} - \sigma_{22}^{(m)} + 2i\sigma_{12}^{(m)}); \\ \sigma_{rr}^{(m)} + \sigma_{\theta\theta}^{(m)} - \sigma_{11}^{(m)} + \sigma_{22}^{(m)}; \quad \sigma_{r\theta}^{(m)} + i\sigma_{\theta r}^{(m)} &= e^{-i\theta} \sigma_3^{(m)} \end{aligned}$$

к полярным r, θ координатам, получим выражения для моментов напряжений в виде

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^{(0)} - \sigma_{\theta\theta}^{(0)} + 2i\sigma_{r\theta}^{(0)} &= -4he^{-2i\theta} \left[z \overline{\varphi''(z)} + \overline{\psi'(z)} - h \sum_{m=1}^{2n+1} a_m^{(0)} \partial_{\bar{z}}^2 V_m \right]; \\ \sigma_{rr}^{(0)} + \sigma_{\theta\theta}^{(0)} &= 4h \left[\varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)} \right] + 2 \sum_{m=1}^{2n+1} a_m^{(0)} V_m; \quad \sigma_{33}^{(0)} = \sum_{m=1}^{2n+1} a_{3m}^{(0)} V_m; \\ \sigma_{rr}^{(2)} - \sigma_{\theta\theta}^{(2)} + 2i\sigma_{r\theta}^{(2)} &= 4h^2 e^{-2i\theta} \left[\alpha_2^* h \overline{\varphi''(z)} + \sum_{m=1}^{2n+1} a_m^{(2)} \partial_{\bar{z}}^2 V_m + i \sum_{s=1}^n b_s^{(2)} \partial_{\bar{z}}^2 w_s \right]; \end{aligned}$$

$$\sigma_{rr}^{(2)} + \sigma_{\theta\theta}^{(2)} = 2 \sum_{m=1}^{2n+1} d_m^{(2)} V_m; \quad \sigma_{rr}^{(2k)} + \sigma_{\theta\theta}^{(2k)} = \sum_{m=1}^{2n+1} d_m^{(2k)} V_m \quad (k = 2, 3, \dots, n); \quad (2.40)$$

$$\sigma_{rr}^{(2k)} - \sigma_{\theta\theta}^{(2k)} + 2i\sigma_{r\theta}^{(2k)} = 4h^2 e^{-2i\theta} \left[\sum_{m=1}^{2n+1} d_m^{(2k)} \partial_{\bar{z}}^2 V_m + i \sum_{s=1}^n b_s^{(2k)} \partial_{\bar{z}}^2 w_s \right];$$

$$\sigma_{r3}^{(2k+1)} + i\sigma_{r3}^{(2k+1)} = 2he^{-i\theta} \left[\sum_{m=1}^{2n+1} p_m^{(2k+1)} \partial_{\bar{z}} V_m + i \sum_{s=1}^n q_s^{(2k+1)} \partial_{\bar{z}} w_s \right] \quad (k = 0, 1, \dots, n).$$

Здесь $d_m^{(2k)}$, $d_{3m}^{(2k)}$ и $p_m^{(2k+1)}$, $q_s^{(2k+1)}$ – постоянные вида

$$d_m^{(2k)} = \frac{c_{12} + c_{66}}{c_{66}} c_m^{(2k)} + \frac{(4k+1)c_{13}}{c_{66}} \sum_{s=k}^n c_m^{(2k+1)}; \quad d_{3m}^{(2k)} = \frac{c_{13}}{c_{66}} c_m^{(2k)} + \frac{(4k+1)c_{33}}{c_{66}} \sum_{s=k}^n c_m^{(2s+1)};$$

$$p_m^{(2k+1)} = \frac{c_{44}}{2c_{66}} \left[2c_m^{(2k+1)} + (4k+3) \sum_{s=k+1}^n a_m^{(2s)} \right]; \quad q_s^{(2k+1)} = \frac{(4k+3)c_{44}}{2c_{66}}.$$

§3. Распределение напряжений около кругового отверстия в нетонкой трансверсально-изотропной пластине.

На основании приведенных формул рассмотрим задачу о напряженном состоянии трансверсально-изотропной пластины, ослабленной круговым отверстием. Предположим, что контур отверстия свободен от напряжений, а на бесконечности пластина находится под действием растягивающих $\sigma_{11}^{\infty} = 2p_1$, $\sigma_{22}^{\infty} = 2p_2$ и сдвигающих $\sigma_{12}^{\infty} = 2\tau$ усилий ($p_1, p_2, \tau = \text{const}$). На плоскости S будем иметь бесконечную область с круговым отверстием радиуса R , на контуре которого имеют место условия

$$\left[\sigma_{rr}^{(2k)}(r, \theta) + i\sigma_{r\theta}^{(2k)}(r, \theta) \right]_{r=R} = 0; \quad \sigma_{r3}^{(2k+1)}(r, \theta)_{r=R} = 0 \quad (k = 0, 1, \dots, n). \quad (3.1)$$

Учитывая формулы (2.40), условия (3.1) примут вид

$$2(\sigma_{rr}^{(0)} + i\sigma_{r\theta}^{(0)}) \Big|_{r=R} = 4h \left[\varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)} \right] - 4h^2 e^{-2i\theta} \left[z\overline{\varphi'(z)} + \overline{\psi'(z)} \right] +$$

$$+ \sum_{m=1}^{2n+1} \left(2d_m^{(0)} V_m + 4h^2 d_m^{(0)} e^{-2i\theta} \partial_{\bar{z}}^2 V_m \right) = 0;$$

$$2(\sigma_{r3}^{(1)} + i\sigma_{r3}^{(1)}) \Big|_{r=R} = 4h \lambda_1^{(1)} e^{-i\theta} \varphi'(z) + 4h \sum_{s=1}^n b_s^{(1)} e^{-i\theta} \partial_{\bar{z}} w_s = 0;$$

$$+ \sum_{m=1}^{2n+1} \left(2d_m^{(2k)} V_m + 4h^2 d_m^{(2k)} e^{-2i\theta} \partial_{\bar{z}}^2 V_m \right) = 0 \quad (k = 0, 1, \dots, n) \quad (1?)$$

$$\sigma_{r3}^{(2k+1)} \Big|_{r=R} = \text{Re} \left\{ 2he^{-i\theta} \left(\sum_{m=1}^{2n+1} p_m^{(2k+1)} \partial_{\bar{z}} V_m + i \sum_{s=1}^n q_s^{(2k+1)} \partial_{\bar{z}} w_s \right) \right\} = 0 \quad (k = 0, 1, \dots, n),$$

где $\lambda_1^{(2)} = \alpha_2^*$, $\lambda_2^{(2k)} = 0$ ($k > 1$).

Решение задачи может быть получено методом рядов. Представим аналитические функции $\Phi(z) = \varphi'(z)$, $\Psi(z) = \psi'(z)$ в виде

$$\Phi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n}; \quad \Psi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^{-n}, \quad (3.3)$$

где a_n, b_n ($n > 0$) – произвольные постоянные, константы a_0, b_0 определяются значениями напряжений, заданных на бесконечности, т.е.

$$a_0 + \bar{a}_0 = (\sigma_{11}^{(0)\infty} + \sigma_{22}^{(0)\infty})/4h; \quad \bar{b}_0 = (\sigma_{22}^{(0)\infty} - \sigma_{11}^{(0)\infty} - 2i\sigma_{12}^{(0)\infty})/4h.$$

В рассматриваемом случае имеем: $\sigma_{11}^{(0)\infty} = 2p_1h$; $\sigma_{22}^{(0)\infty} = 2p_2h$; $\sigma_{12}^{(0)\infty} = 2\tau h$.

Вид метагармонических функций V_m зависит от значений корней характеристического уравнения (2.17), которые могут быть действительными и комплексными. Если, в частности, k_m ($m = 1, 2, \dots, 2p+1$), $p \leq n$ – вещественные положительные, а $k_{2m}, k_{2m+1} = \bar{k}_{2m}$ ($m = p+1, p+2, \dots, n$) – комплексно-сопряженные корни, то имеем формулы

$$V_m = \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n^{(m)} K_n(\rho x_m) e^{in\vartheta} \quad (m = 1, 2, \dots, 2p+1);$$

$$V_{2m} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n^{(2m)} H_n^{(1)}(\rho x_{2m}) e^{in\vartheta}; \quad V_{2m+1} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n^{(2m)} H_n^{(2)}(\rho x_{2m+1}) e^{in\vartheta}; \quad m \in [p+1, n], \quad (3.4)$$

где $B_n^{(m)}, C_n^{(2m)}, D_n^{(2m)}$ – произвольные постоянные, удовлетворяющие равенствам: $B_{-n}^{(m)} = \bar{B}_n^{(m)}$; $C_{-n}^{(2m)} = (-1)^n \bar{D}_n^{(2m)}$; $D_{-n}^{(2m)} = (-1)^n \bar{C}_n^{(2m)}$; $K_n(\rho x_m)$; $H_n^{(1)}(\rho x_{2m})$; $H_n^{(2)}(\rho x_{2m+1})$ – цилиндрические функции Бесселя, Ханкеля первого и второго рода;

$$\rho = r/R; \quad x_m = Rh^{-1}l_m; \quad l_m = \sqrt{k_m} \quad (m = 1, 2, \dots, 2p+1);$$

$$l_{1m} = \sqrt{k_{1m}}, \quad l_{2m} = \sqrt{k_{2m}} \quad (m = p+1, p+2, \dots, n)$$

Корни характеристического уравнения (2.35) – вещественные положительные, поэтому

$$w_s = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{B}_n^{(s)} K_n(\rho y_s) e^{in\vartheta} \quad (y_s = Rh^{-1}n_s; \quad n_s = \sqrt{\lambda_s}). \quad (3.5)$$

Подставляя (3.3), (3.4) и (3.5) в граничные условия (3.2), получим алгебраическую систему уравнений относительно неизвестных констант. Определив искомые функции, находим согласно формул (2.40) и (1.1) выражения для моментов и соответствующие значения компонент напряжений. В частности, при условии, что $p_1 \neq 0$, $p_2 = \tau = 0$, кольцевые напряжения $\sigma_{\vartheta\vartheta}$ определяются формулой

$$\frac{\sigma_{\vartheta\vartheta}}{2p_1} = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \frac{1}{\rho^2} - \left[1 - \frac{b_4^*}{\rho^4} + \sum_{k=0}^n T_{\vartheta\vartheta}^{(2k)}(\rho) P_{2k}(\zeta) \right] \cos 2\vartheta \right\}. \quad (3.6)$$

Если же принять $\sigma_{\vartheta\vartheta} = 0$ при $\rho = 1$, то для $\sigma_{\vartheta\vartheta}$ имеем следующее выражение

$$\frac{\sigma_{\vartheta\vartheta}}{2p_1} = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{b_4^*}{\rho^4} + \sum_{k=0}^n T_{\vartheta\vartheta}^{(2k)}(\rho) P_{2k}(\zeta) \right] \cos 2\vartheta, \quad (3.7)$$

где $b_4^* = \text{const}$; $T_{\vartheta\vartheta}^{(2k)}(\rho)$ – функции вида

$$T_{\vartheta\vartheta}^{(2k)}(\rho) = \sum_{m=1}^{2p+1} B_2^{(m)} \left\{ a_m^{(2k)} l_m^2 [K_4(\rho x_m) + K_0(\rho x_m)] / K_2(x_m) - 4d_m^{(2k)} K_2(\rho x_m) / K_2(x_m) \right\} + \\ + \sum_{m=p+1}^n \left\{ C_2^{(2m)} [a_{2m}^{(2k)} l_{2m}^2 (H_4^{(1)}(\rho x_{2m}) + H_0^{(1)}(\rho x_{2m})) - 4d_{2m}^{(2k)} H_2^{(1)}(\rho x_{2m})] + \right.$$

$$+ D_2^{(2m)} [a_{2m+1}^{(2k)2} (H_4^{(2)}(\rho x_{2m+1}) + H_0^{(2)}(\rho x_{2m+1})) - 4d_{2m+1}^{(2k)} H_2^{(2)}(\rho x_{2m+1})] + \sum_{s=1}^n \bar{B}_2^{*(s)} b_s^{(2k)} n_s^2 [K_4(\rho y_s) - K_0(\rho y_s)] / K_2(y_s). \quad (3.8)$$

Здесь принято: $B_2^{*(m)} = B_2^{(m)} K_2(x_m)$ ($m = 1, 2, \dots, 2p+1$) $\bar{B}_2^{*(s)} = i \bar{B}_2^{(s)} K_2(y_s)$ ($s = 1, 2, \dots, n$); $a_{2m+1}^{(2k)} = \bar{a}_{2m}^{(2k)}$; $d_{2m+1}^{(2k)} = \bar{d}_{2m}^{(2k)}$.

Числовые результаты исследования напряженного состояния проведены для нетонкой трансверсально-изотропной пластины с круговым отверстием, находящейся под действием растягивающих и сдвигающих усилий. В табл. 1, 2 приведены значения кольцевых $\sigma_{\theta\theta}$ и нормальных поперечных σ_{33} напряжений на поверхности полости в точках, расположенных на срединной ($\zeta = 0$) и граничной ($\zeta = 1$) плоскостях пластины в зависимости от изменения коэффициента Пуассона ν' при отношениях модулей упругости $E/E' = 0,75$ и $E/E' = 1,75$. Вычисления проведены при $\nu = 0,25$, $g = E/G' = 2,5$ и $R/h = 1,5$. При возрастании коэффициента ν' кольцевые напряжения увеличиваются на срединной и уменьшаются на граничной плоскостях. Причем эти изменения напряжений зависят и от величины отношения модулей упругости E/E' .

Таблица 1

$\sigma_{\theta\theta}, \sigma_{33}$	ζ	$E/E' = 0,75$				$E/E' = 1,75$			
		ν'				ν'			
		0,1	0,2	0,3	0,4	0,1	0,2	0,3	0,4
$\sigma_{\theta\theta}/2\tau$	0	3,018	3,044	3,078	3,122	3,043	3,109	3,207	3,346
	1	2,950	2,899	2,845	2,789	2,896	2,784	2,660	2,523
$\sigma_{33}/E\tau$	0	0,096	0,114	0,133	0,151	0,087	0,168	0,264	0,377
	1	0,071	0,094	0,114	0,133	0,084	0,094	0,100	0,108

Таблица 2

$\sigma_{\theta\theta}, \sigma_{33}$	ζ	$E/E' = 0,75$				$E/E' = 1,75$			
		ν'				ν'			
		0,1	0,2	0,3	0,4	0,1	0,2	0,3	0,4
$\sigma_{\theta\theta}/2\tau$	0	4,037	4,088	4,157	4,244	4,080	4,218	4,415	4,693
	1	3,900	3,798	3,690	3,578	3,792	3,567	3,320	3,045
$\sigma_{33}/2\tau$	0	0,113	0,227	0,347	0,474	0,164	0,297	0,528	0,753
	1	-0,003	-0,006	-0,009	-0,013	-0,003	-0,007	-0,012	-0,017

В этих же таблицах представлены в соответствующих точках значения нормальных поперечных напряжений σ_{33} . Максимальных значений они достигают на срединной плоскости $\zeta = 0$. Из приведенных данных следует существенная зависимость поперечных напряжений от значений коэффициента Пуассона ν' и отношения модулей упругости E/E' .

На рис. 1 приведены кривые изменения кольцевых напряжений $\sigma_{\theta\theta}/2\tau$ на срединной плоскости $\zeta = 0$ в точках $\rho = 1$, $\vartheta = \pi/4$ в зависимости от параметра R/h , характеризующего относительную толщину пластины. Кривые получены при $\nu = 0,25$,

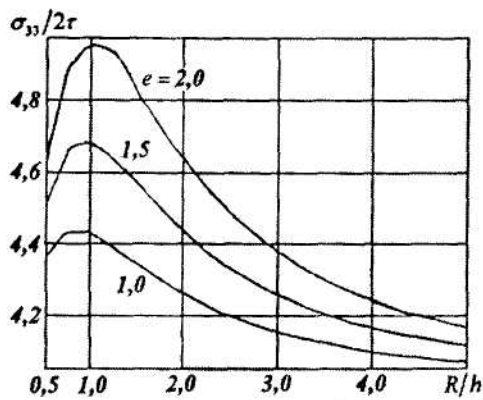


Рис. 1

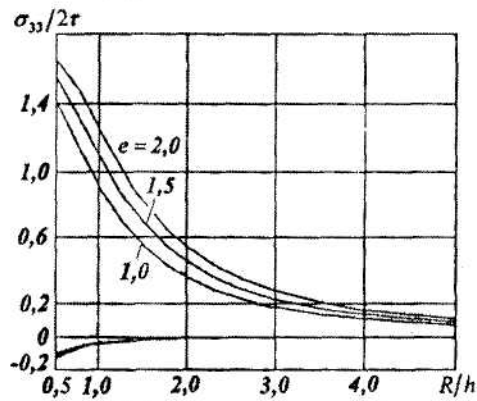


Рис. 2

$\nu' = 0,40$, $E/G' = 2,5$. Максимальных значений напряжения $\sigma_{33}/2\tau$ достигают в случае $R/h = 1$. Причем максимум их возрастает при увеличении отношения $e = E/E'$. При тех же числовых данных на рис. 2 представлены кривые изменения нормальных поперечных напряжений $\sigma_{33}/2\tau$ на контуре отверстия в точках на срединной поверхности $\zeta = 0$ (верхние три кривые), соответственно, при $e = 1,0; 1,5; 2,0$ и граничной поверхности $\zeta = 1$ (нижние кривые) в зависимости от отношения R/h . При увеличении параметра R/h они монотонно убывают, стремясь к нулевым значениям.

РЕЗЮМЕ. Викладено метод побудови загального аналітичного розв'язку системи рівнянь рівноваги нетонких трансверсально-ізотропних пластин з використанням методу розкладу невідомих функцій в ряди Фур'є за поліномами Лежандра координати товщини. На цій основі розглянуто задачу про напружений стан біля кругового отвору в нетонкій пластині, коли на нескінченності задані напруження розтягу та зсуву.

1. Гринченко В.Т., Улитко А.Ф. Точное решение задачи о распределении напряжений около кругового отверстия в упругом слое // Прикл. механика. – 1968. – 4, № 10. – С. 38 – 46.
2. Гринченко В.Т., Улитко А.Ф. Точное решение задачи Кирша // Прикл. механика. – 1970. – 6, № 6. – С. 10 – 17.
3. Космодамианский А.С., Милишевский И.Х., Шалдырван В.А. О концентрации напряжений в транс-тропной пластине с цилиндрической полостью // Прикл. матем. и механика. – 1977. – 41. № 5 – 6. – С. 957 – 960.
4. Космодамианский А.С., Шалдырван В.А. Толстые многосвязные пластины. – К.: Наук. думка. – 1978. – 246 с.
5. Космодамианский А.С., Шалдырван В.А. Концентрация напряжений в толстой плите с двумя круговыми отверстиями // Прикл. механика. – 1970. – 6, № 10 – С.3 – 8.
6. Космодамианский А.С., Шалдырван В.А. Определение напряженного состояния многосвязных транс-тропных пластин // Прикл. матем. и механика. – 1975. – 39. – №5. – С. 909 – 917.
7. Леви Е.Е. О линейных эллиптических уравнениях с частными производными // Успехи матем. наук. – 1940. – Вып. 8. – С. 249 – 292.
8. Меунаргия Т.В. Концентрация напряжений около кругового отверстия в пластине переменной толщины // Докл. АН СССР. – 1971. – 192, Вып. 4. – С. 794 – 797.
9. Роменская Г.И., Шленев М.А. Решение трехмерной задачи Кирша для трансверсально-изотропной плиты // Тр. Всесоюз. конф. по теории оболочек и пластин. – Тбилиси, 1975. – С. 260 – 269.
10. Хома И.Ю. О представлении решений уравнений равновесия нетонких трансверсально-изотропных пластин // Теорет. и прикл. механика. – 1999. – Вып. 30. – С. 3 – 12.

11. Хома И.Ю. О напряженном состоянии нетонкой трансверсально-изотропной пластины с круговой цилиндрической полостью // Теорет. и прикл. механика. – 2001. – Вып. 33. – С. 21 – 27.
12. Хома И.Ю., Хома Ю.И., Лялюк Д.Ф. Трехмерное распределение напряжений около кругового отверстия в трансверсально-изотропной пластине при сдвиге // Теорет. и прикл. механика. – 2002. – Вып. 36. – С. 3 – 9.
13. Шалдырван В.А. Пространственная задача Кирша для трансропной пластины // Прикл. матем. и механика. – 1980. – 49, № 6. – С. 1068 – 1070.
14. Green A.E. Three-dimensional stress state in isotropic plate // Philosophical Transaction of the Royal Society, Ser A. – 1948. – 240. – P. 561 – 597.
15. Khoma I.Yu. On the technique on constructing the general solution to equilibrium equation for nonthin plates // Int. Appl. Mech. – 2001. – 37, N 4. – P. 484 – 492.
16. Khoma I.Yu. Thension of a nonthin transversely isotropic plate with a noncircular cylindrical cavity // Int. Appl. Mech. – 2006. – 42, N 11. – P. 1285 – 1297.
17. Nemish Yu.N., Khoma I.Yu. Stress-stain state of nonthin plates and shells. Generalized theory (survey) // Int. Appl. Mech. – 1998. – 29, N 11 – P. 873 – 902.
18. Shaldyrvan V.A. Some results and problems in the three-dimensional theory of plates (review) // Int. Appl. Mech. – 2007. – 43, N 2 – P. 160 – 181.
19. Sternberg E. Three-dimensional stress concentration in the theory of elasticity // Appl. Mech. Revs. – 1958. – 11, N 1. – P. 1 – 4.
20. Youngdahl C.K., Sternberg E. Three-dimensional stress concentration around a cylindrical hole in a semi-infinite body // J. Appl. Mech. Ser E. – 1966. – 33, N 4. – P. 855 – 865.

Поступила 22.12.2009

Утверждена в печать 29.06.2011