ISSN 0136-4545

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ,
МОЛОДЕЖИ И СПОРТА УКРАИНЫ

ДОНЕЦКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

# ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА

№ 2 (48)

2011

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА. 2011. Вып. 2 (48). С. 137–148

УДК 539.3

*И. Ю. ХОМА*, д-р физ.-мат. наук,
*О. А. СТРЫГИНА*, канд. физ.-мат. наук

# СМЕШАННАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ НЕОДНОРОДНОЙ ПО ТОЛЩИНЕ ТРАНСВЕРСАЛЬНО ИЗОТРОПНОЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ С КРУГОВЫМ ОТВЕРСТИЕМ

*Методом разложения искомых функций в ряды Фурье по полиномам Лежандра получены уравнения равновесия неоднородных по толщине упругих анизотропных оболочек. Изложен способ представления общего аналитического решения уравнений равновесия трансверсально-изотропной сферической оболочки. Рассмотрена задача о напряженном состоянии пологой неоднородной сферической оболочки с круговым отверстием, на поверхности которого заданы нормальные перемещения и поперечные касательные напряжения.*

***Ключевые слова:*** *неоднородность, анизотропия, трансверсально-изотропная сферическая оболочка, круговое отверстие*

В работах [2, 6, 9] предложены разные методы решения задач о напряженном состоянии неоднородных упругих оболочек и пластин. Некоторые проблемы трехмерной теории неоднородных упругих тел изложены в [3, 10, 11]. Методом разложения искомых функций в ряды Фурье по полиномам Лежандра в [5] найдено решение задачи о напряженном состоянии пологой неоднородной по толщине трансверсально-изотропной сферической оболочки с круговым отверстием, на поверхности которого заданы внешние усилия. В данной работе решается аналогичная задача при смешанных граничных условиях на контуре отверстия. Предполагаются заданными нормальные перемещения и поперечные касательные напряжения.

**Постановка задачи и исходные уравнения.** Отнесем оболочку, занимающую область $\Omega = S\times[-h, h]$ трехмерного пространства, к криволинейной системе координат $x^i$ $(i = 1, 2, 3)$, нормально связанной со срединной поверхностью $S$. Пусть $x^\alpha$ $(\alpha = 1, 2)$ совпадают с гауссовыми координатами поверхности $S$, а $x^3 \in [-h, h]$. Оболочка изготовлена из функционально неоднородного по толщине анизотропного материала, уравнения состояния которого имеют вид

$$\sigma^{ij} = \tilde{c}^{ijlm}\left(x^3\right) e_{lm}, \tag{1.1}$$

где $\sigma^{ij}$ и $e_{lm}$ – компоненты тензора напряжений и деформаций, $\tilde{c}^{ijlm}\left(x^3\right)$ – модули упругости, представляемые формулами

$$\hat{c}^{ijlm}\left(x^3\right)=c^{ijlm}q\left(x^3\right), \tag{1.2}$$

в которых $c^{ijlm}$ – постоянные величины, удовлетворяющие условиям симметрии, $q\left(x^3\right)$ – непрерывная функция координаты толщины $x^3$.

При неизменной метрике по толщине оболочки градиентные уравнения записываются таким образом

$$2e_{ij}=\nabla_i u_j+\nabla_j u_i, \tag{1.3}$$

где $\nabla_i$ – символ ковариантной производной, $u_j$ – составляющие вектора перемещений.

Представим перемещения $u_j$ и напряжения $\sigma^{ij}$ в виде конечных рядов Фурье по полиномам Лежандра $P_k(\zeta)$ [5]

$$\left\{u_j\left(x^1,x^2,x^3\right),\sigma^{ij}\left(x^1,x^2,x^3\right)\right\}=\sum_{k=0}^{N}\left\{u_j^{(k)}(x),h^{-1}\sigma_{(k)}^{ij}(x)P_k(\zeta)\right\}. \tag{1.4}$$

Здесь $x=\left(x^1,x^2\right)\in S$, $\zeta=h^{-1}x^3$, $u_j^{(k)}(x)$, $\sigma_{(k)}^{ij}(x)$ – коэффициенты разложения, именуемые ниже моментами (номер момента соответствует порядку полинома Лежандра). Имеют место обратные равенства

$$\left\{u_j^{(k)}(x),\sigma_{(k)}^{ij}(x)\right\}=\left(k+\frac{1}{2}\right)\frac{1}{h}\int_{-h}^{h}\left\{u_j\left(x^1,x^2,x^3\right),h\sigma^{ij}\left(x^1,x^2,x^3\right)\right\}P_k(\zeta)\,dx^3. \tag{1.5}$$

На основе формул (1.4), (1.5) деформации (1.3) преобразуются к виду

$$e_{ij}=\sum_{k=0}^{N}e_{ij}^{(k)}(x)P_k(\zeta), \tag{1.6}$$

где

$$\begin{aligned}
2e_{\alpha\beta}^{(k)}&=\nabla_\alpha u_\beta^{(k)}+\nabla_\beta u_\alpha^{(k)}-2b_{\alpha\beta}u_3^{(k)},\\
2e_{\alpha3}^{(k)}&=\nabla_\alpha u_3^{(k)}+b_\alpha^\beta u_\beta^{(k)}+h^{-1}u_\alpha'^{(k)},\\
e_{33}^{(k)}&=h^{-1}u_3'^{(k)}\quad\left(\alpha,\beta=1,2;\ k=\overline{0,N}\right);
\end{aligned}$$

$b_{\alpha\beta}$ – коэффициенты второй квадратичной формы поверхности $S$: $u_j'^{(k)}=(2k+1)\left(u_j^{(k+1)}+u_j^{(k+3)}+\ldots\right)$, причем $u_j^{(n)}=0$, если $n>N$.

Учитывая выражения (1.6), из равенств (1.1) получаем соотношения

$$\sigma_{(k)}^{ij}=\sum_{n=0}^{N}c^{ijlm}e_{lm}^{(n)}\left(k+\frac{1}{2}\right)\frac{1}{h}\int_{-h}^{h}q(\zeta)P_k(\zeta)P_n(\zeta)\,dx^3. \tag{1.7}$$

Если $q(\zeta)$ является линейной функцией, т.е. $q(\zeta)$, $\delta = const$, то из (1.7) с учетом рекуррентных соотношений для полиномов Лежандра следует, что

$$\sigma^{ij}_{(k)} = hc^{ijlm}\left(e^{(k)}_{lm} + \delta\, e^{(k\pm1)}_{lm}\right), \tag{1.8}$$

где

$$e^{(k\pm1)}_{lm} = \frac{k+1}{2k+3} e^{(k+1)}_{lm} + \frac{k}{2k-1} e^{(k-1)}_{lm}. \tag{1.9}$$

При $q(\zeta) = 1 + \delta_1\zeta + \delta_2\zeta^2$, то уравнения состояния примут вид

$$\sigma^{ij}_{(k)} = hc^{ijlm}\left(e^{(k)}_{lm} + \delta_1 e^{(k\pm1)}_{lm} + \delta_2 e^{(k\pm2)}_{lm}\right). \tag{1.10}$$

Моменты напряжений $\sigma^{ij}_{(k)}$ удовлетворяют системе уравнений [7]

$$\nabla_\alpha \sigma^{\alpha\beta}_{(k)} - b^\beta_\alpha \sigma^{\alpha3}_{(k)} - (2k+1)h^{-1}\sum_{s=0}^{[K]} \sigma^{3\beta}_{(k-2s-1)} = 0 \quad (b = 1,\, 2),$$

$$\nabla_\alpha \sigma^{\alpha3}_{(k)} - b_{\alpha\beta} \sigma^{\alpha\beta}_{(k)} - (2k+1)h^{-1}\sum_{s=0}^{[K]} \sigma^{33}_{(k-2s-1)} + f^{(k)}_3 = 0 \quad \left(k = \overline{0, N}\right), \tag{1.11}$$

в которой $K = (k-1)/2$, $[K]$ обозначает целую часть $K$:

$$f^{(k)}_3 = \left(k + \frac{1}{2}\right)\left[\sigma^+_{33} - (-1)^k \sigma^-_{33}\right],$$

$\sigma^+_{33}$ и $\sigma^-_{33}$ – заданные значения напряжений на лицевых граничных поверхностях.

Равенства (1.11) совместно с (1.8) или (1.10) образуют замкнутую систему уравнений для определения неизвестных функций. Рассмотрим частные случаи анизотропии материала оболочки.

**Трансверсально изотропная сферическая оболочка.** Пусть материал оболочки трансверсально изотропный с поверхностью изотропии совпадающей с $S$, которая представляет сферу радиуса $R$ и оболочка находится под действием постоянного внутреннего давления интенсивности $q$ $(q = const)$, т.е. $\sigma^+_{33} = 0$, $\sigma^-_{33} = -q$.

На поверхности сферы, как известно [1], можно ввести изометрическую систему координат $x$, $y$, относительно которой первая квадратичная форма принимает вид: $ds^2 = \Lambda\left(dx^2 + dy^2\right)$, $\Lambda > 0$. В изометрической системе координат целесообразно использовать комплексную форму рассматриваемых уравнений. Вводя комплексные переменные $z = x + iy$, $\overline{z} = x - iy$, систему уравнений (1.11) запишем в виде [8]

$$\Lambda^{-1}\partial_z\left(\sigma_{11}^{(k)}-\sigma_{22}^{(k)}+2i\sigma_{12}^{(k)}\right)+\partial_{\bar z}\Lambda^{-1}\left(\sigma_{11}^{(k)}+\sigma_{22}^{(k)}\right)+$$
$$+R^{-1}\sigma_{+}^{(k)}-(2k+1)h^{-1}\sum_{s=0}^{[K]}\sigma_{+}^{(k-2s-1)}=0\quad\left(k=\overline{0,N}\right),$$
$$\Lambda^{-1}(\partial_z\sigma_{+}^{(k)}+\partial_{\bar z}\bar\sigma_{+}^{(k)})-(R\Lambda)^{-1}\left(\sigma_{11}^{(k)}+\sigma_{22}^{(k)}\right)-$$
$$-(2k+1)h^{-1}\sum_{s=0}^{[K]}\sigma_{33}^{(k-2s-1)}=-(-1)^k\left(k+\frac{1}{2}\right)q, \tag{2.1}$$

где $\partial_{\bar z}=\partial/\partial_{\bar z}$ ; $\sigma_{+}^{(k)}=\sigma_{13}^{(k)}+i\sigma_{23}^{(k)}$.

Соотношения упругости (1.8) для трансверсально изотропной оболочки записываются таким образом:

$$\sigma_{11}^{(k)}+\sigma_{22}^{(k)}=2h\Lambda\left[(c_{12}+c_{66})\left(\underline{e}^{(k)}+2R^{-1}\underline{u}_3^{(k)}\right)+c_{13}h^{-1}\underline{u}_3^{\prime(k)}\right],$$
$$\sigma_{11}^{(k)}-\sigma_{22}^{(k)}+2i\sigma_{12}^{(k)}=4c_{66}h\Lambda\partial_{\bar z}\left(\Delta^{-1}\underline{u}_{+}^{(k)}\right),$$
$$\sigma_{33}^{(k)}=h\left[c_{13}\left(\underline{e}^{(k)}+2R^{-1}\underline{u}_3^{(k)}\right)+c_{33}h^{-1}\underline{u}_3^{\prime(k)}\right]. \tag{2.2}$$

Здесь $c_{ij}$ $(i,j=1,2,3)$, $c_{44}$, $c_{66}$ – двухиндексные обозначения упругих постоянных;

$$\underline{u}_{+}^{(k)}=\underline{u}_1^{(k)}+i\underline{u}_2^{(k)};\quad \underline{u}_j^{(k)}=u_j^{(k)}+\delta u_j^{(k\pm1)};$$
$$\underline{e}^{(k)}=e^{(k)}+\delta e^{(k\pm1)};\quad e^{(k)}=\Lambda^{-1}(\partial_z u_{+}^{(k)}+\partial_{\bar z}\bar u_{+}^{(k)}); \tag{2.3}$$

$\underline{u}_j^{\prime(k)}$ $(j=1,2,3)$ – функции, принимающие при четных $N=2n$ $(n=0,1,\ldots<\infty)$ значения

$$\underline{u}_j^{\prime(2k)}=2k\delta u_j^{(2k)}+(4k+1)\sum_{s=k+1}^{n}\left(u_j^{(2s-1)}+\delta u_j^{(2s)}\right),$$
$$\underline{u}_j^{\prime(2k-1)}=-2k\delta u_j^{(2k-1)}+(4k-1)\sum_{s=k}^{n}\left(u_j^{(2s)}+\delta u_j^{(2s-1)}\right). \tag{2.4}$$

Подставляя моменты (2.2) в равенства (2.1), получаем уравнения

$$4c_{66}\Lambda^{-1}\partial_z\Lambda\partial_{\bar z}\left(\Lambda^{-1}\underline{u}_{+}^{(2k)}\right)+2(c_{12}+c_{66})\partial_{\bar z}\left(\underline{e}^{(2k)}+2R^{-1}\underline{u}_3^{(2k)}\right)+$$
$$+c_{44}R^{-1}(2\partial_{\bar z}\underline{u}_3^{(2k)}-R^{-1}\underline{u}_{+}^{(2k)})+\delta c_{44}h^{-1}(2c_{2k}^{\prime}\partial_{\bar z}u_3^{(2k)}-R^{-1}u_{+}^{(2k)})+$$
$$+(4k+1)h^{-1}\left\{\sum_{s=1}^{n}[2\lambda_{2s-1}^{(k)}\partial_{\bar z}u_3^{(2s-1)}-c_{44}h^{-1}\left(\delta\alpha_{2s-1}^{\bullet(k)}-hR^{-1}\right)\times\right.$$

$$\times u_+^{(2s-1)}] + \sum_{s=0}^{n} [2\delta\tilde{\lambda}_{2s}^{(k)} \partial_{\bar{z}} u_3^{(2s)} - c_{44} h^{-1} \left(\beta_{2s}^{(k)} - \delta h R^{-1}\right) u_+^{(2s)}]\Big\} = 0; \tag{2.5}$$

$$c_{44}\left(\nabla^2 \underline{u}_3^{(2k)} - R^{-1}\underline{e}^{(2k)}\right) + 2\left(c_{12} + c_{66}\right) R^{-1}\left(\underline{e}^{(2k)} + 2R^{-1}\underline{u}_3^{(2k)}\right) +$$

$$+\delta h^{-1}(c_{2k}'' c_{44} e^{(2k)} + 2c_{13} R^{-1} u_3^{(2k)}) + (4k+1) h^{-1} \Big\{ \sum_{s=1}^{n} [\gamma_{2s-1}^{(k)} e^{2s-1} -$$

$$-c_{33} h^{-1}(\delta\alpha_{2s-1}^{\bullet(k)} + \frac{2c_{13}h}{c_{33}R}) u_3^{(2s-1)}] + \sum_{s=0}^{n} [\delta\tilde{\gamma}_{2s}^{(k)} e^{(2s)} -$$

$$-c_{33} h^{-1}\left(\beta_{2s}^{(k)} + \frac{2\delta c_{13} h}{c_{33} R}\right) u_3^{(2s)}]\Big\} = -\left(2k + \frac{1}{2}\right) h^{-1} q \quad \left(k = \overline{0, n}\right) \tag{2.6}$$

и аналогичные равенства для нечетных значений $k$ при старших производных, т.е.

$$4c_{66}\Lambda^{-1}\partial_z \Lambda \partial_{\bar{z}}\left(\Lambda^{-1}\underline{u}_+^{(2k-1)}\right) + 2\left(c_{12} + c_{66}\right)\partial_{\bar{z}}\left(\underline{e}^{(2k-1)} + 2R^{-1}\underline{u}_3^{(2k-1)}\right) +$$

$$+c_{44}R^{-1}(2\partial_{\bar{z}}\underline{u}_3^{(2k-1)} - R^{-1}\underline{u}_+^{(2k-1)}) + \delta c_{44} h^{-1}(2c_{2k-1}' \partial_{\bar{z}} u_3^{(2s-1)} +$$

$$+R^{-1}u_3^{(2s-1)}) + (4k-1) h^{-1}\Big\{\sum_{s=0}^{n} [2\lambda_{2s}^{(k)} \partial_{\bar{z}} u_3^{(2s)} - c_{44} h^{-1}\left(\delta\beta_{2s}^{\bullet(k)} - hR^{-1}\right) \times$$

$$\times u_+^{(2s)}] + \sum_{s=1}^{n} [\tilde{\lambda}_{2s-1}^{(k)} \partial_{\bar{z}} u_3^{(2s-1)} - c_{44} h^{-1}\left(\alpha_{2s-1}^{(k)} - \delta h R^{-1}\right) u_+^{(2s-1)}]\Big\} = 0; \tag{2.7}$$

$$c_{44}\left(\nabla^2 \underline{u}_3^{(2k-1)} - R^{-1}\underline{e}^{(2k-1)}\right) + 2\left(c_{12} + c_{66}\right) R^{-1}\left(\underline{e}^{(2k-1)} + 2R^{-1}\underline{u}_3^{(2k-1)}\right) -$$

$$-\delta h^{-1}(c_{2k-1}'' c_{44} e^{(2k-1)} - 2c_{13} R^{-1} u_3^{(2k-1)}) + (4k-1) h^{-1}\Big\{\sum_{s=0}^{n} [\gamma_{2s}^{(k)} e^{2s} -$$

$$-c_{33} h^{-1}(\delta\beta_{2s}^{\bullet(k)} + \frac{2c_{13}h}{c_{33}R}) u_3^{(2s)}] + \sum_{s=1}^{n} [\delta\tilde{\gamma}_{2s-1}^{(m)} e^{(2s-1)} -$$

$$-c_{33} h^{-1}\left(\alpha_{2s-1}^{(m)} + \frac{2\delta c_{13} h}{c_{33} R}\right) u_3^{(2s-1)}]\Big\} = \left(2k - \frac{1}{2}\right) h^{-1} q \quad \left(k = \overline{1, n}\right). \tag{2.8}$$

Здесь $\nabla^2 = 4\Lambda^{-1}\partial_z\partial_{\bar{z}}$ – оператор Лапласа на поверхности сферы, $\lambda_{2s-1}^{(n)}$, $\lambda_{2s}^{(k)}$, $\gamma_{2s-1}^{(n)}$, $\gamma_{2s}^{(k)}$ – постоянные вида [8]

$$\lambda_{2s-1}^{(k)} = \begin{cases} -c_{44}, & 1 \le s \le k; \\ c_{13}, & k < s \le n; \end{cases} \quad \lambda_{2s}^{(k)} = \begin{cases} -c_{44}, & 0 \le s < k; \\ c_{13}, & k \le s \le n; \end{cases}$$

$$\gamma_{2s-1}^{(k)} = \begin{cases} -c_{33}, & 1 \le s \le k; \\ c_{44}, & k < s \le n; \end{cases} \quad \gamma_{2s}^{(k)} = \begin{cases} -c_{13}, & 0 \le s < k; \\ c_{44}, & k \le s \le n; \end{cases}$$

$$c'_m = \begin{cases} 2k+1+2kc_{13}/c_{44}, & m = 2k, \\ 2k-1+2kc_{13}/c_{44}, & m = 2k-1; \end{cases}$$

$$c''_m = \begin{cases} 2k+(2k+1)c_{13}/c_{44}, & m = 2k, \\ 2k+(2k-1)c_{13}/c_{44}, & m = 2k-1; \end{cases} \tag{2.9}$$

$$\alpha_{2s-1}^{(k)} = \begin{cases} s(2s-1), & 1 \le s \le k, \\ k(2k-1), & k \le s \le n; \end{cases} \quad \beta_{2s}^{(k)} = \begin{cases} s(2s+1), & 1 \le s \le k, \\ k(2k+1), & k \le s \le n; \end{cases}$$

$$\alpha_{2s-1}^{*(k)} = \begin{cases} s(2s-1), & 1 \le s \le k, \\ k(2k+1), & k < s \le n; \end{cases} \quad \beta_{2s}^{*(k)} = \begin{cases} s(2s+1), & 1 \le s < k, \\ k(2k-1), & k \le s \le n. \end{cases} \tag{2.10}$$

**Общее решение задачи.** Для построения общего решения системы уравнений (2.5) – (2.8) проведем некоторые преобразования. Применим к уравнению (2.5) операцию $\Lambda^{-1}\partial_z$ и в найденном равенстве рассмотрим вещественную часть. Учитывая при этом обозначения (2.3), будем иметь

$$\begin{gathered} c_{11}\nabla^2 \underline{e}^{(2k)} + c^* c_{44} R^{-2} \underline{e}^{(2k)} + c_* c_{44} R^{-1} \nabla^2 \underline{u}_3^{(2k)} + \delta c_{44} h^{-1} (c'_{2k} \nabla^2 u_3^{(2k)} - \\ - R^{-1} e^{(2k)}) + (4k+1) h^{-1} \Big\{ \sum_{s=1}^{n} [\lambda_{2s-1}^{(k)} \nabla^2 u_3^{(2s-1)} - c_{44} h^{-1} \big(\delta \alpha_{2s-1}^{*(k)} - \\ - hR^{-1}\big) e^{(2s-1)}] + \sum_{s=0}^{n} [\delta \tilde{\lambda}_{2s}^{(k)} \nabla^2 u_3^{(2s)} - c_{44} h^{-1} \big(\beta_{2s}^{(k)} - \\ - \delta h R^{-1}\big) e^{(2s)}] \Big\} = 0 \quad \big(k = \overline{0, n}\big). \end{gathered} \tag{3.1}$$

Из (2.7) после выполнения аналогичных преобразований получаем уравнение

$$\begin{gathered} c_{11}\nabla^2 \underline{e}^{(2k-1)} + c^* c_{44} R^{-2} \underline{e}^{(2k-1)} + c_* c_{44} R^{-1} \nabla^2 \underline{u}_3^{(2k-1)} - \\ - \delta c_{44} h^{-1} (c'_{2k-1} \nabla^2 u_3^{(2k-1)} + R^{-1} e^{(2k-1)}) + (4k-1) h^{-1} \Big\{ \sum_{s=0}^{n} [\lambda_{2s}^{(k)} \nabla^2 u_3^{(2s)} - \\ - c_{44} h^{-1} \big(\delta \beta_{2s}^{*(k)} - hR^{-1}\big) e^{(2s)}] + \sum_{s=1}^{n} [\delta \tilde{\lambda}_{2s-1}^{(k)} \nabla^2 u_3^{(2s-1)} - \\ - c_{44} h^{-1} \big(\beta_{2s}^{(k)} - \delta h R^{-1}\big) e^{(2s-1)}] \Big\} = 0 \quad \big(k = \overline{1, n}\big), \end{gathered} \tag{3.2}$$

где $c_* = 1 + 2(c_{12} + c_{66})/c_{44}$; $c^* = -1 + 2c_{66}/c_{44}$.

Равенства (3.1), (3.2) совместно с (2.6), (2.8) составляют систему уравнений $4(2n+1)$-го порядка относительно моментов перемещений $u_3^{(k)}$ и деформаций $e^{(k)}$. Решение ее примем в виде

$$c_{66}u_3^{(k)} = \eta_3^{(k)} ph + u_{2k+1}; \quad c_{66}he^{(k)} = u_{2k+2} \quad \left(k = \overline{0,\, 2n}\right), \tag{3.3}$$

в котором $p = qR/2h$, $u_k$ – функции, выражающие общее решение однородной системы, записываемой в стандартной форме так:

$$\sum_{l=1}^{4n+2}\left(a_{kl} - b_{kl}h^2\nabla^2\right)u_l = 0 \quad \left(k = \overline{2(2n+1)}\right), \tag{3.4}$$

$\eta_3^{(n)}$ – постоянные, определяемые из решения алгебраической системы уравнений [7].

$$\frac{4(c_{12}+c_{66})h}{(4k+1)c_{66}R}\eta_3^{(2k)} - \frac{2\delta c_{13}}{(4k+1)c_{66}}\eta_3^{(2k)} + \frac{c_{33}R}{c_{66}h}\left[\sum_{s=0}^{n}\left(\beta_{2s}^{(k)} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{2\delta c_{13}h}{c_{66}R}\right)\eta_3^{(2s)} + \sum_{s=1}^{n}\left(\delta\alpha_{2s-1}^{*(k)} + \frac{c_{13}h}{c_{66}R}\right)\eta_3^{(2s-1)}\right] = 1 \quad (k = \overline{0,n});$$

$$\frac{4(c_{12}+c_{66})h}{(4k-1)c_{66}R}\eta_3^{(2k-1)} - \frac{2\delta c_{13}}{(4k-1)c_{66}}\eta_3^{(2k-1)} + \frac{c_{33}R}{c_{66}h}\left[\sum_{s=0}^{n}\left(\alpha_{2s-1}^{(k)} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{2\delta c_{13}h}{c_{66}R}\right)\eta_3^{(2s-1)} + \sum_{s=0}^{n}\left(\delta\beta_{2s}^{*(k)} + \frac{2c_{13}h}{c_{66}R}\right)\eta_3^{(2s)}\right] = -1 \quad (k = \overline{1,n}).$$

Рассмотрим характеристическое уравнение

$$\det\left\|a_{kl} - kb_{kl}\right\| = 0, \tag{3.5}$$

и будем считать, что оно имеет простые, не равные нулю корни $k_m$. Тогда из (3.4) операторным методом [7] находим

$$u_k = \sum_{m=1}^{4n+2} D_m^{(k)} V_m, \tag{3.6}$$

где $V_m$ – метагармонические функции, удовлетворяющие равенствам

$$\nabla^2 V_m - k_m h^{-2} V_m = 0, \tag{3.7}$$

$D_m^{(n)}$ – постоянные, определяемые как алгебраические дополнения элементов какой-нибудь строки определителя $\left|a_{kl} - k_m b_{kl}\right|$.

Согласно (3.6) функции (3.3) примут вид

$$c_{66}u_3^{(k)} = \eta_3^{(k)} ph + \sum_{m=1}^{4n+2} c_m^{(k)} V_m, \quad c_{66}e^{(k)} = h^{-1}\sum_{m=1}^{4n+2}\tilde{c}_m^{(n)} V_m, \tag{3.8}$$

причем $c_m^{(k)} = D_m^{(2k+1)}$, $\tilde{c}_m^{(k)} = D_m^{(2k+2)}$.

Учитывая формулы (2.3), (3.6), (3.7), для моментов деформаций $e^{(k)}$ получаем выражения

$$c_{66}\Lambda^{-1}(\partial_z u_+^{(n)} + \partial_{\bar z}\bar u_+^{(n)}) = 2h\sum_{m=1}^{4n+2} a_m^{(n)}\Lambda^{-1}\partial_z\partial_{\bar z}V_m ,$$

из которых находим

$$c_{66}u_+^{(k)} = h\sum_{m=1}^{4n+2} a_m^{(k)}\partial_{\bar z}V_m + ih\partial_{\bar z}y_k . \qquad (3.9)$$

Здесь $a_m^{(k)} = 2k_m^{-1}\tilde c_m^{(k)}$, $y_k$ – произвольные достаточно гладкие вещественные функции, которые необходимо выбирать такими, чтобы выполнялись равенства (2.5), (2.7). если внести в (2.5), (2.7) выражения моментов (3.8), (3.9), то получим относительно комплексной функции $U_k = X_k + iY_k$ равенство

$$\partial_{\bar z}U_k = 0 , \qquad (3.10)$$

действительная часть $X_k$ которой представляет собой линейную комбинацию метагармонических функций $V_m$, т.е.

$$X_k = c_0\sum_{m=1}^{4n+2} O_m^{(k)}V_m ,$$

а мнимая часть $Y_k$ определяется формулами

$$Y_{2k} = \nabla^2\underline{y}_{2k} + \frac{c^*c_{44}}{c_{66}R^2}\underline{y}_{2k} - \frac{\delta c_{44}}{c_{66}Rh}y_{2k} -$$
$$-\frac{(4k+1)c_{44}}{c_{66}h^2}\left[\sum_{s=0}^{n}\left(\beta_{2s}^{(k)} - \frac{\delta h}{R}\right)y_{2s} + \sum_{s=1}^{n}\left(\delta\alpha_{2s-1}^{*(k)} - \frac{h}{R}\right)y_{2s-1}\right],$$
$$Y_{2k-1} = \nabla^2\underline{y}_{2k-1} + \frac{c^*c_{44}}{c_{66}R^2}\underline{y}_{2k-1} - \frac{\delta c_{44}}{c_{66}eh}y_{2k-1} -$$
$$-\frac{(4k-1)c_{44}}{c_{66}h^2}\left[\sum_{s=1}^{n}\left(\alpha_{2s-1}^{(k)} - \frac{\delta h}{R}\right)y_{2s-1} + \sum_{s=0}^{n}\left(\delta\beta_{2s}^{*(k)} - \frac{h}{R}\right)y_{2s}\right]. \qquad (3.11)$$

Здесь $c_0 = c_{11}/2c_{66}h$, $\underline{y_k} = y_k + \delta y_{k\pm1}$, $O_m^{(k)}$ – постоянные, тождественно равные нулю.

Равенство (2.10) после интегрирования по переменной $\bar z$ принимает вид

$$U_k = f_k(z) \quad \left(k = \overline{0, 2n}\right),$$

в котором $f_k(z)$ – произвольные аналитические функции. Из последнего равенства вытекает, что действительная часть $U_k$ должна быть гармонической функцией, а постольку она тождественно равна нулю, то

$\mathrm{Re}[f_k(z)] = 0$ и, следовательно, $f_k = ic_k$. Учитывая, что функции $y_k$ определяются с точностью до постоянных слагаемых, можно положить $c_k = 0$. Таким образом, из равенств $Y_k = 0$ получаем систему уравнений, которую в стандартной форме запишем таким образом

$$\sum_{l=0}^{2n}\left(\alpha_{kl} - \beta_{kl}h^2\nabla^2\right)y_l = 0 \quad \left(k = \overline{0, 2n}\right). \tag{3.12}$$

При условии, что характеристическое уравнение

$$\det\left\|a_{kl} - \lambda\beta_{kl}\right\| = 0 \tag{3.13}$$

имеет простые отличные от нуля корни $\lambda_s$, из системы (3.12) описанным выше способом находим

$$y_k = \sum_{s=1}^{2n+1} b_s^{(k)}\omega_s, \tag{3.14}$$

где $\omega_s$ – метагармонические функции, удовлетворяющие уравнениям

$$\nabla^2\omega_s - \lambda_s h^{-2}\omega_s = 0, \tag{3.15}$$

$b_s^{(k)}$ – постоянные, определяемые алгебраическими дополнениями элементов любой строки определителя $\left|a_{kl} - \lambda_s\beta_{kl}\right|$

Подставляя выражения (3.14) в формулы (3.9), будем иметь

$$c_{66}u_+^{(k)} = h\sum_{m=1}^{4n+2} a_m^{(k)}\partial_{\bar z}V_m + ih\sum_{s=1}^{2n+1} b_s^{(k)}\partial_{\bar z}\omega_s. \tag{3.16}$$

Найденные таким образом значения функций (3.8), (3.16) дают общее аналитическое решение системы уравнений (2.5) – (2.8).

**Пологая сферическая оболочка с круговым отверстием.** Для пологих оболочек, срединная поверхность которых незначительно отличается от плоскости, величину $\Lambda$ можно принять равной единице, а оператор $\nabla^2$ заменить оператором Лапласа $\Delta$ на плоскости. Учитывая сказанное, введем в области $S$ полярную систему координат $r, \vartheta$ и воспользуемся формулами преобразования компонент тензора напряжений. В этом случае соотношение (2.2) с учетом формул (3.8), (3.16) примут вид

$$\sigma_{rr}^{(k)} + \sigma_{\vartheta\vartheta}^{(k)} = \gamma_k ph + 2\sum_{m=1}^{4n+2} d_m^{(k)}V_m, \quad \sigma_{33}^{(k)} = \gamma_{3k}ph + 2\sum_{m=1}^{4n+2} d_{3m}^{(k)}V_m,$$

$$\sigma_{rr}^{(k)} - \sigma_{\vartheta\vartheta}^{(k)} + 2i\sigma_{r\vartheta}^{(k)} = 4he^{-2i\vartheta}\left(\sum_{m=1}^{4n+2} \underline{a}_m^{(k)}\partial_{\bar z}^2 V_m + i\sum_{s=1}^{2n+1} \underline{b}_s^{(k)}\partial_{\bar z}^2\omega_s\right),$$

$$\sigma_{r3}^{(k)} + i\sigma_{\vartheta 3}^{(k)} = 2he^{-i\vartheta}\left(\sum_{m=1}^{4n+2} p_m^{(k)}\partial_{\bar z}V_m + i\sum_{s=1}^{2n+1} q_s^{(k)}\partial_{\bar z}\omega_s, \right. \tag{4.1}$$

где

$$\gamma_k = \frac{4(c_{12}+c_{66})}{c_{66}} \underline{\eta}_3^{(k)} + \frac{2c_{13}}{c_{66}} \underline{\eta}_3^{\prime(k)},$$

$$d_m^{(k)} = \frac{c_{12}+c_{66}}{c_{66}} \left( \tilde{\underline{c}}_m^{(k)} + \frac{2h}{R} \underline{c}_m^{(k)} \right) + \frac{c_{13}}{c_{66}} \underline{c}_m^{\prime(k)}.$$

Моменты перемещений (3.16) в полярной системе координат представляются равенствами

$$c_{66}(u_r^{(k)} + iu_\vartheta^{(k)}) = he^{-i\vartheta}\left(\sum_{m=1}^{4n+2} a_m^{(k)} \partial_{\bar{z}} V_m + i \sum_{s=1}^{2n+1} b_s^{(k)} \partial_{\bar{z}} \omega_s\right). \tag{4.2}$$

Рассмотрим случай пологой сферической оболочки с круговым отверстием радиуса $r_0$. Оболочка находится под действием постоянного внутреннего давления интенсивности $q$. Отверстие закрыто крышкой, которая передает на контур отверстия действие перерезывающей силы [4]. Будем считать, что крышка жесткая и не деформируется в радиальном направлении. Это приводит к выполнению условий

$$u_r^{(k)}(r)\Big|_{r=r_0} = 0 \quad \left(k = \overline{0, N}\right),$$

$$\sigma_{r3}^{(0)}(r)\Big|_{r=r_0} = -qr_0/2, \quad \sigma_{r3}^{(k)}(r)\Big|_{r=r_0} = 0 \quad \left(k = \overline{1, N}\right). \tag{4.3}$$

Учитывая формулы (4.1), (4.2), граничные условия (4.3) запишем через метагармонические функции $V_m$ (функции $\omega_s$ вихревого решения в осесимметричной задаче отсутствуют). Вид функций $V_m$ зависит от значений корней характеристического уравнения (3.5), которое может иметь разное количество действительных и комплексных корней. Если имеется $2l+1$ вещественных отрицательных, $2p+1$ вещественных положительных и $2(2n-l-p)$ – комплексно-сопряженных корней, то в граничных условиях осевой симметрии будем иметь

$$V_m = A_0^{(m)} Y_0\left(rh^{-1}\sqrt{-k_m}\right) \quad \left(m \in [1,\ 2l+1]\right),$$

$$V_m = B_0^{(m)} K_0\left(rh^{-1}\sqrt{k_m}\right) \quad \left(m \in [2l+2,\ 2(l+p+1)]\right),$$

$$V_{2m+1} = C_0^{(2m+1)} H_0\left(rh^{-1}\sqrt{-k_{2m+1}}\right),$$

$$V_{2m+2} = D_0^{(2m+1)} H_0^{(2)}\left(rh^{-1}\sqrt{-k_{2m+2}}\right) \quad \left(m \in [l+p+1,\ 2n]\right), \tag{4.4}$$

где $Y_0$, $K_0$, $H_0^{(1)}$ и $H_0^{(2)}$ – цилиндрические функции Бесселя, Ханкеля первого и второго рода, $A_0$, $B_0$, $C_0$ и $D_0$ – постоянные, значения которых определяем из выполнения граничных условий.

Числовые исследования проведены для пологой сферической оболочки с коэффициентом Пуассона $\nu = 0,25$ и $\nu' = 0.25$ соответственно в плоскости изотропии и нормальной к ней плоскости при отношениях модулей упругости $E/E' = 1$, $E/G' = 7.5$ и $h/R = 0{,}05$. В табл. 1, 2 приведены значения радиальных $\sigma_{rr}/p$ и кольцевых $\sigma_{\vartheta\vartheta}/p$ напряжений на контуре отверстия $r/r_0 = \rho = 1$ в точках $\zeta = 0$ на срединной и $\zeta = 1$, $\zeta = -1$ на граничных поверхностях в зависимости от изменения парамет-

Таблица 1

| Напр. | $\delta$ | $\zeta$ | $\rho = r/r_0$ | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | 1.0 | 1.04 | 1.08 | 1.12 | 1.16 | 1.20 | 1.24 |
| $\sigma_{33}/p$ | | 1 | 0.023 | -0.007 | -0.004 | -0.002 | -0.002 | -0.002 | 0.000 |
| | 0 | 0 | -0.090 | -0.092 | -0.090 | -0.087 | -0.084 | -0.081 | -0.077 |
| | | −1 | -0.138 | -0.105 | -0.102 | -0.100 | -0.100 | -0.099 | -0.099 |
| | | 1 | 0.056 | 0.017 | 0.008 | 0.003 | 0.000 | -0.001 | -0.002 |
| | 0.1 | 0 | -0.192 | -0.167 | -0.153 | -0.144 | -0.136 | -0.129 | -0.122 |
| | | −1 | -0.107 | -0.081 | -0.090 | -0.096 | -0.099 | -0.101 | -0.102 |

Таблица 2

| Напр. | $\zeta$ | $\delta$ | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 0 | 0.10 | 0.15 | 0.20 | 0.25 | 0.30 | 0.35 |
| | 1 | 2.768 | 3.071 | 3.220 | 3.367 | 3.513 | 3.656 | 3.798 |
| $\sigma_{rr}/p$ | 0 | 0.433 | 0.431 | 0.430 | 0.428 | 0.425 | 0.421 | 0.416 |
| | −1 | -1.884 | -1.688 | -1.579 | -1.478 | -1.365 | -1.255 | -1.142 |
| | 1 | 1.964 | 2.181 | 2.281 | 2.399 | 2.508 | 2.618 | 2.727 |
| $\sigma_{\vartheta\vartheta}/p$ | 0 | 1.380 | 1.369 | 1.360 | 1.351 | 1.344 | 1.337 | 1.321 |
| | -1 | 0.782 | 0.751 | 0.719 | 0.687 | 0.655 | 0.623 | 0.590 |

ра $\delta$. При увеличении параметра $\delta$ напряжения повышаются на внешней граничной поверхности $\zeta = 1$ и снижаются (по абсолютной величине) на внутренней поверхности $\zeta = -1$.

Окружные напряжения положительны во всех точках поперечного сечения и имеют аналогичную тенденцию к изменению на лицевых граничных поверхностях при увеличении параметра $\delta$.

Данные таблицы 2 характеризуют изменения нормальных поперечных напряжений $\sigma_{33}/p$ в зависимости от изменения координаты $\rho = r/r_0$ для двух значений параметра $\delta = 0$ и $\delta = 0.1$. При удалении от контура отверстия $\rho = 1$, напряжения $\sigma_{33}$ на внешней (не нагруженной) поверхности $\varsigma = 1$ быстро затухают, приближаясь к нулю, а на внутренней (нагруженной) поверхности $\varsigma = -1$ они стремятся к заданному значению $\sigma_{33} = -0.1p = -q$ (при $p = qR/2h$ и $R/h = 20$).

Р Е З Ю М Е. Методом розвинення шуканих функцій в ряди Фур'є за поліномами Лежандра знайдено рівняння рівноваги неоднорідних по товщині пружних анізотропних оболонок. Викладено спосіб представлення загального аналітичного розв'язку системи рівнянь рівноваги трансверсально ізотропної сферичної оболонки. Розв'язана задача про напружений стан пологої неоднорідної сферичної оболонки з круговим отвором, на поверхні якого задані нормальні переміщення і поперечні дотичні напруження.

**Ключові слова.** Неоднорідність, анізотропія, трансверсально-ізотропна сферична оболонка, круговий отвір.

S U M M A R Y. By using a method of expanding of the unknown functions in a Fourier series in Legendre polynomials, the equilibrium equations for elastic anisotropic shells non-homogeneous on the thickness are found. A method of a construction of a general analytical solution of system of equilibrium equations for transversally isotropic spherical shell is given. A stress state problem for hollow a non-homogeneous spherical shell with a circular hole the surfaces of which are subjected by normal displacements and transverse stresses is solved.

**Key words:** non-homogeneous, anisotropic, transversally-isotropic spherical shells, circular hole.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Векуа И. Н.* Основы тензорного анализа и теории ковариантов. – М.: Наука, 1978. – 296 с.

2. *Григоренко Я. М., Василенко А. Т.* Задачи статики анизотропных неоднородных оболочек. – М.: Наука, 1992. – 332 с.

3. *Ломакин В. А.* Теория упругости неоднородных тел. – М.: Изд-во МГУ, 1976. – 367 с.

4. Теория тонких оболочек, ослабленных отверстиями. / Гузь А. Н., Чернышенко И. С., Чехов Вал. Н. и др. – К.: Наук. думка, 1980. – 635 с. (Методы расчета оболочек: В 10 т. Т. 1).

5. *Хома И. Ю.* Напряженное состояние неоднородной трансверсально изотропной сферической оболочки с круговой полостью при заданных полиномиально изменяющихся касательных напряжениях //Прикладная механика. – 1996. – Т. 32, № 12. – С. 55–63.

6. *Хома И. Ю.* Об интегрировании системы уравнений упругого равновесия неоднородных по толщине трансверсально изотропных пластин // Прикладная механика. – 2002. – Т. 38, № 11. – С. 100–109.

7. *Хома И. Ю., Стрыгина О. А. О решении смешанной задачи для пологой трансверсально* изотропной сферической оболочки с круговым отверстием // Theoret. Found. Civil Eng. (Warsaw). – 2009. – № 17. – P. 119–126.

8. *Хома И. Ю., Стрыгина О. А.* Напряженное состояние пологой сферической оболочки с круговым отверстием, на поверхности которого заданы касательные напряжения // Теорет. и прикладная механика. – 2010. – № 1 (47). – С. 62–68.

9. *Хорошун Л. П., Козлов С. В., Иванов Ю. А., Кошевой И. К.* Обобщенная теория неоднородных по толщине пластин и оболочек. – К.: Наук. думка, 1988. – 152 с.

10. *Шалдырван В. А.* Упругое равновесие толстых пластин с усложненными свойствами. Учеб. пособие.–Донецк, 1980. – 116 с.

11. *Kashtalian M., Rushchitsky I. I.* Revisiting displacement functions in three-dimensional elasticity of inhomogeneousmedia // Int. I. Sol. Streect. – 2009. – № 46. – P. 3463–3470.

*Институт механики НАН Украины, г. Киев*
*Луганский национальный университет*

*Поступила 15.05.2011*