

МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ЛУГАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ФГБОУ ВО «ЛГПУ»)

Н. А. Полищук, А. В. Скринникова

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Учебно-методическое пособие
для студентов очной формы обучения по направлению подготовки
01.03.01 Математика, профиль «Математические и цифровые технологии в
образовании»

Луганск
Издательство ЛГПУ
2025

УДК 519.21(076)
ББК 22.171р3
П50

Р е ц е н з е н т ы:

- Савельев В. М.** – доцент кафедры общеобразовательных дисциплин федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Луганский государственный университет имени Владимира Даля», кандидат физико-математических наук;
- Давыскиба О. В.** – доцент кафедры фундаментальной математики федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Луганский государственный педагогический университет», кандидат педагогических наук, доцент;
- Калайдо А. В.** – доцент кафедры технологий производства и профессионального образования федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Луганский государственный педагогический университет», кандидат технических наук, доцент.

Полищук, Н. А., Скринникова, А. В.

П50 Теория вероятностей и математическая статистика : учебно-методическое пособие / Н. А. Полищук, А. В. Скринникова ; ФГБОУ ВО «ЛГПУ». – Луганск : Издательство ЛГПУ, 2025. – 112 с.

В учебно-методическом пособии изложен теоретический материал по основным темам теории вероятностей, рассмотрено большое количество примеров решения типовых задач, предложены вопросы и задания для проведения самостоятельного контроля.

Учебно-методическое пособие предназначено для студентов очной формы обучения по направлению подготовки 01.03.01 Математика, профиль «Математические и цифровые технологии в образовании».

УДК 519.21(076)
ББК 22.171р3

*Рекомендовано Учебно-методическим советом ФГБОУ ВО «ЛГПУ»
в качестве учебно-методического пособия для студентов очной формы обучения по
направлению подготовки 01.03.01 Математика, профиль «Математические и цифровые
технологии в образовании» (протокол № 7 от 12.02.2025 г.)*

© Полищук Н. А., Скринникова А. В., 2025
© ФГБОУ ВО «ЛГПУ», 2025

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	5
ТЕМА 1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ТЕОРЕМЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ.....	7
1.1 Классификация событий.....	7
1.2 Основные формулы комбинаторики.....	11
1.3 Классическое определение вероятности.....	16
1.4 Статистическое определение вероятности.....	20
1.5 Геометрическая вероятность.....	22
1.6 Теоремы сложения и умножения вероятностей.....	23
1.7 Формула полной вероятности. Формулы Байеса.....	34
Вопросы и задания для самоконтроля.....	39
ТЕМА 2. ПОВТОРНЫЕ НЕЗАВИСИМЫЕ ИСПЫТАНИЯ.....	41
2.1 Формула Бернулли.....	41
2.2 Формула Пуассона.....	44
2.3 Локальная и интегральная теоремы Муавра-Лапласа.....	46
2.4 Вероятность отклонения относительной частоты события от постоянной вероятности в независимых испытаниях.....	48
Вопросы и задания для самоконтроля.....	50
ТЕМА 3. ДИСКРЕТНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ.....	52
3.1 Понятие дискретной случайной величины.....	52
3.2 Закон распределения дискретной случайной величины.....	52
3.3 Числовые характеристики дискретных случайных величин.....	54
3.4 Функция распределения.....	58
3.5 Биномиальное распределение.....	60
3.6 Распределение Пуассона.....	63
3.7 Начальные и центральные теоретические моменты.....	65
Вопросы и задания для самоконтроля.....	67
ТЕМА 4. НЕПРЕРЫВНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ.....	69
4.1 Функция распределения (интегральная функция).....	69
4.2 Плотность распределения вероятностей непрерывной случайной величины (дифференциальная функция).....	70
4.3 Числовые характеристики непрерывных случайных величин.....	72
4.4 Равномерный закон распределения.....	76
4.5 Показательный (экспоненциальный) закон распределения.....	78
4.6 Нормальный закон распределения.....	81
Вопросы и задания для самоконтроля.....	88
ТЕМА 5. ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ.....	91
5.1 Неравенства Чебышева.....	91
5.2 Закон больших чисел.....	92
5.3 Усиленный закон больших чисел.....	95
5.4 Центральная предельная теорема.....	97
Вопросы и задания для самоконтроля.....	101
ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....	104

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ И РЕКОМЕНДОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ.....	105
ПРИЛОЖЕНИЕ 1. Значения функции Пуассона $P_n(k)$	107
ПРИЛОЖЕНИЕ 2. Значения функции $\varphi(x)$	109
ПРИЛОЖЕНИЕ 3. Значения функции Лапласа $\Phi(x)$	110

ВВЕДЕНИЕ

Вероятностные представления достаточно широко использовались уже древнегреческими философами Демокритом, Эпикуром, Лукрецием Каром и др., но считается, что теория вероятностей стала развиваться лишь с середины XVII века. Возникновение понятия вероятности было связано как с потребностями страхования, получившего значительное распространение в ту эпоху, когда заметно росли торговые связи и морские путешествия, так и в связи с запросами азартных игр.

Обычно появление теории вероятностей связывают с именами французских ученых П. Ферма (1601–1665), Б. Паскаля (1623–1662) и голландского ученого Х. Гюйгенса (1629–1695). В работах этих ученых в зачаточном виде фигурировали понятия вероятности случайного события и математического ожидания случайной величины. Отправным пунктом исследований являлись задачи, связанные с азартными играми, особенно играми в кости, поскольку при их изучении можно ограничиваться простыми и понятными математическими моделями. Одной из задач, давших начало теории вероятностей, является знаменитый парадокс игры в кости, разрешенный еще в «Книге об игре в кости» Д. Кардано (1501–1576), которая вышла лишь в 1663 г. Значительное влияние на развитие теории вероятностей оказали Д. Бернулли (1654–1705), А. Муавр (1667–1754), Т. Байес (1702–1763), П. Лаплас (1749–1827), К. Гаусс (1777–1855), С. Пуассон (1781–1840) [8; 11; 24].

В настоящее время методы теории вероятностей широко применяются в различных отраслях естествознания и техники: в теории надежности, теории массового обслуживания, в теоретической физике, геодезии, астрономии, экономике, теории ошибок наблюдений, теории автоматического управления, общей теории связи и во многих других теоретических и прикладных науках [1; 29]. Теория вероятностей служит также для обоснования математической и прикладной статистики, которая, в свою очередь, используется при планировании и организации производства, анализе технологических процессов, предупредительном и приемочном контроле качества продукции и для многих других целей. Поэтому любому человеку, идущему в ногу со временем (особенно это касается студентов математических направлений подготовки), изучать методы теории вероятностей и математической статистики совершенно необходимо.

Учебно-методическое пособие прошло практическую апробацию и написано на основе читаемого авторами на протяжении многих лет

одноименного курса «Теория вероятностей и математическая статистика» студентам направления подготовки 01.03.01 Математика, профиль «Математические и цифровые технологии в образовании» в ФГБОУ ВО «ЛГПУ». В данном пособии представлены материалы именно по теории вероятностей. По каждой теме изложены основные теоретические материалы и приведены в достаточно большом количестве задачи с подробными решениями. Кроме того, в конце каждой темы предложены теоретические вопросы для самостоятельной проверки качества усвоения материала.

Целью учебно-методического пособия является повышение эффективности процесса обучения, его активизация, выработка у студентов умений решать типовые задачи теории вероятностей и применять полученные знания при решении прикладных задач.

ТЕМА 1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ТЕОРЕМЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

1.1 Классификация событий

Теория вероятностей – это математическая наука, которая занимается изучением закономерностей, присущих массовым случайным явлениям. Изучаемые явления рассматриваются независимо от их конкретной природы в абстрактном виде. Таким образом, теория вероятностей изучает не сами явления, а соответствующие им математические модели. Найденные в процессе изучения явления закономерности позволяют осуществлять прогноз и предвидеть, как эти явления будут протекать.

Основными объектами, изучаемыми в теории вероятностей, являются случайные события.

Определим понятие случайного события.

Пусть проводится некоторый опыт (испытание, эксперимент, наблюдение), исход которого предсказать заранее невозможно. Такие испытания называют случайными.

Случайным событием называется любой исход испытания (качественный или количественный), который при осуществлении совокупности условий может произойти или не произойти.

Приведем примеры случайных событий.

1. Появление «орла» при подбрасывании монеты.
2. Выигрыш автомобиля по билету лотереи.
3. Выход бракованного изделия с конвейера предприятия.
4. Выпадение более 1000 мм осадков в данном географическом пункте за определенный год.
5. Выпадение четного числа очков при бросании игральной кости.
6. Выпадение не менее трех очков при бросании игральной кости.

Событие – это не какое-нибудь происшествие, а лишь возможный исход, результат испытания (опыта, эксперимента). Случайные события принято обозначать заглавными буквами латинского алфавита: $A, B, C, \dots$

Некоторые случайные события можно разложить на более простые события. Например, событие – сумма очков, выпавших на двух игровых костях, равна 4, может быть представлена в виде событий:

- на первой игральной кости выпало три очка, а на второй – одно;
- на первой игральной кости выпало одно очко, а на второй – три;
- на первой игральной кости выпало два очка, а на второй – два.

Неразложимые случайные события называют **элементарными**. В дальнейшем под термином «событие» будем подразумевать случайное событие.

Свойства элементарных событий

1. В результате испытания наступает только одно элементарное событие.
2. Элементарные события взаимно исключают друг друга.
3. Каково бы ни было событие A , по наступившему элементарному исходу можно судить, произошло ли событие A или нет.

Множество всех элементарных исходов случайного эксперимента называется пространством элементарных событий (или пространством исходов), обозначается Ω : $\Omega = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$.

Событие называется **достоверным**, если оно обязательно наступит в данном испытании, обозначается Ω .

Событие называется **невозможным**, если оно заведомо не наступит в данном испытании, обозначается $\emptyset$.

Например, если в партии деталей все изделия стандартные, то извлечение из партии стандартного изделия – событие достоверное, а извлечение бракованного изделия – событие невозможное.

События называются **равновозможными**, если нет оснований предполагать, что в результате испытания наступление одного из них более возможно, чем других. Например, извлечение «туза», «валета», «короля» или «дамы» из колоды карт, появления «орла» или «решки» при подбрасывании монеты, выпадение количества очков равных 1, 2, 3, 4, 5, 6 при броске игрального кубика – события равновозможные.

Два события A и B называются **совместными**, если появление одного из них в данном испытании не исключает появления другого в этом же испытании.

Например, подбрасываются две игральные кости. Событие A – выпадение 4-х очков на первой игральной кости, событие B – выпадение 4-х очков на второй кости. Тогда A и B – совместные события.

Два события A и B называются **несовместными**, если появление одного из них исключает появления другого в одном и том же испытании.

Например, выигрыш по одному билету лотереи двух ценных призов – события несовместные, а выигрыш тех же призов по двум билетам – события совместные. Получение студентом на экзамене по одной дисциплине оценок «отлично», «хорошо» и «удовлетворительно» – события несовместные, а получение тех же оценок на экзаменах по трем дисциплинам – совместные.

События $A_1, A_2, \dots, A_n$ называются **попарно несовместными**, если любые два из этих событий несовместны.

События A и B называются **независимыми**, если появление события A не изменяет вероятность наступления события B и наоборот. В противном случае события называются **зависимыми**.

Например, события A – выбрать из корзины с фруктами, в которой находятся 3 яблока и 5 груш, яблоко, и B – после этого выбрать яблоко из этой же корзины, являются зависимыми, поскольку после выбора первого фрукта количество яблок и груш в корзине изменится.

Событие $\bar{A}$, состоящее в ненаступлении события A , называется **противоположным** событию A .

Например: если событие $A = \{\text{стрелок попал в цель}\}$, то событие $\bar{A} = \{\text{стрелок в цель не попал}\}$.

Рассмотрим случайный эксперимент: бросается игральная кость (кубик, на каждой грани которого нанесены очки от 1 до 6). Тогда

– событие $A = \{\text{выпавшее количество очков меньше семи}\}$ будет достоверным;

– событие $B = \{\text{выпавшее количество очков равно семи}\}$ будет невозможным;

– противоположными будут события: $C = \{\text{количество очков четно}\}$ и $\bar{C} = \{\text{количество очков нечетно}\}$; $D = \{\text{количество очков делится на 3}\}$ и $\bar{D} = \{\text{количество очков на 3 не делится}\}$.

Действия над событиями

Введем понятия суммы, произведения и разности событий.

Суммой двух событий A и B называется событие $A+B$, состоящее в наступлении хотя бы одного из этих событий.

Если A и B – совместные события, то их сумма $A+B$ (иногда используют также обозначение $A \cup B$) означает наступление или события A , или события B , или обоих событий вместе.

Например, если событие A – это попадание стрелком в цель при первом выстреле, событие B – при втором выстреле, то событие $C = A+B$ – это попадание в цель вообще, безразлично при каком выстреле, при первом, при втором или при обоих одновременно.

Если A и B – несовместные события, то их сумма $A+B$ означает наступление или события A , или события B .

Суммой событий $A_1, A_2, \dots, A_n$ называется событие $A_1 + A_2 + \dots + A_n$, состоящее в появлении хотя одного из этих событий.

Произведением двух событий A и B называется событие $A \cdot B$ (иногда используют также обозначение $A \cap B$), состоящее в совместном наступлении и события A , и события B .

Произведением событий $A_1, A_2, \dots, A_n$ называется событие $A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_n$, состоящее в совместном появлении этих событий.

Замечание. В теории вероятностей союз «или» эквивалентен операции сложения, а союз «и» – операции умножения.

Разностью двух событий A и B называется событие $A-B$ (иногда используют также обозначение $A \setminus B$), которое заключается в наступлении события A и в ненаступлении события B .

Задача 1.1. Победитель соревнования награждается: призом (событие A), денежной премией (событие B), медалью (событие C).

Что представляют собой события: $A+B$; ABC ; $AC-B$?

Решение. Согласно введенным ранее определениям «суммы» и «произведения»:

– событие $A+B$ состоит в награждении победителя или призом, или премией, или тем и другим;

– событие ABC состоит в награждении победителя одновременно и призом, и премией, и медалью;

– событие $AC - B$ состоит в награждении победителя одновременно призом и премией без выдачи медали.

Для наглядности приведем геометрическую интерпретацию основных действий над событиями с помощью **диаграмм Эйлера-Венна** (рис.1.1).

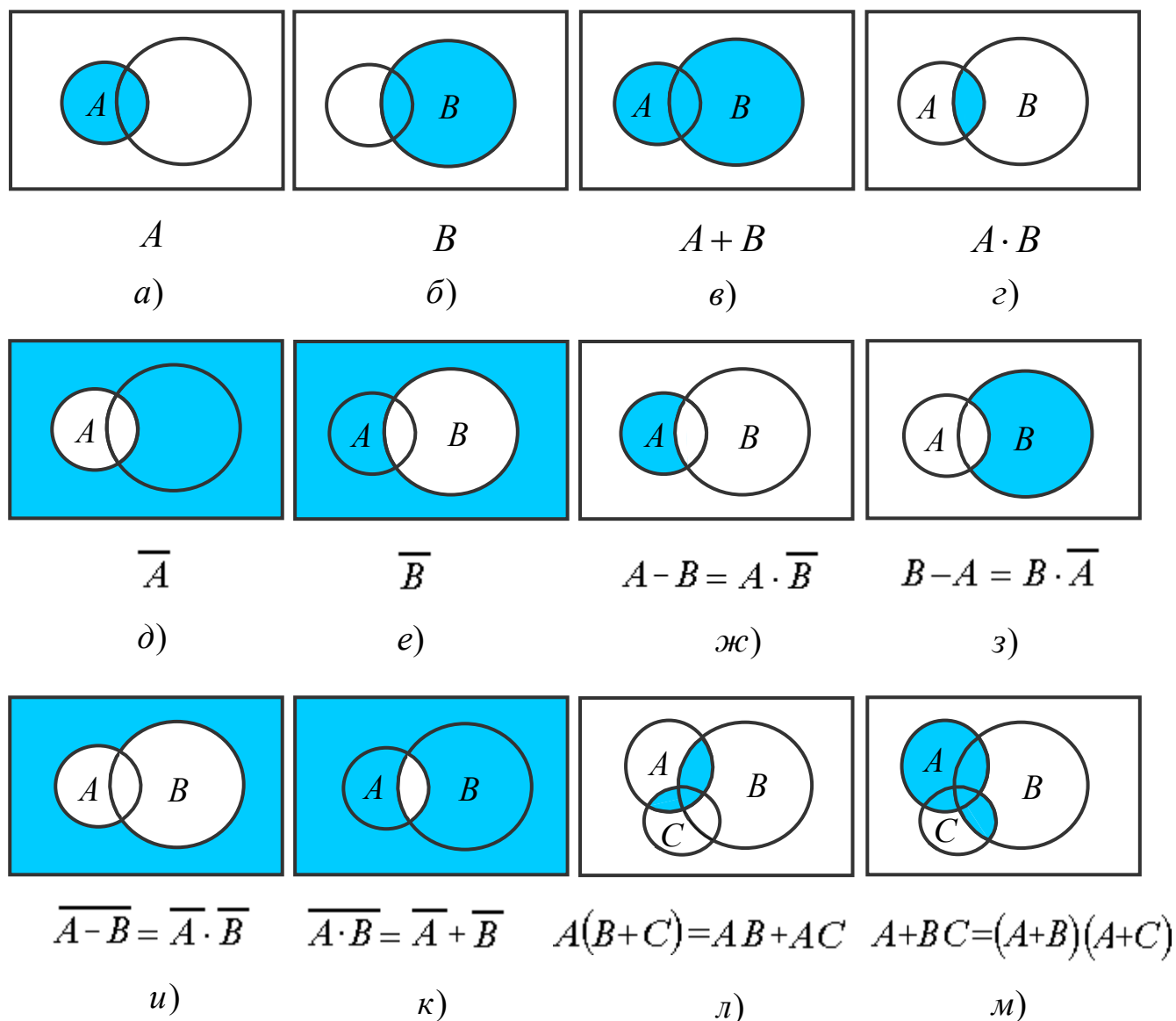


Рисунок 1.1 – Диаграммы Эйлера-Венна

Пусть, например, внутри квадрата (рис. 1.1) выбирается наудачу точка и событие A состоит в попадании этой точки в меньший круг (рис. 1.1 а), событие B – в больший круг (рис. 1.1 б). Тогда сумма событий $A + B$ означает попадание точки во всю закрашенную область обоих кругов (рис. 1.1 в), а произведение AB – в часть пересечения кругов (рис. 1.1 г). На рис. 1.1 д, е, закрашенные области показывают события $\overline{A}$ и $\overline{B}$, противоположные событиям A и B , а на рис. 1.1 ж и з – разности событий $A - B$ и $B - A$.

Если событие $AB...K$ состоит в совместном появлении всех данных событий $A, B, \dots, K$, то противоположное событие $\overline{AB...K}$ означает появление хотя бы одного из этих событий, т.е. сумму $\bar{A} + \bar{B} + \dots + \bar{K}$. На рис. 1.1 *и*, 1.1 *к* приведенные соотношения между событиями иллюстрируются на примере двух событий.

Операции сложения и умножения событий обладают свойствами:

1. $A + B = B + A$.
2. $A + (B + C) = (A + B) + C$.
3. $AB = BA$.
4. $A(BC) = (AB)C$.
5. $A(B + C) = AB + AC$; $A + BC = (A + B)(A + C)$.

Последние два равенства проиллюстрированы на рис. 1.1 *л* и 1.1 *м*.

1.2 Основные формулы комбинаторики

Комбинаторика изучает количество комбинаций, которые можно составить из элементов безразлично какой природы, заданного конечного множества.

К основным понятиям комбинаторики относятся сочетания, размещения и перестановки без повторений и сочетания, размещения и перестановки с повторениями.

Факториалом натурального числа n называется произведение натуральных чисел от 1 до n :

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n.$$

По определению $0! = 1$.

Конечные упорядоченные подмножества, содержащие m элементов взятых из n элементов основного множества, называются **размещениями** из n элементов по m . Размещения отличаются либо составом элементов, либо их порядком.

Количество всех возможных размещений вычисляется по формуле:

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!} = n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1), \text{ где } m \leq n. \quad (1.1)$$

Задача 1.2. Сколько различных трехзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6 (каждую цифру можно использовать только 1 раз)?

Решение. Для составления трехзначных чисел мы должны выбрать 3 цифры из 6.

Очевидно, что здесь мы имеем дело с размещениями, так как если набор цифр отличается порядком, то эти наборы представляют собой различные числа.

Применяя (1.1), имеем

$$A_6^3 = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120.$$

Ответ: 120.

Различные конечные упорядоченные множества, состоящие из всех элементов некоторого заданного множества, называются **перестановками**. Очевидно, что перестановки состоят из одних и тех же различных элементов и отличаются только порядком их расположения. Кроме того, перестановки можно рассматривать как размещения из n элементов по n .

Количество всех возможных перестановок вычисляется по формуле:

$$P_n = A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n. \quad (1.2)$$

Задача 1.3. Сколькими способами можно расставить 10 книг на полке?

Решение. Поскольку количество книг не меняется, а меняется только порядок их расположения, то количество способов расстановки (перестановок), согласно формуле (1.2):

$$P_{10} = 10! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 = 3628800.$$

Ответ: 3628800.

Конечные неупорядоченные подмножества, содержащие m различных элементов взятых из n элементов заданного множества, называются **сочетаниями** из n элементов по m .

Количество всех возможных сочетаний вычисляется по формуле:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}, \quad m \leq n. \quad (1.3)$$

Из (1.3) следует, что:

$$C_n^0 = 1, \quad C_n^n = 1, \quad C_n^1 = n, \quad C_n^{n-1} = n, \quad C_n^m = C_n^{n-m}. \quad (1.4)$$

Количество сочетаний C_n^m равно количеству способов, которыми можно выбрать m предметов из n возможных.

Задача 1.4. Сколькими способами можно из 6-ти разноцветных шаров составить группы по 3 шара.

Решение. Так как группы из 3-х шаров могут отличаться друг от друга только составом (цветами шаров), необходимо посчитать, сколькими способами можно выбрать 3 шара из 6, следовательно, необходимо посчитать количество всех возможных сочетаний.

По формуле (1.3) имеем

$$C_6^3 = \frac{6!}{3!(6-3)!} = \frac{4 \cdot 5 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 20.$$

Ответ: 20.

Задача 1.5. Сколькими способами можно выбрать делегацию в составе 5 студентов из группы в 16 человек на профсоюзное собрание?

Решение. Так как делегации отличаются друг от друга лишь составом, то в данной задаче речь идет о количестве сочетаний. По формуле (1.3) получим:

$$C_{16}^5 = \frac{16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 16 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 3 = 4368.$$

Ответ: 4368.

Замечание. Количества сочетаний, размещений и перестановок связаны между собой равенством:

$$A_n^m = P_m \cdot C_n^m. \quad (1.5)$$

Если в перестановках из общего числа n элементов есть k различных элементов, при этом 1-й элемент повторяется n_1 раз, 2-й элемент – n_2 раза, ..., k -й элемент – n_k раз, причем $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$, то такие перестановки называются **перестановками с повторениями** из n элементов.

Количество перестановок с повторениями из n элементов равно:

$$\bar{P}_n(n_1, n_2, \dots, n_k) = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}. \quad (1.6)$$

Задача 1.6. Сколько существует семизначных чисел, состоящих из цифр 4, 5, 6, в которых цифра 4 повторяется 3 раза, а цифры 5 и 6 – по 2 раза?

Решение. Каждое семизначное число отличается от другого порядком следования цифр (причем $n_1 = 3$, $n_2 = 2$, $n_3 = 2$, а их сумма равна 7), т.е. является перестановкой с повторениями из 7 элементов.

Их количество определяется по формуле (1.6), получим:

$$\bar{P}_7(3; 2; 2) = \frac{7!}{3! 2! 2!} = 210.$$

Ответ: 210.

Размещениями с повторениями из n элементов по m называют любой упорядоченный набор m элементов, взятый из n элементов, причём, некоторые элементы или даже все могут повторяться, а наборы отличаются или составом элементов, или их порядком.

Число размещений с повторениями из n элементов по m равно:

$$\bar{A}_n^m = n^m. \quad (1.7)$$

Сочетаниями с повторениями из n элементов по m называют любой набор m элементов, взятый из n элементов, причём некоторые элементы или даже все могут повторяться, а наборы отличаются только составом элементов.

Число сочетаний с повторениями из n элементов по m равно:

$$\bar{C}_n^m = C_{n+m-1}^m, \quad (1.8)$$

где C_{n+m-1}^m определяется по формуле (1.3).

Например, из 5-ти элементов a, b, c, d, e по 3 размещениями с повторениями будут $abc, bca, cba, bcd, cdb, dbc, bbe, ebb, beb, ddd$, и т.д., сочетаниями с повторениями будут abc, bcd, bbe, ddd , и т.д.

Задача 1.7. Сколько различных трехзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6 (каждую цифру можно использовать 1, 2 или 3 раза)?

Решение. Для составления трехзначных чисел мы должны выбрать 3 цифры из 6-ти, и в составленных числах цифры могут повторяться.

Если набор цифр отличается порядком, то эти наборы представляют собой различные числа, поэтому мы имеем дело с размещениями с повторениями.

Применяя (1.7), имеем

$$\bar{A}_6^3 = 6^3 = 216.$$

Ответ: 216.

Задача 1.8. Сколькими способами можно из 6 разноцветных шаров составить группы по 3 шара, в которых 2 или 3 шара могут быть одного цвета.

Решение. Так как группы из 3-х шаров могут отличаться друг от друга только составом (цветами шаров), и несколько шаров могут быть одного цвета, то имеем дело с сочетаниями с повторениями.

По формуле (1.8) имеем

$$\bar{C}_6^3 = C_{6+3-1}^3 = C_8^3 = \frac{8!}{3!(8-3)!} = \frac{6 \cdot 7 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 56.$$

Ответ: 56.

Основные правила комбинаторики

Правило суммы. Если некоторый элемент A может быть выбран из совокупности элементов m способами, а элемент B может быть выбран n способами, то выбрать либо A , либо B можно $m + n$ способами.

Задача 1.9. В студенческой группе 8 юношей и 9 девушек. Требуется составить команду или из 3 юношей, или из 2 девушек. Сколькими способами это можно сделать?

Решение. Трех юношей из 8 можно выбрать C_8^3 способами, двух девушек из 9 можно выбрать C_9^2 , способами. Тогда, согласно правилу суммы, команду можно составить

$$C_8^3 + C_9^2 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{9 \cdot 8}{1 \cdot 2} = 56 + 36 = 92 \text{ способами.}$$

Ответ: 92.

Правило произведения. Если некоторый элемент A может быть выбран из совокупности элементов m способами, и после каждого такого выбора элемент B может быть выбран n способами, то выбрать и элемент A , и элемент B можно $m \cdot n$ способами.

Задача 1.10. В студенческой группе 8 юношей и 9 девушек. Требуется составить команду из 3 юношей и 2 девушек. Сколькими способами это можно сделать?

Решение. Трех юношей из 8 можно выбрать C_8^3 способами, двух девушек из 9 можно выбрать C_9^2 , способами. Тогда, согласно правилу умножения, команду можно выбрать

$$C_8^3 \cdot C_9^2 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{9 \cdot 8}{1 \cdot 2} = 56 \cdot 36 = 2016 \text{ способами.}$$

Ответ: 2016.

Задача 1.11. Автомобильный номер состоит из двух букв и четырех цифр. Сколько номеров можно составить, используя 32 буквы русского алфавита, если номера автомобилей начинаются с 0001?

Решение. Первую из букв можно выбрать C_{32}^1 способами, вторую тоже C_{32}^1 способами (поскольку буквы могут повторяться). Следовательно, две буквы можно выбрать

$$C_{32}^1 \cdot C_{32}^1 = 32 \cdot 32 = 1024 \text{ способами.}$$

Так как цифр 10, то первую из цифр можно выбрать C_{10}^1 способами, вторую – C_{10}^1 , третью – C_{10}^1 , четвертую – C_{10}^1 способами (так как все цифры номера могут повторяться). Следовательно, все четыре цифры можно выбрать

$$C_{10}^1 \cdot C_{10}^1 \cdot C_{10}^1 \cdot C_{10}^1 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10000 \text{ способами.}$$

Поскольку номера автомобилей начинаются с 0001, то количество различных наборов цифр будет $10000 - 1 = 9999$, поэтому по указанной схеме можно составить $n = 1024 \cdot 9999 = 10238976$ номеров.

Ответ: 10238976.

Задача 1.12. Имеется 6 красных и 4 синих шара. Сколькими способами можно выбрать: два разноцветных шара; два одноцветных шара; два любых шара?

Решение. Так как нужно выбрать один красный шар и один синий, т.е. первое действие можно совершить $C_6^1 = 6$ способами, а второе $C_4^1 = 4$ способами, то количество способов выбрать один красный шар и один синий по правилу произведения равно:

$$C_6^1 \cdot C_4^1 = 6 \cdot 4 = 24.$$

Выбрать два одноцветных шара означает выбрать или два красных, или два синих шара. Два красных шара из 6 можно выбрать C_6^2 способами, два синих шара из четырех можно выбрать C_4^2 способами, поэтому выбрать два одноцветных шара по правилу суммы можно

$$C_6^2 + C_4^2 = \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} + \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} = 15 + 6 = 21 \text{ способами.}$$

Так как всего 10 шаров, то два любых шара из них можно выбрать

$$C_{10}^2 = \frac{10 \cdot 9}{1 \cdot 2} = 45 \text{ способами.}$$

Ответ: 24; 21; 45.

В теории вероятностей для расчетов часто приходится применять **бином Ньютона**. Пусть $n = 1, 2, \dots$, тогда

$$(a + b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \dots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^k b^{n-k}. \quad (1.9)$$

При $n = 2$, $n = 3$ формула (1.9) принимает вид:

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2; \quad (a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3.$$

Эти формулы известны из школьного курса математики.

Задача 1.13. Вычислить $(2 - \sqrt{2})^5$.

Решение. Используя формулу (1.9) получим,

$$(2 - \sqrt{2})^5 = 2^5 + C_5^1 \cdot 2^4 \cdot (-\sqrt{2})^1 + C_5^2 \cdot 2^3 \cdot (-\sqrt{2})^2 + C_5^3 \cdot 2^2 \cdot (-\sqrt{2})^3 + C_5^4 \cdot 2^1 \cdot (-\sqrt{2})^4 + C_5^5 \cdot 2^0 \cdot (-\sqrt{2})^5 = 32 - 80\sqrt{2} + 160 - 80\sqrt{2} + 40 - 4\sqrt{2} = 232 - 164\sqrt{2}.$$

Ответ: $232 - 164\sqrt{2}$.

1.3 Классическое определение вероятности

Вероятность представляет собой меру возможности появления события.

Существует ряд подходов к определению вероятности: классический, статистический, аксиоматический и геометрический [2; 5–18; 20–28].

Пусть пространство Ω состоит из n элементарных исходов и пусть все эти исходы равновозможны, m – число элементарных исходов, благоприятствующих наступлению события A , тогда **вероятность наступления события A** равна отношению числа благоприятствующих этому событию исходов к числу всех элементарных исходов:

$$P(A) = \frac{m}{n}. \quad (1.10)$$

Свойства вероятностей события

Свойство 1. Вероятность достоверного события равна единице.

Действительно, если событие достоверно, то каждый элементарный исход испытания благоприятствует событию. В этом случае $m = n$, следовательно,

$$P(\Omega) = \frac{n}{n} = 1.$$

Свойство 2. Вероятность невозможного события равна нулю.

Действительно, если событие невозможно, то ни один из элементарных исходов испытания не благоприятствует событию. В этом случае $m = 0$, следовательно,

$$P(\emptyset) = \frac{0}{n} = 0.$$

Свойство 3. Вероятность случайного события есть положительное число, заключенное между нулем и единицей.

Действительно, случайному событию благоприятствует лишь часть из общего числа элементарных исходов испытания. В этом случае $0 \leq m \leq n$, значит $0 \leq \frac{m}{n} \leq 1$, следовательно,

$$0 \leq P(A) \leq 1.$$

Вероятность измеряется в долях единицы $0 \leq p \leq 1$ или в процентах – от 0% до 100%.

Задача 1.14. Найдите вероятность выпадения «орла» при одном подбрасывании монеты.

Решение. В эксперименте, состоящем в подбрасывании монеты, могут наступить два исхода: выпадает или «орел», или «решка». Следовательно, в данной задаче количество всех возможных элементарных исходов $n = 2$.

Количество элементарных исходов, благоприятствующих наступлению события $A = \{\text{выпадет «орел»}\}$, $m = 1$. Получим:

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{1}{2} = 0,5.$$

Ответ: 0,5.

Задача 1.15. В ящике находятся 120 деталей, из которых 90 являются качественными. Найдите вероятность того, что извлеченная деталь некачественная.

Решение. Если эксперимент состоит в извлечении из ящика деталей, то возможно $n = 120$ различных элементарных исходов. Обозначим событие $A = \{\text{извлечена бракованная деталь}\}$. Бракованная деталь может быть извлечена $m = 120 - 90 = 30$ способами.

Следовательно, согласно классическому определению вероятности:

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{30}{120} = 0,25.$$

Ответ: 0,25.

Задача 1.16. Бросили игральный кубик. Какова вероятность того, что число выпавших очков кратно двум?

Решение. Число исходов опыта $n = 6$, поскольку кубик имеет 6 граней.

Событие $A = \{\text{число очков кратно двум}\}$ произойдет при трех элементарных исходах: при выпадении или двух, или четырёх, или шести очков, т.е. $m = 3$.

Тогда искомая вероятность:

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Ответ: $\frac{1}{2}$.

Задача 1.17. Десять учеников выстраиваются в шеренгу случайным образом. Какова вероятность оказаться рядом двум конкретным ученикам.

Решение. Поскольку 10 учеников могут разместиться в шеренге $P_{10} = 10!$ способами (где $P_k = k!$ – число перестановок из n элементов), то число всех элементарных событий $n = 10!$

Два конкретных ученика X и Y стоя рядом могут занять с точностью до порядка следования (XY или YX) 9 позиций, а с учетом порядка следования $m_1 = 2 \cdot 9 = 18$ позиций. Оставшиеся 8 учеников могут расположиться $m_2 = 8!$ способами.

Таким образом, число всех элементарных исходов, благоприятствующих размещению двух конкретных учеников рядом:

$$m = m_1 \cdot m_2 = 18 \cdot 8!$$

Искомая вероятность:

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{18 \cdot 8!}{10!} = \frac{18}{9 \cdot 10} = \frac{1}{5} = 0,2.$$

Ответ: 0,2.

Задача 1.18. В коробке имеются 6 красных шаров, 4 белых и 2 черных шара. Наудачу извлекаются 3 шара.

Найдите вероятности следующих событий:

$A_1 = \{\text{извлеченные шары разного цвета}\};$

$A_2 = \{\text{извлеченные шары одного цвета}\};$

$A_3 = \{\text{среди извлеченных шаров 2 шара красного цвета}\};$

$A_4 = \{\text{среди извлеченных шаров хотя бы один шар красного цвета}\}.$

Решение. Определим количество всех элементарных исходов, т.е. число способов n извлечения трех шаров из 12. Так как в коробке всего $6 + 4 + 2 = 12$ шаров, то

$$n = C_{12}^3 = \frac{12!}{3! \cdot 9!} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 20 \cdot 11 = 220.$$

Найдем вероятность события A_1 . Для того, чтобы шары были разного цвета, необходимо выбрать один красный, это можно сделать C_6^1 способами, один белый – это можно сделать C_4^1 способами, один черный – это можно сделать C_2^1 способами. Тогда согласно правилам комбинаторики, шары разного цвета можно выбрать:

$$m_1 = C_6^1 \cdot C_4^1 \cdot C_2^1 = 6 \cdot 4 \cdot 2 = 48 \text{ способами.}$$

И согласно классическому определению вероятности

$$P(A_1) = \frac{m_1}{n} = \frac{48}{220} \approx 0,218.$$

Найдем вероятность события A_2 . Если шары одного цвета, то, следовательно, все три шара или красного, или белого цвета. Три черных шара выбрать невозможно, так как в коробке их всего два.

Три красных шара можно выбрать C_6^3 , а три белых шара можно выбрать C_4^3 способами. Количество исходов, благоприятствующих событию A_2 равно:

$$m_2 = C_6^3 + C_4^3 = \frac{6!}{3! \cdot 3!} + \frac{4!}{3! \cdot 1!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} + 4 = 20 + 4 = 24$$

а вероятность появления события A_2 :

$$P(A_2) = \frac{m_2}{n} = \frac{24}{220} \approx 0,109.$$

Найдем вероятность события A_3 . Два красных шара можно выбрать C_6^2 способами, одновременно с двумя красными из коробки извлечен один не красный шар. Один шар не красного цвета можно выбрать C_6^1 способами. Количество исходов, благоприятствующих событию A_3 равно:

$$m_3 = C_6^2 \cdot C_6^1 = \frac{6!}{2! \cdot 4!} \cdot \frac{6!}{1! \cdot 5!} = \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} \cdot 6 = 90,$$

а вероятность появления события A_3 :

$$P(A_3) = \frac{m_3}{n} = \frac{90}{220} \approx 0,409.$$

Найдем вероятность события A_4 . Событие A_4 заключается в том, что или один шар, или два, или три шара красного цвета. Противоположным этому событию будет событие:

$$\overline{A_4} = \{ \text{среди извлеченных шаров нет шара красного цвета} \}.$$

Исходов, благоприятствующих событию $\overline{A_4}$, будет C_6^3 , так как все три шара надо выбрать среди белых или черных, а их в сумме 6, т.е.

$$m_4 = C_6^3 = \frac{6!}{3!(6-3)!} = 20,$$

а вероятность события $\overline{A_4}$:

$$P(\overline{A_4}) = \frac{m_4}{n} = \frac{20}{220} \approx 0,091.$$

Следовательно,

$$P(A_4) = 1 - P(\overline{A_4}) = 1 - 0,091 = 0,909.$$

Ответ: 0,218; 0,109; 0,409; 0,909.

Задача 1.19. Найдите вероятность отгадать 3 числа в спортлото «5 из 36».

Решение. Обозначим через A – событие, заключающееся в отгадывании трёх чисел из пяти, которые необходимо зачеркнуть в карточке спортлото.

Тогда вероятность события A :

$$P(A) = \frac{m}{n},$$

где m – число элементарных исходов, благоприятствующих наступлению события A , n – число всех возможных элементарных исходов.

Среди $n = 36$ чисел возможно выбрать $m = 5$ чисел

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!} \text{ способами,}$$

где C_n^m – число сочетаний из n элементов по m . Поэтому,

$$n = C_{36}^5 = \frac{36!}{5!(36-5)!} = \frac{36!}{5! \cdot 31!} = \frac{32 \cdot 33 \cdot 34 \cdot 35 \cdot 36}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 376992.$$

Среди 5-ти «выигрышных» чисел отгадать 3 числа можно C_5^3 способами, а оставшиеся два числа можно угадать среди «невыигрышных» 31 числа C_{31}^2 способами. Таким образом,

$$m = C_5^3 \cdot C_{31}^2 = \frac{5!}{3! \cdot 2!} \cdot \frac{31!}{2! \cdot 29!} = \frac{4 \cdot 5}{1 \cdot 2} \cdot \frac{30 \cdot 31}{1 \cdot 2} = 4650.$$

$$\text{Искомая вероятность: } P(A) = \frac{m}{n} = \frac{4650}{376992} = 0,0012.$$

Ответ: 0,0012.

Задача 1.20. В коробке находятся 33 буквы русского языка. Какова вероятность того, что при последовательном извлечении шести букв получится слово «МОНЕТА».

Решение. Число всех элементарных событий, то есть число всех упорядоченных наборов из шести букв, которые можно составить из 33-х имеющихся в наличии букв, равно:

$$n = A_{33}^6 = \frac{33!}{(33-6)!} = \frac{33!}{27!} = 33 \cdot 32 \cdot 31 \cdot 30 \cdot 29 \cdot 28 = 797\,448\,960.$$

Событию $A = \{\text{получилось слово «МОНЕТА»}\}$ благоприятствует только одно элементарное событие. Таким образом,

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{1}{797\,448\,960} = 1,25 \cdot 10^{-9}.$$

Ответ: $1,25 \cdot 10^{-9}$.

1.4 Статистическое определение вероятности

Выше было отмечено, что классическое определение вероятности применимо только в случае, когда число элементарных исходов испытания равновозможно и конечно.

Однако существует большой класс событий, вероятности которых не могут быть вычислены с помощью классического определения. В первую очередь это события, которые не являются равновозможными исходами испытания. Например, если монета деформирована, то, очевидно, события «появление орла» и «появление решки» нельзя считать равновозможными и формула (1.10) для расчета вероятности любого из них окажется неприменима.

Но есть другой подход при оценке вероятностей событий, основанный на том, насколько часто будет появляться данное событие в произведенных испытаниях.

Статистической вероятностью события A называется относительная частота появления этого события в произведенных испытаниях, т.е.

$$\tilde{P}(A) = w(A) = \frac{m}{n}, \quad (1.11)$$

где $\tilde{P}(A)$ – статистическая вероятность события A ;

$w(A)$ – относительная частота (частость) события A ;

m – число испытаний, в которых наблюдалось появление события A ;

n – общее число испытаний.

В отличие от вероятности, рассматриваемой в классическом определении (1.10), статистическая вероятность (1.11) является характеристикой опытной, экспериментальной. Если $P(A)$ есть доля случаев, благоприятствующих

событию A , которая определяется теоретически, без каких-либо испытаний, то $\tilde{P}(A)$ есть доля тех фактически проведенных испытаний, в которых событие A появилось.

Можно показать, что свойства вероятности, вытекающие из классического определения, сохраняются и при статистическом определении вероятности.

Действительно, если событие достоверно, то $m = n$ и относительная частота

$$\frac{m}{n} = \frac{n}{n} = 1,$$

т.е. статистическая вероятность достоверного события (так же, как и в случае классического определения) равна единице.

Если событие невозможно, то $m = 0$ и, следовательно, относительная частота

$$\frac{m}{n} = \frac{0}{n} = 0,$$

т.е. статистическая вероятность невозможного события равна нулю.

Для любого события

$$0 \leq \frac{m}{n} \leq 1,$$

т.е. статистическая вероятность события заключена между нулем и единицей.

Частоту события можно определить только после проведения опытов, и в различных сериях опытов при одних и тех же условиях частота события не остается постоянной. Поэтому понятие частоты является не совсем точной характеристикой события. Однако по мере увеличения числа испытаний, частота постепенно стабилизируется, т.е. принимает значения, мало отличающиеся от некоторого вполне определенного числа, и статистическая вероятность события стремится к классической вероятности, вычисляемой математическими методами, а не экспериментально. Т.е. **статистической вероятностью случайного события A** также называется постоянное число, около которого группируются частоты этого события по мере увеличения числа испытаний:

$$P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} W(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m}{n}.$$

Статистический способ определения вероятностей имеет то преимущество, что он опирается на реальный эксперимент. Однако он имеет тот существенный недостаток, что для более точного вычисления вероятностей необходимо проделать большое число опытов, которые очень часто связаны с материальными затратами.

То, что каждое массовое случайное событие имеет свою вероятность, является опытным фактором и подтверждает существование статистических закономерностей в природе.

1.5 Геометрическая вероятность

Пусть дана область G , внутри которой находится другая область g . Этими областями могут быть отрезки, дуги, плоские или пространственные фигуры (рис. 1.2). Мерами этих областей $mes G$ и $mes g$ считают их длины, если G и g – отрезки или дуги; площади, если G и g – плоские фигуры; объем, если G и g – пространственные фигуры.

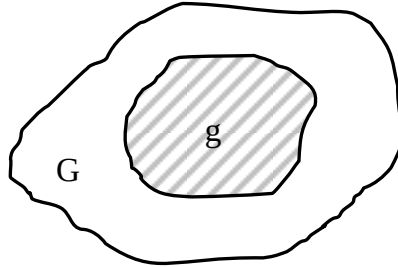


Рисунок 1.2 – Области G и g

Пусть в область G наудачу бросается точка. Попадание этой точки в любую точку области G – равновозможные события. Кроме того вероятность попадания точки в любую часть области G пропорциональна мере этой части и не зависит от ее формы и расположения в области G .

Геометрической вероятностью называют вероятность события, заключающегося в том, что наугад взятая точка из множества G попадает во множество g .

Геометрическая вероятность попадания точки из множества G во множество g определяется по формуле:

$$P(A) = \frac{mes g}{mes G},$$

где $mes G$, $mes g$ – соответственно меры множеств G и g .

Задача 1.21. (Задача о встрече). Два человека договорились встретиться в определенном месте между 12 и 13 часами. Тот, кто первый пришел, ждет другого не больше 20 минут, после чего уходит. Чему равна вероятность встречи, если приход каждого может произойти наугад, и моменты прихода независимы?

Решение. Обозначим событие A – встреча состоится.

Пусть x и y – моменты прихода одного и другого человека (в минутах), взяв за начало отсчета 12 часов. Поскольку двое должны встретиться в течение часа – 60 минут, то все возможные исходы определяются системой неравенств:

$$0 \leq x \leq 60, \quad 0 \leq y \leq 60 \text{ (область } G\text{)}.$$

Благоприятными исходами будут те, для которых абсолютная величина разности между x и y не будет превышать 20 минут:

$$|x - y| \leq 20 \text{ (область } g\text{)}.$$

Это неравенство равносильно системе неравенств:

$$-20 \leq x - y \leq 20 \text{ или } \begin{cases} y \leq x + 20 \\ y \geq x - 20 \end{cases}.$$

Построим прямые $x = 60$, $y = 60$, $y = x + 20$, $y = x - 20$ (рис. 1.3).

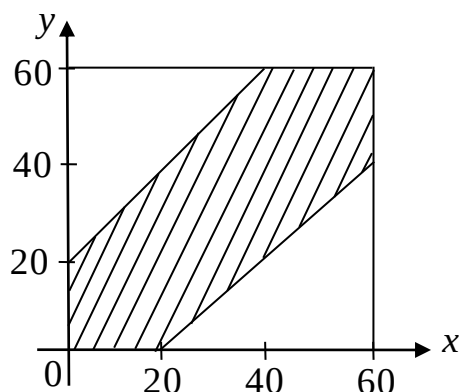


Рисунок 1.3 – Задача о встрече

Система неравенств выполняется для тех точек квадрата, которые лежат не выше прямой $y = x + 20$ и не ниже прямой $y = x - 20$ (на рис. 1.3 эта область заштрихована).

Поскольку элементарных исходов бесконечное множество и применять классическое определение вероятности нельзя, поэтому применим геометрическую вероятность. Вероятность события A равна отношению площади заштрихованной фигуры S_g к площади квадрата S_G .

Площадь заштрихованной фигуры легко вычислить, отняв от площади квадрата $S_G = 60^2$ площади двух прямоугольных треугольников с катетами, равными 40:

$$S_g = 60^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 40 \cdot 40 = 60^2 - 40^2 = 2000.$$

Тогда искомая вероятность:

$$P(A) = \frac{S_g}{S_G} = \frac{2000}{3600} = \frac{5}{9}.$$

Ответ: $\frac{5}{9}$.

1.6 Теоремы сложения и умножения вероятностей

Теорема сложения вероятностей несовместных событий

Вероятность появления одного из двух несовместных событий, безразлично какого, равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A + B) = P(A) + P(B). \quad (1.12)$$

Доказательство

Пусть

n – число всех возможных элементарных исходов испытания,

m_A – число исходов, благоприятствующих наступлению события A ,

m_B – число исходов, благоприятствующих наступлению события B .

Так как события A и B несовместны, то случаев одновременно благоприятствующих и событию A , и событию B нет (рис. 1.4).

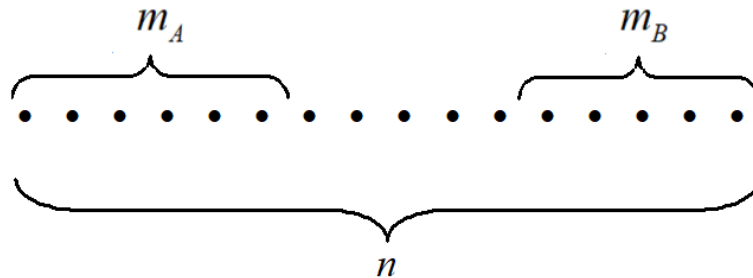


Рисунок 1.4 – Графическая иллюстрация к теореме сложения вероятностей несовместных событий

Очевидно, что число элементарных исходов, благоприятствующих наступлению либо события A , либо события B равно $m_A + m_B$, следовательно:

$$P(A + B) = \frac{m_A + m_B}{n} = \frac{m_A}{n} + \frac{m_B}{n}.$$

Учитывая, что $P(A) = \frac{m_A}{n}$ и $P(B) = \frac{m_B}{n}$, окончательно получим:

$$P(A + B) = \frac{m_A}{n} + \frac{m_B}{n} = P(A) + P(B).$$

Теорема доказана.

Следствие. Вероятность появления одного из попарно несовместных событий $A_1, A_2, \dots, A_n$, безразлично какого, равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n). \quad (1.13)$$

Задача 1.22. В урне 30 шаров: 10 красных, 5 синих и 15 белых. Найдите вероятность появления цветного шара.

Решение. Появление цветного шара означает появление либо красного, либо синего шара.

Вероятность появления красного шара (событие A):

$$P(A) = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}.$$

Вероятность появления синего шара:

$$P(B) = \frac{5}{30} = \frac{1}{6}.$$

События A и B несовместны (появление шара одного цвета исключает появление шара другого цвета), поэтому теорема сложения применима.

Искомая вероятность:

$$P(A+B) = P(A) + P(B) = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 0,5.$$

Ответ: 0,5.

Замечание. Следует подчеркнуть, что рассмотренная выше теорема сложения (1.12) применима только для несовместных событий и попытка ее использования для совместных событий приводит к неверным и даже абсурдным результатам.

Например, пусть вероятность события A_i – выигрыша по любому билету лотереи $P(A_i) = 0,05$ и приобретено 100 билетов ($i = 1, 2, \dots, 100$). Тогда, применяя теорему сложения, получим, что вероятность выигрыша хотя бы по одному из 100 билетов равна:

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_{100}) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_{100}) = 0,05 \cdot 100 = 5.$$

Абсурдность полученного результата (вероятность любого события не может быть больше 1) объясняется неприменимостью в данном случае теоремы сложения, ибо выигрыш по каждому билету, т.е. события $A_1, A_2, \dots, A_{100}$ являются событиями совместными. Как действовать в случае совместных событий рассмотрим далее в соответствующей теореме.

События $A_1, A_2, \dots, A_n$ образуют *полную группу* событий, если выполняются следующие условия:

- 1) события $A_1, A_2, \dots, A_n$ попарно несовместны;
- 2) $P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = 1$.

Теорема. Сумма вероятностей событий $A_1, A_2, \dots, A_n$, образующих полную группу, равна единице:

$$P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) = 1. \quad (1.14)$$

Доказательство

События $A_1, A_2, \dots, A_n$ попарно несовместны, следовательно, применив следствие из теоремы сложения вероятностей несовместных событий, получим:

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n).$$

Но, так как события $A_1, A_2, \dots, A_n$ попарно несовместны, то $P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = 1$.

Теорема доказана.

Задача 1.23. Институт последиplomного обучения получает пакеты с контрольными работами из городов A, B, C . Вероятность получения пакета из города A равна 0,7, из города B – 0,2. Найдите вероятность того, что очередной пакет будет получен из города C .

Решение. События «пакет получен из города A », «пакет получен из города B », «пакет получен из города C », образуют полную группу, поэтому сумма вероятностей этих событий равна единице:

$$0,7 + 0,2 + p_c = 1 \Rightarrow p_c = 1 - 0,9 = 0,1.$$

Ответ: 0,1.

Простейший пример событий, образующих полную группу – противоположные события A и $\bar{A}$.

Теорема. Сумма вероятностей противоположных событий равна единице:

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1. \quad (1.15)$$

Замечание. Если вероятность одного из двух противоположных событий обозначена через p , то вероятность другого события обозначают через q . Таким образом, в силу предыдущей теоремы

$$p + q = 1. \quad (1.16)$$

Задача 1.24. Вероятность того, что день будет дождливым, $p = 0,7$. Вычислить вероятность того, что день будет ясным.

Решение. События «день дождливый» и «день ясный» – противоположные события, поэтому искомая вероятность:

$$q = 1 - p = 1 - 0,7 = 0,3.$$

Ответ: 0,3.

Условной вероятностью $P_A(B)$ называют вероятность события B , вычисленную в предположении, что событие A уже произошло.

Продemonстрируем вычисление условной вероятности. Пусть общее число равновозможных исходов испытания равно n , для наглядности изобразим их в виде n точек (рис. 1.5).

Предположим, что событию A благоприятны m исходов, а событию B – k исходов. Так как события A и B совместны, то существуют исходы, благоприятные и событию A , и событию B одновременно. Пусть число таких исходов l . Тогда справедливы формулы:

$$P_A(B) = \frac{l}{m}; \quad P(A) = \frac{m}{n}; \quad P(AB) = \frac{l}{n} \Rightarrow \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{l}{n} \cdot \frac{n}{m} = \frac{l}{m} = P_A(B).$$

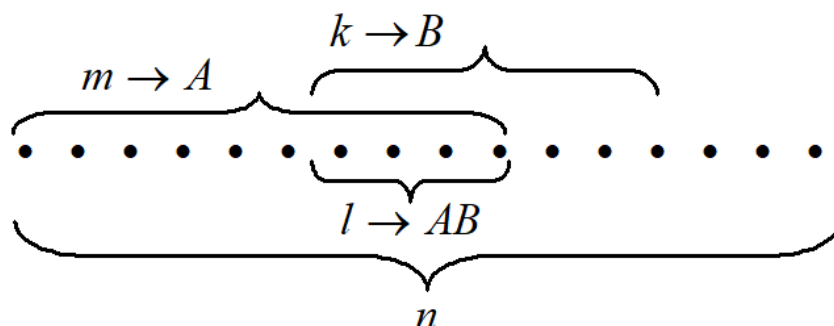


Рисунок 1.5 – Вычисление условной вероятности

Итак, для вычисления условной вероятности $P_A(B)$ справедлива формула:

$$P_A(B) = \frac{P(AB)}{P(A)}. \quad (1.17)$$

Задача 1.25. В урне 3 белых и 3 черных шара. Из урны вынимают по одному один за другим два шара, не возвращая их обратно. Найдите вероятность извлечь вторым белый шар (событие B), если первым извлекли черный шар (событие A).

Решение. После первого извлечения в урне осталось 5 шаров, из которых 3 белые. Искомая условная вероятность:

$$P_A(B) = \frac{3}{5}.$$

Этот же результат можно получить по формуле (1.17).

Действительно, вероятность появления белого шара при первом испытании:

$$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Найдем вероятность $P(AB)$ того, что при первом испытании появится черный шар, а при втором – белый. Общее число исходов совместного появления двух шаров, безразлично какого цвета, равно числу размещений $A_6^2 = 6 \cdot 5 = 30$. Из этого числа исходов событию AB благоприятствуют $3 \cdot 3 = 9$ исходов. Следовательно,

$$P(AB) = \frac{9}{30} = \frac{3}{10}.$$

Искомая условная вероятность

$$P_A(B) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{3}{10} : \frac{1}{2} = \frac{3 \cdot 2}{10 \cdot 1} = \frac{3}{5}.$$

Как видим, получили прежний результат.

Теорема умножения вероятностей

Вероятность совместного появления двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную в предположении, что первое событие уже наступило:

$$P(AB) = P(A) P_A(B). \quad (1.18)$$

Доказательство

Пусть общее число равновозможных элементарных исходов испытания равно n , число исходов благоприятствующих наступлению события A равно m_A , а число исходов благоприятствующих наступлению события B равно m_B . Так как события A и B совместны, то существуют исходы, благоприятные и событию A , и событию B одновременно. Пусть число таких исходов l . Тогда по (1.10):

$$P_A(B) = \frac{l}{m_A}; \quad P(A) = \frac{m_A}{n}; \quad P(AB) = \frac{l}{n}.$$

$$\text{Итак, } P(A) P_A(B) = \frac{m_A}{n} \cdot \frac{l}{m_A} = \frac{l}{n} = P(AB).$$

Теорема доказана.

Следствие. Вероятность совместного появления событий $A_1, A_2, \dots, A_n$ равна произведению вероятности одного из них на условные вероятности всех остальных, причем вероятность каждого последующего события вычисляется в предположении, что все предыдущие события уже произошли:

$$P(A_1 A_2 A_3 \dots A_n) = P(A_1) \cdot P_{A_1}(A_2) \cdot P_{A_1 A_2}(A_3) \cdot \dots \cdot P_{A_1 A_2 \dots A_{n-1}}(A_n), \quad (1.19)$$

где $P_{A_1 A_2 \dots A_{n-1}}(A_n)$ – вероятность события A_n , вычисленная в предположении, что события $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$ уже наступили.

В частности, для трех событий

$$P(ABC) = P(A) \cdot P_A(B) \cdot P_{AB}(C). \quad (1.20)$$

Задача 1.26. В урне 5 белых, 4 черных и 3 синих шара. Каждое испытание состоит в том, что наудачу извлекают один шар, не возвращая его обратно.

Найдите вероятность того, что при первом испытании появится белый шар (событие A), при втором – черный (событие B) и при третьем – синий (событие C).

Решение. Используя (1.20), искомая вероятность:

$$P(ABC) = P(A) \cdot P_A(B) \cdot P_{AB}(C).$$

Вероятность появления белого шара в первом испытании:

$$P(A) = \frac{5}{12}.$$

Вероятность появления черного шара при втором испытании вычисляется в предположении, что в первом испытании появился белый шар, т.е. условная вероятность:

$$P_A(B) = \frac{4}{11}.$$

Вероятность появления синего шара в третьем испытании, вычисленная в предположении, что в первом испытании появился белый шар, а во втором – черный, т.е. условная вероятность:

$$P_{AB}(C) = \frac{3}{10}.$$

Искомая вероятность:

$$P(ABC) = P(A) \cdot P_A(B) \cdot P_{AB}(C) = \frac{5}{12} \cdot \frac{4}{11} \cdot \frac{3}{10} = \frac{1}{22}.$$

Ответ: $\frac{1}{22}$.

Пусть вероятность события B не зависит от появления события A .

Событие B называют независимым от события A , если появление события A не изменяет вероятности события B , т.е. условная вероятность события B равна его условной вероятности:

$$P_A(B) = P(B). \quad (1.21)$$

Очевидно, что **свойство независимости событий взаимно**, т.е. условная вероятность события A в предположении, что наступило событие B , равна безусловной вероятности:

$$P_B(A) = P(A). \quad (1.22)$$

Подставляя (1.21) в (1.18), получим формулу умножения вероятностей независимых событий.

Теорема умножения вероятностей независимых событий

Вероятность совместного появления двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий:

$$P(AB) = P(A)P(B). \quad (1.23)$$

Доказательство

Согласно (1.18) $P(AB) = P(A)P_A(B)$, но так как события A и B независимые, то, используя (1.22), получим:

$$P(AB) = P(A)P_A(B) = P(A)P(B).$$

Теорема доказана.

События $A_1, A_2, \dots, A_n$ называются **независимыми в совокупности**, если каждое из них и произведение любого количества остальных (быть может всех) есть события независимые.

Следствие. Вероятность совместного появления событий $A_1, A_2, \dots, A_n$, независимых в совокупности, равна произведению вероятностей этих событий:

$$P(A_1 A_2 \dots A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \dots \cdot P(A_n). \quad (1.24)$$

Теорема. Вероятность появления хотя бы одного из событий $A_1, A_2, \dots, A_n$, независимых в совокупности, равна разности между единицей и произведением вероятностей противоположных событий $\bar{A}_1, \bar{A}_2, \dots, \bar{A}_n$, т.е.:

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}_1) \cdot P(\bar{A}_2) \cdot \dots \cdot P(\bar{A}_n). \quad (1.25)$$

Теорема сложения вероятностей совместных событий

Вероятность появления хотя бы одного из двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB). \quad (1.26)$$

Доказательство

Доказательство теоремы опирается на теорему сложения вероятностей несовместных событий. Поскольку события A и B совместны, то событие $A + B$ можно представить в виде суммы несовместных событий:

$$A + B = A\bar{B} + \bar{A}B + AB.$$

Тогда, используя (1.12), получим:

$$P(A + B) = P(A\bar{B} + \bar{A}B + AB) = P(A\bar{B}) + P(\bar{A}B) + P(AB).$$

Событие A произойдет, если наступит одно из двух несовместных событий: AB или $A\bar{B}$. По теореме сложения вероятностей несовместных событий имеем:

$$P(A) = P(AB) + P(A\bar{B}).$$

Отсюда,

$$P(A\bar{B}) = P(A) - P(AB).$$

Аналогично, событие B произойдет, если наступит одно из двух несовместных событий: AB или $\bar{A}B$. По теореме сложения вероятностей несовместных событий имеем:

$$P(B) = P(AB) + P(\bar{A}B).$$

Отсюда,

$$P(\bar{A}B) = P(B) - P(AB).$$

Итак,

$$\begin{aligned} P(A+B) &= P(A\bar{B}) + P(\bar{A}B) + P(AB) = P(A) - P(AB) + P(B) - P(AB) + P(AB) = \\ &= P(A) + P(B) - P(AB). \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Следствие. Теорема может быть обобщена для любого конечного числа совместных событий. Например, для трех событий имеем:

$$P(A+B+C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC).$$

Задача 1.27. На 100 лотерейных билетов приходится 5 выигрышных. Какова вероятность получения выигрыша хотя бы по одному билету, если приобретено: а) 2 билета; б) 4 билета?

Решение. Пусть событие $A_i = \{\text{выигрыш по } i\text{-му билету}\}$ ($i = \overline{1, 4}$), тогда:

а) по формуле (1.26) вероятность выигрыша хотя бы по одному из двух билетов

$$\begin{aligned} P(A_1 + A_2) &= P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 A_2) = \\ &= P(A_1) + P(A_2) - P(A_1)P_{A_1}(A_2) = \frac{5}{100} + \frac{5}{100} - \frac{5}{100} \cdot \frac{4}{99} = 0,098; \end{aligned}$$

б) вероятность выигрыша хотя бы по одному из четырех билетов, согласно (1.25):

$$P(A_1 + A_2 + A_3 + A_4) = 1 - P(\bar{A}_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3 \bar{A}_4) = 1 - \frac{95}{100} \cdot \frac{94}{99} \cdot \frac{93}{98} \cdot \frac{92}{97} = 0,188.$$

Ответ: а) 0,098; б) 0,188.

Задача 1.28. Имеется три урны с шарами следующего состава. В первой урне 2 белых, 3 чёрных и 4 красных шара. Во второй урне 3 белых, 5 чёрных и 1 красный шар. В третьей урне 1 белый, 4 чёрных и 7 красных шаров. Из каждой урны наудачу извлекается по одному шару.

Найдите вероятность того, что:

- все три извлеченные шара одного цвета;
- все три шара разного цвета.

Решение. Обозначим события:

$A_i = \{\text{извлеченный из } i\text{-й урны шар белый}\}, i = 1, 2, 3,$

$B_i = \{\text{извлеченный из } i\text{-й урны шар черный}\},$

$C_i = \{\text{извлеченный из } i\text{-й урны шар красный}\},$

$A = \{\text{все три шара одного цвета}\},$

$B = \{\text{все три шара разного цвета}\}.$

Событие A можно представить в виде:

$$A = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 + B_1 \cdot B_2 \cdot B_3 + C_1 \cdot C_2 \cdot C_3.$$

По формуле (1.9) сложения вероятностей несовместных событий

$$P(A) = P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3) + P(B_1 \cdot B_2 \cdot B_3) + P(C_1 \cdot C_2 \cdot C_3).$$

По формуле (1.23) умножения вероятностей независимых событий:

$$P(A) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) + P(B_1) \cdot P(B_2) \cdot P(B_3) + P(C_1) \cdot P(C_2) \cdot P(C_3),$$

тогда получим:

$$P(A) = \frac{2}{9} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{1}{12} + \frac{3}{9} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{12} + \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{7}{12} = \frac{94}{972} = \frac{47}{486} = 0,097.$$

Событие B можно представить в виде:

$$B = A_1 B_2 C_3 + A_1 C_2 B_3 + B_1 A_2 C_3 + C_1 A_2 B_3 + C_1 B_2 A_3 + B_1 C_2 A_3,$$

тогда, используя (1.23) получим:

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A_1 B_2 C_3) + P(A_1 C_2 B_3) + P(B_1 A_2 C_3) + \\ &+ P(C_1 A_2 B_3) + P(C_1 B_2 A_3) + P(B_1 C_2 A_3) = \\ &= \frac{2}{9} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{7}{12} + \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{4}{12} + \frac{3}{9} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{7}{12} + \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{4}{12} + \frac{4}{9} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{1}{12} + \frac{3}{9} \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{12} = 0,218. \end{aligned}$$

Ответ: 0,097; 0,218.

Задача 1.29. Из колоды карт последовательно наудачу извлекаются четыре карты. Найдите вероятность того, что все четыре карты окажутся тузами.

Решение. Обозначим события $T_i = \{i\text{-я извлеченная карта туз}\}, i = 1, 2, 3, 4$ и $T = \{\text{все четыре карты тузы}\}$, тогда:

$$T = T_1 \cdot T_2 \cdot T_3 \cdot T_4.$$

События T_i не являются независимыми, поэтому согласно формуле (1.19) умножения вероятностей зависимых событий, получим:

$$\begin{aligned} P(T) &= P(T_1) \cdot P_{T_1}(T_2) \cdot P_{T_1 T_2}(T_3) \cdot P_{T_1 T_2 T_3}(T_4) = \\ &= \frac{4}{36} \cdot \frac{3}{35} \cdot \frac{2}{34} \cdot \frac{1}{33} = \frac{1}{58605} = 0,000017. \end{aligned}$$

Ответ: 0,000017.

Задача 1.30. Три стрелка стреляют по цели. Вероятность поражения цели первым стрелком 0,7, вторым – 0,8, третьим – 0,9.

Найдите вероятности того, что:

– цель поражена ровно 1 раз;

- цель поражена 2 раза;
- цель поражена три раза;
- попадания в цель не было;
- имеется хотя бы одно попадание в цель.

Решение. Введем обозначения событий:

$A_i = \{i\text{-й стрелок поразил цель}\}, i = 1, 2, 3,$

$B = \{\text{цель поражена ровно один раз}\},$

$C = \{\text{цель поражена два раза}\},$

$D = \{\text{цель поражена три раза}\},$

$E = \{\text{попадания в цель не было}\},$

$F = \{\text{имеется хотя бы одно попадание в цель}\}.$

По условию задачи:

$$P(A_1) = p_1 = 0,7, P(\overline{A_1}) = q_1 = 1 - p_1 = 0,3;$$

$$P(A_2) = p_2 = 0,8, P(\overline{A_2}) = q_2 = 1 - p_2 = 0,2;$$

$$P(A_3) = p_3 = 0,9, P(\overline{A_3}) = q_3 = 1 - p_3 = 0,1.$$

Найдем вероятность того, что в цель попал только один стрелок. Это произойдет в том случае, если 1-й стрелок попал, одновременно с этим 2-й и 3-й стрелки промахнулись, или 1-й и 3-й промахнулись, а 2-й попал, или 1-й и 2-й промахнулись, а 3-й попал.

Событие B можно записать в виде:

$$B = A_1 \overline{A_2} \overline{A_3} + \overline{A_1} A_2 \overline{A_3} + \overline{A_1} \overline{A_2} A_3.$$

Тогда по формулам (1.13) и (1.24) получим:

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A_1 \overline{A_2} \overline{A_3} + \overline{A_1} A_2 \overline{A_3} + \overline{A_1} \overline{A_2} A_3) = P(A_1 \overline{A_2} \overline{A_3}) + P(\overline{A_1} A_2 \overline{A_3}) + P(\overline{A_1} \overline{A_2} A_3) = \\ &= P(A_1)P(\overline{A_2})P(\overline{A_3}) + P(\overline{A_1})P(A_2)P(\overline{A_3}) + P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})P(A_3) = \\ &= p_1 q_2 q_3 + q_1 p_2 q_3 + q_1 q_2 p_3 = 0,7 \cdot 0,2 \cdot 0,1 + 0,3 \cdot 0,8 \cdot 0,1 + 0,3 \cdot 0,2 \cdot 0,9 = 0,092. \end{aligned}$$

Аналогично событие C можно записать:

$$C = A_1 A_2 \overline{A_3} + A_1 \overline{A_2} A_3 + \overline{A_1} A_2 A_3,$$

$$\begin{aligned} P(C) &= P(A_1 A_2 \overline{A_3} + A_1 \overline{A_2} A_3 + \overline{A_1} A_2 A_3) = P(A_1 A_2 \overline{A_3}) + P(A_1 \overline{A_2} A_3) + P(\overline{A_1} A_2 A_3) = \\ &= p_1 p_2 q_3 + p_1 q_2 p_3 + q_1 p_2 p_3 = 0,7 \cdot 0,8 \cdot 0,1 + 0,7 \cdot 0,2 \cdot 0,9 + 0,3 \cdot 0,8 \cdot 0,9 = 0,398. \end{aligned}$$

Вычислим вероятность трех попаданий. Событие D может быть записано в виде:

$$D = A_1 A_2 A_3,$$

тогда

$$P(D) = P(A_1 A_2 A_3) = p_1 p_2 p_3 = 0,9 \cdot 0,8 \cdot 0,7 = 0,504.$$

Вычислим вероятность трех промахов:

$$P(E) = P(\overline{A_1} \overline{A_2} \overline{A_3}) = q_1 q_2 q_3 = 0,3 \cdot 0,2 \cdot 0,1 = 0,006.$$

Выполним проверку вычислений. Так как в мишень может быть или три, или два, или одно, или ноль попаданий то события B, C, D, E образуют полную группу событий. Следовательно, сумма вероятностей этих событий должна быть равна единице:

$$P(B) + P(C) + P(D) + P(E) = 1.$$

Проверим, выполняется ли это условие:

$$P(B) + P(C) + P(D) + P(E) = 0,092 + 0,398 + 0,504 + 0,006 = 1.$$

Следовательно, вероятности событий вычислены верно.

Вероятность события F вычислим, используя формулу (1.25):

$$P(F) = 1 - P(\overline{A_1} \overline{A_2} \overline{A_3}) = 1 - q_1 q_2 q_3 = 1 - 0,006 = 0,994.$$

Ответ: 0,092; 0,398; 0,504; 0,006; 0,994.

Задача 1.31. Нужный товар имеется в наличии в первом магазине с вероятностью 0,6; во втором – с вероятностью 0,7; в третьем – с вероятностью 0,8; в четвертом – с вероятностью 0,9.

Найдите вероятности того, что:

- нужный товар имеется только в двух магазинах;
- нужный товар имеется хотя бы в одном магазине;
- нужный товар имеется не менее чем в трех магазинах.

Решение. Обозначим события:

$A_1 = \{\text{нужный товар есть в наличии в первом магазине}\},$

тогда $\overline{A_1} = \{\text{нужного товара нет в наличии в первом магазине}\},$

$A_2 = \{\text{нужный товар есть в наличии во втором магазине}\},$

тогда $\overline{A_2} = \{\text{нужного товара нет в наличии во втором магазине}\};$

$A_3 = \{\text{нужный товар есть в наличии в третьем магазине}\},$

$\overline{A_3} = \{\text{нужного товара нет в наличии в третьем магазине}\};$

$A_4 = \{\text{нужный товар есть в наличии в четвертом магазине}\},$

тогда $\overline{A_4} = \{\text{нужного товара нет в наличии в четвертом магазине}\}.$

По условию задачи:

$$P(A_1) = p_1 = 0,6, P(A_2) = p_2 = 0,7, P(A_3) = p_3 = 0,8, P(A_4) = p_4 = 0,9,$$

$$P(\overline{A_1}) = q_1 = 0,4, P(\overline{A_2}) = q_2 = 0,3, P(\overline{A_3}) = q_3 = 0,2, P(\overline{A_4}) = q_4 = 0,1.$$

Пусть $B = \{\text{нужный товар имеется в наличии только в двух магазинах}\},$

тогда:

$$B = (A_1 A_2 \overline{A_3} \overline{A_4} + A_1 \overline{A_2} A_3 \overline{A_4} + A_1 \overline{A_2} \overline{A_3} A_4 + \overline{A_1} A_2 A_3 \overline{A_4} + \overline{A_1} A_2 \overline{A_3} A_4 + \overline{A_1} \overline{A_2} A_3 A_4),$$

$$P(B) = P(A_1 A_2 \overline{A_3} \overline{A_4} + A_1 \overline{A_2} A_3 \overline{A_4} + A_1 \overline{A_2} \overline{A_3} A_4 + \overline{A_1} A_2 A_3 \overline{A_4} + \\ + \overline{A_1} A_2 \overline{A_3} A_4 + \overline{A_1} \overline{A_2} A_3 A_4) =$$

$$= p_1 p_2 q_3 q_4 + p_1 q_2 p_3 q_4 + p_1 q_2 q_3 p_4 + q_1 p_2 p_3 q_4 + q_1 p_2 p_3 q_4 + q_1 q_2 p_3 p_4 = \\ = 0,6 \cdot 0,7 \cdot 0,2 \cdot 0,1 + 0,6 \cdot 0,3 \cdot 0,8 \cdot 0,1 + 0,6 \cdot 0,3 \cdot 0,2 \cdot 0,9 + 0,4 \cdot 0,7 \cdot 0,8 \cdot 0,1 + \\ + 0,4 \cdot 0,7 \cdot 0,2 \cdot 0,9 + 0,4 \cdot 0,3 \cdot 0,8 \cdot 0,9 = 0,2144.$$

Используя формулу (1.25), вычислим вероятность события $C = \{\text{нужный товар имеется в наличии хотя бы в одном магазине}\}$:

$$P(C) = 1 - P(\bar{A}_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3 \bar{A}_4) = 1 - q_1 q_2 q_3 q_4 = 1 - 0,4 \cdot 0,3 \cdot 0,2 \cdot 0,1 = 0,9976.$$

$D = \{\text{нужный товар имеется в наличии не менее чем в трех магазинах}\}$

это значит, что товар имеется или в трех, или в четырех магазинах. Поэтому искомая вероятность:

$$\begin{aligned} P(D) &= P(A_1 A_2 A_3 \bar{A}_4 + A_1 A_2 \bar{A}_3 A_4 + A_1 \bar{A}_2 A_3 A_4 + \bar{A}_1 A_2 A_3 A_4 + A_1 A_2 A_3 A_4) = \\ &= p_1 p_2 p_3 q_4 + p_1 p_2 q_3 p_4 + p_1 q_2 p_3 p_4 + q_1 p_2 p_3 p_4 + p_1 p_2 p_3 p_4 = \\ &= 0,6 \cdot 0,7 \cdot 0,8 \cdot 0,1 + 0,6 \cdot 0,7 \cdot 0,2 \cdot 0,9 + 0,6 \cdot 0,3 \cdot 0,8 \cdot 0,9 + 0,4 \cdot 0,7 \cdot 0,8 \cdot 0,9 + \\ &\quad + 0,6 \cdot 0,7 \cdot 0,8 \cdot 0,9 = 0,7428. \end{aligned}$$

Ответ: 0,2144; 0,9976; 0,7428.

1.7 Формула полной вероятности. Формулы Байеса

Следствием двух основных теорем теории вероятностей – теоремы сложения и теоремы умножения – является формула полной вероятности.

Пусть событие A может наступить при условии появления одного из несовместных событий $B_1, B_2, B_3, \dots, B_n$, которые образуют полную группу. Пусть известны вероятности этих событий: $P(B_1), P(B_2), \dots, P(B_n)$ и условные вероятности события A : $P_{B_1}(A), P_{B_2}(A), \dots, P_{B_n}(A)$.

Теорема. Вероятность события A , которое может наступить лишь при условии появления одного из несовместных событий $B_1, B_2, B_3, \dots, B_n$, образующих полную группу, равна сумме произведений вероятностей каждого из этих событий на соответствующую условную вероятность события A :

$$P(A) = P(B_1)P_{B_1}(A) + P(B_2)P_{B_2}(A) + \dots + P(B_n)P_{B_n}(A). \quad (1.27)$$

Равенство (1.27) называется **формулой полной вероятности**. Так как заранее неизвестно какое именно из событий $B_1, B_2, B_3, \dots, B_n$ наступит, события этой группы называют **гипотезами**.

Доказательство

Так как события $B_1, B_2, B_3, \dots, B_n$ образуют полную группу, то событие A появиться только с одним из них, т.е.

$$A = B_1 A + B_2 A + \dots + B_n A.$$

Так как события $B_1, B_2, B_3, \dots, B_n$ несовместны, то и события $B_1 A, B_2 A, \dots, B_n A$ также несовместны, тогда, используя (1.13), получим:

$$P(A) = P(B_1 A + B_2 A + \dots + B_n A) = P(B_1 A) + P(B_2 A) + \dots + P(B_n A) = \sum_{i=1}^n P(B_i A).$$

Так как события B_i и событие A зависимы, то, используя (1.19), получим:

$$P(A) = P(B_1)P_{B_1}(A) + P(B_2)P_{B_2}(A) + \dots + P(B_n)P_{B_n}(A) = \sum_{i=1}^n P(B_i)P_{B_i}(A).$$

Теорема доказана.

Задача 1.32. Для участия в соревновании выделили студентов первого курса – 10 человек, второго курса – 15 человек, третьего курса – 12 человек. Вероятности того, что студент займёт первое место в соревновании для студентов этих курсов, равны соответственно 0,5; 0,6; 0,8.

Найдите вероятность того, что наудачу выбранный студент занял первое место.

Решение. Обозначим $B_i = \{\text{наудачу выбранный студент } i\text{-го курса}\}$ ($i = 1, 2, \dots, n$), $A = \{\text{наудачу выбранный студент занял первое место}\}$.

Вероятности гипотез: $P(B_1) = \frac{10}{37}$, $P(B_2) = \frac{15}{37}$, $P(B_3) = \frac{12}{37}$; условные вероятности события A : $P_{B_1}(A) = 0,5$, $P_{B_2}(A) = 0,6$, $P_{B_3}(A) = 0,8$.

По формуле полной вероятности (1.27), получим:

$$P(A) = P(B_1)P_{B_1}(A) + P(B_2)P_{B_2}(A) + P(B_3)P_{B_3}(A),$$

$$P(A) = \frac{10}{37} \cdot 0,5 + \frac{15}{37} \cdot 0,6 + \frac{12}{37} \cdot 0,8 = 0,638.$$

Ответ: 0,638.

Задача 1.33. В ящике для деталей находятся 20 деталей, из которых 10 выпущены 1–м заводом, 6 деталей 2–м заводом, 4 выпущены 3–м заводом. Заводы производят соответственно 90%, 85%, 80% стандартной продукции.

Найдите вероятность того, что взятая наудачу деталь окажется стандартной.

Решение. Возможны следующие гипотезы:

$$B_i = \{\text{деталь выпущена } i\text{-м заводом}\}, i = 1, 2, 3.$$

Вероятности гипотез:

$$P(B_1) = \frac{10}{20} = 0,5, \text{ так как из 20 деталей 10 деталей выпущены 1-м заводом;}$$

$$P(B_2) = \frac{6}{20} = 0,3, \text{ так как из 20 деталей 6 деталей выпущены 2-м заводом;}$$

$$P(B_3) = \frac{4}{20} = 0,2, \text{ так как из 20 деталей 4 детали выпущены 3-м заводом.}$$

Обозначим $A = \{\text{взятая наудачу деталь является стандартной}\}$.

Так как 1–м заводом выпускается 90% стандартной продукции, 2–м заводом – 85%, 3–м заводом – 80%, то $P_{B_1}(A) = 0,9$, $P_{B_2}(A) = 0,85$, $P_{B_3}(A) = 0,8$ соответственно.

По формуле полной вероятности (1.27), получим:

$$\begin{aligned} P(A) &= P(B_1)P_{B_1}(A) + P(B_2)P_{B_2}(A) + P(B_3)P_{B_3}(A) = \\ &= 0,5 \cdot 0,9 + 0,3 \cdot 0,85 + 0,2 \cdot 0,8 = 0,865. \end{aligned}$$

Ответ: 0,865.

Задача 1.34. В коробке 10 теннисных мячей, из которых 6 новых. Для игры наудачу берут мяч и после игры мяч бросают опять в коробку. Найдите вероятность того, что для второй игры из коробки будет вынут новый мяч.

Решение. Обозначим $B_1 = \{\text{для первой игры вынут новый мяч}\}$, $B_2 = \{\text{для первой игры вынут старый мяч}\}$, тогда:

$$P(B_1) = \frac{6}{10} = 0,6, \text{ так как в коробке из 10 мячей 6 мячей новые;}$$

$$P(B_2) = \frac{4}{10} = 0,4, \text{ так как в коробке из 10 мячей 4 мячей старые.}$$

Пусть $A = \{\text{для второй игры взят новый мяч}\}$.

Если произошло событие B_1 , то после игры мяч из нового стал старым и количество новых и старых мячей стало одинаковым, следовательно:

$$P_{B_1}(A) = \frac{5}{10} = 0,5.$$

Если произошло событие B_2 , то количество новых мячей не изменилось, следовательно, вероятность вынуть новый мяч:

$$P_{B_2}(A) = \frac{6}{10} = 0,6.$$

По формуле полной вероятности (1.27), получим:

$$P(A) = P(B_1)P_{B_1}(A) + P(B_2)P_{B_2}(A) = 0,6 \cdot 0,5 + 0,4 \cdot 0,6 = 0,54.$$

Ответ: 0,54.

Задача 1.35. Студент пришел на экзамен, зная ответы на 12 билетов из 20. В каком из случаев вероятность вытянуть билет, на вопросы которого студент не знает ответов, меньше, если он билет вытянут первым или вторым?

Решение. Обозначим событие

$$A = \{\text{студент вытянул билет, на который знает ответ}\}.$$

1. Предположим, что студент тянет билет первым. Тогда вероятность взять билет, на вопросы которого он знает ответы, будет равна:

$$P(A) = \frac{12}{20} = 0,6.$$

2. Пусть студент тянет билет вторым.

В этом случае возможны гипотезы:

$B_1 = \{\text{первый из сдающих экзамен взял билет, который студент знает}\}$, тогда

$$P(B_1) = \frac{12}{20} = 0,6.$$

$B_2 = \{\text{первый из сдающих экзамен взял билет, который студент не знает}\}$,

тогда

$$P(B_2) = \frac{8}{20} = 0,4.$$

Вычислим условные вероятности события A :

$P_{B_1}(A) = \frac{11}{19}$ – из оставшихся билетов студент знает 11;

$P_{B_2}(A) = \frac{12}{19}$ – количество билетов, которые студент знает не изменилось.

По формуле полной вероятности (1.27), получим:

$$P(A) = P(B_1)P_{B_1}(A) + P(B_2)P_{B_2}(A) = \frac{6}{10} \cdot \frac{11}{19} + \frac{4}{10} \cdot \frac{12}{19} = 0,6.$$

Ответ: вероятность взять билет, на вопросы которого студент не знает ответов, в обоих случаях одинакова.

Следствием теоремы умножения и формулы полной вероятности является формула Байеса.

Пусть событие A может наступить лишь при условии появления одного из несовместных событий $B_1, B_2, \dots, B_n$, которые образуют полную группу событий. Если событие A уже произошло, то вероятности гипотез могут быть переоценены по формуле

$$P_A(B_i) = \frac{P(B_i) \cdot P_{B_i}(A)}{P(A)}. \quad (1.28)$$

Формула (1.28) называется **формулой Байеса**. Заменив в ней $P(A)$ по формуле (1.27), получим:

$$P_A(B_i) = \frac{P(B_i) \cdot P_{B_i}(A)}{P(B_1)P_{B_1}(A) + P(B_2)P_{B_2}(A) + \dots + P(B_n)P_{B_n}(A)}. \quad (1.29)$$

Еще раз отметим, что формула Байеса позволяет переоценить вероятности гипотез после того, как становится известным результат испытания, в итоге которого появилось событие A .

Задача 1.36. В торговую фирму поступили телевизоры от трех поставщиков в отношении 1:4:5. Практика показала, что телевизоры, поступающие от 1-го, 2-го и 3-го поставщиков не потребуют гарантийного ремонта в течение гарантийного срока соответственно в 98%, 88% и 92% случаев.

Найдите вероятность того, что поступивший в торговую фирму телевизор не потребует ремонта в течение гарантийного срока.

Если проданный телевизор потребовал ремонта в течение гарантийного срока, то от какого поставщика вероятнее всего поступил этот телевизор?

Решение. Обозначим события:

$A = \{\text{телевизор не потребует ремонта в течение гарантийного срока}\};$

$B_i = \{\text{телевизор поступил в торговую фирму от } i\text{-го поставщика}\} \quad (i = 1, 2, 3).$

По условию:

$$P(B_1) = \frac{1}{1+4+5} = 0,1; \quad P_{B_1}(A) = 0,98;$$

$$P(B_2) = \frac{4}{1+4+5} = 0,4; \quad P_{B_2}(A) = 0,88;$$

$$P(B_1) = \frac{5}{1+4+5} = 0,5; P_{B_3}(A) = 0,92.$$

По формуле полной вероятности (1.27) получим:

$$P(A) = 0,1 \cdot 0,98 + 0,4 \cdot 0,88 + 0,5 \cdot 0,92 = 0,91.$$

Событие

$$\bar{A} = \{ \text{телевизор потребует ремонта в течение гарантийного срока} \},$$

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0,91 = 0,09.$$

По условию:

$$P_{B_1}(\bar{A}) = 1 - 0,98 = 0,02; P_{B_2}(\bar{A}) = 1 - 0,88 = 0,12; P_{B_3}(\bar{A}) = 1 - 0,92 = 0,08.$$

По формуле Байеса (1.28):

$$P_{\bar{A}}(B_1) = \frac{0,1 \cdot 0,02}{0,09} = 0,022; P_{\bar{A}}(B_2) = \frac{0,4 \cdot 0,12}{0,09} = 0,533;$$

$$P_{\bar{A}}(B_3) = \frac{0,5 \cdot 0,08}{0,09} = 0,444.$$

Ответ: таким образом, после наступления события $\bar{A}$ вероятность гипотезы B_2 увеличилась с $P(B_2) = 0,4$ до $P_{\bar{A}}(B_2) = 0,533$, а гипотезы B_3 уменьшилась от $P(B_3) = 0,5$ до $P_{\bar{A}}(B_3) = 0,444$.

Если ранее (до наступления события $\bar{A}$) наиболее вероятной была гипотеза B_3 , то после наступления события $\bar{A}$ наиболее вероятна гипотеза B_2 – поступление данного телевизора от 2-го поставщика.

Задача 1.37. В первой урне находится 3 белых и 4 чёрных шара. Во второй – 2 белых и 5 чёрных шаров. Из первой урны наудачу переложили во вторую два шара, а затем из второй извлекли наудачу три шара, оказавшиеся чёрными. Какова вероятность того, что переложённые два шара белые?

Решение. Обозначим события:

$$A = \{ \text{извлеченные из второй урны три шара – чёрные} \};$$

$$B_1 = \{ \text{из первой урны во вторую переложили два белых шара} \};$$

$$B_2 = \{ \text{из первой урны во вторую переложили два чёрных шара} \};$$

$$B_3 = \{ \text{из первой урны во вторую переложили шары разного цвета} \}.$$

Тогда, согласно формуле (1.29), искомая вероятность:

$$P_A(B_1) = \frac{P(B_1) \cdot P_{B_1}(A)}{P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A) + P(B_3) \cdot P_{B_3}(A)}.$$

Вычислив вероятности гипотез и условные вероятности события A , получим:

$$P(B_1) = \frac{C_3^2}{C_7^2} = \frac{3}{21}; P(B_2) = \frac{C_4^2}{C_7^2} = \frac{6}{21}; P(B_3) = \frac{C_3^1 \cdot C_4^1}{C_7^2} = \frac{3 \cdot 4}{21} = \frac{12}{21};$$

$$P_{B_1}(A) = \frac{C_5^3}{C_9^3} = \frac{10}{84}; P_{B_2}(A) = \frac{C_7^3}{C_9^3} = \frac{35}{84}; P_{B_3}(A) = \frac{C_6^3}{C_9^3} = \frac{20}{84};$$

$$P_A(B_1) = \frac{\frac{3}{21} \cdot \frac{10}{84}}{\frac{3}{21} \cdot \frac{10}{84} + \frac{6}{21} \cdot \frac{35}{84} + \frac{12}{21} \cdot \frac{20}{84}} = \frac{1}{16}.$$

Ответ: $\frac{1}{16}$.

Задача 1.38. Два стрелка независимо друг от друга стреляют по мишени, делая каждый по одному выстрелу. Вероятность попадания в мишень для первого стрелка равна 0,8; для второго – 0,4. При стрельбе в мишени обнаружена одна пробоина.

Какова вероятность того, что она принадлежит: 1-му стрелку; 2-му стрелку?

Решение. Обозначим события:

$A = \{\text{в мишени одна пробоина (одно попадание)}\};$

$B_1 = \{\text{оба стрелка не попали в мишень}\};$

$B_2 = \{\text{оба стрелка попали в мишень}\};$

$B_3 = \{\text{первый стрелок попал в мишень, второй не попал}\};$

$B_4 = \{\text{первый стрелок не попал в мишень, второй попал}\}.$

Найдем вероятности гипотез и условные вероятности события A :

$P(B_1) = 0,2 \cdot 0,6 = 0,12$, $P_{B_1}(A) = 0$; $P(B_2) = 0,8 \cdot 0,4 = 0,32$, $P_{B_2}(A) = 0$;

$P(B_3) = 0,8 \cdot 0,6 = 0,48$, $P_{B_3}(A) = 1$; $P(B_4) = 0,2 \cdot 0,4 = 0,08$, $P_{B_4}(A) = 1$.

Теперь по формуле Байеса (1.28)

$$P_A(B_3) = \frac{0,48 \cdot 1}{0,12 \cdot 0 + 0,32 \cdot 0 + 0,48 \cdot 1 + 0,08 \cdot 1} = \frac{6}{7} = 0,857,$$

$$P_A(B_4) = \frac{0,08 \cdot 1}{0,12 \cdot 0 + 0,32 \cdot 0 + 0,48 \cdot 1 + 0,08 \cdot 1} = \frac{1}{7} = 0,143.$$

Ответ: 0,857; 0,143.

Вопросы и задания для самоконтроля

1. Что изучает теория вероятностей?
2. Что называется случайным событием? Приведите примеры.
3. Какие события называются: достоверными, невозможными, равновероятными, совместными, несовместными, зависимыми, независимыми, противоположными? Приведите примеры.
4. Сформулируйте определения суммы, произведения, разности событий. Приведите примеры.
5. Перечислите свойства, которыми обладают операции сложения и умножения событий. Проиллюстрируйте их на диаграммах Эйлера-Венна.
6. Что изучает комбинаторика?
7. Сформулируйте определения: перестановки, размещения, сочетания.
8. Напишите формулы для расчета числа всех возможных: перестановок,

размещений, сочетаний.

9. Сформулируйте основные правила комбинаторики.

10. Запишите формулу бинома Ньютона.

11. Сформулируйте классическое определение вероятности. Запишите формулу.

12. В каком случае возможно вычисление вероятности с помощью классического определения?

13. В чем измеряется вероятность?

14. Перечислите свойства вероятности события.

15. В каких случаях используется статистическое определение вероятности?

16. Сформулируйте статистическое определение вероятности. Чем оно отличается от классического?

17. Что называется частотой события? Запишите формулу.

18. Перечислите свойства статистической вероятности события.

19. В каких случаях используется геометрическая вероятность?

20. Сформулируйте определение геометрической вероятности.

21. Что может выступать мерой множеств G и g ?

22. Сформулируйте теоремы умножения вероятностей событий.

23. Сформулируйте теоремы сложения вероятностей событий.

24. Что называют условной вероятностью?

25. Запишите формулу полной вероятности.

26. Если вероятность поражения цели каждым орудием одинакова и равна 0,7, то какое событие более вероятно: A – цель не поражена или B – цель поражена двумя орудиями.

27. Два стрелка стреляют по мишени по одному разу. Вероятность того, что оба стрелка попали в мишень, равна 0,54, а вероятность того, что оба промахнулись – 0,04. Какова вероятность попадания в мишень каждым стрелком при одном выстреле?

28. В коробке 10 красных, 3 синих и 7 желтых карандашей. Наудачу вынимают 3 карандаша. Какое событие более вероятно: A – все они разных цветов или B – они одного цвета?

29. 32 буквы русского алфавита написаны на карточках разрезной азбуки. Пять карточек вынимаются наугад одна за другой и укладываются на стол в порядке появления. Какова вероятность того, что из них можно составить слово «зачет»?

ТЕМА 2. ПОВТОРНЫЕ НЕЗАВИСИМЫЕ ИСПЫТАНИЯ

На практике часто приходится сталкиваться с задачами, которые можно представить в виде многократно повторяющихся испытаний при данном комплексе условий, в которых представляет интерес вероятность числа k наступлений некоторого события A в n испытаниях. Например, необходимо определить вероятность определенного числа попаданий в мишень при нескольких выстрелах, вероятность некоторого числа бракованных изделий в данной партии и т.д.

Схемой Бернулли или *биномиальной схемой* испытаний называют последовательность n испытаний, удовлетворяющих условиям:

- 1) при каждом испытании различают два исхода: появление некоторого события A (успех) и появление противоположного ему события $\bar{A}$ (неудача);
- 2) испытания являются независимыми, то есть вероятность успеха в любом испытании не зависит от исходов всех предыдущих испытаний;
- 3) вероятность успеха в каждом испытании постоянна и равна $P(A) = p$, а значит и вероятность неудачи во всех испытаниях также постоянна и равна $P(\bar{A}) = q = 1 - p$.

2.1 Формула Бернулли

Теорема. Если вероятность p наступления события A в каждом испытании постоянна и равна p , то вероятность $P_n(k)$ того, что событие A наступит k раз в n независимых испытаниях, равна

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \quad (2.1)$$

где $q = 1 - p$, $0 \leq k \leq n$.

Доказательство

Вероятность события, состоящего в том, что в n испытаниях событие A наступит k раз и не наступит $n - k$ раз, по теореме умножения вероятностей независимых событий, равна $p^k q^{n-k}$.

Так как порядок появления событий не важен, а важно лишь количество испытаний, в которых событие A наступило и количество испытаний, в которых событие A не наступило, то таких событий может быть столько, сколько можно составить сочетаний из n элементов по k элементов, т.е. C_n^k .

Поскольку эти события несовместны, то по теореме сложения вероятностей несовместных событий искомая вероятность равна сумме вероятностей всех возможных событий. Поскольку же вероятности всех этих событий одинаковы, то искомая вероятность (появления события A k раз в n испытаниях) равна вероятности одного события, умноженной на их число:

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k} \text{ или } P_n(k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k}. \quad (2.2)$$

Теорема доказана.

Вероятность того, что в n независимых испытаниях, в каждом из которых событие наступит:

- а) менее k раз равна $P_n(1) + P_n(2) + \dots + P_n(k-1)$;
- б) более k раз $P_n(k+1) + P_n(k+2) + \dots + P_n(n)$;
- в) не менее k раз $P_n(k) + P_n(k+1) + \dots + P_n(n)$;
- г) не более k раз $P_n(0) + P_n(1) + \dots + P_n(k)$.

Как видно из формулы (2.1), вероятности различного числа успехов отличаются друг от друга.

Число k_0 , наступления события A в n независимых испытаниях называется **наивероятнейшим**, если вероятность осуществления этого события $P_n(k_0)$ по крайней мере не меньше вероятности других событий $P_n(k)$ при любом k .

Для нахождения k_0 запишем систему неравенств:

$$\begin{cases} P_n(k_0) \geq P_n(k_0+1), \\ P_n(k_0) \geq P_n(k_0-1). \end{cases} \quad (2.3)$$

Решим первое неравенство системы (2.3). Используя (2.2), получим:

$$\frac{n!}{k_0!(n-k_0)!} p^{k_0} q^{n-k_0} \geq \frac{n!}{(k_0+1)!(n-k_0-1)!} p^{k_0+1} q^{n-k_0-1}.$$

Так как $(k_0+1)! = k_0!(k_0+1)$, $(n-k_0)! = (n-k_0-1)!(n-k_0)$, то после преобразований получим неравенство

$$\frac{1}{n-k_0} q \geq \frac{1}{k_0+1} p,$$

откуда

$$(k_0+1)q \geq (n-k_0)p \Rightarrow k_0(p+q) \geq np - q.$$

Учитывая, что $p+q=1$, получим:

$$k_0 \geq np - q.$$

Решая аналогично второе неравенство системы (2.3), получим:

$$k_0 \geq np + q.$$

Объединяя полученные решения двух неравенств, получим двойное неравенство определяющее наивероятнейшее число наступления события A в n испытаниях:

$$np - q \leq k_0 \leq np + q. \quad (2.4)$$

Задача 2.1. Вероятность всхожести семян пшеницы равна 0,9. Какова вероятность того, что из четырёх посеянных семян взойдут не менее трех?

Решение. Пусть события:

$A = \{\text{из 4 семян взойдут не менее 3 семян}\};$

$B = \{\text{из 4 семян взойдут 3 семени}\};$

$C = \{\text{из 4 семян взойдут 4 семени}\}.$

По теореме сложения вероятностей

$$P(A) = P(B) + P(C).$$

Вероятности $P(B)$ и $P(C)$ определим по формуле Бернулли (2.1), так как проводится серия независимых испытаний, при каждом из которых вероятность наступления события постоянна и равна p , а вероятность не наступления события равна $q = 1 - p$.

Тогда, получим:

$$P(B) = P_4(3) = C_4^3 p^3 q^{4-3} = \frac{4!}{3!(4-3)!} \cdot 0,9^3 \cdot (1-0,9) = 0,2916.$$

$$P(C) = P_4(4) = C_4^4 p^4 q^{4-4} = 0,9^4 = 0,6561.$$

Искомая вероятность

$$P(A) = 0,2916 + 0,6561 = 0,9477.$$

Ответ: 0,9477.

Задача 2.2. Монету бросают 7 раз. Найдите:

- вероятность того, что «орел» выпадет 3 раза;
- наимвероятнейшее число появлений «орла».

Решение. Количество испытаний в данной задаче $n = 7$. Вероятность появления «орла» при одном испытании $p = \frac{1}{2}$, так как появление любой из сторон монеты равновероятно, то $q = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

Найдем вероятность того, что «орел» выпадет 3 раза, т.е. число успехов равно 3:

$$P_7(3) = C_7^3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^{7-3} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^7 = \frac{35}{128} = 0,273.$$

Наивероятнейшее число появления «орла» найдем из двойного неравенства (2.4). В нашем случае:

$$7 \cdot 0,5 - 0,5 \leq k_0 \leq 7 \cdot 0,5 + 0,5 \Rightarrow 3 \leq k_0 \leq 4.$$

Поскольку $k_0 \in \mathbb{Z}$, то наивероятнейшее число появления «орла»: $k_0 = 3$ или $k_0 = 4$. Таким образом, вероятность того, что появится 3 «орла», равна вероятности того, что появится 4 «орла». Эти вероятности будут больше вероятностей иных исходов.

Ответ: 0,273; 3 и 4.

Задача 2.3. Имеется 8 деталей. Вероятность того, что деталь бракованная, 0,25. Найдите:

- вероятность того, что ровно 3 детали бракованные;
- вероятность того, что менее трех деталей бракованные;
- вероятность того, что хотя бы одно изделие бракованное;
- наивероятнейшее число бракованных изделий.

Решение. По условию задачи: $n = 8$; $p = 0,25$, $q = 1 - p = 0,75$.

Вероятность того, что из 8 деталей ровно 3 детали бракованные:

$$P_8(3) = C_8^3 \left(\frac{1}{4}\right)^3 \left(\frac{3}{4}\right)^5 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{3^5}{4^8} = 0,208.$$

Событие «из 8 деталей менее трех деталей бракованные» обозначает, что число бракованных изделий было или 0, или 1, или 2, тогда:

$$\begin{aligned} P_8(k \leq 2) &= P_8(0) + P_8(1) + P_8(2) = C_8^0 \left(\frac{1}{4}\right)^0 \left(\frac{3}{4}\right)^8 + C_8^1 \left(\frac{1}{4}\right)^1 \left(\frac{3}{4}\right)^7 + C_8^2 \left(\frac{1}{4}\right)^2 \left(\frac{3}{4}\right)^6 = \\ &= \left(\frac{3}{4}\right)^8 + 8 \cdot \frac{3^7}{4^8} + \frac{8 \cdot 7}{1 \cdot 2} \cdot \frac{3^6}{4^8} = 0,100 + 0,269 + 0,311 = 0,68; \end{aligned}$$

Противоположным событием к событию «из 8 деталей хотя бы одна деталь бракованная» будет событие «из 8 деталей ноль бракованных деталей».

Поэтому искомая вероятность равна:

$$P_8(k \geq 1) = 1 - P_8(0) = 1 - 0,1 = 0,9;$$

Наивероятнейшее число бракованных изделий найдем по формуле (2.4). В нашем случае:

$$8 \cdot 0,25 - 0,75 \leq k_0 \leq 8 \cdot 0,25 + 0,25 \Rightarrow 1,25 \leq k_0 \leq 2,25 \Rightarrow k_0 = 2.$$

Ответ: 0,208; 0,68; 0,9; 2.

Если число испытаний n велико, использование формулы Бернулли связано с необходимостью выполнения громоздких вычислений. Например, если требуется найти вероятность того, что при 100 подбрасываниях монеты «орел» появится 50 раз, то по формуле Бернулли получаем:

$$P_{100}(50) = C_{100}^{50} \left(\frac{1}{2}\right)^{50} \left(\frac{1}{2}\right)^{50} = \frac{100!}{(50)!(50)!} \left(\frac{1}{2}\right)^{100}.$$

Ясно, что в данном случае непосредственное вычисление по формуле Бернулли технически сложно. В случае, когда число испытаний n велико используют приближенные формулы, которые называются **асимптотическими** и определяются теоремой Пуассона, локальной и интегральной теоремами Муавра-Лапласа. Эти формулы тем точнее, чем больше число испытаний.

2.2 Формула Пуассона

Теорема. Если вероятность p наступления события A в каждом испытании стремится к нулю ($p \rightarrow 0$) при неограниченном увеличении числа испытаний ($n \rightarrow \infty$), причем произведение np стремится к постоянному числу λ ($np \rightarrow \lambda$), то вероятность $P_n(k)$ того, что событие A появится k раз в n независимых испытаниях, удовлетворяет предельному равенству

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}. \quad (2.5)$$

Доказательство

По формуле Бернулли (2.1)

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!} p^k (1-p)^n (1-p)^{-m}$$

или, учитывая, что $\lim_{n \rightarrow \infty} np = \lambda$, т.е. при достаточно больших n $p \approx \frac{\lambda}{n}$ и

$$\begin{aligned} P_n(k) &= \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!} \cdot \frac{\lambda^k}{n^k} \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k} = \\ &= \frac{\lambda^k}{k!} \left[1 \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \right] \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k}. \end{aligned}$$

Так как $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{n}\right) = \dots = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) = 1$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{\frac{-n}{\lambda}} \right]^{-\lambda} = e^{-\lambda} \text{ и } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k} = 1, \text{ то}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

Теорема доказана.

Если вероятность p – постоянна и мала, число n испытаний велико и число $\lambda = np$ – незначительно то из предельного равенства (2.5) вытекает **приближенная формула Пуассона**

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \quad (e \approx 2,7182). \quad (2.6)$$

В таблице Приложения 1 приведены значения функции Пуассона $P_n(k)$ [3].

Формулу Пуассона применяют, если n число независимых испытаний велико, вероятность p события A в одном испытании близка к нулю и $np < 10$, причем, чем меньше p и больше n , тем точнее результат. В случае $np > 10$ более точный ответ дает локальная теорема Муавра-Лапласа, которую рассмотрим далее.

Задача 2.4. Завод отправил на базу 500 изделий. Вероятность повреждения изделия в пути равна 0,002. Найдите вероятность того, что в пути будет повреждено: ровно три изделия; менее трех изделий; хотя бы одно изделие.

Решение. Число $n = 500$ велико, вероятность $p = 0,002$, $np = 500 \cdot 0,002 = 1 < 10$, поэтому можно применить формулу Пуассона (2.6):
вероятность повреждения трех изделий:

$$P_{500}(3) \approx \frac{1^3}{3!} e^{-1} \approx \frac{0,36788}{6} \approx 0,0613;$$

вероятность повреждения менее трех изделий:

$$P_{500}(k < 3) = P_{500}(0) + P_{500}(1) + P_{500}(2) = e^{-1} + e^{-1} + \frac{1}{2}e^{-1} = \frac{5}{2} \cdot 0,36788 = 0,9197;$$

вероятность повреждения хотя бы одного изделия найдем через вероятность противоположного события:

$$P_{500}(k \geq 1) = 1 - P_{500}(0) = 1 - 0,36788 = 0,632.$$

Ответ: 0,0613; 0,9197; 0,632.

2.3 Локальная и интегральная теоремы Муавра-Лапласа

Когда n имеет порядок не менее нескольких десятков, а лучше нескольких сотен, и произведение $np > 10$, пользуются локальной теоремой Муавра-Лапласа. Для $p = 0,5$ она была получена в 1783 году Муавром, в 1783 году Лаплас обобщил формулу Муавра на случай произвольного p , $p \neq 0$, $p \neq 1$.

Теорема (локальная теорема Муавра-Лапласа). Если вероятность p наступления события A в каждом испытании постоянна и отлична от 0 и 1, то вероятность $P_n(k)$ того, что событие A в n независимых испытаниях произойдет ровно k раз (безразлично в какой последовательности), приближенно равна (тем точнее, чем больше n)

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{n p q}} \varphi(x), \quad (2.7)$$

где $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ – **функция Гаусса**; $x = \frac{k - np}{\sqrt{n p q}}$.

Значения функции $\varphi(x)$ находятся по таблице Приложения 2 [3]. При определении значения функции $\varphi(x)$ следует помнить ее свойства:

- 1) функция $\varphi(x)$ – четная: $\varphi(-x) = \varphi(x)$;
- 2) функция $\varphi(x)$ монотонно убывает при росте и положительных значениях x , причем при $x \rightarrow \infty$ функция $\varphi(x) \rightarrow 0$ (уже при $x > 4$ можно считать, что $\varphi(x) \approx 0$).

При $np > 6$ локальная теорема Муавра-Лапласа (2.7) дает более точный результат, чем приближенная формула Пуассона (2.6), а при выполнении условия $npq > 20$ дает лишь незначительную погрешность.

Задача 2.5. Найдите вероятность того, что событие A наступит 70 раз в 243 испытаниях, если вероятность появления этого события в одном испытании равна 0,25.

Решение. По условию, $n = 340$, $k = 70$, $p = 0,25$, $q = 1 - p = 0,75$. Так как $n = 243$ – большое число, воспользуемся локальной теоремой Муавра-Лапласа (2.7). Найдем значение x :

$$x = \frac{70 - 340 \cdot 0,25}{\sqrt{340 \cdot 0,25 \cdot 0,75}} = -\frac{15}{10,65} = -1,41.$$

Функция $\varphi(x)$ – четная, поэтому $\varphi(-1,41) = \varphi(1,41)$. По таблице Приложения 2 находим $\varphi(1,41) = 0,1476$.

Искомая вероятность: $P_{340}(70) = \frac{1}{10,65} \cdot 0,1476 = 0,014$.

Ответ: 0,014.

Теорема (интегральная теорема Муавра-Лапласа). Если вероятность p наступления события A в каждом испытании постоянна и отлична от 0 и 1, то вероятность того, что число k наступления события A в n независимых испытаниях заключено в отрезке от a до b , при достаточно большом n приближенно равна

$$P_n(a \leq k \leq b) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1), \quad (2.8)$$

где
$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt, \quad (2.9)$$

$$x_1 = \frac{a - np}{\sqrt{npq}}, \quad x_2 = \frac{b - np}{\sqrt{npq}}. \quad (2.10)$$

Формула (2.8) называется **интегральной формулой Муавра-Лапласа**. Чем больше n , тем точнее эта формула. При выполнении условия $npq \geq 20$ интегральная формула (2.8) так же, как и локальная, дает лишь незначительную погрешность вычисления вероятностей.

Функция (2.9) называется **функцией Лапласа**. Функция $\Phi(x)$ табулирована [3]. Таблица значений функции Лапласа для положительных значений x приведена в Приложении 3.

При определении значения функции $\Phi(x)$ следует помнить ее свойства:

- 1) функция $\Phi(x)$ – нечетная: $\Phi(-x) = -\Phi(x)$;
- 2) функция $\Phi(x)$ монотонно возрастает при положительных значениях x , причем при $x \rightarrow \infty$ функция $\Phi(x) \rightarrow 0,5$ (уже при $x > 5$ полагают $\Phi(x) \approx 0,5$).

Задача 2.6. Вероятность поражения мишени стрелком при одном выстреле 0,8. Производится 100 выстрелов. Найдите вероятность того, что:

- мишень поражена 75 раз;
- мишень поражена от 70 до 90 раз;
- мишень поражена не менее 80 раз.

Решение. По условию задачи проводится 100 экспериментов $n = 100$, вероятность успеха $p = 0,8$, $q = 1 - p = 0,2$.

Вероятность того, что событие появится ровно $k = 75$ раз, вычисляется по локальной формуле Муавра-Лапласа (2.6). Получим:

$$x = \frac{75 - 0,8 \cdot 100}{\sqrt{100 \cdot 0,8 \cdot 0,2}} = -\frac{5}{4} = -1,25, \quad P_{100}(75) \approx \frac{1}{\sqrt{100 \cdot 0,8 \cdot 0,2}} \cdot \varphi(-1,25).$$

По таблицам Приложения 2 находим $\varphi(-1,25) = \varphi(1,25) = 0,1826$, тогда окончательно имеем:

$$P_{100}(75) \approx \frac{1}{\sqrt{16}} 0,1826 \approx 0,0456.$$

Вероятность того, что мишень поражена от 70 до 90 раз, находится по интегральным формулам Муавра-Лапласа (2.8) – (2.10), получим:

$$x_1 = \frac{70 - 100 \cdot 0,8}{\sqrt{100 \cdot 0,8 \cdot 0,2}} = -2,5; \quad x_2 = \frac{90 - 100 \cdot 0,8}{\sqrt{100 \cdot 0,8 \cdot 0,2}} = 2,5;$$

$$P_{100}(70 \leq k \leq 90) \approx \Phi(2,5) - \Phi(-2,5) \approx \Phi(2,5) + \Phi(2,5) = 2\Phi(2,5).$$

По таблицам Приложения 3 находим:

$$P_{100}(70 \leq k \leq 90) = 2\Phi(2,5) = 2 \cdot 0,4938 = 0,9876;$$

Событие «мишень поражена не менее 80 раз» означает, что мишень поражена от 80 до 100 раз, тогда:

$$x_1 = \frac{80 - 100 \cdot 0,8}{\sqrt{100 \cdot 0,8 \cdot 0,2}} = 0; \quad x_2 = \frac{100 - 100 \cdot 0,8}{\sqrt{100 \cdot 0,8 \cdot 0,2}} = 5;$$

$$P_{100}(80 \leq k \leq 100) \approx \Phi(5) - \Phi(0) \approx 0,5 - 0 = 0,5.$$

Ответ: 0,0456; 0,9876; 0,5.

Задача 2.7. Процент всхожести семян пшеницы равен 90%. Найдите вероятность того, что из 500 посеянных семян взойдут от 400 до 440 семян.

Решение. По условию задачи $n = 500$, $p = 0,9$, $q = 0,1$, $a = 400$, $b = 440$.

Применив интегральную теорему Муавра-Лапласа, получим:

$$x_1 = \frac{400 - 500 \cdot 0,9}{\sqrt{500 \cdot 0,9 \cdot 0,1}} = -7,45, \quad x_2 = \frac{440 - 500 \cdot 0,9}{\sqrt{500 \cdot 0,9 \cdot 0,1}} = -1,49,$$

$$P_{500}(400 \leq k \leq 440) \approx \Phi(-1,49) - \Phi(-7,45) \approx -\Phi(1,49) + \Phi(7,45) \approx \\ \approx (-0,4319 + 0,5) \approx 0,0681.$$

Ответ: 0,0681.

2.4 Вероятность отклонения относительной частоты события от постоянной вероятности в независимых испытаниях

Теорема. Если в схеме n независимых испытаний событие A наступает в каждом из них с вероятностью $(0 < p < 1)$, а $\frac{m}{n}$ – относительная частота появления события A , то для любого заданного $\varepsilon > 0$

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \leq \varepsilon\right) \cong 2\Phi\left(\varepsilon \sqrt{\frac{n}{pq}}\right).$$

Доказательство

Преобразуем неравенство

$$\left|\frac{m}{n} - p\right| \leq \varepsilon,$$

раскрывая модуль, получим двойное неравенство:

$$-\varepsilon \leq \frac{m}{n} - p \leq \varepsilon.$$

Выполнив преобразования, получим:

$$-\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sqrt{pq}} \leq \frac{m-np}{\sqrt{npq}} \leq \frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sqrt{pq}}.$$

Обозначим:

$$x_1 = -\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sqrt{pq}}, \quad x_2 = \frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sqrt{pq}},$$

тогда

$$P\left(-\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sqrt{pq}} \leq \frac{m-np}{\sqrt{npq}} \leq \frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sqrt{pq}}\right) = \Phi\left(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sqrt{pq}}\right) - \Phi\left(-\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sqrt{pq}}\right) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sqrt{pq}}\right).$$

Теорема доказана.

Задача 2.8. 80% всей продукции фабрики составляет продукция первого сорта. Для контроля качества берут случайную выборку из 625 единиц продукции. Найдите вероятность того, что относительная частота появления в выборке продукции первого сорта отклонится от ее вероятности по абсолютной величине не более чем на 0,04.

Решение. По условию $n = 625$; $p = 0,8$; $q = 1 - p = 0,2$; $\varepsilon = 0,04$.

Необходимо найти $P\left(\left|\frac{m}{625} - 0,8\right| \leq 0,04\right)$.

$$P\left(\left|\frac{m}{625} - 0,8\right| \leq 0,04\right) \approx 2\Phi\left(0,04\sqrt{\frac{625}{0,8 \cdot 0,2}}\right) = 2\Phi(2,5) = 2 \cdot 0,4938 = 0,9876.$$

Ответ: 0,9876.

Задача 2.9. Вероятность появления события в каждом из 1000 независимых испытаний равна 0,7. Найдите с вероятностью 0,8324 границы, в которых будет заключено число m появления события в этих независимых испытаниях.

Решение. По условию $n = 1000$; $p = 0,7$; $q = 1 - 0,7 = 0,3$;

$P\left(\left|\frac{m}{1000} - 0,7\right| \leq \varepsilon\right) \cong 0,8324$, тогда:

$$2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{1000}{0,7 \cdot 0,3}}\right) = 0,8324.$$

$$\text{Откуда } \Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{1000}{0,7 \cdot 0,3}}\right) = 0,4162 \text{ или } \Phi(69\varepsilon) = 0,4162.$$

По таблице значений функции Лапласа (Приложение 3) $\Phi(1,38) = 0,4162$,

тогда $69\varepsilon = 1,38$, откуда $\varepsilon = \frac{1,38}{69} = 0,02$.

Таким образом, с вероятностью 0,8324 отклонение относительной частоты количества появлений события A от вероятности 0,7 удовлетворяет неравенству:

$$\left| \frac{m}{1000} - 0,7 \right| \leq 0,02,$$

тогда

$$0,68 \leq \frac{m}{1000} \leq 0,72.$$

Итак, искомое количество появлений события A в 1000 испытаниях с вероятностью 0,8324:

$$680 \leq m \leq 720.$$

Ответ: $680 \leq m \leq 720$.

Вопросы и задания для самоконтроля

1. Расскажите, что представляет собой схема Бернулли?
2. В каких случаях применяется формула Бернулли?
3. Запишите формулу Бернулли.
4. Что такое асимптотические формулы?
5. Почему возникает необходимость применения асимптотических формул?
6. В каких случаях применяется локальная теорема Муавра-Лапласа?
7. В каких случаях применяется интегральная теорема Муавра-Лапласа?
8. Сформулируйте теорему Пуассона.
9. Что такое наивероятнейшее число наступления события и как оно вычисляется?
10. Расскажите, в каких случаях целесообразнее применять локальную формулу Муавра-Лапласа, а в каких формулу Пуассона и почему?
11. Запишите формулу, по которой вычисляется вероятность отклонения относительной частоты события от постоянной вероятности в независимых испытаниях.
12. На потоке обучается 68 студентов. Найдите наивероятнейшее число тех, кто опоздает на лекцию, если вероятность опоздать для каждого равна 0,05.
13. Обычный человек примерно в половине случаев правильно угадывает, в какой руке спрятан мелкий предмет. Мистер X правильно угадал в трех случаях из четырех. Случайно ли это или при таком результате можно говорить о его необычных способностях?
14. Сколько раз необходимо подбросить игральную кость, чтобы наивероятнейшее количество выпадения шестерки было равно 10?
15. На факультете обучается 1825 студентов. Какова вероятность того, что 1-е января окажется днем рождения одновременно для 4-х студентов?
16. В среднем 5% студентов носят очки. Какова вероятность того, что из 200 студентов, находящихся в аудитории, не менее 10% носят очки?
17. Является ли формула Муавра-Лапласа точной или приближенной?
18. При каких p и q формула Муавра-Лапласа дает более точные

результаты?

19. При каких p и q формула Муавра-Лапласа дает большую погрешность по сравнению с формулой Пуассона?

20. Из группы 200 человек, сдававших экзамен, 45 человек экзамен не сдали. Оцените вероятности провала и успеха на экзамене. Используя интегральную теорему Муавра-Лапласа постройте приближенные доверительные границы для вероятности успешной сдачи экзамена при $p = 0,8$.

21. Сформулируйте свойства функции Лапласа.

22. Как находятся значения функции Лапласа?

23. Является ли интеграл Лапласа берущимся в элементарных функциях?

24. В каких случаях используется функция Лапласа?

25. Сформулируйте важнейшее условие, без которого схема Бернулли теряет смысл.

ТЕМА 3. ДИСКРЕТНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

3.1 Понятие дискретной случайной величины

Случайная величина – это величина, которая в результате опыта может принять то или иное, но только одно значение, причем заранее, до опыта неизвестно, какое именно.

Примеры случайных величин:

- 1) число родившихся детей в течение суток в г. Луганске;
- 2) количество бракованных изделий в данной партии;
- 3) число произведенных выстрелов до первого попадания;
- 4) дальность полета артиллерийского снаряда;
- 5) расход электроэнергии на предприятии за месяц.

Случайные величины могут быть как дискретными, так и непрерывными.

Дискретная случайная величина – это случайная величина, число возможных значений которой либо конечное, либо бесконечное счетное множество.

Непрерывная случайная величина – это случайная величина, которая может принимать все значения из некоторого конечного или бесконечного промежутка.

Так, в приведенных выше примерах 1, 2, 3 – дискретные случайные величины (в примерах 1, 2 – с конечным множеством значений; в примере 3 – с бесконечным, но счетным множеством значений), а в примерах 4, 5 – непрерывные случайные величины.

Наиболее полным, исчерпывающим описанием случайной величины является закон ее распределения.

Законом распределения случайной величины называется всякое соотношение, устанавливающее связь между возможными значениями случайной величины и соответствующими им вероятностями.

3.2 Закон распределения дискретной случайной величины

Для **дискретной** случайной величины закон распределения может быть задан в виде таблицы, аналитически (в виде формулы) или графически.

Пусть случайная величина X может принимать значения $x_1, x_2, \dots, x_n$. В результате опыта величина X примет одно из своих возможных значений, т. е. произойдет одно событие из полной группы несовместных событий: $X = x_1, X = x_2, \dots, X = x_n$. Все эти события являются несовместными, потому что случайная величина X может принять в результате опыта только одно значение, и образуют полную группу событий.

Обозначим вероятности этих событий $P(X = x_1) = p_1$, т.е. вероятность того, что в результате опыта случайная величина X примет значение x_1 , равна p_1 , $P(X = x_2) = p_2, \dots, P(X = x_n) = p_n$. Поскольку события образуют полную группу, то

$$\sum_{i=1}^n P(X = x_i) = \sum_{i=1}^n p_i = 1.$$

Простейшей формой задания закона распределения дискретной случайной величины X является таблица, в которой перечислены возможные значения случайной величины и соответствующие им вероятности:

X	x_1	x_2	$\dots$	x_n
P	p_1	p_2	$\dots$	p_n

Такая таблица называется **рядом распределения**.

Задача 3.1. Охотник стреляет в цель до первого попадания. Найдите ряд распределения случайной величины X – числа выстрелов до первого попадания, если вероятность попасть в цель при каждом выстреле равна 0,25, а количество выстрелов не ограничено.

Решение. Случайная величина X может принимать значения 1, 2, ..., n . Вероятность того, что при n выстрелах $n-1$ раз будет промах, а при последнем выстреле цель будет поражена, если вероятность поражения при каждом выстреле p , а вероятность промаха при этом q , по теореме умножения вероятностей независимых событий равна $q^{n-1} \cdot p$. По условию задачи $p = 0,25$, $q = 1 - p = 1 - 0,25 = 0,75$, тогда

$$P_1 = P(X = 1) = 0,75^0 \cdot 0,25 = 0,25 \text{ – цель поражена при первом выстреле;}$$

$P_2 = P(X = 2) = 0,75 \cdot 0,25$ – вероятность того, что цель поражена при втором выстреле, а при первом был промах;

$P_3 = P(X = 3) = 0,75^2 \cdot 0,25$ – вероятность того, что цель поражена после двух промахов, ... ,

$$P_n = P(X = n-1) = 0,75^{n-1} \cdot 0,25 \text{ – цель поражена после } n-1 \text{ промаха.}$$

Ряд распределения, имеет вид:

X	1	2	3		n
P	0,25	$0,75 \cdot 0,25$	$0,75^2 \cdot 0,25$	...	$0,75^{n-1} \cdot 0,25$

Проверим выполнение условия: $\sum_{i=1}^n P_i = 1$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} P_n = \sum_{n=1}^{\infty} 0,75^{n-1} \cdot 0,25 = \frac{0,25}{1-0,75} = 1 \quad \text{– сумма бесконечно-убывающей}$$

геометрической прогрессии.

Ряд распределения может быть изображен графически, если по оси абсцисс откладывать значения случайной величины, а по оси ординат – соответствующие им вероятности. Соединение полученных точек образует

ломаную, называемую **многоугольником** или **полигоном распределения вероятностей** (рис. 3.1).

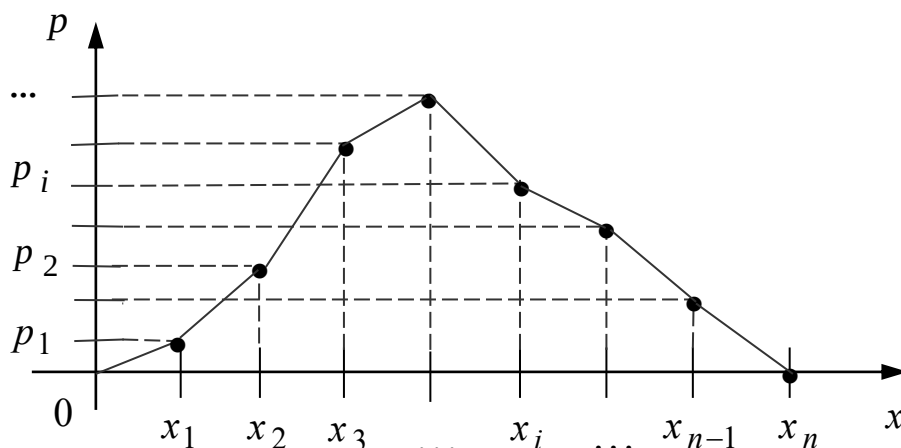


Рисунок 3.1 – Многоугольник распределения вероятностей

3.3 Числовые характеристики дискретных случайных величин

Одной из важных характеристик среднего значения случайной величины является математическое ожидание.

Закон (ряд) распределения дискретной случайной величины дает информацию о ней, поскольку позволяет вычислить вероятности любых событий, связанных со случайной величиной. Однако такой закон (ряд) распределения бывает трудно обозримым, не всегда удобным.

Рассмотрим следующую задачу.

Задача 3.2. Известны законы распределения двух случайных величин X_1 и X_2 – числа очков, выбиваемых 1-м и 2-м стрелками.

X_1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
P_1	0,15	0,11	0,04	0,5	0,4	0,10	0,10	0,04	0,05	0,12	0,20

X_2	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
P_2	0,01	0,03	0,05	0,9	0,11	0,24	0,21	0,10	0,04	0,12	0,02

Необходимо выяснить, какой из двух стрелков стреляет лучше.

Рассматривая ряды распределения случайных величин X_1 и X_2 ответить на этот вопрос довольно не просто из-за обилия числовых значений. К тому же у первого стрелка довольно большие значения вероятностей (например, больше 0,1) имеют крайние значения числа выбиваемых очков ($X_1 = 0; 1$ и $X_1 = 9; 10$), а у второго стрелка – промежуточные значения ($X_2 = 4; 5; 6$) (см. рис. 3.2.)

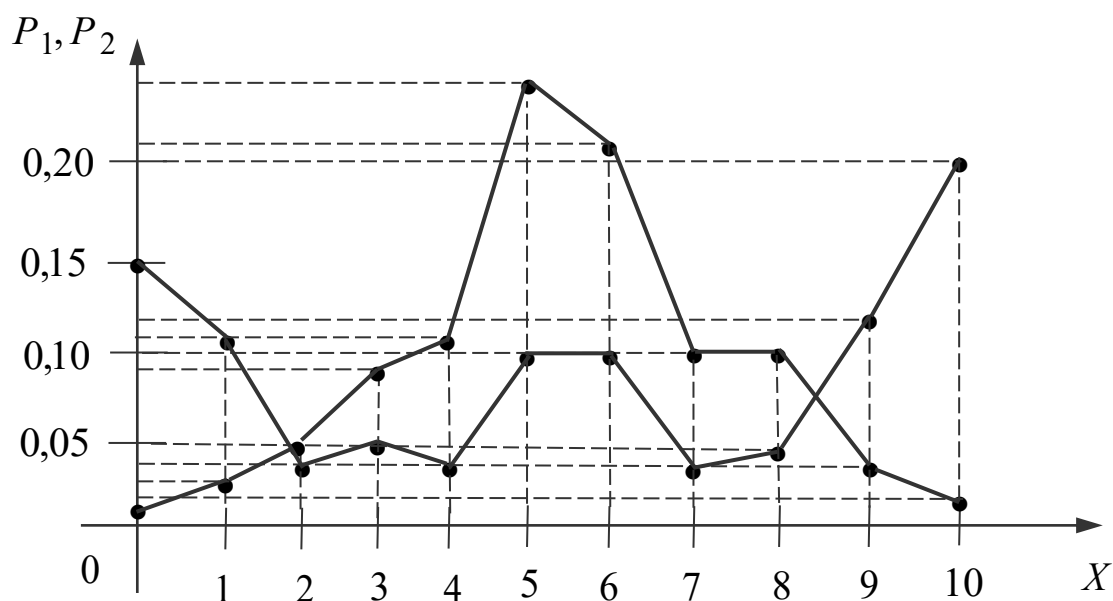


Рисунок 3.2 – Многоугольник распределения вероятностей

Очевидно, что из двух стрелков лучше стреляет тот, кто в среднем выбивает большее количество очков.

Таким средним значением случайной величины является ее математическое ожидание.

Математическим ожиданием дискретной случайной величины называют сумму произведений всех ее возможных значений на соответствующие им вероятности:

$$M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n = \sum_{i=1}^n x_i p_i, \quad (3.1)$$

причем математическое ожидание существует, если ряд в правой части равенства (3.1) сходится абсолютно.

Задача 3.3. Вычислить математические ожидания $M(X_1)$ и $M(X_2)$ в задаче 3.2 «о стрелках».

Решение. По формуле (3.1), получим:

$$M(X_1) = 0 \cdot 0,15 + 1 \cdot 0,11 + 2 \cdot 0,04 + 3 \cdot 0,05 + 4 \cdot 0,04 + 5 \cdot 0,10 + 6 \cdot 0,10 + 7 \cdot 0,04 + 8 \cdot 0,05 + 9 \cdot 0,12 + 10 \cdot 0,20 = 5,36,$$

$$M(X_2) = 0 \cdot 0,01 + 1 \cdot 0,03 + 2 \cdot 0,05 + 3 \cdot 0,09 + 4 \cdot 0,11 + 5 \cdot 0,24 + 6 \cdot 0,21 + 7 \cdot 0,10 + 8 \cdot 0,10 + 9 \cdot 0,004 + 10 \cdot 0,02 = 5,36,$$

т.е. среднее число выбиваемых очков у обоих стрелков одинаковое.

Ответ: 5,36.

Свойства математического ожидания

Свойство 1. Математическое ожидание постоянной величины равно самой постоянной величине:

$$M(C) = C.$$

Свойство 2. Постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания:

$$M(CX) = CM(X).$$

Свойство 3. Математическое ожидание произведения взаимно независимых случайных величин равно произведению математических ожиданий сомножителей:

$$M(X_1 X_2 \dots X_n) = M(X_1) \cdot M(X_2) \cdot \dots \cdot M(X_n).$$

Свойство 4. Математическое ожидание суммы случайных величин равно сумме математических ожиданий слагаемых:

$$M(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = M(X_1) + M(X_2) + \dots + M(X_n).$$

Характеристиками рассеяния возможных значений случайной величины вокруг математического ожидания служат, в частности, дисперсия и среднее квадратическое отклонение.

Дисперсией случайной величины X называется математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания

$$D(X) = M[X - M(X)]^2 = \sum_{i=1}^n [x_i - M(X)]^2 \cdot p_i. \quad (3.2)$$

Из свойств математического ожидания следует, что (3.2) можно расписать в виде

$$\begin{aligned} D(X) &= M[X - M(X)]^2 = M[X^2 - 2XM(X) + (M(X))^2] = \\ &= M(X^2) - M(2XM(X)) + M[(M(X))^2]. \end{aligned}$$

Значения $M(X)$ и $(M(X))^2$ являются постоянными, и, следовательно, их можно выносить за знак математического ожидания, тогда

$$D(X) = M(X^2) - 2M(X)M(X) + [M(X)]^2 = M(X^2) - [M(X)]^2.$$

Поэтому дисперсию можно вычислять и по формуле

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 p_i - [M(X)]^2. \quad (3.3)$$

Свойства дисперсии

Свойство 1. Дисперсия постоянной величины равна нулю:

$$D(C) = 0.$$

Действительно, для постоянной величины $M(C) = C$, тогда

$$D(C) = M[C - M(C)]^2 = M(C - C)^2 = 0.$$

Свойство 2. Постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии, предварительно возведя его в квадрат

$$D(CX) = C^2 D(X).$$

Действительно,

$$\begin{aligned} D(CX) &= M[CX - M(CX)]^2 = M[CX - CM(X)]^2 = \\ &= M[C^2(X - M(X))^2] = C^2 M[X - M(X)]^2 = C^2 D(X). \end{aligned}$$

Свойство 3. Дисперсия случайной величины не изменяется от прибавления к ней постоянной величины:

$$D(X+C) = M[X+C-M(X+C)]^2 = M[X+C-M(X)-M(C)]^2 = \\ = M[X+C-M(X)-C]^2 = M[X-M(X)]^2 = D(X).$$

Свойство 4. Дисперсия суммы случайных величин равна сумме дисперсий слагаемых:

$$D(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = D(X_1) + D(X_2) + \dots + D(X_n).$$

Средним квадратическим отклонением случайной величины называют квадратный корень из дисперсии:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}. \quad (3.4)$$

Задача 3.4. Задан закон распределения дискретной случайной величины X :

X	40	42	41	44
P	0,1	0,3	0,2	0,4

Найдите: математическое ожидание $M(X)$; дисперсию $D(X)$; среднее квадратическое отклонение σ .

Решение.

Математическое ожидание $M(X)$ находим по формуле (3.1), получим:

$$M(X) = 40 \cdot 0,1 + 42 \cdot 0,3 + 41 \cdot 0,2 + 44 \cdot 0,4 = 42,4.$$

Дисперсию вычислим по формуле (3.2), получим:

$$D(X) = (40 - 42,4)^2 \cdot 0,1 + (42 - 42,4)^2 \cdot 0,3 + (41 - 42,4)^2 \cdot 0,2 + (44 - 42,4)^2 \cdot 0,4 = \\ = (-2,4)^2 \cdot 0,1 + (-0,4)^2 \cdot 0,3 + (-1,4)^2 \cdot 0,2 + 1,6^2 \cdot 0,4 = \\ = 0,576 + 0,048 + 0,392 + 1,024 = 2,04.$$

Дисперсию $D(X)$ можно найти другим способом по формуле (3.3), получим:

$$D(X) = 40^2 \cdot 0,1 + 42^2 \cdot 0,3 + 41^2 \cdot 0,2 + 44^2 \cdot 0,4 - 42,4^2 = \\ = 160 + 529,2 + 336,2 + 774,4 - 1797,76 = 2,04.$$

Получили тот же результат.

Среднее квадратическое отклонение вычислим по формуле (3.4), получим:

$$\sigma(x) = \sqrt{D(x)} = \sqrt{2,04} \approx 1,43.$$

Ответ: $M(X) = 42,4$; $D(X) = 2,04$; $\sigma(x) \approx 1,43$.

Задача 3.5. Задан закон распределения дискретной случайной величины X :

X	-1	0	1	2	3
P	0,2	0,1	0,3	0,3	0,1

Найдите: $M(X)$; $M(X^2 + 1)$; $D(X)$; $D(3X)$; $D(2X - 1)$; $P(-1 < X < 2)$; $\sigma(X)$.

Решение. По формулам (3.1) – (3.4) и свойствам числовых характеристик дискретных случайных величин имеем:

$$M(X) = (-1) \cdot 0,2 + 0 \cdot 0,1 + 1 \cdot 0,3 + 2 \cdot 0,3 + 3 \cdot 0,1 = 1;$$

$$M(X^2 + 1) = M(X^2) + 1 = (-1)^2 \cdot 0,2 + 0 \cdot 0,1 + 1^2 \cdot 0,3 + 2^2 \cdot 0,3 + 3^2 \cdot 0,1 + 1 = 0,2 + 0 + 0,3 + 1,2 + 0,9 + 1 = 3,6.$$

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2 = 2,6 - 1 = 1,6;$$

$$D(3X) = 9D(X) = 9 \cdot 1,6 = 14,4;$$

$$D(2X - 1) = D(2X) = 4D(X) = 4 \cdot 1,6 = 6,4;$$

$$P(-1 < X < 2) = P(X = 0) + P(X = 1) = P(X = 2) = 0,1 + 0,3 + 0,3 = 0,7;$$

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{1,6} \approx 1,265.$$

Ответ: $M(X) = 1$; $M(X^2 + 1) = 3,6$; $D(X) = 1,6$; $D(3X) = 14,4$;
 $D(2X - 1) = 6,4$; $P(-1 < X < 2) = 0,7$; $\sigma(X) \approx 1,265$.

3.4 Функция распределения

Функцией распределения называют функцию $F(x)$, определяющую для каждого значения x вероятность того, что случайная величина X принимает значение, меньшее, чем x , т.е.

$$F(X) = P(X < x).$$

Часто вместо термина «функция распределения» используют термин «интегральная функция распределения».

Свойства функции распределения

Свойство 1. Значения функции распределения принадлежат отрезку $[0; 1]$:

$$\forall x: 0 \leq F(x) \leq 1.$$

Свойство 2. Функция распределения есть неубывающая функция:

$$\forall x_1, x_2: x_1 < x_2 \Rightarrow F(x_1) \leq F(x_2).$$

Свойство 3. Вероятность того, что случайная величина X примет значение, заключенное в интервале (a, b) , равна приращению функции распределения на этом интервале:

$$P(a < X < b) = F(b) - F(a). \quad (3.5)$$

Свойство 4. Если все возможные значения случайной величины X принадлежат интервалу (a, b) , то

$$F(x) = 0 \text{ при } x \leq a; F(x) = 1 \text{ при } x \geq b.$$

Следствие. Справедливы следующие предельные соотношения:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0; \lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1.$$

Задача 3.6. По цели производится три независимых выстрела. Вероятность попадания в цель при каждом равна 0,4. Постройте функцию распределения числа попаданий.

Решение. Обозначим X – число попаданий по мишени, тогда X может принимать следующие значения: 0, 1, 2, 3.

Вероятность возможных значений случайной величины определяем по формуле Бернулли (2.1):

$$P(X = x_i) = C_3^{x_i} p^{x_i} q^{3-x_i}, \text{ где } p = 0,4, q = 1 - p = 0,6.$$

Произведем вычисления:

$$P(X = 0) = C_3^0 \cdot 0,4^0 \cdot 0,6^{3-0} = 1 \cdot 1 \cdot 0,216 = 0,216;$$

$$P(X = 1) = C_3^1 \cdot 0,4^1 \cdot 0,6^{3-1} = 3 \cdot 0,4 \cdot 0,36 = 0,432;$$

$$P(X = 2) = C_3^2 \cdot 0,4^2 \cdot 0,6^{3-2} = \frac{3 \cdot 2}{2 \cdot 1} \cdot 0,16 \cdot 0,6 = 3 \cdot 0,16 \cdot 0,6 = 0,288;$$

$$P(X = 3) = C_3^3 \cdot 0,4^3 \cdot 0,6^{3-3} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot 0,064 \cdot 1 = 1 \cdot 0,064 = 0,064.$$

Составим ряд распределения:

X	0	1	2	3
P	0,216	0,432	0,288	0,064

Найдем функцию распределения:

при $x \leq 0$

$$F(x) = P(X < 0) = \sum_{x < 0} P(X = x_i) = 0;$$

при $0 < x \leq 1$

$$F(x) = P(X < 1) = \sum_{x < 1} P(X = x_i) = P(X = 0) = 0,216;$$

при $1 < x \leq 2$

$$F(x) = P(X < 2) = \sum_{x < 2} P(X = x_i) = P(X = 0) + P(X = 1) = 0,216 + 0,432 = 0,648;$$

при $2 < x \leq 3$

$$F(x) = P(X < 3) = \sum_{x < 3} P(X = x_i) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = 0,648 + 0,288 = 0,936;$$

при $x > 3$

$$F(x) = P(X > 3) = \sum_{x > 3} P(X = x_i) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) = 0,936 + 0,064 = 1.$$

Итак, функция распределения и ее график (рис. 3.3) имеют вид:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0; \\ 0,216 & \text{при } 0 < x \leq 1; \\ 0,648 & \text{при } 1 < x \leq 2; \\ 0,936 & \text{при } 2 < x \leq 3; \\ 1 & \text{при } x > 3. \end{cases}$$

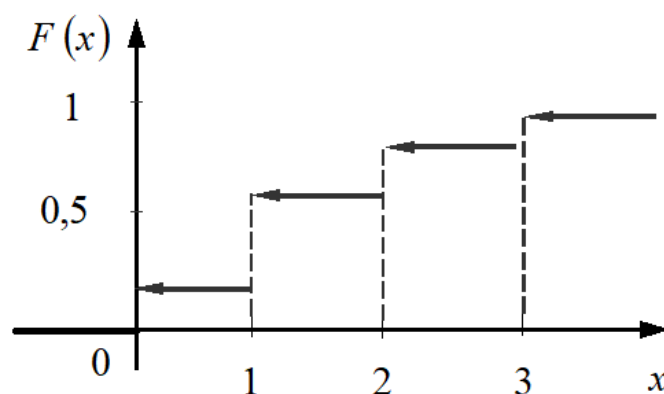


Рисунок 3.3 – График функции распределения задачи 3.6

3.5 Биномиальное распределение

Дискретная случайная величина называется распределенной по **биномиальному закону распределения**, если она принимает значения $0, 1, 2, \dots, n$ с вероятностями

$$P(X = k) = P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} p^k q^{n-k}, \quad (3.6)$$

где $k = 0, 1, 2, \dots, n$.

Как видим, вероятности $P(X = k)$ находятся по формуле Бернулли.

Следовательно, биномиальный закон распределения представляет собой закон распределения числа $X = k$ наступления события A в n независимых испытаниях, в каждом из которых оно может произойти с одной и той же вероятностью p .

Ряд биномиального распределения имеет вид:

X	0	1	2	...	k	...	n
P	q^n	$C_n^1 p q^{n-1}$	$C_n^2 p^2 q^{n-2}$		$C_n^k p^k q^{n-k}$		p^n

Закон называется **биномиальным**, потому что правую часть равенства (3.6) можно рассматривать как общий член разложения бинома Ньютона

$$(q + p)^n = C_n^0 p^n + C_n^{n-1} p q^{n-1} + \dots + C_n^k p^k q^{n-k} + \dots + C_n^n q^n.$$

Таким образом, первый член разложения q^n определяет вероятность наступления рассматриваемого события 0 раз в n независимых испытаниях; второй член $n p q^{n-1}$ определяет вероятность наступления события 1 раз, $\dots$, последний член p^n – вероятность наступления события n раз в n испытаниях.

Биномиальный закон распределения широко используется в теории и практике статистического контроля качества продукции, при описании фундаментальных систем массового обслуживания, в теории стрельбы и других областях.

Числовые характеристики биномиального распределения

Математическое ожидание случайной величины X , распределенной по биномиальному закону равно произведению числа испытаний на

вероятность появления события в одном испытании

$$M(X) = np. \quad (3.7)$$

Действительно, по формуле (3.1):

$$M(X) = \sum_{i=1}^n x_i p_i.$$

В случае биномиального распределения вероятности событий вычисляются по формуле

$$p_i = P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k}, \text{ где } k = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Поэтому,

$$M(X) = \sum_{i=1}^n x_i p_i = \sum_{k=0}^n k \cdot P_n(k).$$

Первый член суммы (соответствующий $k = 0$) равен нулю, следовательно, суммирование можно начинать с $k = 1$.

$$\begin{aligned} M(X) &= \sum_{k=1}^n k \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k} = \sum_{k=1}^n \frac{k \cdot n \cdot (n-1)!}{k \cdot (k-1)! \cdot (n-k)!} p \cdot p^{k-1} q^{n-k} = \\ &= n p \sum_{k=1}^n \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} p^{k-1} q^{n-k} = n p \sum_{s=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{s!(n-s-1)!} p^s q^{n-s-1}, \end{aligned}$$

где $s = k - 1 \Rightarrow k = s + 1$.

Пусть $n - 1 = m$, тогда:

$$M(X) = n p \sum_{s=0}^m \frac{m!}{s!(m-s)!} p^s q^{m-s} = n p \cdot 1 = n p.$$

Дисперсия случайной величины X , распределенной по биномиальному закону равна произведению числа испытаний на вероятности появления и не появления события в одном испытании

$$D(X) = npq. \quad (3.8)$$

Для вычисления дисперсии найдем сначала $M(X^2)$:

$$M(X^2) = \sum_{i=1}^n x_i^2 p_i = \sum_{i=1}^n (x_i^2 - x_i + x_i) p_i = \sum_{i=1}^n x_i(x_i - 1) p_i + \sum_{i=1}^n x_i p_i.$$

Второе слагаемое равно np , а первое обращается в ноль для $i = 1$.

Поэтому,

$$M(X^2) = \sum_{k=2}^n k(k-1) \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k} + np = \sum_{k=2}^n \frac{n!}{(k-2)!(n-k)!} p^{k-2} q^{n-k} + np.$$

Упростим первое слагаемое, вынеся за сумму $n(n-1)p^2$:

$$\sum_{k=2}^n \frac{n!}{(k-2)!(n-k)!} p^{k-2} q^{n-k} + np = n(n-1)p^2 \sum_{k=2}^n \frac{(n-2)!}{(k-2)!(n-k)!} p^{k-2} q^{n-k}.$$

Полагая, $n - 2 = s \Rightarrow n = s + 2$, получим:

$$n(n-1)p^2 \sum_{k=2}^{s+2} \frac{s!}{(k-2)!(s-(k-2))!} p^{k-2} q^{s-(k-2)}.$$

Примем здесь $k-2=m$, тогда получим:

$$n(n-1)p^2 \sum_{m=0}^s \frac{s!}{m!(s-m)!} p^m q^{s-m} = n(n-1)p^2 \cdot 1 = n(n-1)p^2.$$

Итак,

$$M(X^2) = n(n-1)p^2 + np.$$

Вычислим дисперсию:

$$\begin{aligned} D(X) &= M(X^2) - [M(X)]^2 = n(n-1)p^2 + np - n^2 p^2 = \\ &= n^2 p^2 - n p^2 + np - n^2 p^2 = np(1-p) = npq. \end{aligned}$$

Отсюда *среднее квадратическое отклонение*

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{npq}. \quad (3.9)$$

Задача 3.8. Производится пять подбрасываний монеты. Случайная величина X – число выпадений орла. Написать ряд распределения случайной величины X и изобразить его графически. Вычислить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X .

Решение. Случайная величина X – может принимать значения 0, 1, 2, 3, 4, 5. Вероятность того, что орел появится при одном броске, $p = \frac{1}{2} = 0,5$. По формуле (3.6) вероятность k успехов в пяти независимых испытаниях:

$$P_5(k) = P(X=k) = C_5^k \cdot 0,5^k \cdot 0,5^{5-k} = C_5^k \cdot 0,5^5.$$

По условию задачи: $n=5$; $p=0,5$; $q=1-p=1-0,5=0,5$.

Итак,

$$P(X=0) = P_5(0) = C_5^0 \cdot 0,5^5 = 0,03125,$$

$$P(X=1) = P_5(1) = C_5^1 \cdot 0,5^5 = 0,15625,$$

$$P(X=2) = P_5(2) = C_5^2 \cdot 0,5^5 = 0,3125,$$

$$P(X=3) = P_5(3) = C_5^3 \cdot 0,5^5 = 0,3125,$$

$$P(X=4) = P_5(4) = C_5^4 \cdot 0,5^5 = 0,15625,$$

$$P(X=5) = P_5(5) = C_5^5 \cdot 0,5^5 = 0,03125.$$

Получим ряд распределения и изобразим его графически (рис. 3.4):

X	0	1	2	3	4	5
P	0,03125	0,15625	0,3125	0,3125	0,15625	0,03125

Заметим, что

$$\sum_{i=1}^5 P_i = 0,03125 + 0,15625 + 0,3125 + 0,3125 + 0,15625 + 0,03125 = 1.$$

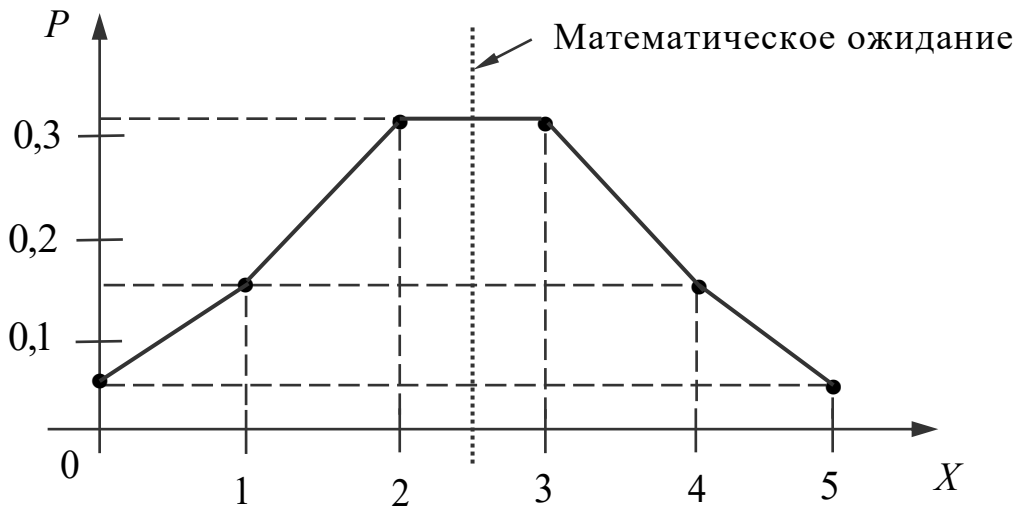


Рис. 3.4 – Многоугольник распределения вероятностей

Математическое ожидание вычислим по формуле (3.7), получим:

$$M(X) = n \cdot p = 5 \cdot 0,5 = 2,5.$$

Дисперсию и среднее квадратическое отклонение вычислим по формулам (3.8) и (3.9):

$$D(X) = n \cdot p \cdot q = 5 \cdot 0,5 \cdot 0,5 = 1,25,$$

$$\sigma(X) = \sqrt{n p q} = \sqrt{1,25} = 1,12.$$

Ответ: $M(X) = 2,5$; $D(X) = 1,25$; $\sigma(X) = 1,12$.

3.6 Распределение Пуассона

Ранее уже рассматривали теорему Пуассона и выводили формулу распределения многократных независимых испытаний, как случай асимптотического приближения биномиального распределения, когда число событий $n \rightarrow \infty$, а вероятность появления одного события $p \rightarrow 0$

$$P_n(k) = P(X = k) = \frac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Ряд распределения случайной величины X , распределенной по закону Пуассона, имеет вид:

x_i	0	1	2	...	k	...
p_i	$e^{-\lambda}$	$\lambda e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda^2}{2!} e^{-\lambda}$	...	$\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$	...

Очевидно, что определение закона Пуассона корректно, поскольку основное свойство ряда распределения $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$ выполняется:

$$\sum_{k=0}^{\infty} P_n(k) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!} = 1.$$

Для доказательства этого факта используем разложение функции e^x в ряд Маклорена:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots \quad (3.10)$$

Известно, что ряд (3.10) сходится при любом значении x , поэтому, положив $x = \lambda$, получим

$$e^\lambda = 1 + \frac{\lambda}{1!} + \frac{\lambda^2}{2!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!},$$

тогда

$$\sum_{k=0}^{\infty} P_n(k) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} e^\lambda = 1. \quad (3.11)$$

Числовые характеристики распределения Пуассона

Математическое ожидание случайной величины X , распределенной по закону Пуассона равно λ :

$$M(X) = \lambda. \quad (3.12)$$

Доказательство

Действительно, заменяя в (3.11) $k = m$, получим

$$\begin{aligned} M(X) &= \sum_{i=1}^n x_i p_i = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot P_n(k) = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \\ &= \lambda e^{-\lambda} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^m}{m!} = \lambda e^{-\lambda} e^\lambda = \lambda. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Таким образом, формула (3.12) доказана.

Дисперсия случайной величины X , распределенной по закону Пуассона равна λ

$$D(X) = \lambda. \quad (3.14)$$

Доказательство

Для вычисления дисперсии найдем сначала $M(X^2)$:

$$\begin{aligned} M(X^2) &= \sum_{k=0}^{\infty} k^2 P_n(k) = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = \lambda \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\lambda^{k-1} e^{-\lambda}}{(k-1)!} = \\ &= \lambda \left[\sum_{k=1}^{\infty} (k-1) \frac{\lambda^{k-1} e^{-\lambda}}{(k-1)!} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1} e^{-\lambda}}{(k-1)!} \right]. \end{aligned}$$

Однако, как уже было доказано выше в (3.13) и (3.11)

$$\sum_{k=1}^{\infty} (k-1) \frac{\lambda^{k-1} \cdot e^{-\lambda}}{(k-1)!} = \sum_{m=0}^{\infty} m \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!} = \lambda, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1} e^{-\lambda}}{(k-1)!} = 1,$$

поэтому $M(X^2) = \lambda(\lambda + 1)$. Отсюда

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2 = \lambda(\lambda + 1) - \lambda^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda.$$

Таким образом, (3.14) доказана.

Среднее квадратическое отклонение распределения Пуассона равно

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{\lambda}.$$

Задача 3.7. Завод отправил на базу 500 изделий. Вероятность повреждения изделия в пути равна 0,002. Найдите вероятность того, что в пути будет повреждено: ровно три изделия; менее трех изделий; более трех изделий; хотя бы одно изделие.

Решение. По условию задачи число изделий $n=500$ велико, а вероятность повреждения изделия в пути $p=0,002$ мала, и рассматриваемые события k (повреждение изделий) независимы, поэтому имеет место распределение Пуассона

$$P_n(k) = \frac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!}.$$

Вычислим λ :

$$\lambda = np = 500 \cdot 0,002 = 1.$$

Найдем вероятность того, что из 500 изделий будет повреждено ровно 3:

$$P_{500}(3) = \frac{1^3 \cdot e^{-1}}{3!} = \frac{0,36788}{6} = 0,0613.$$

Найдем вероятность того, что из 500 изделий будет повреждено менее трех изделий:

$$P_{500}(k < 3) = P_{500}(0) + P_{500}(1) + P_{500}(2) = e^{-1} + e^{-1} + \frac{e^{-1}}{2} = \frac{5}{2}e^{-1} = \frac{5}{2}0,0613 = 0,9197.$$

Найдем вероятность того, что из 500 изделий будет повреждено более трех изделий. Событие «повреждено более трех изделий» и «повреждено не более трех изделий» – противоположны, поэтому сумма вероятностей этих событий равна единице, тогда:

$$P_{500}(k > 3) = 1 - P_{500}(k \leq 3) = 1 - (P_{500}(0) + P_{500}(1) + P_{500}(2) + P_{500}(3)).$$

Используя полученные результаты:

$$P_{500}(k > 3) = 1 - (0,9197 + 0,0613) = 0,019.$$

Найдем вероятность того, что будет повреждено хотя бы одно изделие. События «повреждено хотя бы одно изделие» и «ни одно из изделий не повреждено» – противоположны, поэтому сумма вероятностей этих событий равна единице, тогда:

$$P_{500}(k \geq 3) = 1 - P_{500}(0) = 1 - e^{-1} = 1 - 0,3679 = 0,6321.$$

Ответ: 0,0613; 0,9197; 0,019; 0,6321.

3.7 Начальные и центральные теоретические моменты

Начальные и центральные теоретические моменты нужны для характеристики свойств случайной величины:

Начальным моментом порядка k случайной величины X называют математическое ожидание величины X^k :

$$\nu_k = M(X^k).$$

В частности, начальный момент первого порядка равен математическому ожиданию:

$$\nu_1 = M(X). \quad (3.15)$$

Центральным моментом порядка k случайной величины X называют математическое ожидание величины $[X - M(X)]^k$:

$$\mu_k = M[X - M(X)]^k.$$

В частности, центральный момент первого порядка равен нулю:

$$\mu_1 = M[X - M(X)] = 0;$$

центральный момент второго порядка равен дисперсии:

$$\mu_2 = M[X - M(X)]^2 = M(X^2) - [M(X)]^2 = \nu_2 - (\nu_1)^2 = D(X). \quad (3.16)$$

Центральный момент третьего порядка, учитывая, что $M(X)$ есть постоянная величина:

$$\begin{aligned} \mu_3 &= M[X - M(X)]^3 = M[X^3 - 3X^2 \cdot M(X) + 3X \cdot M^2(X) - M^3(X)] = \\ &= M(X^3) - 3M(X) \cdot M(X^2) + 3M^2(X) \cdot M(X) - M[M^3(X)] = \\ &= M(X^3) - 3M(X) \cdot M(X^2) + 3M^3(X) - M^3(X) = \\ &= M(X^3) - 3M(X) \cdot M(X^2) + 2M^3(X). \end{aligned}$$

По определению начального момента,

$$\nu_1 = M(X); \nu_2 = M(X^2); \nu_3 = M(X^3).$$

С учетом этого, окончательно имеем:

$$\mu_3 = \nu_3 - 3\nu_1\nu_2 + 2(\nu_1)^3. \quad (3.17)$$

Аналогично можно показать, что центральный момент четвертого порядка равен:

$$\mu_4 = \nu_4 - 4\nu_3\nu_1 + 6(\nu_1)^2\nu_2 - 3(\nu_1)^4. \quad (3.18)$$

Отметим, что третий центральный момент служит для характеристики асимметрии (скошенности) ряда распределения. Очевидно, он имеет размерность куба случайной величины. Чтобы получить безразмерную величину, его делят на среднеквадратическое отклонение случайной величины. Полученная величина называется **коэффициентом асимметрии случайной величины**. Четвёртый центральный момент служит для характеристики крутости (островершинности или плосковершинности) распределения.

Задача 3.9. Дискретная случайная величина X задана законом распределения:

X	1	3
P	0,4	0,6

Найдите начальные моменты первого, второго и третьего порядков.

Решение. Найдем начальный момент первого порядка по формуле (3.15):

$$\nu_1 = M(X) = 1 \cdot 0,4 + 3 \cdot 0,6 = 2,2.$$

Составим закон распределения случайной величины X^2 :

X^2	1	9
P	0,4	0,6

Найдем начальный момент второго порядка

$$\nu_2 = M(X^2) = 1 \cdot 0,4 + 9 \cdot 0,6 = 5,8.$$

Составим закон распределения случайной величины X^3 :

X^3	1	27
P	0,4	0,6

Найдем начальный момент третьего порядка

$$\nu_3 = M(X^3) = 1 \cdot 0,4 + 27 \cdot 0,6 = 13,6.$$

Ответ: $\nu_1 = 2,2$; $\nu_2 = 5,8$; $\nu_3 = 13,6$.

Задача 3.9. Дискретная случайная величина X задана законом распределения:

X	1	2	4
P	0,1	0,3	0,6

Найдите центральные моменты второго, третьего и четвертого порядков.

Решение. Для вычисления центральных моментов удобно воспользоваться формулами, выражающими начальные моменты:

$$\nu_1 = M(X) = 1 \cdot 0,1 + 2 \cdot 0,3 + 4 \cdot 0,6 = 3,1;$$

$$\nu_2 = M(X^2) = 1 \cdot 0,1 + 4 \cdot 0,3 + 16 \cdot 0,6 = 10,9;$$

$$\nu_3 = M(X^3) = 1 \cdot 0,1 + 8 \cdot 0,3 + 64 \cdot 0,6 = 40,9;$$

$$\nu_4 = M(X^4) = 1 \cdot 0,1 + 16 \cdot 0,3 + 256 \cdot 0,6 = 158,5.$$

Найдем центральные моменты по формулам (3.16) – (3.18):

$$\mu_2 = \nu_2 - (\nu_1)^2 = 10,9 - 3,1^2 = 1,29;$$

$$\mu_3 = \nu_3 - 3\nu_1\nu_2 + 2(\nu_1)^3 = 40,9 - 3 \cdot 3,1 \cdot 10,9 + 2 \cdot 3,1^3 = -0,888;$$

$$\mu_4 = \nu_4 - 4\nu_3\nu_1 + 6(\nu_1)^2\nu_2 - 3(\nu_1)^4 = 158,5 - 4 \cdot 40,9 \cdot 3,1 + 6 \cdot 10,9 \cdot 3,1^2 - 3 \cdot 3,1^4 = 2,777.$$

Ответ: $\mu_2 = 1,29$; $\mu_3 = -0,888$; $\mu_4 = 2,777$.

Вопросы и задания для самоконтроля

1. Сформулируйте определение случайной величины.
2. Сформулируйте определение дискретной случайной величины.
3. Сформулируйте определение закона распределения дискретной случайной величины.
4. Перечислите способы задания дискретной случайной величины.
5. Что такое ряд распределения дискретной случайной величины?

6. Сформулируйте определение многоугольника распределения дискретной случайной величины.
7. Перечислите числовые характеристики дискретной случайной величины. Что они характеризуют?
8. Сформулируйте определение математического ожидания случайной величины.
9. Что называется дисперсией случайной величины?
10. Запишите формулу вычисления математического ожидания дискретной случайной величины.
11. Запишите формулу вычисления дисперсии случайной величины.
12. Перечислите свойства математического ожидания случайной величины.
13. Перечислите свойства дисперсии случайной величины.
14. Сформулируйте определение среднего квадратического отклонения.
15. Запишите формулу вычисления среднего квадратического отклонения.
16. Сформулируйте определение биномиального закона распределения.
17. Запишите формулу биномиального закона распределения дискретной случайной величины.
18. Запишите формулы для вычисления числовых характеристик биномиального закона распределения.
19. Мистер X , имея 6 ключей, хочет открыть дверь. При этом он подбирает ключи один за другим случайно, зная, что только один ключ подходит к замку. Найдите закон распределения, математическое ожидание и дисперсию числа испытаний при условии, что после неудачной попытки открыть ключ устраняется. Постройте многоугольник распределения. Определите вероятность того, что испытаний будет не больше двух.
20. Найдите математическое ожидание биномиальной случайной величины X – числа появлений события A в четырёх независимых испытаниях, если вероятности появления события в этих испытаниях одинаковы и $D(X)=0,5$.
21. Какие типы случайных величин вам известны?
22. Какие числовые характеристики дискретных случайных величин вам известны?
23. Два стрелка совершают по одному выстрелу в мишень. Вероятность попадания в мишень первым стрелком равна 0,7, вторым – 0,8. Составьте закон распределения числа попаданий в мишень. Найдите математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение.
24. Верно ли, что если случайная величина представляет собой сумму двух независимых случайных величин, распределенных каждая по закону Пуассона, то она также распределена по закону Пуассона? Почему?
25. Верно ли, что распределение Пуассона также называют законом «редких» событий? Почему?

ТЕМА 4. НЕПРЕРЫВНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

4.1 Функция распределения (интегральная функция)

Для непрерывных случайных величин функция распределения вводится так же, как и для дискретных случайных величин и имеет такое же определение.

Функцией распределения называют функцию $F(x)$, определяющую для каждого значения x вероятность того, что случайная величина X принимает значение, меньшее, чем x , т.е.

$$F(X) = P(X < x).$$

Для непрерывных случайных величин вместо термина «функция распределения» также используют термин «интегральная функция распределения». Функция распределения непрерывной случайной величины обладает теми же свойствами, что и функция распределения дискретной случайной величины перечисленными в п.п. 3.3.

Отметим, что **функция распределения непрерывной случайной величины является непрерывной функцией.**

Задача 4.1. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 2, \\ 0,5x - 1, & \text{при } 2 < x \leq 4, \\ 1, & \text{при } x > 4. \end{cases}$$

Постройте график функции распределения. Найдите вероятность того, что в результате испытания величина X примет значения:

- меньше 0,2;
- меньше 2,5;
- от 2,5 до 3;
- не меньше 2,5;
- не меньше 5.

Решение. Построим график функции распределения (рис. 4.1):

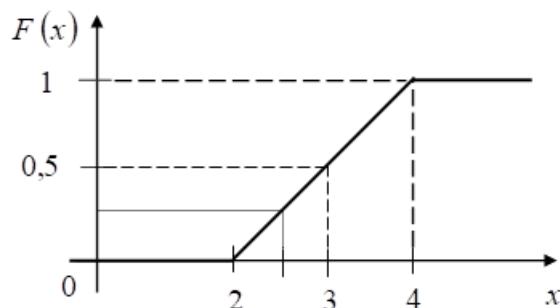


Рисунок 4.1 – График функции $F(x)$ Задачи 4.1

Так как при $x \leq 2$ функция $F(x) = 0$, то $F(0,2) = 0$, т.е. $P(X < 0,2) = 0$.

Вероятность того, что X примет значение, заключенное в интервале (a, b) , согласно (3.5), равна приращению функции распределения на этом интервале $P(a < X < b) = F(b) - F(a)$.

Действительно, пусть $b > a$

$$F(b) = P(X < b) = P[(X < a) + (a \leq X < b)] = P(X < a) + P(a \leq X < b) = F(a) + P(a \leq X < b),$$

тогда

$$F(b) - F(a) = P(a \leq X < b).$$

Положив $a = 0$, $b = 2,5$, получим:

$$P(0 \leq X < 2,5) = F(2,5) - F(0) = 0,5 \cdot 2,5 - 1 - 0 = 1,25 - 1 = 0,25.$$

Аналогично получим:

$$P(2,5 \leq X \leq 3) = F(3) - F(2,5) = (0,5 \cdot 3 - 1) - (0,5 \cdot 2,5 - 1) = (1,5 - 1) - (1,25 - 1) = 0,5 - 0,25 = 0,25.$$

События $X \geq 2,5$ и $X < 2,5$ противоположны, поэтому $P(X \geq 2,5) + P(X < 2,5) = 1$. Отсюда, учитывая, что $P(X < 2,5) = 0,25$, получим $P(X \geq 2,5) = 1 - 0,25 = 0,75$.

Сумма вероятностей противоположных событий равна единице, т.е. $P(X \geq 5) + P(X < 5) = 1$. Отсюда, используя условие, в силу которого при $x > 4$ функция $F(x) = 1$, получим:

$$P(X \geq 5) = 1 - P(X < 5) = 1 - 1 = 0.$$

Ответ: 0; 0,25; 0,25; 0,75; 0.

4.2 Плотность распределения вероятностей непрерывной случайной величины (дифференциальная функция)

Для непрерывных случайных величин вводится понятие плотности распределения вероятностей (дифференциальной функции).

Плотностью распределения вероятностей непрерывной случайной величины называют первую производную от функции распределения:

$$f(x) = F'(x). \quad (4.1)$$

Часто вместо термина «плотность распределения вероятностей» используют термины «плотность вероятностей» и «дифференциальная функция».

Вероятность того, что непрерывная случайная величина X примет значение, принадлежащее интервалу (a, b) , определяется равенством

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x) dx. \quad (4.2)$$

Зная плотность распределения, можно найти функцию распределения

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt. \quad (4.3)$$

Плотность распределения обладает следующими свойствами.

Свойство 1. Плотность распределения вероятностей неотрицательна, т.е.

$$f(x) \geq 0.$$

Действительно, так как $F(x)$ – неубывающая функция, то

$$F'(x) = f(x) \geq 0.$$

Это означает, что график плотности распределения вероятностей, называемый кривой распределения, не ниже оси абсцисс и плотность может принимать сколь угодно большие значения.

Свойство 2. Вероятность того, что непрерывная случайная величина X примет значения из промежутка $[a, b]$ равна интегралу от плотности распределения, взятому по этому интервалу:

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) dx. \quad (4.4)$$

Действительно,

$$P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a),$$

так как $F(x)$ – первообразная плотности распределения вероятностей, то по формуле Ньютона-Лейбница, имеем:

$$F(b) - F(a) = \int_a^b F'(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

Свойство 3. Несобственный интеграл от плотности распределения в пределах от $-\infty$ до $+\infty$ равен единице:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1. \quad (4.5)$$

По предыдущим свойствам

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = F(+\infty) - F(-\infty) = 1 - 0 = 1.$$

Задача 4.2. Случайная величина X подчинена закону распределения с плотностью

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 0, \\ a \sin x, & \text{при } 0 < x \leq \pi, \\ 0, & \text{при } x > \pi. \end{cases}$$

Найдите коэффициент a . Постройте график плотности распределения вероятностей. Найдите вероятность попадания случайной величины в промежуток от 0 до $\frac{\pi}{4}$.

Решение. Для определения коэффициента a воспользуемся свойством 3 плотности распределения вероятностей, согласно (4.5), получим:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_0^{\pi} a \sin x dx = -a \cos x \Big|_0^{\pi} = 2a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{2}.$$

График $f(x)$ изображен на рис.4.2.

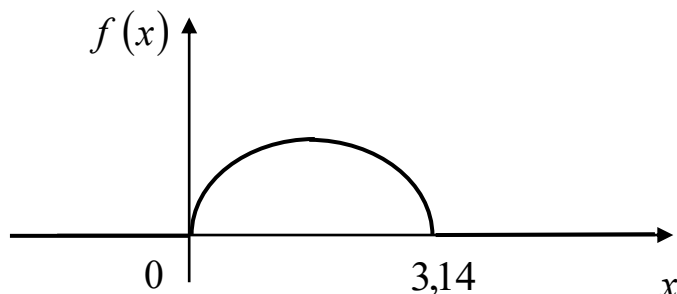


Рисунок 4.2 – График $f(x)$ задачи 4.2

По свойству 2 плотности распределения вероятностей, используя (4.4), получим:

$$P\left(0 < X < \frac{\pi}{4}\right) = \int_0^{\pi/4} \frac{1}{2} \sin x dx = \frac{1}{2} \cos x \Big|_0^{\pi/4} = \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right) \approx 0,15.$$

Ответ: 0,15.

4.3 Числовые характеристики непрерывных случайных величин

Математическим ожиданием непрерывной случайной величины X , возможные значения которой принадлежат всей оси Ox , называется число

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx, \quad (4.6)$$

где $f(x)$ – плотность распределения случайной величины.

Предполагается, что интеграл сходится абсолютно.

В частности, если все значения непрерывной случайной величины X принадлежат интервалу (a, b) , то

$$M(X) = \int_a^b x f(x) dx. \quad (4.7)$$

Все свойства математического ожидания, сформулированные выше при рассмотрении дискретных случайных величин (см. 3.3) справедливы и для математического ожидания непрерывных случайных величин.

Если $Y = \varphi(X)$ – функция случайного аргумента X , возможные значения которого принадлежат всей оси Ox , то

$$M[\varphi(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) f(x) dx.$$

В частности, если возможные значения X принадлежат интервалу (a, b) , то

$$M[\varphi(x)] = \int_a^b \varphi(x) f(x) dx.$$

Если математическое ожидание $M(X)$ существует и кривая распределения симметрична относительно прямой $x = C$, то $M(x) = C$.

Модой $M_0(X)$ непрерывной случайной величины X называют то ее возможное значение, которому соответствует локальный максимум плотности распределения. В частности, если распределение имеет два одинаковых максимума, то его называют **бимодальным**.

Медианой $M_e(X)$ непрерывной случайной величины X называют то ее возможное значение, которое определяется равенством

$$P[X < M_e(X)] = P[X > M_e(X)].$$

Геометрически медиану можно истолковать как точку, в которой ордината $f(x)$ делит пополам площадь, ограниченную кривой распределения.

Дисперсией непрерывной случайной величины X возможные значения которой принадлежат всей оси Ox , называется число, которое определяется равенством

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} [x - M(X)]^2 f(x) dx, \quad (4.8)$$

или равносильным равенством

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx - [M(X)]^2.$$

В частности, если все возможные значения X принадлежат интервалу (a, b) , то

$$D(X) = \int_a^b [x - M(X)]^2 f(x) dx$$

или

$$D(X) = \int_a^b x^2 f(x) dx - [M(X)]^2. \quad (4.9)$$

Все свойства дисперсии, сформулированные выше при рассмотрении дискретных случайных величин (см. 3.3) справедливы и для дисперсии непрерывных случайных величин.

Если $Y = \varphi(X)$ – функция случайного аргумента X , причем возможные значения X принадлежат всей оси Ox , то

$$D[\varphi(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} [\varphi(x) - M[\varphi(x)]]^2 f(x) dx$$

или

$$D[\varphi(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^2(x) f(x) dx - [M[\varphi(X)]]^2.$$

В частности, если возможные значения X принадлежат интервалу (a, b) ,
то

$$D[\varphi(x)] = \int_a^b [\varphi(x) - M[\varphi(x)]]^2 f(x) dx$$

или

$$D[\varphi(x)] = \int_a^b \varphi^2(x) f(x) dx - [M[\varphi(X)]]^2.$$

Среднее квадратическое отклонение непрерывной случайной величины определяется так же, как и для дискретной величины:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}. \quad (4.10)$$

Начальный теоретический момент порядка k непрерывной случайной величины X определяется равенством

$$\nu_k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x) dx.$$

Центральный теоретический момент порядка k непрерывной случайной величины X определяется равенством

$$\mu_k = \int_{-\infty}^{\infty} [x - M(X)]^k f(x) dx.$$

В частности, если возможные значения X принадлежат интервалу (a, b) ,
то

$$\nu_k = \int_a^b x^k f(x) dx, \quad \mu_k = \int_{-\infty}^{\infty} [x - M(X)]^k f(x) dx.$$

Очевидно, что если $k=1$, то $\nu_1 = M(x)$, $\mu_1 = 0$; если $k=2$, то, $\mu_2 = D(x)$.

Для непрерывных случайных величин центральные моменты выражаются через начальные моменты по формулам:

$$\begin{aligned} \mu_2 &= \nu_2 - \nu_1^2, \\ \mu_3 &= \nu_3 - 3\nu_1\nu_2 + 2\nu_1^3, \\ \mu_4 &= \nu_4 - 4\nu_1\nu_3 + 6\nu_1^2\nu_2 - 3\nu_1^4. \end{aligned}$$

Задача 4.3. Непрерывная случайная величина X задана интегральной функцией распределения

$$F(X) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 0, \\ x^3, & \text{при } 0 < x \leq 1, \\ 1, & \text{при } x > 1. \end{cases}$$

Найдите: дифференциальную функцию распределения $f(x)$; математическое ожидание $M(X)$; дисперсию $D(X)$.

Решение. Дифференциальную функцию распределения $f(x)$ непрерывной случайной величины X найдем по (4.1), тогда искомая дифференциальная функция имеет вид:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 0, \\ 3x^2, & \text{при } 0 < x \leq 1, \\ 0, & \text{при } x > 1. \end{cases}$$

Если непрерывная случайная величина X задана функцией $f(x)$, то её математическое ожидание определяется формулой (4.6), однако, так как функция $f(x)$ при $x < 0$ и при $x \geq 1$ равна нулю, то математическое ожидание следует искать по формуле (4.7), тогда получим:

$$M(X) = \int_0^1 x f(x) dx = \int_0^1 x \cdot 3x^2 dx = \frac{3x^4}{4} \Big|_0^1 = \frac{3}{4}.$$

Дисперсию $D(X)$ определим по формуле (4.8), получим:

$$\begin{aligned} D(X) &= \int_0^1 \left(x - \frac{3}{4}\right)^2 \cdot 3x^2 dx = 3 \int_0^1 \left(x^4 - \frac{3}{2}x^3 + \frac{9}{16}x^2\right) dx = \\ &= 3 \cdot \left[\frac{x^5}{5} - \frac{3x^4}{8} + \frac{3x^3}{16} \right]_0^1 = 3 \cdot \left(\frac{1}{5} - \frac{3}{8} + \frac{3}{16} \right) = \frac{3}{80}. \end{aligned}$$

Ответ: $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 0, \\ 3x^2, & \text{при } 0 < x \leq 1, \\ 0, & \text{при } x > 1; \end{cases} M(X) = \frac{3}{4}; D(X) = \frac{3}{80}.$

Задача 4.4. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(X) = \begin{cases} 0, & x \leq -1, \\ (x+1)^2, & -1 < x \leq 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

Найдите: $M(X)$; $D(X)$; $D(2X+1)$; $P\left(-\frac{1}{2} < X < -\frac{1}{3}\right)$.

Решение. Найдем функцию плотности распределения вероятностей по формуле (4.1), получим:

$$f(X) = F'(X) = \begin{cases} 0, & x \leq -1, \\ 2(x+1), & -1 < x \leq 0, \\ 0, & x > 0. \end{cases}$$

Математическое ожидание случайной величины X находим по формуле (4.7):

$$M(X) = \int_{-1}^0 x f(x) dx = \int_{-1}^0 x \cdot 2(x+1) dx = \int_{-1}^0 (2x^2 + 2x) dx = \left[\frac{2}{3}x^3 + \frac{2}{2}x^2 \right]_{-1}^0 = -\frac{1}{3}.$$

Дисперсию случайной величины X – по формуле (4.9):

$$D(X) = \int_{-1}^0 x^2 \cdot 2(x+1) dx - \left(-\frac{1}{3}\right)^2 = 2 \int_{-1}^0 (x^2 + x^3) dx - \frac{1}{9} =$$

$$= 2 \cdot \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^0 = 2 \cdot \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{3} \right) - \frac{1}{9} = -\frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{1}{9} = \frac{-9+12-2}{18} = \frac{1}{18}.$$

Используя свойства дисперсии, получим:

$$D(2X+1) = D(2X) = 4D(X) = \frac{4}{18} = \frac{2}{9}.$$

$$P\left(-\frac{1}{2} < X < -\frac{1}{3}\right) = F\left(-\frac{1}{3}\right) - F\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{3}+1\right)^2 - \left(-\frac{1}{2}+1\right)^2 = \frac{4}{9} - \frac{1}{4} = \frac{7}{36}.$$

Ответ: $-\frac{1}{3}; \frac{1}{18}; \frac{2}{9}; \frac{7}{36}.$

4.4 Равномерный закон распределения

Непрерывная случайная величина X имеет **равномерный закон распределения** на отрезке $[a; b]$, если ее плотность вероятности $f(x)$ постоянна на этом отрезке и равна нулю вне его, т.е.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x < a, \\ \frac{1}{b-a}, & \text{при } a \leq x \leq b, \\ 0, & \text{при } x > b. \end{cases}$$

Найдем функцию распределения:

$$\text{при } x \leq a \quad F(x) = \int_{-\infty}^x 0 dt = 0;$$

$$\text{при } a < x \leq b \quad F(x) = \int_{-\infty}^a 0 dt + \int_a^x f(t) dt = \int_a^x \frac{1}{b-a} dt = \frac{1}{b-a} \cdot t \Big|_a^x = \frac{x-a}{b-a};$$

$$\text{при } x > b \quad F(x) = \int_{-\infty}^a 0 dt + \int_a^b f(t) dt + \int_b^x 0 dt = \frac{1}{b-a} \cdot t \Big|_a^b = 1.$$

Тогда функция распределения равномерного закона распределения имеет вид:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x < a, \\ \frac{x-a}{b-a}, & \text{при } a \leq x \leq b, \\ 1, & \text{при } x > b. \end{cases}$$

Графики плотности распределения $f(x)$ и функции распределения $F(x)$ представлены на рис. 4.3 (а) и 4.3 (б) соответственно.

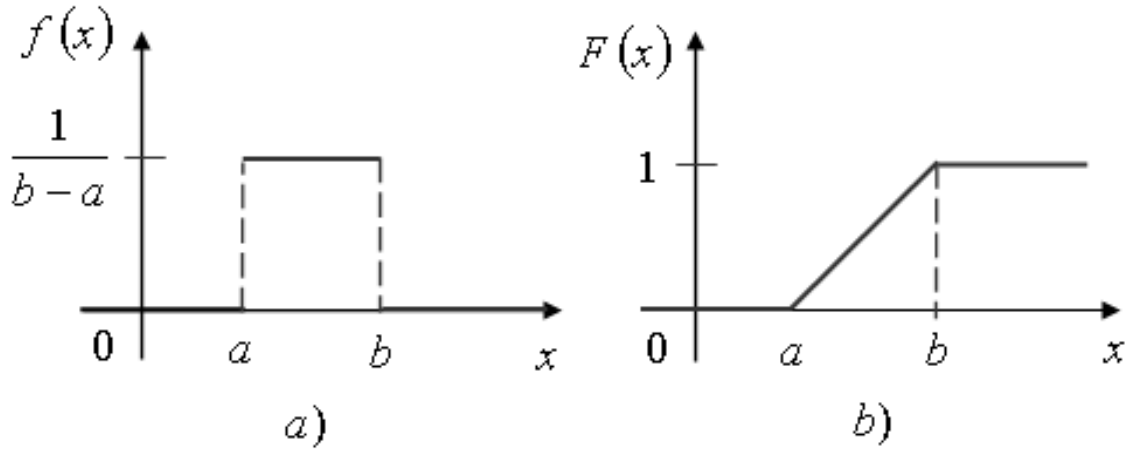


Рисунок 4.3 – Графики $f(x)$ и $F(x)$ равномерного закона распределения

Теорема. Математическое ожидание случайной величины X , распределенной по равномерному закону, есть

$$M(X) = \frac{a+b}{2}, \quad (4.11)$$

а дисперсия

$$D(X) = \frac{(b-a)^2}{12}. \quad (4.12)$$

Доказательство

Согласно формуле (4.7), математическое ожидание:

$$M(X) = \int_a^b x f(x) dx = \int_a^b x \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_a^b = \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}.$$

Дисперсию найдем по формуле (4.9):

$$\begin{aligned} D(X) &= \int_a^b x^2 f(x) dx - [M(X)]^2 = \int_a^b x^2 \frac{1}{b-a} dx - \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_a^b - \frac{(a+b)^2}{4} = \\ &= \frac{b^3 - a^3}{3(b-a)} - \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{(b-a)(b^2 + ab + a^2)}{3(b-a)} - \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{b^2 + ab + a^2}{3} - \frac{a^2 + 2ab + b^2}{4} = \\ &= \frac{4b^2 + 4ab + 4a^2 - 3a^2 - 6ab - 3b^2}{12} = \frac{b^2 - 2ab + a^2}{12} = \frac{(b-a)^2}{12}. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Среднее квадратическое отклонение для равномерного распределения

$$\sigma = \sqrt{D(X)} = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}. \quad (4.13)$$

Равномерный закон распределения используется при анализе ошибок округления при проведении числовых расчетов, в ряде задач массового

обслуживания, при статистическом моделировании наблюдений, подчиненных заданному распределению.

Задача 4.5. Поезда метрополитена идут с интервалом 2 мин. Какова вероятность того, что пассажиру придется ждать поезд не более полминуты? Найдите математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение случайной величины X – времени ожидания поезда.

Решение. Случайная величина X – время ожидания поезда на временном (в минутах) отрезке $[0; 2]$ имеет равномерный закон распределения с плотностью вероятности:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x < 0, \\ \frac{1}{2}, & \text{при } 0 \leq x \leq 2, \\ 0, & \text{при } x > 2. \end{cases}$$

Поэтому вероятность того, что пассажиру придется ждать не более полминуты:

$$P(X \leq 0,5) = F(0 \leq X \leq 0,5) = \int_0^{0,5} \frac{1}{2} dx = \frac{1}{2} x \Big|_0^{0,5} = \frac{1}{4}.$$

По формулам (4.11) – (4.13) получим:

$$\begin{aligned} M(X) &= \frac{0+2}{2} = 1, \\ D(X) &= \frac{(2-0)^2}{12} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}, \\ \sigma(x) &= \sqrt{D(X)} = \frac{2-0}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0,58. \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{1}{4}$; 1; 0,58.

4.5 Показательный (экспоненциальный) закон распределения

Непрерывная случайная величина X имеет **показательный (экспоненциальный) закон распределения** с параметром λ , если ее плотность вероятности $f(x)$ имеет вид:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x < 0, \\ \lambda e^{-\lambda x}, & \text{при } x \geq 0. \end{cases} \quad (4.14)$$

Найдем функцию распределения показательного распределения:

$$\text{при } x < 0 \quad F(x) = \int_{-\infty}^x 0 dt = 0;$$

при $x \geq 0$

$$F(x) = \int_{-\infty}^0 0 dt + \int_0^x f(t) dt = 0 + \int_0^x \lambda e^{-\lambda t} dt = \lambda \cdot \left(-\frac{1}{\lambda} \right) \int_0^x e^{-\lambda t} d(-\lambda t) = -e^{-\lambda x} \Big|_0^x = 1 - e^{-\lambda x}.$$

Функция распределения показательного распределения имеет вид:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x < 0, \\ 1 - e^{-\lambda x}, & \text{при } x \geq 0. \end{cases} \quad (4.15)$$

Графики плотности распределения $f(x)$ и функции распределения $F(x)$ представлены на рис. 4.4 (а) и 4.4 (б) соответственно.

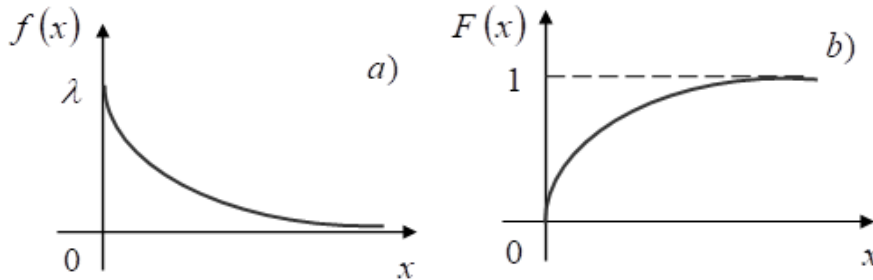


Рисунок 4.4 – Графики $f(x)$ и $F(x)$ показательного закона распределения

Теорема. Математическое ожидание случайной величины X , распределенной по показательному (экспоненциальному) закону, есть

$$M(X) = \frac{1}{\lambda},$$

а дисперсия

$$D(X) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Доказательство

Согласно формуле (4.6), математическое ожидание:

$$\begin{aligned} M(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \int_0^{\beta} x \cdot \lambda e^{-\lambda x} dx = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \left(-\int_0^{\beta} x \cdot d e^{-\lambda x} \right) = \\ &= \lim_{\beta \rightarrow \infty} \left(-x e^{-\lambda x} \Big|_0^{\beta} + \int_0^{\beta} e^{-\lambda x} dx \right) = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \left(-\beta e^{-\lambda \beta} - \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} \Big|_0^{\beta} \right) = \\ &= 0 - \frac{1}{\lambda} \lim_{\beta \rightarrow \infty} (e^{-\lambda \beta} - 1) = \frac{1}{\lambda}. \end{aligned}$$

Дисперсию определим по формуле:

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2.$$

Для этого определим сначала $M(X^2)$:

$$\begin{aligned} M(X^2) &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \int_0^{\beta} x^2 \lambda e^{-\lambda x} dx = \\ &= \lim_{\beta \rightarrow \infty} \left(-\int_0^{\beta} x^2 d e^{-\lambda x} \right) = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \left(-x^2 e^{-\lambda x} \Big|_0^{\beta} + \int_0^{\beta} 2x e^{-\lambda x} dx \right) = \end{aligned}$$

$$= \lim_{\beta \rightarrow \infty} (-\beta^2 e^{-\lambda \beta}) + \frac{2}{\lambda} \lim_{\beta \rightarrow \infty} \int_0^{\beta} x \lambda e^{-\lambda x} dx = 0 + \frac{2}{\lambda} \cdot \frac{1}{\lambda} = \frac{2}{\lambda^2}.$$

Учитывая, что $M(X) = \frac{1}{\lambda}$ окончательно получим:

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Теорема доказана.

Из доказанной теоремы следует, что для случайной величины, распределенной по показательному закону, математическое ожидание равно среднему квадратическому отклонению, т.е.

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \frac{1}{\lambda}.$$

Задача 4.6. Установлено, что время ремонта телевизоров есть случайная величина X , распределенная по показательному закону. Найдите плотность вероятности, функцию распределения и среднее квадратическое отклонение случайной величины X . Определите вероятность того, что на ремонт телевизора потребуется не менее 3-х дней, если среднее время ремонта телевизора составляет 2 дня.

Решение. По условию задачи математическое ожидание $M(X) = \frac{1}{\lambda} = 2$, откуда параметр $\lambda = \frac{1}{2}$ и по формулам (4.14) и (4.15) плотность вероятности и функция распределения имеют вид, соответственно:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x < 0, \\ \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}x}, & \text{при } x \geq 0. \end{cases} \quad \text{и} \quad F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x < 0, \\ 1 - e^{-\frac{1}{2}x}, & \text{при } x \geq 0. \end{cases}$$

Искомую вероятность $P(X \geq 3)$ можно было бы найти по формуле (4.2), т.е.

$$P(X \geq 3) = P(3 \leq X < \infty) = \int_3^{\infty} \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}x} dx,$$

однако проще это сделать, используя функцию распределения:

$$P(X \geq 3) = 1 - P(X < 3) = 1 - F(3) = 1 - \left(1 - e^{-\frac{3}{2}}\right) = e^{-\frac{3}{2}} = 2,718^{-1,5} = 0,223.$$

Осталось найти среднее квадратическое отклонение:

$$\sigma(X) = M(X) = \frac{1}{\lambda} = 2.$$

Ответ: $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x < 0, \\ \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}x}, & \text{при } x \geq 0; \end{cases} \quad F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x < 0, \\ 1 - e^{-\frac{1}{2}x}, & \text{при } x \geq 0; \end{cases}$

2; 0,223.

4.6 Нормальный закон распределения

Нормальный закон распределения наиболее часто встречается на практике. Главная особенность, выделяющая его среди других законов распределения, состоит в том, что он является предельным законом, к которому приближаются другие законы распределения при весьма часто встречающихся типичных условиях.

Непрерывная случайная величина X имеет **нормальный закон распределения (закон Гаусса)** с параметрами a и σ^2 , если плотность ее вероятности $f_N(x)$ имеет вид:

$$f_N(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}. \quad (4.16)$$

Следовательно, функция распределения:

$$F_N(x) = \int_{-\infty}^x f_N(x) dx = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx. \quad (4.17)$$

На рис. 4.5 (а) и (б) приведены нормальная кривая $f_N(x)$, с параметрами a и σ^2 , и график функции распределения $F_N(x)$, имеющей нормальный закон.

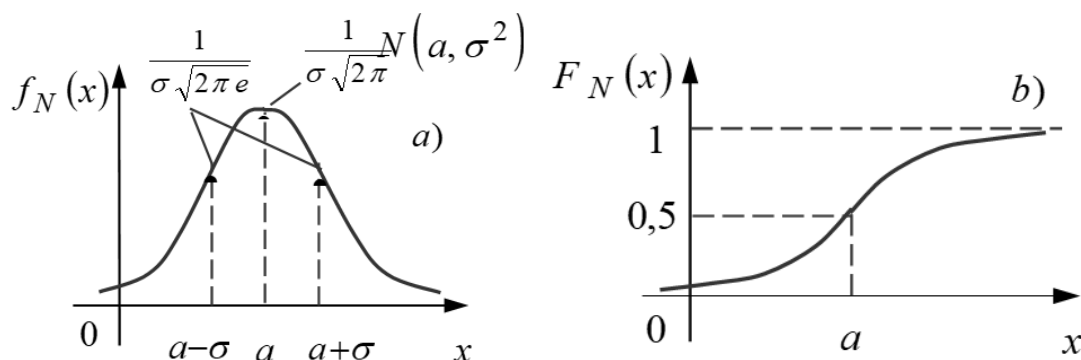


Рисунок 4.5 – Графики $f_N(x)$ и $F_N(x)$ показательного закона распределения

Обратим внимание на то, что нормальная кривая симметрична относительно прямой $x = a$, имеет максимум в точке с абсциссой $x = a$, равный $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$, т.е. $f_{N \max}(a) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \approx \frac{0,3989}{\sigma}$, и две точки перегиба в точках $x = a \pm \sigma$ с ординатой $f_{N \text{ пер}}(a \pm \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}e} \approx \frac{0,2420}{\sigma}$.

Можно заметить, что в выражении плотности нормального закона распределения параметры обозначены буквами a и σ^2 , которыми мы

обозначаем математическое ожидание $M(X)$ и $D(X)$. Такое совпадение неслучайно.

Теорема. Математическое ожидание случайной величины X , распределенной по нормальному закону распределения, равно параметру a этого закона, т.е.

$$M(X) = a,$$

а ее дисперсия – параметру σ^2 , т.е.

$$D(X) = \sigma^2.$$

Доказательство

Математическое ожидание случайной величины X :

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_N(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx.$$

Выполним замену переменной, положим $t = \frac{x-a}{\sigma\sqrt{2}}$, тогда $x = a + \sigma\sqrt{2}t$ и $dx = \sigma\sqrt{2} dt$, пределы интегрирования не меняются и, следовательно:

$$\begin{aligned} M(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} (a + \sigma\sqrt{2}t) \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-t^2} \sigma\sqrt{2} dt = \\ &= \frac{a}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt + \frac{\sigma\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} t e^{-t^2} dt = \frac{a}{\sqrt{\pi}} \cdot \sqrt{\pi} + 0 = a, \end{aligned}$$

где первый интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$ – интеграл Эйлера-Пуассона, а второй интеграл равен нулю, как интеграл от нечетной функции по симметричному относительно начала координат промежутку.

Согласно формуле (4.8), дисперсия случайной величины X :

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} [x - M(X)]^2 f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} (x-a)^2 \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx.$$

Выполним ту же замену переменной $x = a + \sigma\sqrt{2}t$, как и при вычислении предыдущего интеграла, тогда:

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} \sigma^2 2t^2 \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-t^2} \sigma\sqrt{2} dt = \frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} t^2 e^{-t^2} dt = -\frac{\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} t d e^{-t^2}.$$

Применяя метод интегрирования по частям, получим:

$$D(X) = -\frac{\sigma^2}{\sqrt{\pi}} t e^{-t^2} \Big|_{-\infty}^{\infty} + \frac{\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = 0 + \frac{\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \cdot \sqrt{\pi} = \sigma^2.$$

Выясним, как будет меняться нормальная кривая при изменении параметров a и σ^2 (или σ). Если $\sigma = \text{const}$, и меняется параметр a ($a_1 < a_2 < a_3$), т.е. центр симметрии распределения, то нормальная кривая будет смещаться вдоль оси абсцисс, не меняя формы (рис. 4.6).

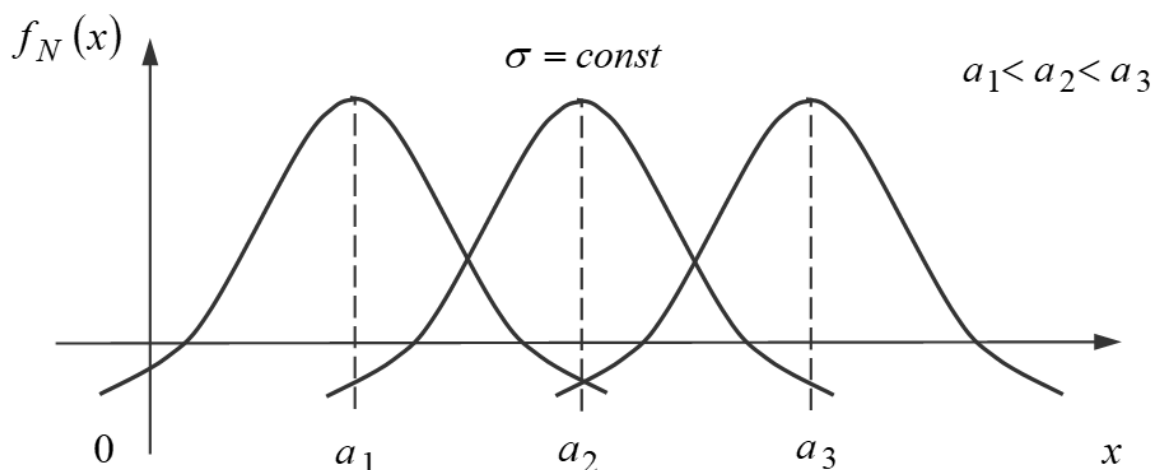


Рисунок 4.6 – Изменение нормальной кривой при изменении a

Если $a = \text{const}$ и меняется параметр σ^2 (или σ), то меняется ордината максимума кривой $f_{N \max}(a) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}}$. При увеличении σ ордината максимума кривой уменьшается, но так как площадь под любой кривой распределения должна оставаться равной единице, то кривая становится более плоской, растягиваясь вдоль оси абсцисс. При уменьшении σ , напротив, нормальная кривая вытягивается вверх, одновременно сжимаясь с обеих сторон.

На рис. 4.7 показаны нормальные кривые с параметрами σ_1 , σ_2 и σ_3 , где $\sigma_1 < \sigma_2 < \sigma_3$.

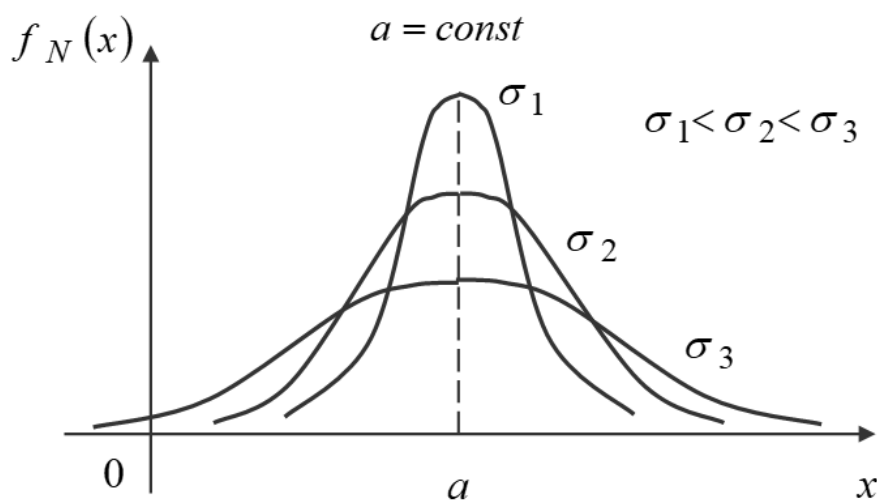


Рисунок 4.7 – Изменение нормальной кривой при изменении σ

Таким образом, параметр a (математическое ожидание) характеризует положение, а параметр σ^2 (дисперсия) – форму нормальной кривой.

Нормальный закон распределения случайной величины с параметрами $a = 0$ и $\sigma^2 = 1$, т.е. $N(0; 1)$, называется **стандартным** или **нормированным**, а соответствующая нормальная кривая – **стандартной** или **нормированной**.

Вероятность попадания в заданный интервал случайной величины, распределенной по нормальному закону

Если случайная величина задана плотностью распределения $f(x)$, то вероятность того, что X примет значение, принадлежащее интервалу (α, β) :

$$P(\alpha < X < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx.$$

Пусть случайная величина X распределена по нормальному закону, тогда вероятность того, что X примет значение, принадлежащее интервалу (α, β) , равна

$$P(\alpha < X < \beta) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\alpha}^{\beta} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx. \quad (4.18)$$

Сложность непосредственного нахождения вероятности по формуле (4.18) связана с тем, что интеграл является неберущимся в элементарных функциях. Поэтому его выражают через

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz \quad (4.19)$$

функцию (интеграл вероятностей) Лапласа, для которой составлены таблицы (Приложение 3).

Геометрически функция Лапласа представляет собой площадь под стандартной нормальной кривой на отрезке $[0; x]$ (рис. 4.8).

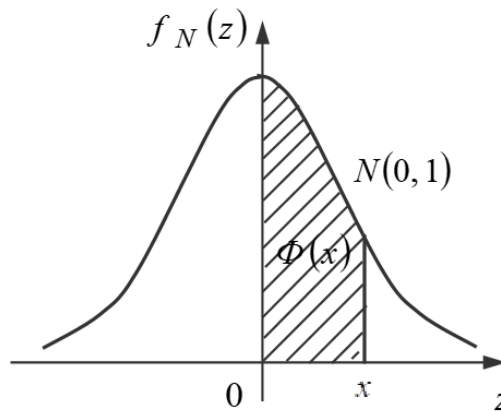


Рисунок 4.8 – Геометрический смысл функции Лапласа

Преобразуем интеграл (4.18) так, чтобы можно было пользоваться таблицей значений функции Лапласа (4.19). Введем новую переменную $z = \frac{(x-a)}{\sigma}$, отсюда $x = \sigma z + a$, $dx = \sigma dz$. Найдем новые пределы интегрирования. Если $x = \alpha$, то $z = \frac{\alpha - a}{\sigma}$; если $x = \beta$, то $z = \frac{\beta - a}{\sigma}$.

Таким образом, получим:

$$\begin{aligned}
P(\alpha < X < \beta) &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{\alpha-a}{\sigma}}^{\frac{\beta-a}{\sigma}} e^{-\frac{z^2}{2}} (\sigma dz) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{\alpha-a}{\sigma}}^0 e^{-\frac{z^2}{2}} dz + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\frac{\beta-a}{\sigma}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\frac{\beta-a}{\sigma}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\frac{\alpha-a}{\sigma}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz.
\end{aligned}$$

Пользуясь функцией Лапласа (4.19), окончательно получим

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right). \quad (4.20)$$

Функция распределения $F_N(x)$ случайной величины X , распределенной по нормальному закону, выражается через функцию Лапласа $\Phi(x)$ по формуле

$$F_N(x) = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right). \quad (4.21)$$

Геометрически функция распределения представляет собой площадь под нормальной кривой на интервале $(-\infty, x)$ (рис. 4.9). Как видим, она состоит из двух частей: первой, на интервале $(-\infty, a)$, равной $\frac{1}{2}$, т.е. половине всей площади под нормальной кривой, и второй, на интервале (a, x) , равной $\Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)$.

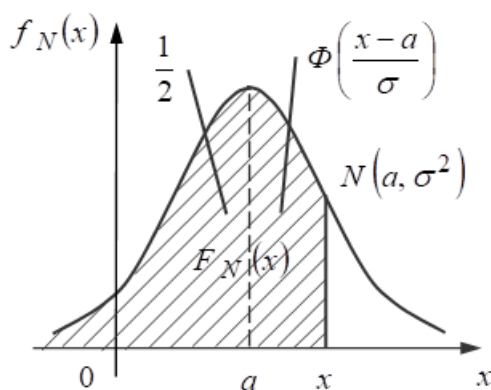


Рисунок 4.9 – Геометрический смысл $F_N(x)$ на интервале $(-\infty, x)$

Задача 4.7. Случайная величина X распределена по нормальному закону. Математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение этой величины соответственно равны 30 и 10. Найдите вероятность того, что X принимает значение, принадлежащее интервалу $(20, 60)$.

Решение. Воспользуемся формулой (4.20). По условию задачи: $\alpha = 20$, $\beta = 60$, $a = 30$, $\sigma = 10$.

$$P(20 < X < 60) = \Phi\left(\frac{60-30}{10}\right) - \Phi\left(\frac{20-30}{10}\right) = \Phi(3) - \Phi(-1).$$

По таблице Приложения 3 находим $\Phi(3) = 0,49865$. Учитывая, что функция Лапласа является нечетной функцией, получим $\Phi(-1) = -\Phi(1) = -0,3413$, тогда:

$$P(20 < X < 60) = \Phi(3) + \Phi(1) = 0,49865 + 0,3413 = 0,83995.$$

Ответ: 0,83995.

Вычисление вероятности заданного отклонения

На практике часто необходимо вычислить вероятность того, что отклонение нормально распределенной случайной величины X по абсолютной величине меньше заданного положительного числа δ , т.е. требуется найти вероятность выполнения неравенства $|X - a| < \delta$.

Заменим это неравенство равносильным ему двойным неравенством:

$$-\delta < X - a < \delta \text{ или } a - \delta < X < a + \delta.$$

Пользуясь формулой (4.20), получим:

$$\begin{aligned} P(|X - a| < \delta) &= P(a - \delta < X < a + \delta) = \\ &= \Phi\left[\frac{(a + \delta) - a}{\sigma}\right] - \Phi\left[\frac{(a - \delta) - a}{\sigma}\right] = \Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{\delta}{\sigma}\right). \end{aligned}$$

Приняв во внимание нечетность функции Лапласа, т.е. что

$$\Phi\left(-\frac{\delta}{\sigma}\right) = -\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right),$$

окончательно получим:

$$P(|X - a| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right). \quad (4.22)$$

В частности, при $a = 0$

$$P(|X| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right).$$

Положив в (4.22) $\delta = 3\sigma$, получим:

$$P(|X - a| < 3\sigma) = 2\Phi\left(\frac{3\sigma}{\sigma}\right) = 2\Phi(3) = 2 \cdot 0,49865 = 0,9973,$$

т.е. отклонение случайной величины X от своего математического ожидания меньше, чем на 3σ – почти достоверное событие.

Тогда сформулируем правило, называемое «**Правилom трех сигм**». Если случайная величина X имеет нормальный закон распределения с параметрами a и σ^2 , т.е. $N(a, \sigma^2)$, то практически достоверно, что ее значения заключены в интервале $(a - 3\sigma, a + 3\sigma)$.

Задача 4.8. Случайная величина X распределена по нормальному закону. Математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение X

соответственно равны 20 и 10. Найдите вероятность того, что отклонение по абсолютной величине будет меньше 3.

Решение. Воспользуемся формулой (4.22). По условию задачи: $a = 20$, $\sigma = 10$, $\delta = 3$, следовательно:

$$P(|X - 20| < 3) = 2\Phi\left(\frac{3}{10}\right) = 2\Phi(0,3).$$

По таблице Приложения 3 находим $\Phi(0,3) = 0,1179$, тогда искомая вероятность:

$$P(|X - 20| < 3) = 2 \cdot 0,1179 = 0,2358.$$

Ответ: 0,2358.

Задача 4.9. Длина детали представляет собой нормально распределённую случайную величину с математическим ожиданием 40 мм и средним квадратическим отклонением 3 мм.

Найдите:

- вероятность того, что длина произвольно взятой детали будет больше 34 мм и меньше 43 мм;
- вероятность того, что длина детали отклонится от её математического ожидания не более чем 1,5 мм.

Решение. Пусть случайная величина X – длина детали. Если случайная величина задана дифференциальной функцией $f(x)$, то вероятность того, что X примет значения, принадлежащие отрезку $[a, b]$, определяется по формуле (4.4):

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) dx.$$

Вероятность в случае строгих неравенств $\alpha < X < \beta$ определяется той же формулой. Если случайная величина X распределена по нормальному закону, то

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right),$$

где $\Phi(X)$ – функция Лапласа, $a = M(X)$, $\sigma = \sqrt{D(x)}$.

По условию задачи $a = 40$, $\alpha = 34$, $\beta = 43$, $\sigma = 3$, тогда получим:

$$\begin{aligned} P(34 < X < 43) &= \Phi\left(\frac{43 - 40}{3}\right) - \Phi\left(\frac{34 - 40}{3}\right) = \Phi(1) - \Phi(-2) = \\ &= \Phi(1) + \Phi(2) = 0,3413 + 0,4772 = 0,8185. \end{aligned}$$

Вероятность того, что длина детали отклонится от её математического ожидания не более чем $\delta = 1,5$, будем вычислять по формуле (4.22), получим:

$$P(|x - 40| < 1,5) = 2\Phi\left(\frac{1,5}{3}\right) = 2\Phi(0,5) = 2 \cdot 0,1915 = 0,383.$$

Ответ: 0,8185; 0,383.

Задача 4.10. Полагая, что рост мужчины, определенной возрастной группы, есть нормально распределенная случайная величина X , с параметрами $a=173$ и $\sigma^2=36$, найдите:

– плотность распределения вероятностей и функцию распределения случайной величины X ;

– доли костюмов роста 176–182 см и роста 170–176 см, которые нужно предусмотреть в общем объеме производства для данной возрастной группы.

Решение. Плотность распределения вероятностей и функцию распределения случайной величины X будем искать по формулам (4.16), (4.17), (4.21), получим:

$$f_N(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{6\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-173)^2}{2\cdot 36}};$$

$$F_N(x) = \int_{-\infty}^x f_N(t) dt = \int_{-\infty}^x \frac{1}{6\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-173)^2}{2\cdot 36}} dt = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{x-173}{6}\right).$$

Долю костюмов роста 176–182 см в общем объеме производства определим по формуле:

$$P(\alpha \leq X \leq \beta) = \Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right).$$

Подставляя числовые значения, получим:

$$\begin{aligned} P(176 \leq X \leq 182) &= \Phi\left(\frac{176-173}{6}\right) - \Phi\left(\frac{182-173}{6}\right) = \\ &= \Phi(0,5) - \Phi(1,5) = 0,4332 - 0,1914 = 0,2418. \end{aligned}$$

Долю костюмов роста 170–176 см можно было бы определить аналогично, но проще это сделать по формуле (4.23), если учесть, что данный интервал симметричен относительно математического ожидания $a=M(X)=173$, т.е. неравенство $170 \leq X \leq 176$ равносильно неравенству $|X-173| \leq 3$:

$$P(170 \leq X \leq 176) = P(|X-173| \leq 3) = 2\Phi\left(\frac{3}{6}\right) = \Phi(0,5) = 0,3829.$$

Ответ: 0,2418; 0,3829.

Вопросы и задания для самоконтроля

1. Сформулируйте определение непрерывной случайной величины.
2. Сформулируйте определение функции распределения вероятностей случайной величины.
3. Сформулируйте свойства функции распределения вероятностей случайной величины.
4. Сформулируйте определение плотности распределения вероятностей случайной величины.

5. Сформулируйте свойства плотности распределения вероятностей случайной величины.

6. Сформулируйте определение математического ожидания непрерывной случайной величины.

7. Перечислите свойства математического ожидания непрерывной случайной величины.

8. Что называется дисперсией непрерывной случайной величины?

9. Запишите формулу вычисления дисперсии непрерывной случайной величины.

10. Перечислите свойства дисперсии непрерывной случайной величины.

11. Сформулируйте определение среднего квадратического отклонения непрерывной случайной величины.

12. Запишите формулу вычисления среднего квадратического отклонения непрерывной случайной величины.

13. Какой формулой задается плотность распределения вероятностей равномерного распределения?

14. Что Вы знаете о функции распределения случайной величины, распределенной по равномерному закону?

15. Сформулируйте определение математического ожидания случайной величины, распределенной по равномерному закону.

16. Сформулируйте определение дисперсии случайной величины, распределенной по равномерному закону.

17. Сформулируйте определение начального момента.

18. Сформулируйте определение центрального момента.

19. Запишите формулы вычисления начального момента и центрального момента.

20. Сформулируйте определение нормального распределения.

21. Сформулируйте правило трех сигм.

22. Запишите формулу плотности распределения нормального закона распределения.

23. Сформулируйте определение показательного распределения.

24. Запишите формулу плотности распределения показательного закона распределения.

25. В каких случаях используется функция Лапласа: когда требуется подсчитать значение функции распределения нормальной случайной величины в точке или когда требуется подсчитать значение функции распределения случайной величины, распределенной по любому закону?

26. Среди предложенных примеров случайных величин выделите дискретные и непрерывные случайные величины:

1) количество проданных товаров за день в магазине,

2) количество ДТП, произошедших в данном городе,

3) возраст студентов в группе,

4) марафонское время бегуна X ,

5) количество бракованных изделий, произведенных за партию определенным заводом-изготовителем,

б) расстояние, пройденное определенным волком в течение сезона миграции.

27. Время (в годах) безотказной работы прибора подчинено показательному закону при $\lambda = 2$. Найдите: 1) функцию распределения этой случайной величины, 2) вероятность того, что прибор проработает не более года, 3) вероятность того, что прибор безотказно проработает 3 года, 4) среднее ожидаемое время безотказной работы прибора, 5) постройте графики плотности и функции вероятностей, 6) найдите моду и медиану.

28. Если случайная величина X распределена равномерно на отрезке $[2, 5]$, то какое распределение будет иметь случайная величина $Y = 3X - 1$?

29. С вероятностью 0,9973 установлено, что абсолютное отклонение живого веса случайно взятой особи крупного рогатого скота от среднего веса животного по всему стаду не превосходит 30 кг. Найдите среднее квадратическое отклонение живого веса скота зная, что распределение скота по живому весу подчиняется нормальному закону.

30. Вес тропического грейпфрута, выращенного мистером X , – нормально распределенная случайная величина с неизвестным математическим ожиданием и дисперсией, равной 0,03. Известно, что 75% всех грейпфрутов весят меньше 0,6 кг. Найдите ожидаемый вес случайно выбранного грейпфрута, выращенного мистером X .

ТЕМА 5. ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Рассматривая единичное событие A , имеющее вероятность $P(A)$, мы не можем высказать никаких суждений относительно того, наступит или не наступит это событие в данном испытании. Исключение составляют случаи, когда вероятность события A близка к нулю или к единице. В практической деятельности поступают так, как если бы событие A было невозможным (или достоверным), т.е. считают событие A практически невозможным (или практически достоверным). Принцип практической достоверности применим, если мы имеем дело не с одним единичным явлением, а с массовыми явлениями.

Данная тема посвящена одному из важных результатов теории вероятностей: при широких условиях суммы большого числа независимых малых случайных слагаемых имеют распределение, близкое к нормальному. Значение этого результата выходит далеко за рамки теории вероятностей и применяется при решении многих практических задач: при определении ошибок измерений в измерительных приборах; определении продолжительности исправной работы прибора, когда выход его из строя является следствием постоянно действующих изменений; при исследовании скорости движения молекул газа, получаемых вследствие неоднократных столкновений с соседними молекулами и др.

Закон больших чисел имеет несколько форм, каждая из которых устанавливает ту или иную устойчивость средних при большом числе наблюдений.

При оценке скорости сходимости по вероятности различных средних к постоянным величинам можно пользоваться неравенствами Чебышева.

5.1 Неравенства Чебышева

Первая форма: если случайная величина ξ неотрицательна и имеет конечное математическое ожидание, то

$$P\{\xi > \alpha\} < \frac{M\xi}{\alpha}.$$

Вторая форма: если случайная величина имеет конечную дисперсию ($D\xi < +\infty$), то

$$P\{|\xi - M\xi| > \varepsilon\} < \frac{D\xi}{\varepsilon^2}. \quad (5.1)$$

Доказательство. Пусть $F(x)$ – функция распределения случайной величины ξ . Ясно, что $P\{|\xi - M\xi| \geq \varepsilon\} = \int_{|x - M\xi| \geq \varepsilon} dF(x)$. Так как в области интегрирования $|\xi - M\xi| / \varepsilon \geq 1$, то

$$\int_{|x - M\xi| \geq \varepsilon} dF(x) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{|x - M\xi| \geq \varepsilon} (x - M\xi)^2 dF(x).$$

Мы только усилим это неравенство, распространяя интегрирование на все значения:

$$\int_{|x-M\xi|\geq\varepsilon} dF(x) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{|x-M\xi|\geq\varepsilon} (x-M\xi)^2 dF(x) = \frac{D\xi}{\varepsilon^2}.$$

Таким образом, неравенство Чебышева во второй форме доказано.

Если в неравенстве (5.1) положить $\eta = \xi - M\xi$, то $D\xi = M\eta^2$ и это неравенство принимает вид $P\{|\eta| > \varepsilon\} < \frac{M\eta^2}{\varepsilon^2}$. Можно убедиться, что полученное неравенство справедливо для любой величины η , имеющей конечную дисперсию (следовательно, конечное математическое ожидание квадрата), а не только величины $\eta = \xi - M\xi$. Таким образом, получаем обобщенное неравенство Чебышева в первой форме.

Задача 5.1. Математическое ожидание скорости ветра у земли в данном пункте равно 8 м/с. Оцените:

- вероятность того, что в этом пункте скорость ветра будет более 25 м/с;
- какие скорости ветра на этой высоте можно ожидать с вероятностью, не меньшей 0,9, если среднеквадратическое отклонение равно 4,5 м/с?

Решение.

При $\alpha = 25$ и $M\xi = 8$, получим $P\{\xi > 25\} < \frac{8}{25} \approx 0,32$, т.е. вероятность искомого события не больше 0,32.

Из неравенства (5.1) вытекает, что если при данной дисперсии $D\xi = 4,5^2 = 20,25$ ε будет выбрано таким, что $1 - \frac{D\xi}{\varepsilon^2} = 0,9$, то условия задачи будут выполнены. Получим равенство для определения ε :

$$1 - \frac{20,25}{\varepsilon^2} = 0,9,$$

откуда $\varepsilon \approx 14,2$, или $|\xi - 25| \leq 14,2$, т.е. $10,8 \leq \xi \leq 39,2$ м/с.

Ответ: 0,32; $10,8 \leq \xi \leq 39,2$.

5.2 Закон больших чисел

Пусть имеется последовательность случайных величин

$$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \quad (5.2)$$

имеющих конечные дисперсии, ограниченные одной и той же постоянной C .

Говорят, что последовательность (5.2) подчиняется **закону больших чисел**, если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\left|\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \xi_k - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n M\xi_k\right| < \varepsilon\right\} = 1, \quad \forall \varepsilon > 0. \quad (5.3)$$

Для практики неравенства Чебышева имеют ограниченное значение, поскольку часто дают грубую, а иногда и не представляющую интереса оценку,

но весьма велико их теоретическое значение. Воспользуемся ими для вывода теоремы Чебышева.

Теорема Чебышева. Пусть случайные величины последовательности (5.2) независимы и имеют конечные дисперсии $D\xi_n$. Тогда для выполнения равенства (5.3) достаточно

$$D\xi_n < C, \quad n=1, 2, \dots$$

Доказательство

В условиях теоремы $D\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \xi_k\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^n D\xi_k$ и, следовательно,

$$D\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \xi_k\right) \leq \frac{C}{n}.$$

Согласно неравенству Чебышева:

$$P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \xi_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n M\xi_k\right| < \varepsilon\right\} \geq 1 - D\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \xi_k\right) / \varepsilon^2 \geq 1 - \frac{C}{n\varepsilon^2}.$$

Переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$, получаем:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \xi_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n M\xi_k\right) < \varepsilon\right\} \geq 1,$$

а так как вероятность не может быть больше единицы, то отсюда и следует утверждение теоремы.

На теореме Чебышева основан широко применяемый в статистике выборочный метод, суть которого состоит в том, что по сравнительно небольшой случайной выборке судят о всей совокупности исследуемых объектов. Например, о качестве кипы хлопка заключают по небольшому пучку, состоящему из волокон, наудачу отобранных из разных мест кипы. Хотя число волокон в пучке значительно меньше, чем в кипе, сам пучок содержит достаточное количество волокон, исчисляемое сотнями.

Теорема Хинчина. Если все случайные величины (5.2) независимы, одинаково распределены и имеют конечное математическое ожидание $M\xi_n = a$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \xi_k - a\right| < \varepsilon\right\} = 1.$$

Теорема Маркова. Пусть случайные величины (5.2) как угодно зависимы. Для выполнения равенства (5.3) достаточно, чтобы

$$\frac{1}{n^2} D\sum_{k=1}^n \xi_k \rightarrow 0, \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Теорема Бернулли. Пусть μ_n — число наблюдений события A в серии из n независимых испытаний. В каждом из них $P(A) = p > 0$. Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\left|p - \frac{\mu_n}{n}\right| < \varepsilon\right\} = 1.$$

Доказательство

Оценим вероятность неравенства $\left| \frac{\mu_n}{n} - p \right| < \varepsilon$ с помощью теоремы

Муавра-Лапласа:

$$\begin{aligned} P\left\{\left|\frac{\mu_n}{n} - p\right| < \varepsilon\right\} &= P\left\{-\varepsilon < \frac{\mu_n - np}{n} < \varepsilon\right\} = P\left\{-\frac{\varepsilon n}{\sqrt{npq}} < \frac{\mu_n - np}{\sqrt{npq}} < \frac{\varepsilon n}{\sqrt{npq}}\right\} = \\ &= P\left\{-\varepsilon \sqrt{\frac{n}{pq}} < \frac{\mu_n - np}{\sqrt{npq}} < \varepsilon \sqrt{\frac{n}{pq}}\right\}. \end{aligned}$$

$$\text{Отсюда: } \lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\left|\frac{\mu_n}{n} - p\right| < \varepsilon\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dz = 1.$$

Теорема доказана.

Теорему Чебышева (также Хинчина, Бернулли) часто называют законом больших чисел Чебышева (Хинчина, Бернулли соответственно).

Теорема Пуассона. Если в последовательности независимых испытаний вероятность появления события A в k -м испытании равна p_k , то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\left|\frac{\mu}{n} - \frac{p_1 + p_2 + \dots + p_n}{n}\right| < \varepsilon\right\} = 1,$$

где через μ обозначено число появлений события A в первых n испытаниях.

Теорема. Для того чтобы для последовательности (5.2) (как угодно зависимых) случайных величин для любого положительного ε выполнялось соотношение (5.3), необходимо и достаточно, чтобы при $n \rightarrow \infty$

$$\frac{M\left(\sum_{k=1}^n (\xi_k - M\xi_k)\right)^2}{n^2 + \left(\sum_{k=1}^n (\xi_k - M\xi_k)\right)^2} \rightarrow 0.$$

Задача 5.2. Дана последовательность независимых случайных величин $\{\xi_n\}$, $n=1, 2, \dots$, $M\xi_n = 0$, $D\xi_n = n^\alpha$ (α – постоянная, меньшая 1). Применим ли к этой последовательности закон больших чисел?

Решение. Находим, что

$$\frac{1}{n^2} D \sum_{k=1}^n \xi_k = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k^\alpha < \frac{1}{n^2} \int_1^{n+1} x^\alpha dx < \frac{(n+1)^{\alpha+1}}{n^2(\alpha+1)} \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty,$$

то есть, по теореме Маркова, закон больших чисел применим.

Ответ: применим.

Задача 5.3. Дана последовательность независимых случайных величин $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$, имеющих одну и ту же функцию распределения

$F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{x}{a}$. Проверить, применима ли к этой последовательности теорема Хинчина.

Решение. Для применимости теоремы Хинчина необходимо существование математического ожидания случайной величины ξ , то есть чтобы $\int_{-\infty}^{\infty} x \frac{dF(x)}{dx} dx$ сходилась абсолютно. Однако

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x| \frac{dF(x)}{dx} dx = \frac{2a}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{x dx}{x^2 + a^2} = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A \frac{x dx}{x^2 + a^2} = \frac{a}{\pi} \lim_{A \rightarrow \infty} \ln \left(1 + \frac{A^2}{a^2} \right) = \infty,$$

т. е. интеграл расходится, математическое ожидание не существует и теорема Хинчина неприменима.

Ответ: неприменима.

5.3 Усиленный закон больших чисел

Говорят, что последовательность случайных величин (5.2) сходится по вероятности к величине $\xi: \xi_n \xrightarrow{p} \xi$ при $n \rightarrow \infty$, если $P\{|\xi_n - \xi| \geq \varepsilon\} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ для любого $\varepsilon > 0$.

Говорят, что последовательность (5.2) сходится к величине ξ с вероятностью единица (или «почти, наверное»): $P\{\xi_n \rightarrow \xi\} = 1$ при $n \rightarrow \infty$, если хотя бы при одном $m > n$ и для $\forall \varepsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\{|\xi_m - \xi| > \varepsilon\} = 0.$$

Последовательность (5.2) подчиняется **усиленному закону больших чисел**, если

$$P\left\{\left|\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \xi_k - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n M \xi_k\right| \rightarrow 0\right\} = 1.$$

Теорема Колмогорова. Если случайные величины (5.2) независимы и удовлетворяют условию $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{D\xi_n}{n^2} < \infty$, то эта последовательность подчиняется усиленному закону больших чисел.

Доказательство

Положим, $\xi_n = \xi_n - M \xi_n$, $S_n = \sum_{k=1}^n \xi_k$, $V_n = \frac{S_n}{n}$. Рассмотрим вероятность $P_m = P\{\max(V_n) \geq \varepsilon, 2^m \leq n < 2^{m+1}\}$. Так как $P_m \leq P\{\max(V_n) \geq \varepsilon, 1 \leq n < 2^{m+1}\}$, то согласно неравенству Колмогорова, $P_m \leq \frac{1}{(2^{\varepsilon})^2} \sum_{j < 2^{m+1}} D\xi_j$. Так как, далее,

$P\{\max|V_n| \geq \varepsilon, n > \nu\} \leq \sum_{m=p}^{\infty} P_m$, где p определяется из неравенств $2^p \leq \nu < 2^{p+1}$, то

ясно, что

$$P\{\max(V_n) \geq \varepsilon, n > \nu\} \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{m=p}^{\infty} \frac{1}{2^{2m}} \sum_{j < 2^{m+1}} D\xi_j.$$

После перемены порядка суммирования в правой части последнего неравенства получим:

$$\sum_{m=p}^{\infty} \frac{1}{2^{2m}} \sum_{j < 2^{m+1}} D\xi_j = \sum_{j < 2^{m+1}} D\xi_j \left(\sum_{m=p}^{\infty} \frac{1}{2^{2m}} \right),$$

где сумма распространена на те значения $m \geq p$, для которых $2^{m+1} > j$. При $j \leq 2^{p+1}$ коэффициент при $D\xi_j$ равен $\sum_{m \geq p} \frac{1}{4^m} = \frac{3}{4^{p-1}}$, а при $2^{m_0+1} > j \geq 2^{m_0} \geq 2^{p+1}$ этот коэффициент равен $\frac{3}{4^{m_0-1}} \leq \frac{48}{2^{2(m_0+1)}} \leq \frac{48}{j^2}$.

Таким образом:

$$\begin{aligned} \sum_{m=p}^{\infty} \frac{1}{2^{2m}} \sum_{j < 2^{m+1}} D\xi_j &\leq \frac{3}{4^{p-1}} \sum_{j=1}^{2^{p+1}} D\xi_j + 3 \cdot 16 \sum_{j=2^{p+1}}^{\infty} \frac{D\xi_j}{j^2} \leq \\ &\leq \frac{3}{4^{p-1}} \sum_{j=1}^p D\xi_j + 3 \cdot 4 \sum_{j=p+1}^{2^{p+1}} \frac{D\xi_j}{2^{2(p+1)}} + 3 \cdot 16 \sum_{j=2^{p+1}+1}^{\infty} \frac{D\xi_j}{j^2} \leq \\ &\leq \frac{3}{4^{p-1}} \sum_{j=1}^p D\xi_j + 3 \cdot 4 \sum_{j=p+1}^{2^{p+1}} \frac{D\xi_j}{j^2} + 3 \cdot 16 \sum_{j=2^{p+1}+1}^{\infty} \frac{D\xi_j}{j^2}. \end{aligned}$$

В силу сходимости ряда $\sum \frac{D\xi_n}{n^2}$:

1. Две последние суммы в написанном выше неравенстве могут быть сделаны сколь угодно малыми при p достаточно большим.
2. Существует такая постоянная C , что $D\xi_n < Cn^2$, откуда следует, что

$$\frac{3}{4^{p+1}} \sum_{j=1}^p D\xi_j \leq \frac{3 \cdot C \cdot p^3}{4^{p-1}},$$

то есть и первая сумма может быть сделана сколь угодно малой при достаточно большом p . Из всего сказанного следует, что при n_0 достаточно большом

$$p = P\{\max|V| \geq \varepsilon, n > v\}$$

может быть сделана сколь угодно малой, что и требовалось доказать.

Задача 5.4. Пусть $\{\xi_n\}$ — последовательность взаимно-независимых случайных величин, принимающих каждая только по четыре значения: ± 1 с вероятностями $\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$ и $\pm 2^n$ с вероятностями $\frac{1}{2^{n+1}}$. Доказать, что эта последовательность подчиняется как обычному, так и усиленному закону больших чисел.

Доказательство. Очевидно, что $M\xi_n = 0$, $D\xi_n = \sigma_n^2 = 2 - \frac{1}{2^n}$, то есть ряд

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_n^2}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 - \frac{1}{2^n}}{n^2}$ сходится. Следовательно, по теореме Колмогорова, применим

усиленный (а, значит, и обычный) закон больших чисел, что и требовалось доказать.

5.4 Центральная предельная теорема

Постановка задачи

В 5.1 – 5.3 приведены теоремы, устанавливающие сходимость последовательностей случайных величин и носящие общее название закон больших чисел. Далее будет рассмотрена другая группа предельных теорем теории вероятностей, устанавливающих сходимость законов распределения для последовательностей сумм случайных величин. Эта группа теорем имеет особую важность как для теории, так и для приложений. С одной из теорем этой группы вы уже знакомы – это теорема Муавра-Лапласа (она является частным случаем гораздо более общих теорем).

Преобразуем формулировку теоремы Муавра-Лапласа. Пусть μ – число успехов в n независимых испытаниях с вероятностью успеха p , тогда при $n \rightarrow \infty$ по теореме Муавра-Лапласа справедлива формула $\forall x$

$$P\{\mu^* < x\} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2} dt,$$

где $\mu^* = \frac{\mu - np}{\sqrt{npq}}$ – нормированное число успехов. Как известно, $M\mu = np$,

$$\sigma_\mu = \sqrt{npq}. \text{ Таким образом, } \mu^* = \frac{\mu - M\mu}{\sigma_\mu}.$$

Пусть ξ_k – случайная величина, равная 1 или 0 в зависимости от того, произошел при k -м испытании успех или была неудача. Тогда имеем

$$\mu = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n$$

и теорема Муавра-Лапласа может быть записана в виде

$$P\left\{\frac{\sum_{k=1}^n \xi_k - M \sum_{k=1}^n \xi_k}{\sqrt{D \sum_{k=1}^n \xi_k}} < x\right\} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2} dt \quad (5.4)$$

при $n \rightarrow \infty$, где $F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2} dt$ – функция распределения нормального закона с параметрами 0 и 1.

Возникает вопрос, справедливо ли соотношение (5.4) лишь для независимых случайных величин $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$, принимающих только значения 0 и 1 с вероятностями $q=1-p$ и p соответственно, или соотношение (5.4) остается справедливым для случайных величин более общего вида. Положительный ответ на этот вопрос дает группа предельных теорем при различных условиях. Так как в этих теоремах идет речь о предельном

поведении функции распределения (интегральном законе), они могут носить название интегральной центральной предельной теоремы.

Группу теорем, устанавливающих асимптотическое поведение при $n \rightarrow \infty$ вероятностей $P\left\{\sum_{k=1}^n \xi_k\right\}$ для дискретных независимых случайных величин ξ_k и плотностей сумм для непрерывных величин, называют локальными предельными теоремами (локальной центральной предельной теоремой). Примером может служить локальная теорема Муавра-Лапласа.

Рассмотрим предельную теорему для характеристических функций.

Пусть дана последовательность $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$ случайных величин с функциями распределения $F_n(x)$ и характеристическими функциями $\varphi_n(t)$.

Предельная теорема для характеристических функций. Если последовательность $F_n(x)$ сходится к функции распределения $F(x)$ во всех точках непрерывности последней ($F_n(x) \Rightarrow F(x)$ при $n \rightarrow \infty$), то последовательность характеристических функций $\varphi_n(t)$ сходится при $n \rightarrow \infty$ к функции $\varphi(t)$, которая будет характеристической функцией, соответствующей $F(x)$. Причем эта сходимость будет равномерной в любом конечном интервале.

Обратная предельная теорема для характеристических функций. Если последовательность характеристических функций $\varphi_n(t)$ сходится на всей оси непрерывной функции $\varphi(t)$ (или к некоторой функции равномерно в любом конечном интервале, или к характеристической функции $\varphi(t)$), то последовательность функции распределения $F_n(x)$ при $n \rightarrow \infty$ сходится к функции $F(x)$ в каждой точке ее непрерывности, причем $F(x)$ будет функцией распределения, соответствующей характеристической функции $\varphi(t)$.

Задача 5.5. Случайная величина ξ имеет плотность

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0, \\ \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x} & \text{при } x > 0 \end{cases} \quad (\gamma\text{-распределение}).$$

Доказать, что при $\alpha \rightarrow \infty$ распределение нормированного отклонения, т.е. величины $\eta = \frac{\beta\xi - \alpha}{\sqrt{\alpha}}$, сходится к нормальному закону с параметрами (0,1).

Решение. Используем характеристические функции. Характеристическая функция ξ равна $\varphi(t) = \left(1 - \frac{it}{\beta}\right)^{-\alpha}$, тогда

$$\varphi_\eta(t) = e^{-it\sqrt{\alpha}} \varphi\left(\frac{\beta t}{\sqrt{\alpha}}\right) = e^{-it\sqrt{\alpha}} \left(1 - \frac{it}{\sqrt{\alpha}}\right)^{-\alpha}; \quad \ln \varphi_\eta(t) = -it\sqrt{\alpha} - \alpha \ln\left(1 - \frac{it}{\sqrt{\alpha}}\right)$$

(мы рассматриваем главное значение логарифма, т. е. ту ветвь, которая при $t=0$ обращается в нуль). Пусть t заключено в каком-нибудь конечном интервале $(-N, N)$, где N – любое. Считая $\alpha > N^2$, разложим $\ln\left(1 - \frac{it}{\sqrt{\alpha}}\right)$ в степенной ряд

$$\ln \varphi_n(t) = -it\sqrt{\alpha} - \alpha \left(-\frac{it}{\sqrt{\alpha}} + \frac{t^2}{2\alpha} + \frac{it^3}{3\alpha\sqrt{\alpha}} - \dots \right) = -\frac{t^2}{2} + O\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right),$$

т. е. при $n \rightarrow \infty$ $\ln \varphi_n(t) \rightarrow -\frac{t^2}{2}$ равномерно в $(-N, N)$, следовательно, функция распределения η сходится на всей оси к нормальному закону, что и требовалось доказать.

Теорема Линдеберга. Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ – последовательность независимых, одинаково распределенных случайных величин, имеющих конечные математическое ожидание $M\xi_k = a$ и дисперсию $D\xi_k = \sigma^2$. Положим $\xi_n^* = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n$. Тогда закон распределения нормированной суммы этих величин ξ_n^* стремится при $n \rightarrow \infty$ к нормальному закону с параметрами 0 и 1, т.е.:

$$P\{\xi_n^* < x\} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2} dt. \quad (5.5)$$

Для доказательства теоремы достаточно установить, что характеристическая функция $\varphi_{\xi_n^*}(t)$ нормированной суммы ξ_n^* стремится при $n \rightarrow \infty$ к характеристической функции нормального закона с параметрами (0, 1).

Из этой теоремы, преобразовав (5.5), получим:

$$P\{\alpha < \xi_n^* < \beta\} \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\alpha}^{\beta} e^{-t^2/2} dt = F(\beta) - F(\alpha).$$

Вероятность того, что сумма ξ_n^* независимых одинаково распределенных слагаемых лежит в заданных пределах, равна

$$\begin{aligned} P\{a < \xi_n < b\} &= P\left\{\frac{a - nM\xi_n}{\sigma\sqrt{n}} < \frac{\xi_n - nM\xi_n}{\sigma\sqrt{n}} < \frac{b - nM\xi_n}{\sigma\sqrt{n}}\right\} = \\ &= P\left\{\frac{a - nM\xi_n}{\sigma\sqrt{n}} < \xi_n^* < \frac{b - nM\xi_n}{\sigma\sqrt{n}}\right\}. \end{aligned}$$

Отсюда получаем приближенную формулу:

$$P\{a < \xi_n < b\} \approx F\left(\frac{b - nM\xi_n}{\sigma\sqrt{n}}\right) - F\left(\frac{a - nM\xi_n}{\sigma\sqrt{n}}\right). \quad (5.6)$$

Задача 5.6. На отрезке $[0, 1]$ рассмотрим $n=108$ независимых, равномерно распределенных случайных величин $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$. Найдем вероятность того, что их сумма $\xi_n = \sum_{k=1}^n \xi_k$ заключена между 50 и 60.

Решение. Нетрудно подсчитать, $M\xi_k = \frac{1}{2}$, $D\xi_k = \frac{1}{12}$, следовательно,

$$M\xi_{108} = nM\xi_k = 54, D\xi_{108} = n\sigma^2 = 9, \sigma_{\xi_{108}} = \sigma\sqrt{n} = 3.$$

По формуле (5.6) имеем

$$P\{50 < \xi_{108} < 60\} \approx F\left(\frac{60-54}{3}\right) - F\left(\frac{50-54}{3}\right) = F(2) - F\left(-\frac{4}{3}\right) = 0,885.$$

Ответ: 0,885.

Вообще говорят, что если случайные величины независимы, одинаково распределены и имеют конечную дисперсию, то имеет место **центральная предельная теорема**, т.е.:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n (\xi_k - a) < x \right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-z^2/2} dz,$$

где $a = M\xi_k$, $k=1, 2, \dots$

Обозначим $\xi_n = \sum_{k=1}^n \xi_k$, $\bar{\xi}_n = \frac{\xi_n}{B_n}$, $F_n(x)$ – функции распределения ξ_n ,

$$B_n^2 = \sum_{k=1}^n D\xi_k, F_n(xB_n) – \text{функция распределения } \bar{\xi}_n.$$

Тогда центральная предельная теорема состоит в том, что:

$$F_n(xB_n) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Пусть $f_n(x) = F'_n(x)$, тогда $B_n f_n(xB_n)$ – плотность центрированных и нормированных сумм ξ_n . Если при $n \rightarrow \infty$, $B_n f_n(xB_n) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ равномерно на всей оси, то говорят, что имеет место локальная предельная теорема для плотностей.

В теореме Линдеберга величины $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ одинаково распределены. Возникает вопрос, может ли эта теорема быть обобщена на случай различно распределенных слагаемых. Если величины $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ имеют различное распределение, то положительный ответ на этот вопрос дает теорема Ляпунова.

Теорема Ляпунова. Пусть случайные величины независимы и при некотором δ имеют конечные центральные абсолютные моменты порядка $2 + \delta$: $M|\xi_k - M\xi_k|^{2+\delta} < \infty$. Обозначим $B_n^2 = \sum_{k=1}^n D\xi_k$. Тогда при выполнении

условия $\frac{1}{B_n^{2+\delta}} \sum_{k=1}^n M |\xi_k - M \xi_k|^{2+\delta} \rightarrow 0$, при $n \rightarrow \infty$ функции распределения центрированных и нормированных сумм последовательности будут сходиться (равномерно на всей оси) к функции распределения нормального закона с параметрами $(0,1)$, т.е.:

$$P \left\{ \frac{1}{B_n} \sum_{k=1}^n (\xi_k - M \xi_k) < x \right\} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-z^2/2} dz.$$

При выполнении этого предельного соотношения говорят, что для последовательности случайных величин имеет место **центральная предельная теорема**.

Теорема Гнеденко. Если случайные величины независимы и одинаково распределены, то для справедливости локальной предельной теоремы для плотностей необходимо и достаточно, чтобы при некотором $n \geq 1$ плотность $B_n q_n(x B_n)$ была ограниченной на всей оси.

Задача 5.7. Дисперсия каждой из 4500 независимых, одинаково распределенных случайных величин равна 5. Найти вероятность того, что среднее арифметическое этих случайных величин отклонится от своего математического ожидания не более чем на $-0,04$.

Решение. Так как $n=4500$ – велико, и случайные величины ξ_k независимы, одинаково распределены и имеют конечную дисперсию, то применима центральная предельная теорема. Следовательно,

$$\begin{aligned} & P \left\{ \frac{1}{4500} \left| \sum_{k=1}^{4500} (\xi_k - M \xi_k) \right| \leq 0,04 \right\} = \\ & = P \left\{ \frac{1}{150} \left| \sum_{k=1}^{4500} (\xi_k - M \xi_k) \right| < 1,2 \right\} = \Phi(1,2) - \Phi(-1,2) = 0,7699. \end{aligned}$$

Ответ: 0,7699.

Предельные теоремы теории вероятностей и их следствия лежат в основе вычислительного метода Монте-Карло. Этот метод часто применяют для приближенного вычисления определенных интегралов, не выражающихся через элементарные функции, для решения систем линейных уравнений высокого порядка, при решении краевых задач для уравнений в частных производных и во многих других задачах численного анализа, где обычные численные методы приводят к чрезмерно большому объему вычислений.

Вопросы и задания для самоконтроля

1. Назовите теоремы, которые входят в закон больших чисел.
2. Верно ли, что теорема Чебышева позволяет с достаточной точностью по средней арифметической судить о математическом ожидании или, наоборот, по математическому ожиданию предсказывать ожидаемую величину средней?
3. Можно ли на основании теоремы Чебышева утверждать, что если проведено достаточно большое количество измерений определённого параметра прибором, свободным от систематической погрешности, то средняя

арифметическая результатов этих измерений сколь угодно мало отличается от истинного значения измеряемого параметра?

4. Для каких случайных величин применима теорема Чебышева?

5. При каких условиях применима теорема Бернулли?

6. Является ли теорема Бернулли теоретическим обоснованием статистического определения вероятности?

7. Докажите или опровергните «парадокс Муавра»: с одной стороны, по теореме Бернулли вероятность того, что число орлов приближенно равно числу решек стремится к 1, а с другой стороны, вероятность того, что число орлов в точности совпадает с числом решек, стремится к 0.

8. Сформулируйте ограничения в применении закона больших чисел.

9. Будет ли выполняться закон больших чисел, если базовое распределение случайной величины меняется с течением времени?

10. Будет ли выполняться закон больших чисел, если данные взяты из разрозненных распределений?

11. Дисперсия каждой из 2500 независимых случайных величин не превышает 5. Оценить вероятность того, что отклонение среднего арифметического этих случайных величин от среднего арифметического их математических ожиданий не превысит 0,4.

12. Какие следствия вытекают из закона больших чисел?

13. Верно ли, что неравенство Чебышева дает оценку верхней границы для вероятности отклонения величины от её среднего значения?

14. Верно ли, что неравенство Чебышева дает оценку нижней границы вероятности того, что величина попадет в ε -окрестность её среднего значения?

15. Приведите примеры случайных величин, распределенных по нормальному закону.

16. Сформулируйте усиленный закон больших чисел Колмогорова.

17. Верно ли, что выборочный метод в математической статистике (суть которого в том, что по сравнительно небольшой случайной выборке судят обо всей генеральной совокупности исследуемых объектов) основан на законе больших чисел?

18. На основании какой теоремы для определения качества зерна достаточно взять небольшую пробу?

19. Верно ли, что центральная предельная теорема в различных ее формах определяет условия, при которых возникает нормальное распределение?

20. При бросках игрального кубика математическое ожидание выпавших чисел стремится к 3,5 и при каждом броске игрок получает вознаграждение, равное выпавшему числу (т.е. от 1 до 6 р). Плата за бросок составляет 3 р, при этом количество бросков не ограничено. Стоит ли играть при таких условиях?

21. Компания страхует 100 000 автомобилей, усредненная стоимость каждого 50000 у.е. (столько страховщик обязан выплатить при наступлении страхового случая). По закону больших чисел в среднем за год вероятность попадания в ДТП/угона (условия наступления страхового случая оговариваются отдельно) составляет 1/200. Рассчитайте стоимость страховки для страхователей, чтобы страховщик вышел в ноль.

22. В одной порции мороженого «фраппе» содержится в среднем, кроме других составляющих, 100 г охлаждённого кофе и 30 г сливок. Оцените вероятность того, что в одной порции мороженого будет одновременно содержаться более 102 г охлаждённого кофе и не менее 32 г сливок.

23. Вероятность того, что все из 30 выстрелов будут результативными, равна 0,5. Оцените вероятность того, что частота этого события отклонится от его вероятности по абсолютной величине не более, чем на 0,1.

24. Оцените вероятность того, что частота появления шестерки в 10000 независимых бросаниях игральной кости отклонится от вероятности появления шестерки по абсолютной величине меньше чем на 0,01.

25. Сформулируйте теоремы Линдеберга и Ляпунова.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В последние годы методы теории вероятностей все шире и шире проникают в различные области науки и техники, способствуя их прогрессу. Изначально, однако, вся теория вероятностей построена из субъективных первоначальных предположений (о выигрышах азартных игроков, например), гипотез, экспериментов. Понятие субъективности, и анализ субъективного альтернативного мнения может привести к неожиданным результатам.

И сейчас субъективные предположения активно используются в арсенале теории вероятностей. В большинстве случаев это определяется неполнотой сведений о том или ином исследуемом событии/явлении. В теории вероятностей неполноту сведений необходимо считать нормальным явлением; можно даже утверждать, что если бы были известны все обстоятельства изучаемого явления, то для вероятностей не было бы места, а наше знание было бы достоверным.

В данном пособии представлен теоретический материал по теории вероятностей, изучаемой студентами направления подготовки 01.03.01 Математика, профиля «Математические и цифровые технологии в образовании» в рамках учебной дисциплины «Теория вероятностей и математическая статистика». Также в пособии рассмотрено решение практических заданий и представлены вопросы и задания для самостоятельного контроля. Данное пособие будет полезно студентам и во время аудиторных занятий, и при самостоятельном выполнении практических заданий.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ И РЕКОМЕНДОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Айвазан, С. А. Основы моделирования и первичная обработка данных / С. А. Айвазан, И. С. Енюков, Л. Д. Мешалкин. – М. : Финансы и статистика, 1983. – 470 с.
2. Афанасьев, В. В. Теория вероятностей в играх, примерах и задачах : учебное пособие / В. В. Афанасьев, М. А. Суворова. – Ярославль : РИО ЯГПУ, 2024. – 300 с.
3. Большев, Л. Н. Таблицы математической статистики / Л. Н. Большев, Н. В. Смирнов. – Изд. 3-е. – М. : Физматлит, 1983. – 416 с.
4. Боярский, Э. А. Порядковые статистики / Э. А. Боярский. – М. : Статистика, 1972. – 120 с.
5. Вентцель, Е. С. Теория вероятностей: учеб. для вузов / Е. С. Вентцель. – 10-е изд. стер. – М. : Высш. шк., 2006. – 575 с.
6. Гнеденко, Б. В. Курс теории вероятностей: Учебник. / Б. В. Гнеденко. – Изд. 8-е, испр. и доп. – М. : Едиториал УРСС, 2005. – 448 с.
7. Емельянов, Г. В. Задачник по теории вероятностей и математической статистике / Г. В. Емельянов, В. П. Скитович. – М. : МГУ. – 1967. – 330 с.
8. Кобзарь, А. И. Прикладная математическая статистика : для инженеров и научных работников / А. И. Кобзарь. – Изд. 2-е, испр. – М. : Физматлит, 2012. – 813 с.
9. Михин, М. Н. Теория вероятностей: практикум / М. Н. Михин, Т. Б. Белова. – Уфа : Изд-во ООО «Аэтерна», 2023. – 96 с.
10. Палий, И. А. Теория вероятностей. Задачник: учебное пособие / И. А. Палий. – Сер. 68 Профессиональное образование. – 3-е изд., испр. и доп. – М. : Изд-во Юрайт, 2019. – 236 с.
11. Пожидаев, В. Ф. Теория вероятностей в задачах с решениями : учебное пособие / В. Ф. Пожидаев, А. В. Скринникова. – Луганск : Изд-во ВНУ им. В. Даля, 2004. – 368 с.
12. Попов, А. М. Теория вероятностей и математическая статистика: учебник и практикум для вузов / А. М. Попов, В. Н. Сотников. – Сер. Высшее образование. – 3-е изд., перераб. и доп. – М. : ЮРАЙТ, 2024. – 216 с.
13. Прохоров, А. В. Задачи по теории вероятностей : Основные понятия. Предельные теоремы. Случайные процессы : уч. пособие / А. В. Прохоров, В. Г. Ушаков, Н. Г. Ушаков. – М. : КДУ, 2009. – 328 с.
14. Розанов, Ю. А. Теория вероятностей, случайные процессы и математическая статистика : учебник / Ю. А. Розанов. – М. : Наука. – 1985. – 320 с.
15. Сборник задач по математике. В 4-х частях. Ч. 3. Теория вероятностей и математическая статистика : учебное пособие для втузов / Под общ. ред. А. В. Ефимова, А. С. Пospelова. – 5-е изд. испр. – М. : Физматлит., 2009. – 288 с.

16. Сборник задач по теории вероятностей, математической статистике и теории случайных функций : уч. пособие / Под общей ред. А. А. Свешникова. – 5-е изд., стер. – СПб. : Изд-во «Лань», 2022. – 448 с.
17. Севастьянов, Б. А. Сборник задач по теории вероятностей / Б. А. Севастьянов, В. Н. Чистяков, А. М. Зубков. – М. : Наука, 1980. – 342 с.
18. Смирнов, Н. В. Теория вероятностей и математическая статистика / Н. В. Смирнов. – М. : Наука, 1970. – 288 с.
19. Справочник по специальным функциям / Под ред. М. Абрамовица, И. Стиган. – М. : Наука, 1979. – 830 с.
20. Теория вероятностей и математическая статистика: сборник задач / сост. Ю. В. Богомолов, А. Н. Максименко, А. Н. Морозов. – 2-е изд., перераб. и доп. – Ярославль : ЯрГУ, 2009. – 111 с.
21. Теория вероятностей, математическая статистика и случайные процессы в примерах и задачах : учебное пособие / Л. В. Обухова, З. Я. Молдавская, В. Ф. Князева. – Киев : УМКВО, 1991. – 312 с.
22. Тихов, М. С. Геометрические вероятности : учебно-методическое пособие / М. С. Тихов, В. А. Гришин. – Нижний Новгород : ННГУ им. Н. И. Лобачевского, 2018. – 52 с. – Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. – URL: <https://e.lanbook.com/book/144642> (дата обращения: 03.12.2024).
23. Трухан, А. А. Теория вероятностей в инженерных приложениях : уч. пособие для студентов вузов, обучающихся по спец-ям: «Техническая эксплуатация летательных аппаратов и двигателей» «Робототехнические системы авиационного вооружения», «Техническая эксплуатация авиационных электросистем и пилотажно-навигационных комплексов», «Техническая эксплуатация транспортного радиооборудования» / А. А. Трухан, Г. С. Кудряшев. – Изд. 4-е, перераб. и доп. – СПб. : «Лань», 2022. – 368 с.
24. Феллер, В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения, Т. 1 / В. Феллер. – М. : Мир, 1967. – 498с.
25. Фролов, А. Н. Краткий курс теории вероятностей и математической статистики / А. Н. Фролов. – 2-е изд., стер. – Санкт-Петербург : Лань, 2023. – 304 с.
26. Хацкевич, Г. А. Теория вероятностей и математическая статистика : учебник / Г. А. Хацкевич, М. А. Маталыцкий. – Минск : Вышэйшая школа, 2017. – 591 с.
27. Четыркин, В. М. Вероятность и статистика / В. М. Четыркин, И. Л. Калихман. – М. : Финансы и статистика, 1989. – 319 с.
28. Энатская, Н. Ю. Теория вероятностей и математическая статистика. Учебник и практикум / Н. Ю. Энатская, Е. Р. Хакимуллин. – Сер. 68 Профессиональное образование. – 1-е изд. – М. : Юрайт, 2020. – 400 с.
29. Яглом, А. М. Вероятность и информация / А. М. Яглом, И. М. Яглом. – Изд. 5-е, стер. – URSS : КомКнига, 2020. – 511 с.

Приложение 1

Значения функции Пуассона $P_n(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$

$\lambda \backslash k$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0	0,9048	0,8187	0,7408	0,6703	0,6065	0,5488	0,4966	0,4993	0,4066	0,3679
1	0,0905	0,1637	0,2223	0,2681	0,3033	0,3293	0,3476	0,3595	0,3659	0,3679
2	0,0045	0,0164	0,0333	0,0536	0,0758	0,0988	0,1216	0,1438	0,1647	0,1839
3	0,0002	0,0011	0,0033	0,0072	0,0126	0,0198	0,0284	0,0383	0,0494	0,0613
4	0,0000	0,0001	0,0003	0,0007	0,0016	0,0030	0,0050	0,0077	0,0111	0,0153
5	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0003	0,0007	0,0012	0,0020	0,0031
6	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0003	0,0005
7	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001

$\lambda \backslash k$	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0	10,0
0	0,1353	0,0498	0,0183	0,0067	0,0025	0,0009	0,0003	0,0001	0,0001
1	0,2707	0,1494	0,0733	0,0337	0,0149	0,0064	0,0027	0,0001	0,0005
2	0,2707	0,2240	0,1465	0,0842	0,0466	0,0223	0,0107	0,0050	0,0023
3	0,1805	0,2240	0,1954	0,1404	0,0892	0,0521	0,0286	0,0150	0,0076
4	0,0902	0,1681	0,1954	0,1755	0,1339	0,0912	0,0572	0,0337	0,0189
5	0,0361	0,1008	0,1563	0,1755	0,1606	0,1277	0,0916	0,0607	0,0378
6	0,0120	0,0504	0,1042	0,1462	0,1606	0,1490	0,1221	0,0911	0,0631
7	0,0034	0,0216	0,0595	0,1045	0,1377	0,1490	0,1396	0,1171	0,0901
8	0,0009	0,0081	0,0298	0,0653	0,1033	0,1304	0,0396	0,1318	0,1126
9	0,0002	0,0027	0,0132	0,0363	0,0689	0,1014	0,1241	0,1318	0,1251
10	0,0000	0,0008	0,0053	0,0181	0,0413	0,0710	0,0933	0,1186	0,1251
11	0,0000	0,0002	0,0019	0,0082	0,0225	0,0452	0,0722	0,0970	0,1137
12	0,0000	0,0001	0,0006	0,0034	0,0113	0,0264	0,0481	0,0728	0,0948
13	0,0000	0,0000	0,0002	0,0013	0,0052	0,0142	0,0296	0,0504	0,0729

Продолжение Приложения 1

λ k	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0	10,0
14	0,0000	0,0000	0,0001	0,0005	0,0022	0,0071	0,0169	0,0324	0,0521
15	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0009	0,0033	0,0090	0,0194	0,0347
16	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0003	0,0015	0,0045	0,0109	0,0217
17	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0006	0,0021	0,0058	0,0128
18	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0009	0,0029	0,0071
19	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0004	0,0014	0,0037
20	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0006	0,0019
21	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0009
22	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0004
23	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002
24	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002
25	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

Приложение 2

$$\text{Значения функции } \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3653	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

Приложение 3

Значения функции Лапласа $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,0000	0,40	0,1554	0,80	0,2881	1,20	0,3849
0,01	0,0040	0,41	0,1591	0,81	0,2910	1,21	0,3869
0,02	0,0080	0,42	0,1628	0,82	0,2939	1,22	0,3883
0,03	0,0120	0,43	0,1664	0,83	0,2967	1,23	0,3907
0,04	0,0160	0,44	0,1700	0,84	0,2995	1,24	0,3925
0,05	0,0199	0,45	0,1736	0,85	0,3023	1,25	0,3944
0,06	0,0239	0,46	0,1772	0,86	0,3051	1,26	0,3962
0,07	0,0279	0,47	0,1808	0,87	0,3078	1,27	0,3980
0,08	0,0319	0,48	0,1844	0,88	0,3106	1,28	0,3997
0,09	0,0359	0,49	0,1879	0,89	0,3133	1,29	0,4015
0,10	0,0398	0,50	0,1915	0,90	0,3159	1,30	0,4032
0,11	0,0438	0,51	0,1950	0,91	0,3186	1,31	0,4049
0,12	0,0478	0,52	0,1985	0,92	0,3212	1,32	0,4066
0,13	0,0517	0,53	0,2019	0,93	0,3238	1,33	0,4082
0,14	0,0557	0,54	0,2054	0,94	0,3264	1,34	0,4099
0,15	0,0596	0,55	0,2088	0,95	0,3289	1,35	0,4115
0,16	0,0636	0,56	0,2123	0,96	0,3315	1,36	0,4131
0,17	0,0675	0,57	0,2157	0,97	0,3340	1,37	0,4147
0,18	0,0714	0,58	0,2190	0,98	0,3365	1,38	0,4162
0,19	0,0753	0,59	0,2224	0,99	0,3389	1,39	0,4177
0,20	0,0793	0,60	0,2257	1,00	0,3413	1,40	0,4192
0,21	0,0832	0,61	0,2291	1,01	0,3438	1,41	0,4207
0,22	0,0871	0,62	0,2324	1,02	0,3461	1,42	0,4222
0,23	0,0910	0,63	0,2357	1,03	0,3485	1,43	0,4236
0,24	0,0948	0,64	0,2389	1,04	0,3508	1,44	0,4251
0,25	0,0987	0,65	0,2422	1,05	0,3531	1,45	0,4265
0,26	0,1026	0,66	0,2454	1,06	0,3554	1,46	0,4279
0,27	0,1064	0,67	0,2486	1,07	0,3577	1,47	0,4292
0,28	0,1103	0,68	0,2517	1,08	0,3599	1,48	0,4306
0,29	0,1141	0,69	0,2549	1,09	0,3621	1,49	0,4319
0,30	0,1179	0,70	0,2580	1,10	0,3643	1,50	0,4332
0,31	0,1217	0,71	0,2611	1,11	0,3665	1,51	0,4345
0,32	0,1255	0,72	0,2642	1,12	0,3686	1,52	0,4357
0,33	0,1293	0,73	0,2673	1,13	0,3708	1,53	0,4370
0,34	0,1331	0,74	0,2703	1,14	0,3729	1,54	0,4382
0,35	0,1368	0,75	0,2734	1,15	0,3749	1,55	0,4394
0,36	0,1406	0,76	0,2764	1,16	0,3770	1,56	0,4406
0,37	0,1443	0,77	0,2794	1,17	0,3790	1,57	0,4418
0,38	0,1480	0,78	0,2823	1,18	0,3810	1,58	0,4429
0,39	0,1517	0,79	0,2852	1,19	0,3830	1,59	0,4441

Продолжение Приложения 3

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
1,60	0,4452	2,05	0,4798	2,50	0,4938	2,95	0,4984
1,61	0,4463	2,06	0,4803	2,51	0,4940	2,96	0,4985
1,62	0,4474	2,07	0,4808	2,52	0,4941	2,97	0,4985
1,63	0,4484	2,08	0,4812	2,53	0,4943	2,98	0,4986
1,64	0,4495	2,09	0,4817	2,54	0,4945	2,99	0,4986
1,65	0,4505	2,10	0,4821	2,55	0,4946	3,00	0,49865
1,66	0,4515	2,11	0,4826	2,56	0,4948	3,05	0,49886
1,67	0,4525	2,12	0,4830	2,57	0,4949	3,10	0,49903
1,68	0,4535	2,13	0,4834	2,58	0,4951	3,15	0,49918
1,69	0,4545	2,14	0,4838	2,59	0,4952	3,20	0,49931
1,70	0,4554	2,15	0,4842	2,60	0,4953	3,25	0,49942
1,71	0,4564	2,16	0,4846	2,61	0,4955	3,30	0,49952
1,72	0,4573	2,17	0,4850	2,62	0,4956	3,40	0,49966
1,73	0,4582	2,18	0,4854	2,63	0,4957	3,45	0,49972
1,74	0,4591	2,19	0,4857	2,64	0,4959	3,50	0,49977
1,75	0,4599	2,20	0,4861	2,65	0,4960	3,55	0,49981
1,76	0,4608	2,21	0,4865	2,66	0,4961	3,60	0,49984
1,77	0,4616	2,22	0,4868	2,67	0,4962	3,65	0,49987
1,78	0,4625	2,23	0,4871	2,68	0,4963	3,70	0,49989
1,79	0,4633	2,24	0,4875	2,69	0,4964	3,75	0,49991
1,80	0,4611	2,25	0,4878	2,70	0,4965	3,80	0,49993
1,81	0,4649	2,26	0,4881	2,71	0,4966	3,85	0,49994
1,82	0,4656	2,27	0,4884	2,72	0,4967	3,90	0,49995
1,83	0,4664	2,28	0,4887	2,73	0,4968	3,95	0,49996
1,84	0,4671	2,29	0,4890	2,74	0,4969	4,00	0,499968
1,85	0,4678	2,30	0,4893	2,75	0,4970	4,10	0,499979
1,86	0,4686	2,31	0,4896	2,76	0,4971	4,20	0,499987
1,87	0,4693	2,32	0,4898	2,77	0,4972	4,30	0,499992
1,88	0,4699	2,33	0,4901	2,78	0,4973	4,40	0,499995
1,89	0,4706	2,34	0,4904	2,79	0,4974	4,50	0,499997
1,90	0,4713	2,35	0,4906	2,80	0,4974	5,00	0,499997
1,91	0,4719	2,36	0,4909	2,81	0,4975		
1,92	0,4726	2,37	0,4911	2,82	0,4976	∞	0,5
1,93	0,4732	2,38	0,4913	2,83	0,4977		
1,94	0,4738	2,39	0,4916	2,84	0,4977		
1,95	0,4744	2,40	0,4918	2,85	0,4978		
1,96	0,4750	2,41	0,4920	2,86	0,4979		
1,97	0,4756	2,42	0,4922	2,87	0,4980		
1,98	0,4761	2,43	0,4925	2,88	0,4980		
1,99	0,4767	2,44	0,4927	2,89	0,4981		
2,00	0,4772	2,45	0,4929	2,90	0,4981		
2,01	0,4778	2,46	0,4931	2,91	0,4982		
2,02	0,4783	2,47	0,4932	2,92	0,4983		
2,03	0,4788	2,48	0,4934	2,93	0,4983		
2,04	0,4793	2,49	0,4936	2,94	0,4984		

Учебное издание

**ПОЛИЩУК Наталья Алексеевна
СКРИННИКОВА Анна Владимировна**

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Учебно-методическое пособие

В авторской редакции

Подписано в печать 13.03.2025 г. Бумага офсетная. Гарнитура Times New Roman.
Печать ризографическая. Формат 60×84/16. Усл. печ. л. 6,51.
Тираж 100 экз. Зак. № 10.

ФГБОУ ВО «ЛГПУ»
Издательство ЛГПУ
ул. Оборонная, 2, г. Луганск, ЛНР, 291011. Т/ф: +7-857-2-58-03-20
e-mail: knitaizd@mail.ru