МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
ЛУГАНСКОЙ НАРОДНОЙ РЕСПУБЛИКИ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
ЛУГАНСКОЙ НАРОДНОЙ РЕСПУБЛИКИ
«ЛУГАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ГОУ ВО ЛНР «ЛГПУ»)

Алгебра.
Часть 1.
Матрицы. Определители. СЛАУ

Электронное учебное пособие в 2-х частях.
Для студентов очной и очно-заочной форм обучения
по направлению подготовки
01.03.01 Математика

Книга

Луганск
2022

УДК 512.64 (076)
ББК 22.143р3
А45

Р е ц е н з е н т ы :

Кочевский А. А. – декан факультета компьютерных систем и информационных технологий Государственного образовательного учреждения высшего образования Луганской Народной Республики «Луганский государственный университет имени Владимира Даля», кандидат технических наук, доцент;

Щелоков В. С. – доцент кафедры прикладной математики Государственного образовательного учреждения высшего образования Луганской Народной Республики «Луганский государственный университет имени Владимира Даля», кандидат физико-математических наук, доцент;

Швыров В. В. – доцент кафедры информационных образовательных технологий и систем Государственного образовательного учреждения высшего образования Луганской Народной Республики «Луганский государственный педагогический университет», кандидат физико-математических наук, доцент.

Коллектив авторов
А. В. Скринникова, О. В. Давыскиба, Н. А. Полищук, С. В. Темникова

А45 **Алгебра. Часть 1. Матрицы. Определители. СЛАУ** : в 2 ч. Ч. 1 : электронное учебное пособие / А. В. Скринникова, О. В. Давыскиба, Н. А. Полищук [и др.] ; ГОУ ВО ЛНР «ЛГПУ». – Луганск : Книта, 2022. – 96 с.

Учебное пособие содержит краткие конспекты лекций по темам «Матрицы», «Определители», «СЛАУ» курса «Алгебра», примеры решений типовых задач, упражнения для самостоятельной работы, задания к контрольной работе, большой перечень рекомендованной литературы.

Учебное пособие предназначено для студентов очной и очно-заочной форм обучения по направлению подготовки 01.03.01 Математика.

УДК 512.64 (076)
ББК 22.143р3

Рекомендовано Учебно-методическим советом ГОУ ВО ЛНР «ЛГПУ» в качестве электронного учебного пособия для студентов очной и очно-заочной форм обучения по направлению подготовки 01.03.01 Математика (протокол № 2 от 12.10.2022 года).

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Электронное учебное пособие предназначено для организации самостоятельной работы студентов, что особенно ценно при дистанционно организованном обучении. Целью данного учебного пособия является повышение эффективности процесса обучения, его активизация, выработка у студентов умения самостоятельно решать типовые задачи курса алгебры и применять полученные знания при решении прикладных задач.

Электронное учебное пособие содержит необходимый краткий теоретический материал по двум темам дисциплины «Алгебра»: «Матрицы и определители» и «Системы линейных алгебраических уравнений», методические рекомендации по решению задач, типовые задания с подробными решениями, набор задач для самостоятельного решения, контрольные вопросы по теме, задания для выполнения индивидуальной домашней контрольной работы и список рекомендованной литературы, соответствующие требованиям образовательного стандарта.

Из предложенных заданий для индивидуальной домашней контрольной работы студент решает минимум по одной задаче из каждого задания согласно номеру по списку в журнале академической успеваемости.

В указанных темах излагается минимум того, что необходимо знать: только самые основные понятия, примеры и теоремы, без которых совершенно невозможно обойтись. Студент, желающий узнать больше, должен обратиться к книгам более солидного объема. В первую очередь, это учебник А. И. Кострикина [43; 44; 45] в трех частях. Вторую часть этого учебника [44] можно рекомендовать для основательного изучения материала, относящегося ко всем выпускам нашего пособия. Необходимо также отметить книгу [46] того же автора, из которой можно узнать много интересного о приложениях линейной алгебры в геометрии и физике. Список рекомендованной литературы содержит много других учебников, научно-популярных брошюр [2; 75], пособий и справочников, которые в полной мере раскрывают вышеуказанные темы. В библиотеке или на электронных носителях можно найти другую литературу, освещающую данную тематику. Стоит обратить внимание на классические книги И. М. Гельфанда [13], В. А. Ильина и Э. Г. Позняка [30], А. Г. Куроша [49] и А. И. Мальцева [54]. Из более современных учебников отметим книги Э. Б. Винберга [11], В. А. Артамонова [3] и Г. С. Шевцова [74].

Определения, примеры, теоремы, следствия и формулы в данном учебном пособии нумеруются с помощью двух цифр (чисел), из которых первое означает номер темы, второе – номер определения, теоремы и т.п. внутри данной темы. При этом каждому из перечисленных видов пронумерованных объектов присваивался номер отдельно и независимо от остальных. Например, в одной и той же теме может присутствовать определение 1.2, теорема 1.2, пример 1.2 и формула (1.2). Опыт показывает, что к этому можно легко привыкнуть.

Краткий экскурс в историю и приложения алгебры

Термин «алгебра» происходит от арабского «اَلْجَبْرُ» – al-jabr. Изначально это слово означало операцию переноса вычитаемых из одной части уравнения в другую, и его буквальный смысл «уравновешивание». Алгебра – раздел математики, который характеризуется как обобщение и расширение арифметики. Здесь числа и другие математические объекты обозначаются буквами и другими символами, что позволяет записывать и исследовать их свойства в самом общем виде [4]. Термин был взят из работы «Ilm al-jabr wa l-muqābala» («Наука восстановления и уравновешивания») персидского учёного математика и астронома IX века Мухаммада ибн Мусы Аль-Хорезми. Укороченное в латыни до «algeber» или «алгебры» это слово в конечном итоге вошло в английский язык в XV веке.

Истоки алгебры уходят на 4000 лет назад. Так, решение уравнений 1-й и 2-й степеней известно еще с древности. Но до сих пор ведутся споры о том, кто имеет больше прав называться «отцом алгебры»: Диофант (древнегреческий математик, живший в III веке н. э.) или Аль-Хорезми. Считают, что первое определение алгебры как математической дисциплины дал и записал персидский ученый (философ, математик, астроном и поэт) Омар Хайям (1048–1131): «Алгебра – наука об уравнениях, в которой четко разделяются числа и величины» [4].

Гораздо раньше среднеазиатских и греческих ученых и независимо от них китайские учёные решали уравнения первой степени и их системы, квадратные уравнения, задачи с отрицательными и иррациональными числами. В Европе алгебра начала развиваться лишь в XII веке. Много европейских ученых внесли существенный вклад в ее развитие: Ф. Виет, Р. Декарт, И. Ньютон, Э. В. Чирнгаузен, Л. Эйлер, Э. Безу, Ж. Л. Даламбер, Г. Крамер, П.-С. Лаплас, Ж. Л. Лагранж, А. Кэли, Э. Куммер, П. Руффини, Н. Х. Абель, К.Ф. Гаусс, Э. Галуа, К. Жордан, О. Л. Коши, Ф. Г. Фробениус, Р. Дедекинд, Е. И. Золотарев, Л. Кронекер, Р. Гамильтон, С.Н. Черников и другие. Среди них Э. Нетер – женщина-математик, которая внесла значительный вклад в развитие этой науки. Более подробные исторические сведения можно найти в источниках [4; 49; 65; 74].

Вплоть до второй половины XX века практическое применение алгебры ограничивалось, в основном, решением алгебраических уравнений и систем уравнений с несколькими переменными. В этот период времени началось бурное развитие ряда новых отраслей техники. Появились электронно-вычислительные машины, устройства для хранения, переработки и передачи информации, системы наблюдения. Проектирование новых видов техники и их использование немыслимо без применения современной алгебры. Так, электронно-вычислительные машины устроены по принципу конечных автоматов. Для проектирования электронно-вычислительных машин и электронных схем используются методы булевой алгебры. Теория категорий используется в задачах распознавания образов, в определении семантики языков программирования и других практических задачах. Кодирование и декодирование информации производится методами теории групп. Теория рекуррентных последовательностей используется в работе радаров. Теория представлений групп используется в физике, дискретные группы применяются в кристаллографии. Алгебраические методы используются в криптографии, теории кодирования, математической экономике, в машинном обучении и других областях. Таким образом, вместе с фундаментальной ролью внутри математики алгебра нашла применения в прикладных областях.

В настоящее время алгебра как раздел математики традиционно включает следующие категории:

– элементарная алгебра, которая изучает свойства операций с вещественными числами. В ней постоянные и переменные обозначаются буквенными символами. Обычно преподаётся в школе под названием алгебра;

– общая алгебра, иногда называемая современной алгеброй или абстрактной алгеброй, где аксиоматизируются и изучаются максимально общие алгебраические структуры, такие, как группы, решетки, кольца и поля;

– универсальная алгебра, в которой изучаются свойства, общие для всех алгебраических структур (считается подразделом общей алгебры);

– линейная алгебра, в которой изучаются свойства векторных пространств (включая матрицы и определители);

– алгебраическая комбинаторика, в которой методы абстрактной алгебры используются для изучения вопросов комбинаторики.

Многие математические структуры носят названия алгебр, например, алгебра Ли, сигма-алгебра и др. В то же время одни разделы алгебры имеют в названии слово «алгебра», например, «линейная алгебра», а другие нет: теория групп, теория колец и теория поля. В более широком смысле под алгеброй понимают раздел математики, посвящённый изучению операций над элементами множеств произвольной природы, обобщающий обычные операции сложения и умножения чисел.

Темы излагаются в данном пособии в рамках линейной алгебры. Предметом изучения линейной алгебры являются векторные пространства. Одна из главных характеристик векторного пространства – его размерность, которая представляет собой максимальное число линейно независимых элементов пространства.

Иначе говоря, в грубой геометрической интерпретации размерность пространства – это число направлений, которые невозможно выразить друг через друга посредством только операций сложения и умножения на скаляр. Естественно, это связано с аналитической геометрией. Принцип размерности делит задачи аналитической геометрии по числу неизвестных (с одним неизвестным – отыскание точки, с двумя – кривой или геометрического места на плоскости, с тремя – поверхности). Так, система линейных уравнений из трёх переменных определяет набор плоскостей. Точка их пересечения является решением системы.

ТЕМА 1. МАТРИЦЫ И ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

1.1. Матрицы и действия над ними

Считается, что теория матриц начала своё существование в середине XIX века. Это отражено в работах Уильяма Гамильтона и Артура Кэли [65]. Фундаментальные результаты в теории матриц принадлежат Вейерштрассу, Жордану, Фробениусу. Термин «матрица» ввел Джеймс Сильвестр в 1850 г. [65]. Впервые же матрицы упоминались ещё в древнем Китае под названием «волшебные квадраты». Волшебные квадраты чуть позднее появились у арабских математиков, примерно тогда появился принцип сложения матриц. Изначально основным применением матриц было решение систем линейных уравнений [3].

Определение 1.1. **Матрицей** размера $m\times n$ называется прямоугольная таблица чисел (или других элементов), содержащая m строк и n столбцов. Каждую такую таблицу заключают в круглые скобки или двойные вертикальные черточки и обозначают какой-либо заглавной буквой [12]. Например,

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ или } A=\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{Vmatrix}.$$

В сокращенной записи матрицу обозначают $A=\left(a_{ij}\right)$ или $A=\left\|a_{ij}\right\|$ $i=1, 2, \dots m;$ $j=1, 2, \dots n.$

Числа, составляющие матрицы, называют **элементами** матрицы. Для обозначения каждого из элементов матрицы используется двойной индекс. По условию первый индекс обозначает номер строки, а второй – номер столбца, в котором стоит данный элемент. Таким образом, a_{25} обозначает элемент, стоящий во второй строке и пятом столбце; a_{ij} обозначает элемент, стоящий в i-й стоке и j-ом столбце.

В качестве примера матриц, содержащих не только числа, можно привести телефонные книги любого размера и с любым числом данных об абоненте или справочники сотрудников какой-либо организации.

Определение 1.2. Если $m=n$, то матрицу называют **квадратной** порядка m, если $m\neq n$ – то **прямоугольной**. В частности, матрицу размера $1\times n$ называют **матрицей-строкой**, а $m\times 1$ – **матрицей-столбцом**.

Матрицы обозначают заглавными буквами латинского алфавита: A, B и т.д.

Определение 1.3. Матрицы одинаковой размерности считаются **равными**, если они имеют равные соответствующие элементы, т.е. при $A=(a_{ij})$ и $B=(b_{ij})$ $A=B$, если $a_{ij}=b_{ij}$ для всех i и j.

Определение 1.4. Квадратная матрица называется **диагональной**, если все ее элементы, кроме тех, которые находятся на главной диагонали, равны нулю, т.е.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Определение 1.5. Диагональную матрицу, у которой все элементы главной диагонали равны 1, называют **единичной** и обозначают буквой E. Например, единичная матрица третьего порядка имеет вид

$$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Определение 1.6. Нулевой называется матрица, у которой все элементы равны нулю. Обозначается нулевая матрица O.

Очевидно, что нулевые матрицы различных размерностей не равны.

В квадратных матрицах выделяют главную и побочную диагонали.

Определение 1.7. Совокупность элементов квадратной матрицы, расположенных на отрезке, соединяющем левый верхний угол с правым нижним, называют **главной диагональю**, а на отрезке, соединяющем правый верхний угол с левым нижним – **побочной диагональю** матрицы.

Определение 1.8. Квадратная матрица называется **треугольной**, если все элементы, стоящие выше (или ниже) главной диагонали, равны нулю. При этом матрица B называется правой или **верхней треугольной**, а матрица С – левой или **нижней треугольной** матрицей:

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots. & \dots. & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} c_{11} & 0 & \dots & 0 \\ c_{21} & c_{22} & \dots & 0 \\ \dots. & \dots. & \dots. & \dots. \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix}.$$

Над матрицами возможно проводить операции сложения, вычитания, умножения на число, на матрицу, транспонирования.

Операции сложения или вычитания матриц вводятся только для матриц одинакового размера. Пусть даны матрицы A и B:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}.$$

Определение 1.9. Суммой (разностью) двух матриц A и B одинаковой размерности называется матрица C той же размерности, элементы которой равны суммам (разностям) соответствующих элементов матриц A и B[1-4; 6]:

$$A \pm B = C = \begin{pmatrix} a_{11} \pm b_{11} & a_{12} \pm b_{12} & \dots & a_{1n} \pm b_{1n} \\ a_{21} \pm b_{21} & a_{22} \pm b_{22} & \dots & a_{2n} \pm b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} \pm b_{n1} & a_{n2} \pm b_{n2} & \dots & a_{nn} \pm b_{nn} \end{pmatrix}.$$

Определение 1.10. Произведением матрицы A на число λ называется матрица (λA), элементы которой получаются из элементов матрицы A умножением на число λ:

$$\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{n1} & \lambda a_{n2} & \dots & \lambda a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Пример 1.1. Даны матрицы A и B:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 4 & -5 & 2 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ -7 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Найти матрицы $A + B$, $3A - 4B$.

Решение. Воспользуемся определениями 1.9 и 1.10

$$A + B = \begin{pmatrix} -1+3 & 2+4 & 3+1 \\ 4-7 & -5+3 & 2+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 4 \\ -3 & -2 & 6 \end{pmatrix}.$$

$$3A - 4B = \begin{pmatrix} -3 & 6 & 9 \\ 12 & -15 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 12 & 16 & 4 \\ -28 & 12 & 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3-12 & 6-16 & 9-4 \\ 12-(-28) & -15-12 & 6-16 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & -5 & 6 \\ 4 & -02 & -7 \end{pmatrix}.$$

Определение 1.11. Произведением двух матриц $A_{m \times n}$ и $B_{n \times p}$, заданных в определенном порядке (A – первая, B– вторая) называется матрица $C_{m \times p}$, каждый элемент которой c_{ij} равен сумме произведений элементов i-ой строки матрицы A на соответствующие элементы j-го столбца матрицы B:

$$\begin{pmatrix} c_{11} & \dots & \dots & c_{1\,p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{i1} & \dots & \boxed{c_{i\,j}} & c_{i\,p} \\ c_{m1} & \dots & \dots & c_{m\,p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1\,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & \dots & a_{i\,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{m\,n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1\,j} & \dots & b_{1\,p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & \dots & b_{n\,j} & \dots & b_{n\,p} \end{pmatrix},$$

где $i = 1, 2, \dots m$; $j = 1, 2, \dots p$.

Произведение матриц в указанном порядке обозначается $C = AB$.

Определение 1.12. В случаях, когда количество столбцов 1-й матрицы A совпадает с количеством строк 2-й матрицы B, матрицы A и B называются **согласованными**.

Пример 1.2. Вычислить произведение матриц $C = AB$, если

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix}.$$

Решение.

Согласно определению 1.11 получаем для общего случая:

$$C = AB = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{22} & c_{22} \\ c_{33} & c_{32} \end{pmatrix}, \quad \text{где}$$

$$c_{11} = a_{11}\,b_{11} + a_{12}\,b_{21} + a_{13}\,b_{31};$$

$$c_{12} = a_{11} b_{12} + a_{12} b_{22} + a_{13} b_{32};$$
$$c_{21} = a_{21} b_{11} + a_{22} b_{21} + a_{23} b_{31};$$
$$c_{22} = a_{21} b_{12} + a_{22} b_{22} + a_{23} b_{32};$$
$$c_{31} = a_{31} b_{11} + a_{32} b_{21} + a_{33} b_{31};$$
$$c_{32} = a_{31} b_{12} + a_{32} b_{22} + a_{33} b_{32}.$$

На конкретном примере, при

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ -2 & -5 \\ -3 & -6 \end{pmatrix},$$

получаем:

$$C = AB = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ -2 & -5 \\ -3 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \end{pmatrix},$$

$$c_{11} = 1 \cdot (-1) + 4 \cdot (-2) + 7 \cdot (-3) = -30;$$
$$c_{12} = 1 \cdot (-4) + 4 \cdot (-5) + 7 \cdot (-6) = -66;$$
$$c_{21} = 2 \cdot (-1) + 5 \cdot (-2) + 8 \cdot (-3) = -36;$$
$$c_{22} = 2 \cdot (-4) + 5 \cdot (-5) + 8 \cdot (-6) = -81;$$
$$c_{31} = 3 \cdot (-1) + 6 \cdot (-2) + 9 \cdot (-3) = -42;$$
$$c_{32} = 3 \cdot (-4) + 6 \cdot (-5) + 9 \cdot (-6) = -96.$$

Таким образом, окончательно имеем:

$$C = AB = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ -2 & -5 \\ -3 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -30 & -66 \\ -36 & -81 \\ -42 & -96 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что произведение $B \cdot A$ в этом случае не определено. Значит, на вопрос о справедливости равенства $A \cdot B = B \cdot A$ для прямоугольных матриц дается отрицательный ответ, так как одна из частей этого равенства не определена.

Рассмотрим этот же вопрос для квадратных матриц одинакового размера. Теперь определены оба произведения $A\cdot B$ и $B\cdot A$. Проверим, что и в этом случае, вообще говоря, $A\cdot B \neq B\cdot A$.

Пусть $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & 2\end{pmatrix}$. По определению произведения двух матриц получим:

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}1\cdot 2+0\cdot 1 & 1\cdot 3+0\cdot 2\\ 1\cdot 2+1\cdot 1 & 1\cdot 3+1\cdot 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 3 & 5\end{pmatrix},$$

$$B\cdot A=\begin{pmatrix}2\cdot 1+3\cdot 1 & 2\cdot 0+3\cdot 1\\ 1\cdot 1+2\cdot 1 & 1\cdot 0+2\cdot 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 3\\ 3 & 2\end{pmatrix}.$$

Итак, в общем случае $\boldsymbol{A\cdot B \neq B\cdot A}$.

Определение 1.13. В частных случаях, когда произведение $A\cdot B = B\cdot A$, матрицы A и B называются **перестановочными**, или коммутативными.

Очевидно, что для любой матрицы A и единичной матрицы E согласованных порядков имеет место равенство

$$\boldsymbol{A\cdot E = E\cdot A = A}.$$

В этом смысле единичная матрица играет роль единицы при умножении матриц.

Определение 1.14. Транспонированием матрицы называется перемена ролями строк и столбцов с сохранением их нумерации и обозначается A^T.

Например, если

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 6 & 2 & 3\\ -4 & 1 & 0\end{pmatrix}, \text{ то } A^T=\begin{pmatrix}1 & 6 & -4\\ 0 & 2 & 1\\ -1 & 3 & 0\end{pmatrix}.$$

В [17] можно найти доказательства основных **свойств операций** над матрицами:

а) $A + B = B + A$ – коммутативность относительно сложения матриц;

б) $A + (B + C) = (A + B) + C$ – ассоциативность относительно сложения матриц;

в) $A + 0 = A$; $A - A = 0$, т.е. роль нулевой матрицы в действиях над матрицами такая же, как и у числа нуль в действиях над числами;

г) $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$ – ассоциативность относительно умножения на числа α и β;

д) $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$ – дистрибутивность умножения на число относительно сложения матриц;

е) $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$ – дистрибутивность умножения на число относительно сложения чисел.

Определение 1.15. Матрица $(-1) \cdot A$ называется **противоположной** матрице A.

Можно проверить, что произведение матриц обладает следующими свойствами:

1) $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$ – ассоциативность относительно умножения матриц;

2) $\lambda(A \cdot B) = (\lambda A) \cdot B$ – ассоциативность относительно умножения на число;

3) $C \cdot (A + B) = C \cdot A + C \cdot B$ – дистрибутивность умножения на матрицу относительно сложения матриц;

4) $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$ – дистрибутивность умножения;

5) $A \cdot 0 = 0$ $(0 \cdot A = 0)$,

где A, B, C, 0 – матрицы, λ – число. При этом предполагается, что все написанные произведения определены, т.е. имеют смысл.

Отметим, что операция транспонирования матриц обладает следующими свойствами:

1) $(A^T)^T = A$; 2) $(A + B)^T = A^T + B^T$;

3) $(\lambda A)^T = \lambda A^T$; 4) $(AB)^T = B^T \cdot A^T$.

Рассмотренные выше операции над матрицами позволяют упростить решения многих управленческих и экономических задач.

В математике также применяют различные специальные виды матриц: матрица Фробениуса, циркулянт, матрица Якоби и др. Их описание и применение можно найти в работах [42; 46; 48; 51].

1.2. Определители и их свойства

Определитель (детерминант) матрицы A обозначается одним из символов $|A| = \Delta A = \det A$ и представляет собой некоторую скалярную величину, характеризующую матрицу. Так, определитель n-го порядка или определитель матрицы n-го порядка обозначается следующим образом:

$$\Delta = \Delta A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

В Европе определители матриц 2×2 впервые встречаются у итальянского математика, инженера, философа, медика и астролога Дж. Кардано в XVI веке [65]. Для старших размерностей определение детерминанта дано Г. В. Лейбницем в 1693 году. Точный алгоритм вычисления определителя принадлежит одному из создателей линейной алгебры Г. Крамеру (1704-1752), хотя самого термина «определитель» тогда еще не существовало. В 1801 году «детерминантом» К. Гаусс назвал дискриминант квадратичной формы. А в 1815 году термин «определитель» в современном его значении ввёл О. Коши. Методы Крамера получили дальнейшее развитие в трудах Э. Безу, А. Т. Вандермонда и А. Кэли, которые и завершили создание основ линейной алгебры. В развитие теории определителей большой вклад внесли также А. Т. Вандермонд, П.-С. Лаплас, О. Коши и К. Г. Якоби.

Определение 1.16. Определителем матрицы первого порядка $A=(a_{11})$ или определителем первого порядка называется элемент

a_{11}.

Определение 1.17. Определителем матрицы второго порядка или определителем второго порядка называется число, которое вычисляется по формуле $\Delta A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Таким образом, определитель второго порядка равен разности между произведениями элементов, расположенных на главной и побочной диагоналях матрицы A.

Например,

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-4) - (-3) \cdot 5 = -8 + 15 = 7.$$

Определение 1.18. Определителем матрицы третьего порядка или определителем третьего порядка называется число, которое вычисляется по формуле

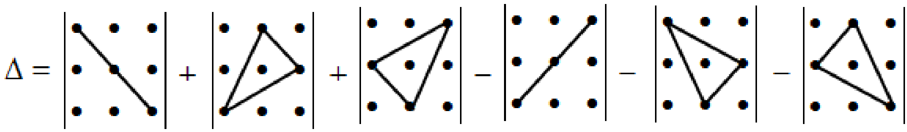
$$\Delta A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{32}a_{21} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{32}a_{23}a_{11}.$$

Определитель третьего порядка можно вычислить по **правилу Саррюса**: к определителю справа приписываются два первых столбца, и элементы, стоящие на одной диагонали, перемножаются и суммируются, причем произведения элементов, лежащих на диагоналях, параллельных побочной, берутся со знаком «минус».

$$\begin{array}{ccc|cc} "+" & "+" & "+" & & \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \\ "-" & "-" & "-" & & \end{array}$$

Определитель третьего порядка можно, также, вычислить с помощью **правила треугольников**, проиллюстрированного ниже.



И правило Саррюса и правило треугольников отражены в формуле определения 1.18.

Отметим, что элементами определителя могут быть не только числа, но и алгебраические или тригонометрические выражения, функции и т.д.

Аналогично вводится понятие определителя 4-го, 5-го и вообще n-го порядков. Правила вычисления определителей более высоких порядков мы рассмотрим после изучения свойств определителей.

Пример 1.3. Пользуясь правилом треугольников, найти число Δ:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & 1 \\ -3 & 1 & 4 \end{vmatrix}.$$

Решение.

Находим:

$\Delta = 1\cdot 3\cdot 4 + 0\cdot 1\cdot (-3) + (-2)\cdot(-1)\cdot 1 - (-3)\cdot 3\cdot(-1) - 1\cdot 1\cdot$ $\cdot 1 - (-2)\cdot 0\cdot 4 = 12 + 0 + 2 - 9 + 1 + 0 = 4.$

Существуют и другие правила вычисления определителей [17] третьего порядка, которые вытекают из свойств определителей.

Определители любых порядков обладают одинаковыми свойствами, которые мы рассмотрим на примере определителей 3-го порядка. Они легко доказываются раскрытием левой и правой частей равенств, например, методом треугольников [25].

Свойство 1. Определитель не меняется при замене всех своих строк соответствующими столбцами, т.е. не меняется при транспонировании:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Для доказательства достаточно вычислить определители в левой и правой части последнего равенств, например, по правилу Саррюса.

Свойство 2. При перестановке двух строк (или столбцов) местами определитель меняет знак, например:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Свойство 3. Определитель с двумя равными строками (или столбцами) равен нулю. Например, если совпадает первый и третий столбец, то

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

Доказательство. Переставим в определителе Δ первый и третий столбцы. Так как они совпадают, то значение определителя при этом не изменится и равно Δ. Но с другой стороны, используя свойство 2, получим $\Delta = -\Delta$. Из этого следует, что $2\Delta=0$ и $\Delta=0$, что и требовалось доказать.

Свойство 4. Умножение всех элементов некоторого столбца (или строки) определителя на любое число k равносильно умножению определителя на это k, т.е. если, например, первый столбец определителя умножим на k, то

$$\begin{vmatrix} ka_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{21} & a_{22} & a_{23} \\ ka_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Доказательство такое же, как и в случае свойства 1.

Свойство 5. Если все элементы некоторой строки (или столбца) определителя равны нулю, то такой определитель равен нулю.

Это частный случай свойства 4 при k=0.

Свойство 6. Если соответствующие элементы двух столбцов (или строк) определителя пропорциональны, то он равен нулю.

Доказательство, очевидно, следует из свойств 3 и 4.

Свойство 7. Если каждый элемент некоторого столбца (строки) определителя представляет собой сумму 2-х слагаемых, то имеет место равенство

$$\begin{vmatrix} a'_{11}+a''_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a'_{21}+a''_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a'_{31}+a''_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a'_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a'_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a'_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a''_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a''_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a''_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Для доказательства достаточно вычислить определители, стоящие в левой и правой части последнего равенства.

Свойство 8. Величина определителя не изменится, если к элементам некоторой его строки (или столбца) прибавить соответствующие элементы другой строки (или столбца), умноженные на одно и то же число. Например, если к элементам первого столбца прибавить соответствующие элементы второго столбца, умноженные на k, то

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11}+ka_{12} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+ka_{22} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}+ka_{32} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ka_{12} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{22} & a_{22} & a_{23} \\ ka_{32} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Доказательство, очевидно, следует из свойств 7, 4 и 2.

Для формулировки следующего свойства определителей третьего порядка нам нужны понятия минора и алгебраического дополнения.

Определение 1.19. Минором некоторого элемента a_{kl} определителя n-го порядка называется определитель (n-1)-го порядка, который образуется из данного определителя вычеркиванием k-й строки и l-го столбца.

Иначе говоря, если из определителя

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

вычеркнуть какую-нибудь строку и столбец, то в таблице останется четыре числа, из которых можно образовать определитель второго порядка. Этот определитель называется **минором** того элемента, который стоял на пересечении вычеркнутых строки и столбца.

Например, минором элемента a_{21} определителя 3-го порядка является

$$M_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32}.$$

Определение 1.20. Алгебраическим дополнением некоторого элемента a_{ij} называется его минор, взятый со знаком «плюс», если сумма номеров строки и столбца, на пересечении которых расположен этот элемент, есть число четное, и со знаком «минус» в противном случае, т.е.

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}.$$

Например, для элемента a_{12} его алгебраическое дополнение будет следующим: $A_{12} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$.

Свойство 9. Определитель равен сумме произведений элементов некоторой строки (или столбца) на их алгебраические дополнения. Например:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} A_{11} + a_{12} A_{12} + \dots + a_{1n} A_{1n} \ .$$

Опираясь на свойство 9, можно доказать, что сумма произведений элементов некоторой строки (или столбца) на соответствующие алгебраические дополнения элементов другой строки (или столбца) равна нулю.

Поскольку можно доказать, что все свойства определителей 3-го порядка переносятся на определители любого порядка, то вычисление определителя n-го порядка можно свести (по свойству 9) к вычислению n определителей (n-1)-го порядка и т.д. до вычисления определителей 3-го и 2-го порядков.

Свойство 9 еще называют ***теоремой Лапласа*** о разложении определителя по элементам строки или столбца.

Например, раскладывая определитель по последней строке, имеем:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + \left(-3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \right) + 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot 2 + 3 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 6.$$

Пример 1.4. Вычислить определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 5 & -2 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \end{vmatrix}.$$

Решение.

Разложим этот определитель по элементам второго столбца. Это более целесообразно с точки зрения количества выполняемых операций (умножение на нуль дает всегда нуль).

$$\Delta = (-1) \cdot \begin{vmatrix} -1 & 5 & -2 \\ 3 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 1 & -1 \\ -1 & 5 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 1 & -1 \\ -1 & 5 & -2 \\ 3 & 2 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$=(-1)\cdot 50+1\cdot(-30)+(-1)\cdot 90=-170.$$

Замечание. Очевидно, что чем больше нулей содержит определитель, тем легче и короче его вычислять. Поэтому можно рекомендовать преобразовать исходный определитель так, чтобы среди его элементов стало больше нулей. Для этого используется свойство 8 определителей.

Например, только что вычисленный определитель можно преобразовать так: первый столбец умножим на 5 и прибавим к третьему столбцу (результат запишем на месте 3-го столбца), затем первый столбец умножим на (–2) и прибавим к четвертому столбцу (результат запишем на месте 4-го столбца). Получим:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 4 & 1 & 21 & -9 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 17 & -3 \\ 1 & -1 & 6 & -4 \end{vmatrix}.$$

Разложив Δ по второй строке, получим тот же результат:

$$\Delta=(-1)\cdot(-1)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 21 & -9 \\ -1 & 17 & -3 \\ -1 & 6 & -4 \end{vmatrix}=1\cdot 17\cdot(-4)+21\cdot(-3)\cdot(-1)+(-1)\cdot 6\cdot(-9)-$$
$$-(-1)\cdot 17\cdot(-9)-6\cdot(-3)\cdot 1-1\cdot 21\cdot(-4)=-170.$$

Свойство 10. Сумма произведений произвольных чисел b_1, $b_2,\ldots,$ b_n на алгебраические дополнения элементов любого столбца (или строки) равна определителю, полученному из исходного заменой элементов этого столбца (или строки) на числа b_1, $b_2,\ldots,$ b_n. Например, для определителя 3-го порядка

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

и произвольных b_1, b_2, b_3 имеет место равенство

$$b_1A_{11}+b_2A_{21}+b_3A_{31}=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13}\\ b_2 & a_{22} & a_{23}\\ b_3 & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}.$$

Для доказательства достаточно расписать определитель, стоящий в правой части последнего равенства по элементам первого столбца.

Следствие. Сумма произведений элементов любого столбца (или строки) на алгебраические дополнения к элементам другого столбца (или строки) равна нулю.

Это следует из свойства 10. В частности, для определителя 3-го порядка: если в последнем равенстве заменить b_1, b_2, b_3 на соответствующие элементы второго или третьего столбца, то определитель, стоящий в правой части равенства будет равен нулю по свойству 3.

Свойство 11. Определитель произведения двух квадратных матриц равен произведению определителей $|A\cdot B|=|A|\cdot|B|$.

Для доказательства этого равенства для определителей 3-го порядка

$$\left|\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13}\\ b_{21} & b_{22} & b_{23}\\ b_{31} & b_{32} & b_{33}\end{pmatrix}\right|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13}\\ b_{21} & b_{22} & b_{23}\\ b_{31} & b_{32} & b_{33}\end{vmatrix}$$

достаточно перемножить матрицы, стоящие в левой части и вычислить их определитель; вычислить и перемножить определители, стоящие в правой части.

Существуют другие свойства определителей, которые можно найти, например, в [67].

Пример 1.5. Вычислить определитель 4-го порядка

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 2\\ 0 & 3 & 2 & -1\\ -2 & 0 & 2 & 3\\ 3 & 1 & 2 & 1\end{vmatrix}.$$

Решение.

Способ 1. Применим теорему Лапласа с предварительным обращением в нуль всех, кроме, одного, элементов столбца или строки. Считая первую строку разрешающей, обнулим элементы первого столбца, стоящего под первой строкой. Прибавив к третьей строке первую, умноженную на 2 и k четвертой первую, умноженную на (-3) получаем.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & -4 & 2 & 7 \\ 0 & 7 & 2 & -5 \end{vmatrix}.$$

Разложим последний определитель по элементам первого столбца

$$\Delta = (-1)^{1+1} \cdot 1 \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -4 & 2 & 7 \\ 7 & 2 & -5 \end{vmatrix}.$$

Вынесем общий множитель со второго столбца за знак определителя и обнулим элементы первой строки, прибавив к первому столбцу элементы второго столбца, умноженные на (-3) и к третьему столбцу – второй

$$\Delta = 2\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -4 & 1 & 7 \\ 7 & 1 & -5 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -7 & 1 & 8 \\ 4 & 1 & -4 \end{vmatrix}.$$

Разложим определитель по первой строке, получим

$$\Delta = 2(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -7 & 8 \\ 4 & -4 \end{vmatrix} = -2(28-32) = 8.$$

Ответ: Δ=8.

Способ 2. Применим приведение к треугольному виду. Этот способ заключается в преобразовании определителя к такому виду, когда все элементы, расположенные по одну сторону от главной диагонали, равные нулю. Получаемый в результате треугольный определитель равен произведению элементов, стоящих на главной диагонали. Обнуление строки или столбца выполняется так же, как в предыдущем способе. Вычислим определитель приведением к треугольному виду.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} (2)(-3) \\ \\ \\ \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & -4 & 2 & 7 \\ 0 & 7 & 2 & -5 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & -4 & 1 & 7 \\ 0 & 7 & 1 & -5 \end{vmatrix} =$$

$$= -2\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -4 & 7 \\ 0 & 1 & 7 & 5 \end{vmatrix} \begin{matrix} (-1)(-1) \\ \\ \\ \\ \end{matrix} = -2\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -7 & 8 \\ 0 & 0 & 4 & -4 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{vmatrix} =$$

$$= (-2)\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot (-4) = 8.$$

В последнем преобразовании к элементам третьего столбца прибавили соответствующие элементы второго столбца.

1.3. Ранг матрицы

Понятие ранга матрицы является одним из важнейших понятий не только в алгебре. Строки произвольной матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

можно рассматривать как n-мерные векторы $\overline{a}_i = \left(a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}\right)$, которые образуют систему векторов $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \dots, \overline{a}_m$.

Определение 1.21 а. Ранг матрицы есть максимальное число линейно независимых строк матрицы.

Часто употребляется другое определение ранга матрицы (ввиду вышеизложенных определений 1.18 и 1.19).

Определение 1.21 б. Рангом матрицы называется наибольший порядок отличного от нуля минора.

Можно доказать, что оба определения ранга матрицы эквивалентны.

Ранг матрицы A обозначают $rang(A)$ или $r(A)$.

Из свойств определителей, очевидно, следуют следующие **свойства ранга матрицы**.

1. При транспонировании ранг матрицы не меняется.
2. Ранг матрицы не меняется при перестановке ее столбцов (или строк).
3. Ранг матрицы не меняется при умножении всех элементов ее столбца (или строки) на отличное от нуля число.
4. Ранг матрицы не изменится, если к одному из ее столбцов (или строк) прибавить другой столбец (или строку), умноженные на некоторое число.
5. Ранг матрицы не изменится, если удалить из нее столбец (или строку), состоящую из одних нулей.
6. Ранг матрицы не изменяется, если удалить из нее столбец (или строку), являющуюся линейной комбинацией других столбцов (или строк).

Вычисление ранга можно осуществлять различными способами. Мы для вычисления будем использовать первое определение ранга матрицы (1.21 а). Для этого введем понятие **элементарных преобразований** матрицы, которые обозначают знаком «~».

Определение 1.22. Элементарными преобразованиями матрицы называются следующие операции:

1) перестановка двух любых ее строк (столбцов);
2) умножение некоторой строки (столбца) на число, не равное нулю;
3) прибавление к одной строке (столбцу) другой строки (столбца), умноженной на любое число;
4) отбрасывание строки (столбца), состоящей из одних нулей.

Теорема 1.1. *Элементарные преобразования не меняют ранга* *матрицы.*

Доказательство можно найти в [3; 12; и др.].

Для вычисления ранга любой ненулевой матрицы прибегают к помощи элементарных преобразований таким образом, что приводят матрицу A к верхнетреугольному виду:

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13}\ldots b_{1r}\ldots b_{1n} \\ 0 & b_{22} & b_{23}\ldots b_{2r}\ldots b_{2n} \\ 0 & 0 & b_{33}\ldots b_{3r}\ldots b_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0\ldots b_{rr}\ldots b_{rn} \end{pmatrix},$$

в котором все диагональные элементы b_{ii} $(i=1,2,\ \ldots\ ,\ r)$ отличны от нуля, а все элементы, расположенные под главной диагональю, равны нулю. Можно доказать, что ранг такой матрицы равен r, а значит, и ранг матрицы A также равен r.

Очевидно, что всегда справедливо неравенство

$$0 \le r(A) \le \min(m,n).$$

Пример 1.6. Найти $r\ (A)$, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 8 & -3 & 2 \\ 1 & -2 & -3 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 13 & -4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Решение.

Из первой строки вычтем вторую и запишем на месте второй. Умножим первую строку на 3 и вычтем ее из третьей и четвертой строки (результаты запишем на месте третьей и четвертой строки) соответственно; получим матрицу:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 8 & -3 & 2 \\ 0 & -5 & -11 & 5 & -3 \\ 0 & -10 & -22 & 10 & -6 \\ 0 & -5 & -11 & 5 & -3 \end{pmatrix}.$$

Далее, вторую строку этой матрицы умножим на 2 и вычтем ее соответственно из третьей строки (результат запишем на месте третьей строки); вторую строку вычтем из четвертой строки; получим:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 8 & -3 & 2 \\ 0 & -5 & -11 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отбросив две последних строки, получим

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 8 & -3 & 2 \\ 0 & -5 & -11 & 5 & -3 \end{pmatrix}$$

Следовательно, ранг заданной матрицы равен 2.

Определение 1.22. Матрица размером $m \times n$ называется канонической, если все ее элементы равны нулю, кроме элементов $a_{11}, a_{22}, ..., a_{rr}$ $\left(0 \le r \le \min(m, n)\right)$ равных единице.

Так, матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

являются каноническими.

Теорема 1.2. *Любая матрица элементарными преобразованиями (как строк, так и столбцов) может быть преобразована в каноническую матрицу* (доказательство можно найти, например, в [30]).

Пример 1.7. Найти $r\ (A)$ и привести к каноническому виду:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 & 5 \\ 2 & 6 & 9 & 7 & 12 \\ -2 & -5 & 2 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 8 & 4 & 20 \end{pmatrix}.$$

Решение.

При помощи элементарных преобразований строк и столбцов преобразуем матрицу A к каноническому виду. Из 2-й строки вычтем 1-ю, умноженную на 2; к 3-й прибавим 1-ю, умноженную на 2; из 4-й вычтем 1-ю:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 & 5 \\ 2 & 6 & 9 & 7 & 12 \\ -2 & -5 & 2 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 8 & 4 & 20 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & 7 & 2 \\ 0 & 1 & 6 & 4 & 15 \\ 0 & 1 & 6 & 4 & 15 \end{pmatrix} \sim$$

далее, вычтем из 2-го столбца 1-й, умноженный на 3, из 3-го – 1-й, умноженный на 2, из 5-го – 1-й, умноженный на 5, и получим третью матрицу. Вычтя из 4-й ее строки 3-ю, а затем, поменяв местами 2-ю и 3-ю, получим четвертую матрицу:

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 7 & 2 \\ 0 & 1 & 6 & 4 & 15 \\ 0 & 1 & 6 & 4 & 15 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 4 & 15 \\ 0 & 0 & 5 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

вычтя из 3-го, 4-го и 5-го столбцов которой 2-й ее столбец, умноженный соответственно на 6, 4, 15, получим пятую матрицу. Умножим 3-й ее столбец на 1/5, затем, из 4-го и 5-го столбцов вычтем 2-й столбец, умноженный соответственно на 7 и 2, получим искомую матрицу канонического вида:

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ранг ее равен 3.

1.4. Обратная матрица

Как известно, обратное число b к данному числу a обладает свойством: $a \cdot b = b \cdot a = 1$. Мы знаем, что для всех $a \neq 0$ такое число b является единственным и обозначается a^{-1}. По аналогии с понятием обратного числа в матричной алгебре вводится понятие обратной матрицы к данной.

Определение 1.24. Матрица называется **невырожденной** (**неособенной**), если ее определитель не равен нулю, и **вырожденной** (**особенной**) в противном случае.

Определение 1.25. Обратной матрицей к невырожденной квадратной матрице A называется квадратная матрица той же размерности A^{-1}, для которой верно равенство:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E.$$

Сразу отметим, что вырожденная матрица не может иметь обратную. Действительно, в противном случае мы имели бы $|A| \cdot |A^{-1}| = |E|$, но $|A| = 0$, а $|E| = 1$, потому 0 = 1, что невозможно.

Теорема 1.3. *Для того чтобы матрица A имела обратную, необходимо и достаточно, чтобы ее определитель был отличен от нуля.*

Доказательство.

Сформулируем и докажем н е о б х о д и м о с т ь: если матрица A имеет обратную матрицу A^{-1}, то матрица A невырождена, т.е. $|A| \neq 0$.

Предположим, что матрица A имеет обратную матрицу A^{-1}, т.е.

$$A\,A^{-1} = E,$$

тогда согласно свойству 11 об определителе произведения двух матриц имеем

$$|A| \cdot |A^{-1}| = |E| = 1,$$

откуда $|A| \neq 0$, т.е. матрица A невырождена.

Сформулируем и докажем д о с т а т о ч н о с т ь: если $|A| \neq 0$, то матрица A имеет обратную.

Предположим, что $|A| \neq 0$. Построим новую матрицу $\tilde{A}$ следующим образом:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

где A_{ij} – алгебраические дополнения элемента a_{ij} в определителе матрицы A. Очевидно, что для построения матрицы $\tilde{A}$ необходимо сначала заменить элементы матрицы A соответствующими им алгебраическими дополнениями, а затем полученную матрицу транспонировать. Построенная таким образом матрица $\tilde{A}$ называется **присоединенной** к матрице A, или **союзной** с A.

Рассмотрим произведение матриц A и $\tilde{A}$:

$$A\tilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} = B\,.$$

Тогда элементы матрицы произведения B определяются по правилу умножения матриц

$$b_{ij} = \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{j1} \\ A_{j2} \\ \dots \\ A_{jn} \end{pmatrix} = a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \dots + a_{in}A_{in} =$$

$$= \begin{cases} |A|, \ \textit{при} \ \ i = j, \\ 0, \ \textit{при} \ \ i \neq j, \end{cases}$$

свойству 9 определителей и следствию к свойству 10.

Поэтому в результате умножения матриц A и $\tilde{A}$ получим диагональную матрицу

$$B = \begin{pmatrix} |A| & 0 & \dots & 0 \\ 0 & |A| & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & |A| \end{pmatrix} = |A| \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = |A| \cdot E\,.$$

Следовательно, имеем равенство

$$A\widetilde{A} = |A|E. \qquad (1.1)$$

Отсюда следует, что $A \cdot \frac{1}{|A|}\widetilde{A} = E$.

Аналогично устанавливается, что

$$\widetilde{A}A = |A|E \quad \text{и} \quad \frac{1}{|A|}\widetilde{A}A = E. \qquad (1.2)$$

Из равенств (1.1), (1.2) следует, что матрица

$$\frac{1}{|A|}\widetilde{A} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

является обратной матрицей к матрице A, т.е.

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}. \qquad (1.3)$$

Теорема доказана.

Существует несколько способов нахождения обратной матрицы [51]. Сформулируем один из способов нахождения обратной матрицы:

1) для данной квадратной матрицы A находим ее определитель $|A|$ и убеждаемся, что он отличен от нуля, т.е. матрица невырожденная;

2) для каждого элемента a_{ij} матрицы A находим соответствующее алгебраическое дополнение A_{ij};

3) составляем из алгебраических дополнений союзную матрицу:

$$\widetilde{A}=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & & & & \\ A_{1n} & A_{2n} & A_{3n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Обратите внимание, что алгебраические дополнения, соответствующие строкам исходной матрицы A, записываются столбцами присоединенной матрицы $\widetilde{A}$;

4) получаем обратную матрицу A^{-1} по формуле (1.3):

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot\widetilde{A}.$$

Пример 1.8. Найти матрицу, обратную данной:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Решение.

Определитель, $|A|$, равен (-1). Следовательно, матрица A невырожденная, и можно воспользоваться теоремой 1.3 об обратной матрице. Найдем алгебраические дополнения всех элементов матрицы A:

$$A_{11}=\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}=14,\quad A_{21}=-\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}=-2,\quad A_{31}=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}=-11,$$

$$A_{12}=\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}=14,\quad A_{22}=\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}=1,\quad A_{32}=\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}=7,$$

$$A_{13}=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=1,\quad A_{23}=-\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=0,\quad A_{33}=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}=-1.$$

Составим союзную матрицу:

$$\widetilde{A}=\begin{pmatrix} 14 & -2 & -11 \\ -9 & 1 & 7 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

По формуле (1.3) разделив все элементы $\widetilde{A}$ на -1, получим

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}-14 & 2 & 11\\ 9 & -1 & -7\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Определение 1.26. Две матрицы A и B называются **взаимообратными** если $A=B^{-1}$.

Несложно проверить свойства обратной матрицы:

1) $\det A^{-1}=(\det A)^{-1}$;

2) $(A^{-1})^T=(A^T)^{-1}$;

3) $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$, если A,B – неособенные матрицы одного порядка.

Примеры подробных решений типовых задач на тему 1

Задача 1.1. Вычислить $A+B$, $A\cdot B$, $B\cdot A$, если

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 3 & 1 & 0\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 5 & 1 & 4\\ -2 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Решение.

Суммой двух матриц одинаковой размерности называется новая матрица той же размерности, элементы которой равны сумме соответствующих элементов заданных матриц [1–4; 6]. В данном случае размерность матрицы A равна 2×3, а размерность матрицы B равна 3×3. Т.е. сумма $A+B$ не существует, поскольку заданные матрицы разной размерности.

Напомним, что если число столбцов матрицы A совпадает с числом строк матрицы B, то матрица A называется согласованной [11-16] с матрицей B. В этом случае определено умножение матрицы A на матрицу B. Размерность матрицы A – 2×3, а матрицы B – 3×3 => размерность матрицы $C=A\cdot B$ – 2×3.

$$C=\begin{pmatrix}1&0&2\\3&1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1&0&1\\5&1&4\\-2&0&1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1\cdot(-1)+0\cdot5+2\cdot(-2) & 1\cdot0+0\cdot1+2\cdot0 & 1\cdot1+0\cdot4+2\cdot1\\ 3\cdot(-1)+1\cdot5+0\cdot(-2) & 3\cdot0+1\cdot1+0\cdot0 & 3\cdot1+1\cdot4+0\cdot1\end{pmatrix}.$$

Получаем $C=\begin{pmatrix}-5&0&3\\2&1&7\end{pmatrix}$.

Произведение матрицы B на матрицу A невозможно, поскольку число столбцов матрицы B не равно числу строк матрицы A.

Задача 1.2. Найти значение матричного многочлена $f(A)$, если $f(x)=-2x^2+5x+9$, $A=\begin{pmatrix}1&2\\3&0\end{pmatrix}$.

Решение.

Подставим вместо переменной x матрицу A, предварительно вычислив:

$$A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix}1&2\\3&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2\\3&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot1+2\cdot3 & 1\cdot2+2\cdot0\\3\cdot1+0\cdot3 & 3\cdot2+0\cdot0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7&2\\3&6\end{pmatrix}.$$

Константу 9 представим как $9E$, где E – единичная матрица.

Получаем искомое значение матричного многочлена:

$$f(A)=-2A^2+5A+9E=-2\cdot\begin{pmatrix}7&2\\3&6\end{pmatrix}+5\cdot\begin{pmatrix}1&2\\3&0\end{pmatrix}+9\cdot\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-14&-4\\-6&-12\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}5&10\\15&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}9&0\\0&9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&6\\9&-3\end{pmatrix}.$$

Задача 1.3. Вычислить определители второго, третьего и четвертого порядков:

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 & 5 & 0 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 9 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Решение.

Для вычисления определителя 2-го порядка применим формулу [1–4]: $\Delta_1 = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$. Получаем

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \cdot 1 - 0 \cdot 1 = -1.$$

Для вычисления определителя 3-го порядка применим формулу:

$$\Delta_2 = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{32}a_{21} - a_{31}a_{22}a_{13} - \\ - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{32}a_{23}a_{11}.$$

Получаем

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -1 & 5 & 0 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -1 \cdot 4 \cdot 2 + 3 \cdot 0 \cdot 0 + 5 \cdot 2 \cdot 1 - 0 \cdot 4 \cdot 1 + 1 \cdot 2 \cdot 0 - 3 \cdot 5 \cdot 2 =$$

$$= -8 + 10 - 30 = -28.$$

Для вычисления определителя 4-го порядка применим теорему Лапласа: разложим определитель по 2-й строке, поскольку в ней содержится наибольшее количество нулей:

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 9 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -18.$$

Задача 1.4. Проверить, являются ли матрицы A и B взаимообратными, если

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Решение.

Напомним, что две матрицы A и B являются взаимообратными (определение и дополнительные примеры можно также найти в [11–16]), если $A = B^{-1}$. Однако матрица B является вырожденной и не имеет обратной по теореме 1.3. Следовательно матрицы A и B не являются взаимообратными.

Задача 1.5. Найти обратную матрицу A^{-1}, если $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & -4 \\ -3 & -2 & 3 \end{pmatrix}$. Сделать проверку**.**

Решение.

По теореме о существовании обратной матрицы [24–30], если определитель матрицы A равен нулю, $|A| = 0$, то A^{-1} не существует. В нашем случае $|A| = -4$, следовательно, существует матрица, обратная к A. Обратная матрица вычисляется по формуле (1.3)

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \tilde{A},$$

где $\tilde{A}$ – союзная матрица к A и вычисляется по формуле

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix},$$

где A_{ij} – алгебраические дополнения матрицы A.

Находим алгебраические дополнения матрицы A:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 3 \cdot 3 - (-4) \cdot (-2) = 9 - 8 = 1,$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 5 & -4 \\ -3 & 3 \end{vmatrix} = -(5 \cdot 3 - (-4) \cdot (-3)) = -(15 - 12) = -3,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} = 5\cdot(-2) - 3\cdot(-3) = -10 + 9 = -1,$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = -(1\cdot 3 - 2\cdot(-2)) = -(3+4) = -7,$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 3 \end{vmatrix} = 1\cdot 3 - 2\cdot(-3) = 3 + 6 = 9,$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} = -(1\cdot(-2) - 1\cdot(-3)) = -(-2+3) = -1,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = 1\cdot(-4) - 2\cdot 3 = -4 - 6 = -10,$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} = -(1\cdot(-4) - 2\cdot 5) = -(-4-10) = 14,$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 1\cdot 3 - 1\cdot 5 = 3 - 5 = -2\cdot$$

Таким образом $A^{-1} = \dfrac{1}{-4}\begin{pmatrix} 1 & -7 & -10 \\ -3 & 9 & 14 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$

Проверка:

$$A^{-1}\cdot A = \frac{1}{-4}\begin{pmatrix} 1 & -7 & -10 \\ -3 & 9 & 14 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & -4 \\ -3 & -2 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{-1}{4}\begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} = E.$$

Задача 1.6. Вычислить ранг матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 6 & 0 \end{pmatrix}$, пользуясь определением 1.21 б.

Решение.

Среди миноров первого порядка, (т.е. элементов матрицы) есть отличные от нуля, поэтому ранг матрицы $r(A) \geq 1$. Поскольку один из миноров второго порядка

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 6 \neq 0,$$

а все миноры третьего порядка равны нулю, то $r(A) = 2$.

Задача 1.7. Используя элементарные преобразования, вычислить ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Решение.

Переставим местами первую и вторую строки

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 7 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Вычтем из второй строки первую, умноженную на 3; вычтем из третьей строки первую; прибавим к третьей строке полученную вторую строку:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 7 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что ранг матрицы равен двум, поскольку количество линейно независимых строк равно 2. Кроме того, минор второго порядка

$$M = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$$

Поэтому, согласно определениям 1.21 а и 1.21 б: $r(A) = 2$.

Вопросы для самоконтроля по теме 1

1. Что называется матрицей?
2. Какие бывают виды матриц?
3. Каковы основные действия над матрицами?
4. Какая матрица называется невырожденной?
5. Какая матрица называется обратной по отношению к данной матрице?
6. Сформулируйте правило нахождения обратной матрицы.
7. Что называется рангом матрицы?
8. Как найти ранг матрицы?
9. Что называется определителем второго, третьего, n-го порядков?
10. Перечислите основные свойства определителей.
11. Что называется минором, алгебраическим дополнением элемента определителя?
12. В чем заключается теорема Лапласа?
13. Какие матрицы называются взаимнообратными?
14. Докажите свойства обратной матрицы на примере матриц размером 2х2.
15. Сформулируйте теорему об обратной матрице.
16. Сформулируйте определение минора к произвольному

элементу матрицы.

17. Сформулируйте определение алгебраического дополнения к произвольному элементу матрицы.

18. Какую матрицу называют союзной?

19. Чем неособенная матрица отличается от невырожденной?

20. Является ли любой детерминант скалярной величиной или векторной?

21. Какую диагональ называют побочной?

22. Сформулируйте правило треугольников нахождения определителя 3-го порядка.

Упражнения для самостоятельного решения по теме 1

1. Выполните действия:

a) 3·(1,–1,0,3) + 2·(–1,2,3,1) – (1,1,6,11);

b) $4\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -2 & -4 \\ -1 & -2 & -4 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$;

e) $\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & b & a \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 1 & b & b \\ 1 & c & a \end{pmatrix}$; f) $\begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & -5 \end{pmatrix}$;

g) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Ответы: a) (0,0,0,0); b) $\begin{pmatrix} -3 & 9 & -3 \\ 16 & 1 & 6 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$;

d) $\begin{pmatrix} a+b+c & a^2+b^2+c^2 & b^2+2ac \\ a+b+c & b^2+2ac & a^2+b^2+c^2 \\ 3 & a+b+c & a+b+c \end{pmatrix}$; f) $\begin{pmatrix} 8 & 13 & 3 \\ 3 & -4 & -7 \end{pmatrix}$; g) $\begin{pmatrix} 10 \\ 8 \end{pmatrix}$.

2. Докажите, что $|E| = 1$.

3. Найдите обратную матрицу к данным:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, d) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

e) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Ответы: a) $\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, в) $\dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$, c) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

d) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 11 & -38 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, e) $\begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$.

4. Вычислите определители:

1) $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ -\cos\alpha & \sin\alpha \end{vmatrix}$; 3) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix}$;

4) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$; 5) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & -4 & 3 \\ 3 & -4 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -2 & -1 \end{vmatrix}$; 6) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \end{vmatrix}$.

Ответы: 1) 5; 2) 1; 3) 1; 4) 160; 5) 900; 6) 394.

5. Решите матричные уравнения:

1) $2X - 3\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

6. Выведите формулы для нахождения A^n:

1) $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$;   2) $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

7. Найдите ранг матрицы:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

8. Найти ранг матрицы при всевозможных значениях параметра λ:

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 & 5 \\ -1 & -2 & -1 & 3 \\ -4 & -5 & \lambda & -2 \\ -7 & -8 & 1 & \lambda-7 \end{pmatrix}.$$

9. Как изменится определитель порядка n , если первый столбец поставить на последнее место, а остальные сдвинуть влево, сохраняя их взаимное расположение?

10. Чему равен определитель, у которого сумма строк с чётными номерами равна сумме строк с нечётными номерами?

11. Выполните действия:

$$(3B)^2-2(BA^{-1}-E)^T,\ A=\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

11. Решите неравенства:

1) $\begin{vmatrix} x & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} \le -50$, 2) $\begin{vmatrix} 1 & 2x & 0 & 0 & 0 \\ 1-x & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & x+4 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & 2x & -2 \\ 1 & -1 & 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} > 0$.

Тема 2. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ И МЕТОДЫ ИХ РЕШЕНИЙ

2.1. Системы *m* линейных уравнений с *n* неизвестными: основные определения

Определение 2.1. Уравнение относительно неизвестных x_1, x_2, ..., x_n называется **линейным**, если его можно записать в виде

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n = b,$$

где a_1, a_2, ..., a_n – некоторые числа, называемые **коэффициентами уравнения,** b **–** заданное число, называемое **свободным членом** уравнения.

Определение 2.2. Системой линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) m линейных уравнений с n неизвестными называется система

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \qquad (2.1)$$

в которой каждое уравнение является линейным. Здесь $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – неизвестные, a_{ij} (j = 1, 2, …, m) и b_i (i = 1, 2, ..., n) – заданные числа. Числа a_{ij} называются коэффициентами системы, числа b_i – свободными членами.

Определение 2.3. Решением СЛАУ (2.1) называется такая совокупность n чисел $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$, которая, будучи подставлена в систему (2.1) вместо неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, превращает все уравнения системы в тождества.

Определение 2.4. Матрица

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & & \dots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

называется матрицей системы (2.1), матрица

$$\overline{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ & & \dots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

называется расширенной матрицей системы (2.1).

Определение 2.5. Система (2.1) называется **совместной**, если она имеет хотя бы одно решение, и **несовместной**, если не имеет ни одного решения.

Определение 2.6. Система (2.1) называется **определенной**, если она имеет единственное решение, и **неопределенной**, если имеет множество решений.

Определение 2.7. В случае неопределенной СЛАУ каждое ее решение называют **частным решением**.

Определение 2.8. Множество частных решений называют **общим решением** СЛАУ.

Если сопоставить системе (2.1) три матрицы

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots\dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_m \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}, \qquad (2.2)$$

где A – матрица коэффициентов при неизвестных или матрица системы, X – матрица-столбец неизвестных; B – матрица-столбец свободных членов, то используя введенные матрицы и операцию произведения матриц, систему (2.1) можно записать в **матричном виде**

$$AX = B. \qquad (2.3)$$

Определение 2.9. Две системы линейных уравнений называются **эквивалентными**, или **равносильными**, когда каждое решение первой системы является решением второй, и наоборот. При этом будем считать, что все несовместные системы эквивалентны.

Рассмотрим методы решения линейных алгебраических систем.

2.2. Матричный метод решения СЛАУ

Рассмотрим СЛАУ (2.1), в которой n линейных уравнений с n неизвестными. Матрицу этой системы обозначим через A, матрицу-столбец неизвестных – через X, столбец сводных членов – через B:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & & \dots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \; X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Тогда получим систему (2.1) в матричном виде: $A \cdot X = B$.

Если $\Delta A \neq 0$, то для матрицы A существует обратная матрица A^{-1}. Домножим равенство (2.3) слева обе части этого уравнения на обратную матрицу к матрице A. Получим $A^{-1} \cdot AX = A^{-1} \cdot B$. Поскольку $A^{-1} \cdot A = E$ и $E \cdot X = X$, то решение данного уравнения имеет вид

$$X = A^{-1} \cdot B. \tag{2.4}$$

Выражение (2.4) является решением системы (2.1). Это решение единственное, поскольку матрица A^{-1} – единственная.

Матричный метод решения СЛАУ (решение СЛАУ, заданных в матричной форме) заключается в следующем:

1) вычисляют ΔA,

2) если $\Delta A \neq 0$, то вычисляют обратную матрицу и находят решение по выражению (2.4), иначе применяют другой метод.

Пример 2.1. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 4, \\ 5x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 5, \\ -3x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -5. \end{cases}$$

Решение.

Запишем матричное уравнение соответствующее данной системе:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & -4 \\ -3 & -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix},$$

то есть $AX = B$. Домножим слева обе части этого уравнения на обратную матрицу к матрице A. Получим $A^{-1} \cdot AX = A^{-1} \cdot B$. Поскольку $A^{-1} \cdot A = E$, а $E \cdot X = X$, то решение данного уравнения имеет вид $X = A^{-1} \cdot B$.

Обратная матрица вычисляется по формуле $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \tilde{A}$ и уже найдена при решении задачи 1.5 предыдущей темы:

$$A^{-1} = \frac{1}{-4} \begin{pmatrix} 1 & -7 & -10 \\ -3 & 9 & 14 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$X = A^{-1} \cdot B = \frac{1}{-4} \begin{pmatrix} 1 & -7 & -10 \\ -3 & 9 & 14 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{-4} \begin{pmatrix} 1 \cdot 4 + (-7) \cdot 5 + (-10) \cdot (-5) \\ (-3) \cdot 4 + 9 \cdot 5 + 14 \cdot (-5) \\ (-1) \cdot 4 + (-1) \cdot 5 + (-2) \cdot (-5) \end{pmatrix} = \frac{1}{-4} \begin{pmatrix} 4 - 35 + 50 \\ -12 + 45 - 70 \\ -4 - 5 + 10 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{-4} \begin{pmatrix} 19 \\ -37 \\ 1 \end{pmatrix},$$

то есть решение заданной СЛАУ: $x_1 = \frac{-19}{4} = -4\frac{3}{4}$, $x_2 = \frac{-37}{-4} = 9\frac{1}{4}$, $x_3 = -\frac{1}{4}$.

2.3. Метод Крамера

Определение 2.10. Определитель, который составлен из коэффициентов системы (2.1) при $m = n$, называется **главным определителем** системы (2.1):

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & & \dots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Заменив в главном определителе системы Δ какой-либо столбец, например j-й, столбцом свободных членов B, получим определитель Δ_j, т. е.

$$\Delta_j = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j-1} & b_1 & a_{1j+1} & \dots a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2j-1} & b_2 & a_{2j+1} & \dots a_{2n} \\ \dots\dots & \dots & \dots\dots\dots & \dots & \dots\dots & \dots \; \dots\dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj-1} & b_n & a_{nj+1} & \dots a_{nn} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & & \dots & \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \; \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \dots & a_{2n} \\ & & \dots & \\ a_{n1} & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \dots,$$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 \\ & & \dots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n \end{vmatrix}.$$

Теорема (правило) Крамера (Г. Камер – швейцарский математик, 1704–1752). *Если в линейной алгебраической системе число уравнений равно числу неизвестных и главный определитель системы* Δ *отличен от нуля, то эта система совместна и имеет единственное решение, которое находится по формулам Камера*:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta};\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta};\ \dots;\ x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}. \tag{2.4}$$

Доказательство [67–70; 74–76]**.**

Обозначим через A, X и B соответственно матрицу коэффициентов системы, матрицу-столбец неизвестных и матрицу-столбец свободных членов (см. 2.2), запишем систему (2.1) в матричном виде

$$AX = B.$$

1) докажем *существование решения*. Поскольку матрица A по условию невырождена, то существует обратная к ней матрица A^{-1}. Рассмотрим вектор-столбец $X_0 = A^{-1}B$ и покажем, что он является решением данной системы. Действительно

$$AX_0 = A(A^{-1}B) = (AA^{-1})B = EB = B.$$

Таким образом, при подстановке вектор-столбца X_0 в систему уравнений $AX = B$, вместо вектор-столбца X получаем тождество. Значит, вектор-столбец X_0 является решением данной системы.

2) докажем *единственность решения*. Пусть вектор-столбец C – произвольное решение системы $AX = B$. Покажем, что $C = X_0$. Так как вектор-столбец C является решением системы, то справедливо тождество

$$AC = B.$$

Умножая обе части этого тождества слева на матрицу A^{-1}, получим

$$A^{-1}(AC) = A^{-1}B, \qquad A^{-1}AC = X_0, \qquad C = X_0.$$

Таким образом, всякое решение данной системы совпадает с вектором $X_0 = A^{-1}B$, т.е. линейная система имеет единственное решение.

3) докажем *формулы Крамера*. Согласно матричному методу решения линейной системы $AX = B$ имеем $X = A^{-1}B$, где A^{-1} – обратная матрица к матрице коэффициентов системы (см. п. 2.2). Согласно правилу умножения матриц получаем

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{|\Delta|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots\dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{|\Delta|}\begin{pmatrix} b_1A_{11} + b_2A_{21} + \dots + b_nA_{n1} \\ b_1A_{12} + b_2A_{22} + \dots + b_nA_{n2} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ b_1A_{1n} + b_2A_{2n} + \dots + b_nA_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\Delta_1}{\Delta} \\ \frac{\Delta_2}{\Delta} \\ \dots \\ \frac{\Delta_n}{\Delta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad (2.5)$$

где Δ_j – определитель, получающийся из главного определителя системы, заменой j -го столбца столбцом свободных членов B.

Действительно, согласно 10-му свойству определителей:

$$b_1A_{11} + b_2A_{21} + \dots + b_nA_{n1} = \Delta_1,$$

$$b_1A_{12} + b_2A_{22} + \dots + b_nA_{n2} = \Delta_2,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$b_1A_{1n} + b_2A_{2n} + \dots + b_nA_{nn} = \Delta_n.$$

Тогда из (2.5) следует $x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}$, что и требовалось доказать.

Метод решения СЛАУ, основанный на теореме Крамера, называется методом Крамера.

Замечание. Если определитель системы (2.1) равен 0, то правило Крамера «не работает», необходимо воспользоваться другими методами. Предложение, что система (2.1) не имеет решения, не верно.

Пример 2.2. Пользуясь методом Крамера, решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 2, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 5. \end{cases}$$

Решение.

Вычислим главный определитель системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0;$$

затем,

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 3; \; \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 5 & -1 \end{vmatrix} = 9; \; \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 6.$$

По формулам Крамера находим:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 1; \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 3; \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = 2.$$

2.4. Метод Гаусса (метод последовательного исключения неизвестных)

Рассмотрим СЛАУ вида (2.1) с произвольным количеством уравнений и неизвестных.

Идея метода Гаусса состоит в том, чтобы с помощью элементарных преобразований над строками матрицы системы (2.1) привести систему (2.1) к равносильной системе треугольного (или трапециевидного) вида – «прямой ход», из которой последовательно, начиная с последних по номеру неизвестных, находятся все остальные – «обратный ход».

Отметим, что в процессе приведения системы (2.1) к треугольному виду могут получаться уравнения вида $0 = 0$. Их можно отбросить, поскольку это, очевидно, приводит к системе уравнений, эквивалентной прежней.

При решении системы линейных уравнений методом Гаусса удобно приводить к верхне треугольному виду не саму систему уравнений, а расширенную матрицу этой системы, выполняя все преобразования над ее строками. Последовательно получающиеся в ходе преобразования матрицы обычно соединяют знаком эквивалентности «~».

Название «метод последовательного исключения неизвестных» метод Гаусса получил ввиду того, что для получения системы треугольного вида из каждого следующего уравнения исключают последовательно по одной неизвестной.

Определение 2.11. Если $r < n$, то исключенные неизвестные x_1, x_2, x_3 ...x_r называют ведущими или **базисными неизвестными**, а оставшиеся переменные x_{r+1}, x_{r+2} ... x_n – **свободными неизвестными**.

Придавая свободным неизвестных произвольные (конкретные) числовые значения и поднимаясь по уравнениям системы (2.1), получим однозначно определенные (для конкретного набора свободных неизвестных) значения базисных неизвестных.

Поскольку значения свободных неизвестных можно выбрать бесконечным числом способов, то система (2.1) имеет бесконечное множество решений.

Определение 2.12. Решение СЛАУ называется **базисным**, если свободные переменные обращаются в нуль.

Пример 2.3. Решить методом Гаусса систему:

$$1)\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ -2x_1 + x_2 + 6x_3 = 2, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 6. \end{cases}$$

Решение.

Умножим первое уравнение на 2 и прибавим ко второму. Затем умножим первое уравнение на (-1) и прибавим к третьему. В результате получим эквивалентную систему

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ 3x_2 + 4x_3 = 6, \\ x_2 + 2x_3 = 4. \end{cases}$$

Умножим второе уравнение на $\left(-\frac{1}{3}\right)$ и прибавим к третьему уравнению, получим систему

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ 3x_2 + 4x_3 = 6, \\ \frac{2}{3}x_3 = 2. \end{cases} \tag{2.6}$$

Теперь, поднимаясь от последнего уравнения к верхнему, получим $x_3 = 3$, $x_2 = -2$, $x_1 = 7$.

Либо записав расширенную матрицу системы, произведем описанные выше элементарные преобразования над ней:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 & 6 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 3/2 & 2 \end{array}\right).$$

Далее, начиная с последней строки (см. систему (2.6)) находим последовательно x_3, x_2, x_1.

Помимо аналитического решения СЛАУ, метод Гаусса также применяется для нахождения матрицы, обратной к данной. Алгоритм применения довольно прост: 1) к матрице справа приписывается единичная матрица такого же размера, что и исходная: $(A\,|\,E)$, 2) матрица A приводится к виду единичной матрицы методом Гаусса, в результате на месте изначальной единичной матрицы справа оказывается обратная к исходной матрица: $(E\,|\,A^{-1})$.

2.5. Условие совместимости произвольной системы линейных уравнений

Пусть дана система (2.1). Очевидно, что $r = \left(\overline{A}\right) \geq r\left(A\right)$.

Ответ на вопрос о совместности системы (2.1) дает следующая теорема.

Теорема Кронекера-Капелли. *Для совместности системы* (2.1) *необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы системы был равен рангу ее расширенной матрицы* [1; 3; 6; 7; 22 и др.].

Доказательство.

Сформулируем и докажем н е о б х о д и м о с т ь: если система линейных уравнений совместна, то $r(A) = r(\overline{A})$.

Доказательство. Поскольку система (2.1) совместна, то существует некоторый набор чисел

$$x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*$$

подстановка которого в систему (2.1) превращает каждое ее уравнение в верное равенство

$$a_{i1}x_1^* + a_{i2}x_2^* + ... + a_{in}x_n^* = b_i, \ (i = 1,2,...,m). \qquad (2.7)$$

Совокупность равенств (2.7) эквивалентна следующему матричному равенству

$$x_1^* \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ .... \\ a_{m1} \end{pmatrix} + x_2^* \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ .... \\ a_{m2} \end{pmatrix} + ... + x_n^* \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ .... \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ .... \\ b_m \end{pmatrix} \qquad (2.8)$$

из которого следует, что последний столбец расширенной матрицы $\overline{A}$ системы (2.1) является линейной комбинацией ее остальных столбцов. Напомним, что ранг матрицы не меняется, если из нее удалить (или добавить) столбец, являющийся линейной комбинацией других столбцов этой матрицы. Из этого следует, что ранги расширенной матрицы $\overline{A}$ и матрицы коэффициентов A равны, что и требовалось доказать.

Сформулируем и докажем д о с т а т о ч н о с т ь: если $r(A) = r(A_b)$, то система линейных уравнений совместна.

Доказательство. Пусть $r(A) = r(\overline{A}) = r$. Выделим r столбцов и r строк матрицы $\overline{A}$, соответствующие ненулевому минору r-го порядка этой матрицы. Для простоты записи и без ограничения общности предположим, что выбранными оказались первые r столбцов и r строк матрицы. Тогда систему (2.1) можно представить в виде

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{ir}x_r = b_i - a_{ir+1}x_{r+1} - \ldots - a_{in}x_n, \quad (i = \overline{1,r}). \qquad (2.9)$$

При этом переменные $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$ называют *свободными*. Придавая свободным переменным в равенствах (2.9) произвольные значения, например, $x_{r+1} = x_{r+2} = \ldots = x_n = 0$, получим систему

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{ir}x_r = b_i, \qquad (i = \overline{1,r}). \qquad (2.10)$$

решения которой называют *базисными* и находят по формулам Крамера (ее главный определитель не равен нулю по построению). Таким образом, система (2.10) имеет решение, а это значит, что система (2.1) совместна. Теорема доказана.

Замечание. Теорема Кронекера-Капелли устанавливает совместность линейной алгебраической системы, но не дает метода для практического нахождения всех ее решений.

Понятие ранга матрицы и результат, известный в литературе как «теорема Кронекера-Капелли», были открыты двумя независимыми исследователями Германии и Италии соответственно. Первое доказательство этой теоремы принадлежит Ч.Л. Додсону (профессору математики Оксфордского университета с 1855 по 1881, носящему псевдоним Льюиса Керрола). Оно было напечатано им в 1867 г. в книге «An elementary treatise on determinants» в следующей формулировке: «Теорема. Для того чтобы система n неоднородных уравнений была совместна, необходимо и достаточно, чтобы порядок наибольшего отличного от нуля минора был одинаков в расширенной и нерасширенной матрице системы».

Пример 2.4. Исследовать совместность систем линейных уравнений и найти их общие решения:

а) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 2, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 1, \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 1, \\ 3x_1 + 5x_2 - x_3 = 1, \\ 4x_1 + 7x_2 - 2x_3 = 2. \end{cases}$

Решение.

Если в задаче кроме установления совместности системы необходимо найти и все ее решения, то, не вычисляя отдельно $r(A)$ и $r(\overline{A})$, ее решают методом Гаусса. При этом над матрицами A и $\overline{A}$ выполняются элементарные преобразования в смысле ранга. После приведения матрицы $\overline{A}$ к трапециевидной форме делают вывод о рангах матриц A и $\overline{A}$ и о совместности системы. В случае совместности находят решение по методу Гаусса:

а) умножаем 1-ю строку на (-1) и складываем со 2-й (результат записываем на месте 2-й, умножаем 1-ю строку на (-2) и складываем с 3-й (результат записываем на месте 3-й); затем складываем 2-ю и 3-ю строки:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 1 \end{array}\right)^{(-1),(-2)} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right).$$

Из последней матрицы следует, что $r(A) = 2$ и $r(\overline{A}) = 3$. Таким образом, $r(A) \neq r(\overline{A})$ и система (а) несовместна, т.е. не имеет решений;

б) умножаем 1-ю строку на (-3) и складываем со 2-й (результат записываем на месте 2-й, умножаем 1-ю строку на (-4) и складываем с 3-й (результат записываем на месте 3-й); затем вычитаем 2-ю строку из 3-й строки и получаем:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & 5 & -1 & 1 \\ 4 & 7 & -2 & 2 \end{array}\right)^{(-3),(-4)} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 2 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Из последней матрицы следует, что $r(A) = r(\overline{A}) = 2$. Следовательно, система (б) совместна, но неопределена. По последней расширенной матрице восстанавливаем систему, полагая переменные x_1 и x_2 – базисными, а x_3 – свободной, $x_3 = \alpha \in R$. Получаем

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 1 + \alpha \\ \quad\quad x_2 = 2 + 2\alpha \\ \quad\quad\quad x_3 = \alpha \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_1 = -3 - 3\alpha, \\ x_2 = 2 + 2\alpha, \\ x_3 = \alpha \in R. \end{cases}$$

Ответ: $x_1 = -3 - 3\alpha,\ x_2 = 2 + 2\alpha,\ x_3 = \alpha \in R$ – общее решение.

2.6. Однородные СЛАУ

Определение 2.13. СЛАУ, в которой все ее свободные члены равны нулю

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0, \end{cases} \tag{2.10}$$

называют **однородной.**

В матричном виде: $AX = 0$.

Очевидно, что всякая система однородных уравнений всегда совместна, поскольку $r(A) = r(\overline{A})$ и имеет хотя бы одно *нулевое (тривиальное* – фр. trivial, лат. triviālis – обыкновенное, неоригинальное, банальное) решение

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0.$$

Для нахождения возможных других решений применимы те же методы, что и для рассмотренных выше неоднородных СЛАУ. Но чаще применяют метод Гаусса.

Замечание. Из ранее рассмотренного можем сделать вывод, что любая система однородных уравнений, в которой число уравнений меньше числа неизвестных, имеет нетривиальное решение. Для того чтобы однородная система линейных уравнений, в которой число уравнений равно числу неизвестных, имела нетривиальное решение, необходимо и достаточно, чтобы ее определитель был равен нулю.

Пример 2.5. Найти частные решения однородных СЛАУ:

$$1)\ \begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \\ 5x_1 - x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases} \quad 2)\ \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0, \\ 3x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 0, \\ x_1 + 17x_2 + 4x_3 = 0. \end{cases}$$

Решение.

Для нахождения решений однородной системы используем метод Гаусса:

1) вначале получим на месте первого элемента, стоящего на главной диагонали, единицу путем вычитания из элементов 1-й строки соответствующие элементы 2-й (результат запишем на место 1-й строки); затем под этим элементом получим нули. Вконце вычтем из удвоенных элементов 2-й строки соответствующие элементы 3-й строки и получим нулевую строку:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 0 \\ 5 & -1 & 3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 0 \\ 5 & -1 & 3 & 0 \end{array}\right)^{(-2),(-5)} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -8 & -1 & 0 \\ 0 & -16 & -2 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Из последнего следует, что $r(A) = 2$, что меньше числа неизвестных решаемой системы ($n = 3$). Значит, система имеет бесконечное множество решений. Для ее нахождения будем считать $x_2 = \alpha \in R$ свободной переменной и, используя последнюю расширенную матрицу, запишем

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = -3\alpha, \\ x_3 = -8\alpha, \\ x_2 = \alpha, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 5\alpha, \\ x_2 = \alpha \quad , \\ x_3 = -8\alpha, \end{cases} \qquad \alpha \in R.$$

Получаем общее решение: $x_1 = 5\alpha$, $x_2 = \alpha$, $x_3 = -8\alpha$, $\alpha \in R$. При $\alpha = 1$, например, получаем частное решение: $x_1 = 5$, $x_2 = 1$, $x_3 = -8$.

2) выполним элементарные преобразования над расширенной матрицей системы (в случае однородной СЛАУ расширенную матрицу можно и не записывать, поскольку элементарные преобразования с нулем всегда дадут нуль):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 0 \\ 3 & -5 & 4 & 0 \\ 1 & 17 & 4 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & -4 & -1 & 0 \\ 0 & -14 & -2 & 0 \\ 0 & 14 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & -7 & -1 & 0 \\ 0 & -14 & -2 & 0 \\ 0 & 14 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & -7 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & -7 & -1 & 0 \end{array}\right).$$

Получили, что ранг расширенной матрицы равен рангу матрицы и равен двум, и, следовательно, по теореме Кронекера-Капелли система имеет бесконечное множество решений.

Сделаем «обратный ход»:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0, \\ 7x_2 + x_3 = 0, \end{cases}$$

переменные x_1 и x_2 – базисные, а x_3 – свободная.

Выразим базисные переменные через свободную и получим общее решение исходной системы:

$$x_2 = -\frac{x_3}{7}; \quad x_1 = \frac{3x_3}{7} - 2x_3 = \frac{11}{7}x_3.$$

Положим, например, $x_3 = 7$, получим одно из множества частных решений: $x_1 = 11$, $x_2 = -1$, $x_3 = 7$.

2.7. Фундаментальная система решений

Пусть $x_1=\alpha_1$, $x_2=\alpha_2$, …, $x_n=\alpha_n$ – какое-нибудь ненулевое решение однородной системы (2.10). Это решение можно рассматривать как строку $l_1 = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, состоящую из n элементов. Тогда строка

$$\lambda l_1 = (\lambda\alpha_1, \lambda\alpha_2, \ldots, \lambda\alpha_n)$$

тоже, очевидно, будет решением системы (2.10). Далее, если

$$l_2 = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) -$$

какое-то другое решение системы (2.10), то при любых λ_1 и λ_2 линейная комбинация

$$\lambda_1 l_1 + \lambda_2 l_2 = (\lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\beta_1, \lambda_1\alpha_2 + \lambda_2\beta_2, \ldots, \lambda_1\alpha_n + \lambda_2\beta_n)$$

этих решений тоже будет решением системы. Поэтому интересно найти такие линейно независимые решения системы (2.10) через которые линейно выражались бы все остальные ее решения.

Определение 2.14. Линейно независимая система решений l_1, l_2, …, l_k системы (2.10) называется **фундаментальной**, если каждое решение системы (2.10) является линейной комбинацией решений l_1, l_2, …, l_n.

Оказывается, для существования фундаментальных систем решений системы уравнений (2.10) необходимо, чтобы ранг ее матрицы коэффициентов был меньше числа неизвестных этой системы, т.е. $r(A) < n$. При этом каждая из фундаментальных систем решений состоит из $n - r$ решений, где r – ранг матрицы коэффициентов системы.

Общим решением системы (2.10) называют решение вида

$$\lambda_1 l_1 + \lambda_2 l_2 + \ldots + \lambda_k l_k$$

где l_1, l_2, …, l_k – некоторая фундаментальная система решений, а λ_1, λ_2 , …, λ_k – произвольные числа. Общее решение однородной линейной системы (2.10) ранга r с n неизвестными имеет вид

$$X = \lambda_1 l_1 + \lambda_2 l_2 + \ldots + \lambda_k l_k + \ldots + \lambda_{n-r} l_{n-r}, \tag{2.11}$$

где $l_1, l_2, \ldots, l_{n-r}$ – фундаментальная система решений этой системы, а $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-r}$ – произвольные постоянные.

Для **построения фундаментальной системы** решений можно использовать следующий **алгоритм**:

1) берут любой отличный от нуля определитель D порядка $n-r$. Для простоты обычно берут определитель, у которого элементы главной диагонали равны единице, а остальные – нулю;

2) свободным неизвестным придают поочередно значения, равные элементам первого, второго и т. д. столбцов определителя D, и каждый раз из общего решения находят соответствующие значения неизвестных;

3) полученные $n-r$ решений составляют фундаментальную систему.

Общее решение имеет вид линейной комбинации фундаментальной системы.

Таким образом, фундаментальная система решений системы линейных однородных уравнений – это максимальный (то есть содержащий наибольшее возможное число элементов) набор линейно независимых решений этой системы.

Пример 2.6. Найти общее решение и фундаментальную систему решений для системы уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 + x_5 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 12x_4 + 9x_5 = 0. \end{cases}$$

Решение.

Решаем систему, используя метод Гаусса. Делаем «прямой ход», выполняя элементарные преобразования над строками расширенной матрицы заданной системы:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 12 & 9 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & -9 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & -11 & -13 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 8 & 4 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & -5 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Очевидно, что $r(A) = 3$.

Исходя из последней матрицы делаем «обратный ход»:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 0, \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 9x_5 = 0, \\ x_4 - x_5 = 0. \end{cases}$$

В качестве базисных неизвестных выберем x_1, x_2, x_4, а свободными – x_3 и x_5 и выразим базисные неизвестные через свободные:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_4 = -3x_3 - 5x_5, \\ x_2 + 3x_4 = -2x_3 - 9x_5, \\ x_4 = x_5, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 3x_3 - 15x_5, \\ x_2 = -2x_3 - 12x_5, \\ x_4 = x_5. \end{cases}$$

Берем определитель порядка $n - r = 5 - 3 = 2$:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

и придаем свободным неизвестным x_3, x_5 поочередно значения, равные элементам столбцов этого определителя. Получаем в случае $x_3 = 1$ и $x_5 = 0$ следующие значения: $x_1 = 1$, $x_2 = -2$, $x_4 = 0$. При $x_3 = 0$ и $x_5 = 1$: $x_1 = 15$, $x_2 = -12$, $x_4 = 1$.

Тогда фундаментальная система решений будет иметь вид:

$$l_1 = (1, -2, 1, 0, 0), \ \ l_2 = (15, -12, 0, 1, 1).$$

Общее решение в силу (2.11) будет иметь вид:

$$X = \lambda_1 l_1 + \lambda_2 l_2 = (\lambda_1, -\lambda_2, \lambda_1, 0, 0) + (15\lambda_2, -12\lambda_2, 0, \lambda_2, \lambda_2) =$$

$$= (\lambda_1 + 15\lambda_2, -2\lambda_1 - 12\lambda_2, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_2),$$

где λ_1, λ_2 – произвольные числа.

Примеры подробных решений типовых задач на тему 2

Задача 2.1. Решить систему линейных уравнений: 1) методом Крамера; 2) в матричном виде (сделать проверку обратной матрицы и решения); 3) методом последовательного исключения неизвестных (методом Гаусса).

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 8, \\ 5x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 10, \\ -3x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -5. \end{cases}$$

Решение.

Запишем матрицу заданной системы:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & -4 \\ -3 & -2 & 3 \end{pmatrix},$$

$B = \begin{pmatrix} 8 \\ 10 \\ -5 \end{pmatrix}$ – вектор-столбец свободных коэффициентов.

1. Чтобы воспользоваться методом Крамера найдем Δ – определитель матрицы A (по правилу треугольников):

$$\Delta A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & -4 \\ -3 & -2 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$=1\cdot3\cdot3+1\cdot(-4)\cdot(-3)+2\cdot(-2)\cdot5-2\cdot3\cdot(-3)-1\cdot5\cdot3-(-2)\cdot(-4)\cdot1= -4.$$

Найдем Δ_n – определитель матрицы, полученной из матрицы A путём замены n-го столбца на столбец свободных коэффициентов (столбец B):

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 8 & 1 & 2 \\ 10 & 3 & -4 \\ -5 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 8\cdot 3\cdot 3 + 1\cdot(-4)\cdot(-5) + 10\cdot(-2)\cdot 2 -$$

$$-2\cdot 3\cdot(-5) - 1\cdot 10\cdot 3 - 8\cdot(-2)\cdot(-4) = -12,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 8 & 2 \\ 5 & 10 & -4 \\ -3 & -5 & 3 \end{vmatrix} = 1\cdot 10\cdot 3 + 8\cdot(-4)\cdot(-3) + 5\cdot(-5)\cdot 2 -$$

$$-2\cdot 10\cdot(-3) - 5\cdot 8\cdot 3 - 1\cdot(-5)\cdot(-4) = -4,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 8 \\ 5 & 3 & 10 \\ -3 & -2 & -5 \end{vmatrix} = 1\cdot 3\cdot(-5) + 1\cdot 10\cdot(-3) + 5\cdot(-2)\cdot 8 -$$

$$-8\cdot 3\cdot(-3) - 1\cdot 5\cdot(-5) - 1\cdot(-2)\cdot 10 = -8.$$

Таким образом, $x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} = \dfrac{-12}{-4} = 3$, $x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta} = \dfrac{-4}{-4} = 1$, $x_3 = \dfrac{\Delta_3}{\Delta} = \dfrac{-8}{-4} = 2$.

2. Запишем матричное уравнение соответствующее заданной системе:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & -4 \\ -3 & -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 8 \\ 10 \\ -5 \end{pmatrix},$$

то есть $AX = B$. Решение данного уравнения имеет вид $X = A^{-1} \cdot B$.

Обратная матрица вычисляется по формуле $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|} \cdot \tilde{A}$ и уже найдена при решении задачи 1.5 предыдущей темы:

$$A^{-1} = \frac{1}{-4}\begin{pmatrix} 1 & -7 & -10 \\ -3 & 9 & 14 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$X = A^{-1} \cdot B = \frac{1}{-4}\begin{pmatrix} 1 & -7 & -10 \\ -3 & 9 & 14 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 10 \\ -5 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{-4}\begin{pmatrix} 1 \cdot 8 + (-7) \cdot 10 + (-10) \cdot (-5) \\ (-3) \cdot 8 + 9 \cdot 10 + 14 \cdot (-5) \\ (-1) \cdot 8 + (-1) \cdot 10 + (-2) \cdot (-5) \end{pmatrix} = \frac{1}{-4}\begin{pmatrix} 8 - 70 + 50 \\ -24 + 90 - 70 \\ -8 - 10 + 10 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{-4}\begin{pmatrix} -12 \\ -4 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \text{ то есть } x_1 = 3, \; x_2 = 1, \; x_3 = 2.$$

3. Выпишем расширенную матрицу заданной системы:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 8 \\ 5 & 3 & -4 & 10 \\ -3 & -2 & 3 & -5 \end{array}\right)$$

и сведем матрицу $\overline{A}$ к верхнетреугольному виду, из которого сможем непосредственно найти решение системы.

Для этого произведем над строками матрицы $\overline{A}$ элементарные преобразования. Итак, стремясь привести матрицу к верхнетреугольному виду, проделаем следующие преобразования:

1) вычтем из 2-й строки 1-ю строку, умноженную на 5, а результат запишем на место 2-й строки;

2) к 3-й строке прибавим 1-ю строку, умноженную на 3, а результат запишем на место 3-й строки;

3) 1-ю строку оставим без изменения;

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 8 \\ 5 & 3 & -4 & 10 \\ -3 & -2 & 3 & -5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & -2 & -14 & -30 \\ 0 & 1 & 9 & 19 \end{array}\right) \sim$$

4) умножим вторую строку на $-\frac{1}{2}$;

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & 7 & 15 \\ 0 & 1 & 9 & 19 \end{array}\right) \sim$$

5) вычтем из третьей строки вторую, а результат запишем на месте 3-й строки, и тем самым окончательно приведем расширенную матрицу к верхнетреугольному виду:

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & 7 & 15 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & 7 & 15 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right).$$

Далее, делаем «обратный ход». Запишем полученную таким образом расширенную матрицу системы

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 8, \\ x_2 + 7x_3 = 15, \\ x_3 = 2, \end{cases}$$

эквивалентной исходной системе уравнений.

Подставляя значение x_3 во второе уравнение, находим x_2: $x_2 + 7 \cdot 2 = 15,\ x_2 = 1$.

Подставляя значение x_2 и x_3 в первое уравнение, находим x_1: $x_1 + 1 + 2 \cdot 2 = 8,\ x_1 = 3$

Таким образом, решение исходной системы линейных уравнений имеет вид: $x_1 = 3$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$. Решение, полученное тремя методами, дало одинаковый результат.

Задача 2.2. Исследовать систему на совместность. В случае существования решения выпишите общее решение и одно частное.

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1, \\ 7x_1 + 8x_2 + 3x_3 = 8. \end{cases}$$

Решение.

Для исследования системы на совместность воспользуемся теоремой Кронекера-Капелли: найдем ранг расширенной матрицы и матрицы заданной системы. Для этого выполним ряд эквивалентных преобразований над расширенной матрицей заданной системы: 1) из 1-й строки вычтем 2-ю и результат запишем на место 1-й строки, 2) из 3-й строки вычтем элементы первой строки, умноженные на 2, и результат запишем на место 2-й строки, 3) из 3-й строки вычтем элементы второй строки, умноженные на 3, и результат запишем на место 3-й строки. Затем, 1) из элементов 2-й строки вычтем элементы 1-й и результат запишем на место 2-й строки, 2) из элементов 3-й строки вычтем элементы 1-й строки и результат запишем на место 3-й строки, 3) 1-ю строку оставим без изменений.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 7 & 8 & 3 & 8 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 4 \\ 1 & 4 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Получаем, что $rang(\overline{A}) = 3$, $rang(A) = 2$, т.е. $rang(\overline{A}) \neq rang(A)$. По теореме Кронекера-Капелли заданная система не имеет решений.

Задача 2.3. Решить матричное уравнение

$$X \cdot \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 7 \end{pmatrix}.$$

Решение.

Имеем матричное уравнение вида $X \cdot A = B$, где $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 7 \end{pmatrix}$.

Домножим справа обе части этого уравнения на обратную матрицу к матрице A. Получим $X \cdot A \cdot A^{-1} = B \cdot A^{-1}$. Поскольку $A \cdot A^{-1} = E$, а $X \cdot E = X$, то решение данного уравнения имеет вид $X = B \cdot A^{-1}$.

Обратная матрица вычисляется по формуле:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \tilde{A} = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix}.$$

Найдём определитель A

$$|A| = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 5 \cdot 2 - 3 \cdot (-3) = 10 + 9 = 19,$$

алгебраические дополнения к A:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} |2| = 2,$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} |-3| = 3,$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} |3| = -3,$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} |5| = 5.$$

Таким образом $A^{-1} = \dfrac{1}{19} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$.

Решение исходного уравнения:

$$X = B \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 7 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{19} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{19} \begin{pmatrix} -1 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{19} \begin{pmatrix} -1 \cdot 2 + 7 \cdot 3 & -1 \cdot (-3) + 7 \cdot 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{19} \begin{pmatrix} 19 & 38 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix},$$

то есть $x_1 = 1,\ x_2 = 2$.

Задача 2.4. Решить СЛАУ и найти базисное решение:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_4 = 5, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + 3x_4 = 7. \end{cases}$$

Решение.

Сделаем элементарные преобразования над расширенной матрицей заданной системы:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & -1 & 3 & 7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 2 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Здесь вначале первая строка матрицы вычиталась из второй и третьей, затем, вторая строка умножалась на 1 и 2 и вычиталась соответственно из первой и третьей строки.

Последней матрице соответствует следующая система уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 = 1, \\ x_2 - x_3 + x_4 = 2. \end{cases}$$

Отсюда получим общее решение исходной системы

$$\begin{cases} x_1 = 1 - 2x_3, \\ x_2 = 2 + x_3 - x_4. \end{cases}$$

Пусть $x_3 = t,\ x_4 = s, \forall s \in R, \forall t \in R$, тогда общее решение будет иметь вид $(1-2t,\ 2+t-s, t, s)$.

Полагая $t = s = 0$, находим частное базисное решение $(1,\ 2, 0, 0)$.

Задача 2.5. При каких значениях a система

$$\begin{cases} ax_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + ax_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

имеет нетривиальные решения? Найти эти решения.

Решение.

Однородная система линейных уравнений имеет ненулевые решения, когда ее определитель равен нулю. Из этого условия и найдем соответствующие значения a:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow a^2 - 3a - 4 = 0 \Rightarrow a_1 = -1,\ a_2 = 4.$$

Найдем теперь соответствующие решения.

1. При $a = -1$ система имеет вид :

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \end{cases}.$$

Определитель этой системы равен нулю. Это означает наличие линейной зависимости между уравнениями системы. Замечаем, что первое уравнение получается из второго и поэтому его можно отбросить. Имеем

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

Так как определитель из коэффициентов при неизвестных x_1, x_2 не равен нулю, то в качестве базисных неизвестных возьмем x_1, x_2 (хотя можно брать и другие пары неизвестных) и перенесем члены с x_3 в правые части уравнений:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = x_3, \\ 2x_1 - x_2 = -x_3. \end{cases}.$$

Полученную систему можно решить по формулам Крамера:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta},\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta},$$

где $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1,\ \Delta_1 = \begin{vmatrix} x_3 & -1 \\ -x_3 & -1 \end{vmatrix} = -2x_3,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & x_3 \\ 2 & -x_3 \end{vmatrix} = -3x_3.$

Тогда $x_1 = -2x_3$, $x_2 = -3x_3$. Полагая $-x_3 = k$, где k – произвольное действительное число, получаем решение системы: $x_1 = 2k$, $x_2 = 3k$, $x_3 = -k$.

2. При $a = 4$ система имеет вид:

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + 4x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 0. \end{cases}.$$

Можно решить эту систему и методом Гаусса. Составим расширенную матрицу B полученной системы:

$$B = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

и приведем ее к матрице ступенчатого вида :

$$B \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -9 & 3 & 0 \\ 0 & -15 & 5 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \end{array}\right).$$

Восстановим систему для полученной матрицы

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 - x_3 = 0, \\ 3x_2 - x_3 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + 4x_2 - x_3 = 0, \\ 3x_2 = x_3, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + 4x_2 - x_3 = 0, \\ x_2 = \dfrac{x_3}{3}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -\dfrac{x_3}{3}, \\ x_2 = \dfrac{x_3}{3}. \end{cases}.$$

Полагая $x_3 = 3t$, где $t -$ произвольное действительное число, получаем решение системы : $x_1 = -t, x_2 = t, x_3 = 3t$.

Ответ: при $a = -1$ система имеет нетривиальные решения: $x_1 = 2k$, $x_2 = 3k$, $x_3 = -k$, $k \in R$. При $a = 4$ система имеет нетривиальные решения : $x_1 = -t, x_2 = t, x_3 = 3t$, $t \in R$.

Вопросы для самоконтроля по теме 2

1. Дайте определение системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ).
2. Какую СЛАУ называют совместной?
3. Что называют несовместной СЛАУ?
4. Что называют решением СЛАУ?
5. Что называют частным решением СЛАУ?
6. Сформулируйте теорему Кронекера-Капелли.
7. Напишите формулы Крамера решения СЛАУ. В каких случаях их можно применять?
8. Опишите матричный способ решения системы линейных уравнений.
9. Опишите схему решения системы линейных уравнений методом Гаусса.
10. Какую СЛАУ называют неоднородной?
11. Что называют однородной СЛАУ?
12. Как найти решение системы линейных однородных уравнений?
13. Что называется фундаментальной системой решений?
14. Какова геометрическая интерпретация системы линейных уравнений и неравенств?
15. Сформулируйте определение определенной СЛАУ.
16. В чем смысл «обратного хода» метода Гаусса?
17. Можно ли найти фундаментальную систему решений для неоднородной СЛАУ?
18. Какой факт помогает установить теорема Кронекера-Капелли?
19. Какое тривиальное решение имеет всякая однородная СЛАУ?
20. Всегда ли совместна однородная СЛАУ?
21. Какое решение СЛАУ называет базисным?
22. Какие СЛАУ называют равносильными?

Упражнения для самостоятельного решения по теме 2

1. Решить системы уравнений методом Крамера, методом обратной матрицы и методом Гаусса. Сравнить результаты:

а) $\begin{cases} x_1+2x_2+x_3=8 \\ -2x_1+3x_2-3x_3=-5 \\ 3x_1-4x_2+5x_3=10 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1+2x_2-x_3=0 \\ 3x_1+4x_2+6=0 \\ 3x_1+x_3=1 \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2x_1-3x_2-x_3+6=0 \\ 3x_1+4x_2+3x_3+5=0 \\ x_1+x_2+x_3+2=0 \end{cases}$ г) $\begin{cases} 3x_1+x_2+6=0 \\ x_1-2x_2-x_3=5 \\ 3x_1+4x_2-2x_3=13 \end{cases}$

2. Найти базисное решение СЛАУ:

$$\begin{cases} x_1+3x_2+3x_3-2x_4+x_5=8, \\ 2x_1+6x_2+7x_3-x_4=21, \\ 3x_1+9x_2+7x_3-13x_4+4x_5=12. \end{cases}$$

3. Решить методом Крамера системы уравнений:

1) $\begin{cases} 3x+2y=7, \\ 4x-5y=4. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} ax-3y=1, \\ ax-2y=2. \end{cases}$

3) $\begin{cases} x_1+2x_2+4x_3=31, \\ 5x_1+x_2+2x_3=29, \\ 3x_1-x_2+x_3=10. \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 2x-4y+3z=1, \\ x-2y+4z=3, \\ 3x-y+5z=2. \end{cases}$

4. Исследовать СЛАУ на совместность, определенность и, если это возможно, найти общее, частное решение и фундаментальную систему решений.

1) $\begin{cases} 2x_1-x_2-x_3=4, \\ 3x_1+4x_2-2x_3=11, \\ 3x_1-2x_2+4x_3=11. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x_1-2x_2+x_3+x_4=1, \\ x_1-2x_2+x_3-x_4=-1, \\ x_1-2x_2+x_3+5x_4=5. \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 1, \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 = 0, \\ 3x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 3x_4 + 4x_5 = 2, \\ 4x_1 + 5x_2 - 5x_3 - 5x_4 + 7x_5 = 3. \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 3x_3 = -1, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1. \end{cases}$

5) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 + 6x_2 + 7x_3 - x_4 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 + 7x_3 - 3x_4 + 4x_5 = 0, \\ 2x_1 + 6x_2 - x_3 + 2x_4 = 0. \end{cases}$

5. Решить матричные уравнения:

1) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$, 2) $X \cdot \begin{Vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & +2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 5 & 5 & 2 \\ 5 & 8 & -1 \end{Vmatrix}$,

3) $X^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = 8.$

6. С двух заводов поставляются автомобили для двух автохозяйств, потребности которых соответственно 180 и 260 машин. Первый завод выпустил 240 машин, а второй – 200 машин. Известны затраты на перевозку машин с завода на каждое автохозяйство: 8 ден.ед. тратится на перевозку с 1-го завода в 1-е автохозяйство, 10 ден.ед. – с 1-го завода во 2-е автохозяйство, 12 ден.ед. – со 2-го завода в 1-е автохозяйство, 10 ден.ед. – со 2-го завода во 2-е автохозяйство. Составить такой план перевозок, при котором минимальные затраты на перевозку равны 4360 ден. ед.

7. Что произойдет с решениями системы линейных уравнений, решаемой по правилу Крамера, если поменять местами i-е и k-е уравнения ($1 < i, k < n$)?

8. Пусть множество точек пространства, соответствующих

решениям СЛАУ относительно трех неизвестных, изображены на рис. 1 (а-з). Дайте описание каждому случаю.

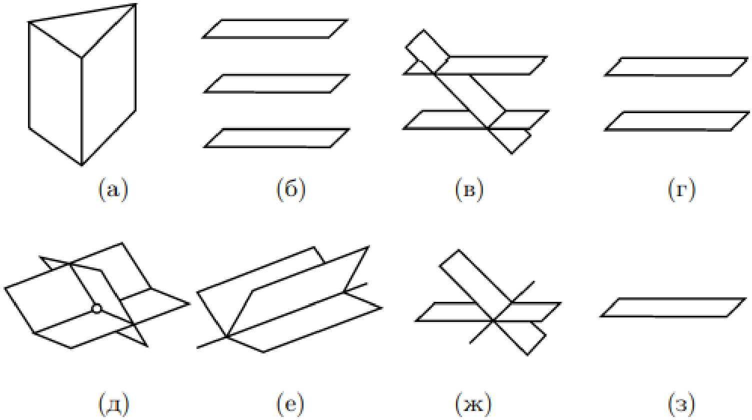


Рис. 1. Множества точек пространства

ЗАДАНИЯ ДЛЯ ИНДИВИДУАЛЬНОЙ ДОМАШНЕЙ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

Задание 1.

<u>Задачи № 1.1–1.10.</u> Найти сумму матриц $A+B$, их произведение AB, BA и A^3 (если такие операции существуют).

1.1. $A=\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1.2. $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -1 & -6 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

1.3. $A=\begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -4 & -4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

1.4. $A=\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$

1.5. $A=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 5 & -1 & -7 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

1.6. $A=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$

1.7. $A=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 9 & -6 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}$

1.8. $A=\begin{pmatrix} 5 & 7 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 4 & -7 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$

1.9. $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

1.10. $A=\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$

Задание 2.

<u>Задачи № 2.1–2.10.</u> Найти значение матричного многочлена $f(A)$, если

2.1. $f(x) = 3x^3 + x^2 + 2, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$

2.2. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

2.3. $f(x) = -x^3 + 2x^2 - x + 3, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

2.4. $f(x) = -x^3 + 2x^2 - x + 3, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$

2.5. $f(x) = -x^3 + 2x^2 - x + 3, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$

2.6. $f(x) = -x^3 + 3x^2 + x - 2, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$

2.7. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 2, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$

2.8. $f(x) = -x^3 + 3x^2 + x - 2, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

2.9. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 2, \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

2.10. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 2, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$

Задание 3.

<u>Задачи № 3.1–3.10.</u> Вычислить определители второго, третьего и четвертого порядков.

3.1. $\begin{vmatrix} -1 & -6 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} -1 & 5 & 7 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 0 & 3 \\ 3 & 5 & 3 & 7 \\ 5 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

3.2. $\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 5 & 4 & 7 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 & 1 \\ 5 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

3.3. $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 5 \\ -2 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 2 & 7 & 4 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & 9 \\ 1 & 0 & 4 & 8 \\ 1 & 7 & 0 & -7 \end{vmatrix}$

3.4. $\begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 3 & 2 \\ 0 & 19 & 1 & 4 \\ 5 & -16 & 6 & -1 \end{vmatrix}$

3.5. $\begin{vmatrix} -4 & -4 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & 4 \\ 2 & 5 & 6 & 7 \\ -1 & 4 & 6 & 3 \\ -5 & 7 & 12 & 2 \end{vmatrix}$

3.6. $\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 1 & 3 & -4 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 14 \\ 4 & 5 & 6 & 32 \end{vmatrix}$

3.7. $\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 3 & -3 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \\ 2 & 3 & 14 & 32 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{vmatrix}$

3.8. $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} -3 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 6 & 2 \end{vmatrix}$

3.9. $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 6 \\ 6 & 0 & 5 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -4 & -1 \end{vmatrix}$

3.10. $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 9 \\ 16 & 25 & 81 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 9 & 16 \\ 1 & 2 & 4 & 4 \end{vmatrix}$

Задание 4.

Задачи № 4.1–4.10. Проверить, являются ли матрицы A и B взаимообратными.

4.1. $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ 3/2 & 1/2 \end{pmatrix}$

4.2. $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$

4.3. $A = \begin{pmatrix} -0{,}4 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

4.4. $A=\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 5/2 \\ 1 & 3/2 \end{pmatrix}$

4.5. $A=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5/2 & -3/2 \end{pmatrix}$

4.6. $A=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3/2 & -1/2 \\ 5/4 & -1/4 \end{pmatrix}$

4.7. $A=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$

4.8. $A=\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 3{,}5 & -2{,}5 \end{pmatrix}$

4.9. $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -4 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

4.10. $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -2{,}5 & 1{,}5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

Задание 5.

Задачи № 5.1–5.10. Найти обратную матрицу A^{-1}. Сделать проверку: $AA^{-1}=A^{-1}A=E$.

5.1. $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

5.2. $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 8 & 3 & -6 \\ 4 & 1 & -3 \end{pmatrix}$

5.3. $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & 1 & -2\\ 2 & -2 & 1\end{pmatrix}$

5.4. $A=\begin{pmatrix}1 & -5 & -8\\ 2 & 2 & -3\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix}$

5.5. $A=\begin{pmatrix}3 & -2 & 1\\ 1 & 1 & 5\\ 2 & 3 & 4\end{pmatrix}$

5.6. $A=\begin{pmatrix}3 & 2 & 1\\ 2 & 3 & 1\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix}$

5.7. $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ 2 & 3 & -4\\ 3 & -2 & -5\end{pmatrix}$

5.8. $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\ 3 & 1 & 4\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}$

5.9. $A=\begin{pmatrix}1 & -4 & -2\\ 3 & 1 & 1\\ 3 & -5 & -6\end{pmatrix}$

5.10. $A=\begin{pmatrix}1 & -7 & -2\\ 3 & -5 & 3\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}$

Задание 6.

<u>Задачи № 6.1–6.10.</u> Решить систему линейных уравнений: 1) методом Крамера; 2) матричном методом; 3) методом Гаусса.

6.1. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 11 \end{cases}$

6.2. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -4 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -2 \end{cases}$

6.3. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 20 \\ 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 6 \end{cases}$

6.4. $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 8x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 2 \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 3 \end{cases}$

6.5. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 6 \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 = 8 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \end{cases}$

6.6. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 2 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 7 \end{cases}$

6.7. $\begin{cases} x_1 - 4x_2 - 2x_3 = -7 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ 3x_1 - 5x_2 - 6x_3 = -7 \end{cases}$

6.8. $\begin{cases} x_1 - 5x_2 - 8x_3 = 23 \\ 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 9 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 11 \end{cases}$

6.9. $\begin{cases} x_1 - 7x_2 - 2x_3 = 5 \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 46 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \end{cases}$

6.10. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 = 16 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 15 \end{cases}$

Задание 7.

<u>Задачи № 7.1–7.10.</u> Исследовать систему на совместность. В случае существования решения выпишите общее решение и одно частное.

7.1. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1 \\ 7x_1 + 8x_2 + 3x_3 = 7 \end{cases}$ 7.2. $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 5x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 4 \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 3 \end{cases}$

7.3. $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 8x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 2 \\ 6x_1 + x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases}$ 7.4. $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 8x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 2 \\ -7x_1 - 2x_2 + 5x_3 = -1 \end{cases}$

7.5. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\ 6x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 10 \\ x_1 - x_2 = 4 \end{cases}$ 7.6. $\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 - x_3 = 5 \\ 3x_1 + x_3 = 10 \\ -x_1 - 5x_2 - 2x_3 = -5 \end{cases}$

7.7. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 8x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 2 \\ 9x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 3 \end{cases}$ 7.8. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\ 4x_1 + x_2 + x_3 = 9 \\ x_1 - x_2 = 4 \end{cases}$

7.9. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 = 4 \end{cases}$ 7.10. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\ 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 16 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 11 \end{cases}$

Задание 8.

<u>Задачи № 8.1–8.10.</u> Решить матричное уравнение. Результат проверить подстановкой.

8.1. $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 12 & 11 \end{pmatrix}$

8.2. $\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 12 & 13 \\ -8 & -11 \end{pmatrix}$

8.3. $\begin{pmatrix} 3 & -8 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -2 & -21 \\ 2 & 11 \end{pmatrix}$

8.4. $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -12 \end{pmatrix}$

8.5. $X \cdot \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -8 \end{pmatrix}$

8.6. $X \cdot \begin{pmatrix} 3 & -8 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -20 \end{pmatrix}$

8.7. $\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 7 & -11 \\ 44 & -28 \end{pmatrix}$

8.8. $X \cdot \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 10 \\ -31 & -22 \end{pmatrix}$

8.9. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -32 & -13 \end{pmatrix}$

8.10. $X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 10 \\ -17 & -4 \end{pmatrix}$

Задание 9.

<u>Задачи № 9.1–9.10.</u> Найти фундаментальный набор решений однородной СЛАУ AX=0, если $X^T = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$.

№	Матрица A	№	Матрица A
9.1.	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 7 & 10 & 13 \\ 3 & 5 & 11 & 16 & 21 \\ 2 & -7 & 7 & 7 & 2 \\ 1 & 4 & 3 & 3 & 10 \end{pmatrix}$	9.6.	$\begin{pmatrix} 5 & 9 & -2 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 4 & -3 & 3 \\ -5 & -7 & 2 & 4 & -2 \\ 4 & -5 & 8 & -6 & 8 \\ 6 & -5 & 2 & -3 & 7 \end{pmatrix}$
9.2.	$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 5 & 6 & 4 \\ 5 & 9 & 7 & 8 & 6 \\ 6 & 12 & 13 & 9 & 7 \\ 4 & 6 & 6 & 5 & 4 \\ 2 & 5 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$	9.7.	$\begin{pmatrix} 3 & 4 & -3 & -1 & 2 \\ -5 & 6 & 5 & 2 & 3 \\ 4 & -9 & -3 & 7 & -5 \\ -1 & -4 & 1 & 1 & -2 \\ -3 & 7 & 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$
9.3.	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 5 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	9.8.	$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 8 & 7 & 10 & 13 \\ 2 & 5 & 6 & 13 & 11 \\ 2 & -2 & 7 & 7 & 2 \\ 1 & 8 & 5 & 3 & 10 \end{pmatrix}$
9.4.	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 5 & 4 \\ 0 & 5 & 2 & 1 & 8 \\ 1 & 4 & 0 & -1 & 5 \\ 3 & 5 & 3 & 0 & 7 \\ 1 & 2 & -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$	9.9.	$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 5 & 3 & 7 \\ 5 & 4 & 7 & 3 & 10 \\ 6 & 6 & 13 & 3 & 13 \\ 4 & 2 & 6 & 1 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 3 & 6 \end{pmatrix}$
9.5.	$\begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 10 & -2 \\ 3 & 2 & 0 & 5 & -5 \\ 2 & 8 & -4 & -3 & 2 \\ 0 & -3 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$	9.10.	$\begin{pmatrix} 9 & 2 & -1 & 3 & 10 \\ 2 & 6 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 6 & 5 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Дисциплина «Алгебра» относится к базовой части учебного плана по направлению подготовки 01.03.01 Математика, читается на первом году обучения студентов и является основой для изучения многих других учебных дисциплин. Навыки, полученные студентами при решении задач по темам «Матрицы», «Определители», «Системы линейных алгебраических уравнений», пригодятся при изучении «Вариационного исчисления», «Математического анализа», «Численных методов» и других учебных дисциплин.

Данное электронное учебное пособие полезно студентам для самостоятельной работы при подготовке к аудиторным занятиям, а также в условиях дистанционного обучения. Кроме того, учебное пособие содержит большое количество рекомендуемой литературы, необходимой для изучения данной дисциплины. Поэтому настоящее издание актуально.

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Антонов, В. И. Линейная алгебра и аналитическая геометрия. Опорный конспект : учебник / В. И. Антонов. – М. : Проспект, 2011. – 144 с.

2. Арнольд, В. И. Вещественная алгебраическая геометрия : брошюра / В. И. Арнольд. – М. : МЦНМО, 2009. – 88 с.

3. Артамонов, В. А. Линейная алгебра и аналитическая геометрия : курс лекций для экономических специальностей / В. А. Артамонов. – М. : Дело АНХ, 2012. – 224 с.

4. Башмакова, И. Г. Основные этапы развития алгебры / И. Г. Башмакова // История и методология естественных наук. – М. : изд-во МГУ. Вып. XXXII, 1986. – С. 50–64.

5. Бортаковский, А. С. Линейная алгебра и аналитическая геометрия. Практикум : учебное пособие / А. С. Бортаковский, А. В. Пантелеев. – М. : Инфра–М, 2017. – 224 с.

6. Бускаран, Э. Теория моделей и алгебраическая геометрия : учебник / Э. Бускаран. – М. : МЦНМО, 2008. – 280 с.

7. Бэр Р. Линейная алгебра и проективная геометрия : учебник. Перевод с английского / Р. Бэр. – М. : УРСС, 2004. – 400 с.

8. Васильев, А. В. Высшая алгебра : в 2 ч. : конспект лекций / А. В. Васильев, В. Д. Мазуров. – Новосибирск : Новосиб. гос. ун-т., 2010, ч. 1. – 143 с.

9. Ваузен, К. Теория Ходжа и комплексная алгебраическая геометрия : том 1, том 2 : уч. пос. / К. Ваузен. – М. : МЦНМО, 2010, 2011. – 344 с., 368 с.

10. Вестяк, А. В. Алгебра и аналитическая геометрия : в 2-х ч. : уч. пособие / А. В. Вестяк. – Магадан : Магадан, 2012. – 1004 с.

11. Винберг, Э. Б. Курс алгебры : учебное пособие / Э. Б. Винберг. – Новое изд. перераб. и доп. – М. : МЦНМО, 2011. – 592 с.

12. Воскресенский, В. Е. Бирациональная геометрия линейных алгебраических групп : уч. пос. / В. Е. Воскресенский. – М. : МЦНМО, 2009. – 408 с.

13. Гельфанд, И. М. Алгебра : уч. пос. (изд. 5-е, стереотипное) /

И. М. Гельфанд, А. Шень. – М. : Физматлит, 2019. – 144 с.
14. Геворкян, П. С. Высшая математика. Линейная алгебра и аналитическая геометрия : учебник / П. С. Геворкян. – М. : Физматлит, 2014. – 208 с.
15. Глухов, М. М. Алгебра и геометрия : учебное пособие / М. М. Глухов. – М. : Гелиос АРВ, 2012. – 392 с.
16. Горлач, Б. А. Линейная алгебра и аналитическая геометрия : учебник / Б. А. Горлач. – СПб. : Лань, 2017. – 300 с.
17. Гусак, А. А. Аналитическая геометрия и линейная алгебра. Примеры и задачи : учебное пособие / А. А. Гусак. – Минск : ТетраСистемс, 2011. – 288 с.
18. Гусев, В. А. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия для профессий и специальностей социально-экономического профиля : учебник / В. А. Гусев. – М. : Academia, 2017. – 640 с.
19. Епихин, В. Е. Аналитическая геометрия и линейная алгебра. Теория и решение задач : метод. указания для бакалавров / В. Е. Епихин, С. С. Граськин. – М. : КноРус, 2014. – 64 с.
20. Епихин, В. Е. Аналитическая геометрия и линейная алгебра. Теория и решение задач : учебное пособие / В. Е. Епихин, С. С. Граськин. – М. : КноРус, 2013. – 608 с.
22. Ефимов, Н. В. Линейная алгебра и многомерная геометрия : учебное пособие / Н. В. Ефимов. – М. : Физматлит, 2005. – 464 с.
23. Жижченко, А. Б. Алгебраическая геометрия в работах советских математиков / А. Б. Жижченко. – М. : ЛКИ, 2007. – 64 с.
24. Зимина, О. В. Линейная алгебра и аналитическая геометрия : учебный комплекс для вузов / О. В. Зимина. – Рн/Д : Феникс, 2018. – 157 с.
25. Зимина, О. В. Линейная алгебра и аналитическая геометрия : учебное пособие / О. В. Зимина. – Рн/Д : Феникс, 2015. – 377 с.
26. Зубко, А. М. Линейная алгебра и геометрия : учебное пособие / А. М. Зубков, Б. А. Севастьянов, В. П. Чистяков. – СПб. : Лань, 2005. – 304 с.
27. Зубов, В. И. Линейная алгебра и геометрия : учебное пос. /

В. И. Зубов. – СПб. : Лань, 2008. – 304 с.
28. Зуланке, Р. Алгебра и геометрия : в 3 т. : учебное пособие. Том 1 – Введение / Р. Зуланке, А. Онищик. – М. : МЦНМО, 2004. – 408 с.
29. Зуланке, Р. Алгебра и геометрия : в 3-х томах : учебное пособие. Том 2. Модули и алгебры / Р. Зуланке, А. Онищик. – М. : МЦНМО, 2008. – 336 с.
30. Ильин, В. А. Линейная алгебра : учеб. для вузов. – 6-е изд. / В. А. Ильин, Э. Г. Позняк. – М. : Физматлит, 2005. – 280 с.
31. Ильин, В. А. Линейная алгебра и аналитическая геометрия : учебник / В. А. Ильин, Г. Д. Ким. – М. : Проспект, 2012. – 400 с.
32. Ильин, С. Н. Элементы алгебры: комплексные числа, системы линейных уравнений и многочлены : учебное пособие / С. Н. Ильин. – Казань : Казанский государственный университет, 2006. – 202 с.
33. Исковских, В. А. Алгебраические поверхности: геометрия и арифметика : пособие для вузов / В. А. Исковских. – М. : ЛитРес, 2020. – 360 с.
34. Каган, М. Л. Алгебра и геометрия в инженерном вузе : учебное пособие / М. Л. Каган, М. В. Самохин. – М. : АСВ, 2008. – 176 с.
35. Кадомцев С. Б. Аналитическая геометрия и линейная алгебра : учебное пособие для вузов / С. Б. Кадомцев. – М. : Физматлит, 2011. – 168 с.
36. Кармин, А. С. Сборник индивидуальных заданий по математике для технических высших учебных заведений. Часть 1. Аналитическая геометрия. Пределы и ряды. Функции и производные. Линейная и векторная алгебра. Интегрирование. Теории поля : учебное пособие / А. С. Кармин. – СПб. : Лань, 2013. – 608 с.
37. Киркинский, А.С. Линейная алгебра и аналитическая геометрия : учебник / А.С. Киркинский. – М. : Академический проект, 2006. – 256 с.
38. Кирсанов, М.Н. Алгебра и геометрия. Сборник задач и решений с применением Maple : учебное пособие / М.Н. Кирсанов,

О.С. Кузнецова. – М.: Инфра-М, 2016. – 128 с.

39. Кожухов, И. Б. Сборник задач по математике для втузов : в 4 т. Том 1. Векторная алгебра и аналитическая геометрия. Определители и матрицы системы линейных уравнений. Линейная алгебра. Основы общей алгебры : учебное пособие для втузов / И.Б. Кожухов. – М. : Физматлит, 2009. – 288 с.

40. Козин, Р. Б. Практическое руководство к решению задач по высшей математике. Линейная алгебра, векторная алгебра, аналитическая геометрия, введение в математический анализ, производная и ее приложения : учебное пособие / Р. Б. Козин, Н. И. Кривцов, В. И. Лебедев и др. – СПб. : Лань, 2007. – 320 с.

41. Козлов, В. М. Практическое руководство к решению задач по высшей математике. Линейная алгебра, векторная алгебра, аналитическая геометрия, введение в математический анализ, производная и ее приложения : учебное пособие / В. М. Козлов. – СПб. : Лань, 2009. – 320 с.

42. Кокс, Д. Зеркальная симметрия и алгебраическая геометрия: Пер. с англ. / Д. Кокс, Ш. Катц. – М. : МЦНМО, 2012. – 576 с.

43. Кострикин, А. И. Введение в алгебру. Часть 1: Основы алгебры : учебник для вузов. – 5-е изд. / А. И. Кострикин. – СПб. : Лань, 2022. – 272 с.

44. Кострикин, А. И. Введение в алгебру. Часть II. Линейная алгебра : учебное пособие. – 3-е изд. / А. И. Кострикин. – М. : МЦНМО, 2018. – 368 с.

45. Кострикин, А. И. Введение в алгебру. Часть III. Основные структуры алгебры : учебное пособие. – 3-е изд. / А. И. Кострикин – М. : МЦНМО, 2018. – 272 с.

46. Кострикин, А. И. Линейная алгебра и геометрия : учебное пособие / А. И. Кострикин, Ю. Манин. – СПб. : Лань, 2005. – 304 с.

47. Кострикин, А.И. Сборник задач по алгебре. В 2 т. Т. 1. Ч. 1. Основы алгебры. Ч. 2. Линейная алгебра и геометрия : учебное пособие / А.И. Кострикин. – М. : Физматлит, 2007. – 264 с.

48. Краснов, М. Л. Вся высшая математика. Т. 1 : Аналитическая геометрия, векторная алгебра, линейная алгебра, дифференциальное

исчисление : учебник / М. Л. Краснов, А. И. Киселев, Г. И. Макаренко. – М. : КД Либроком, 2014. – 336 с.

49. Курош, А. Г. Курс высшей алгебры : учебное пособие. – 19-е изд. стереот. / А. Г. Курош. – М. : Лань, 2013. – 432 с.

50. Кутищев, Г. П. Геометрия алгебраических уравнений, разрешимых в радикалах : С приложениями в численных методах и вычислительной геометрии : учебник / Г. П. Кутищев. – М. : КД Либроком, 2012. – 168 с.

51. Лунгу, К. Н. Сборник задач по высшей математике. 1 курс: С контрольными работами : линейная алгебра ; аналитическая геометрия; основы математического анализа ; комплексные числа: учебное пособие / К. Н. Лунгу, Д. Т. Письменный, С. Н. Федин, Ю. А. Шевченко. – М. : Айрис-пресс, 2011. – 576 с.

52. Максимов, Ю. Д. Линейная алгебра и аналитическая геометрия. Опорный конспект : учебное пособие / Ю. Д. Максимов, В. И. Антонов и др. – М. : Проспект, 2016. – 144 с.

54. Мальцев, А. И. Основы линейной алгебры : учебник / А. И. Мальцев. – СПб. : Лань, 2021. – 472 с.

55. Михалев, А. А. Линейная алгебра и аналитическая геометрия : учебное пособие для студ. учреждений высш. проф. образования / А. А. Михалев, И. Х. Сабитов. – М. : ИЦ Академия, 2018. – 320 с.

56. Михалев, А. А. Алгебра : учебное пособие / А. А. Михалев. – М. : Академия, 2016. – 240 с.

57. Никифоров, В. А. Линейная алгебра и аналитическая геометрия : учебное пособие / В. А. Никифоров, Б. В. Шкода. – М. : КД Либроком, 2009. – 160 с.

58. Овчинников, А. В. Алгебра и геометрия в вопросах и задачах : Основы алгебры и аналитической геометрии : учебное пособие / А. В. Овчинников. – М. : Ленанд, 2016. – 288 с.

59. Опойцев, В. И. Школа Опойцева : Аналитическая геометрия и линейная алгебра : учебное пособие / В. И. Опойцев. – М. : Ленанд, 2018. – 256 с.

60. Орлова, И. В. Линейная алгебра и аналитическая геометрия

для экономистов : учебник и практикум для прикладного бакалавриата / И. В. Орлова, В. В. Угрозов, Е. С. Филонова. – Люберцы : Юрайт, 2015. – 370 с.

61. Острик, В. В. Алгебраическая геометрия и теория чисел. Рациональные и эллиптические кривые : уч.-мет. указания / В. В. Острик. – М. : МЦНМО, 2011. – 48 с.

62. Просветов, Г. И. Линейная алгебра и аналитическая геометрия: Задачи и решения : учебно-практическое пособие / Г.И. Просветов. – М. : Альфа–Пресс, 2009. – 208 с.

63. Прохоров, Н. Л Математика в экономике. Часть 1. Линейная алгебра, аналитическая геометрия и линейное программирование : учебник / Н. Л Прохоров. – М. : Финансы и статистика, 2011. – 384 с.

64. Райбул, С. В. Алгебра и геометрия в таблицах и схемах : справочное пособие / С. В. Райбул. – Рн/Д : Феникс, 2013. – 190 с.

65. Рыбников, К. А. История математики: Подисциплинарное изложение : Геометрия. Алгебра и теория чисел. Математический анализ. Теория вероятностей и математическая статистика. Дискретная математика : классич. чебник / К. А. Рыбников. – М. : Ленанд, 2018. – 536 с.

66. Рябушко, А. П. Индивидуальные задания по высшей математике. В 4-х ч. Ч. 1. Линейная и векторная алгебра. Аналитическая геометрия. Дифференциальное исчисление функций одной переменной. В 4-х т. / А. П. Рябушко. – Мн. : Вышэйшая шк., 2011. – 304 с.

67. Сборник задач по алгебре / Под ред. А. И. Кострикина. – Изд. 4-е, испр. и доп. – М. : МЦНМО, 2009. – 404 с.

68. Соловьев, И. А. Практическое руководство к решению задач по высшей математике. Линейная алгебра, векторная алгебра, аналитическая геометрия, введение в математический анализ, производная и ее приложения : учебное пособие / И. А. Соловьев, В.В. Шевелев, А. В. Червяков и др. – СПб. : Лань, 2007. – 320 с.

69. Соловьев, И. А. Практическое руководство к решению задач по аналитической геометрии и линейной алгебре : учебное пособие / И. А. Соловьев, В. В. Шевелев, А. В. Червяков и др. – СПб. : Лань,

2009. – 300 с.
70. Тищенкова, Л. М. Аналитическая геометрия и линейная алгебра. Теория и решение задач : учебник для бакалавров / Л. М. Тищенкова. – М. : КноРус, 2013. – 608 с.
71. Фаддеев, Д. К. Лекции по алгебре: уч. пос. – М. : Наука, 1984. – 416 с.
72. Харрис, Дж. Алгебраическая геометрия. Начальный курс: учебник. Пер. с англ. / Дж. Харрис. – М. : МЦНМО, 2006. – 400 с.
73. Шафаревич, И. Р. Линейная алгебра и геометрия : уч. пос. / И. Р. Шафаревич, А. О. Ремизов. – М. : Физматлит, 2009. – 512 с.
74. Шевцов, Г. С. Линейная алгебра: теория и прикладные аспекты : уч. пос. – 3-е изд., испр. и доп. / Г. С. Шевцов. – М. : Магистр : ИНФРА-М, 2016. – 544 с.
75. Яглом, И. М. Конечная алгебра, конечная геометрия и коды : научно-поп. брошюра / И. М. Яглом. – М. : Леланд, 2016. – 72 с.

Интернет-ресурсы:

https://e.lanbook.com – электронно-библиотечная система «Лань»;

http://benran.ru – библиотека по естественным наукам Российской Академии Наук;

http://mathnet.ru – общероссийский математический портал;

http://lib.mexmat.ru – электронная библиотека мех.-мат. факультета МГУ;

http://window.edu.ru/catalog/resources/uchebnik-algebra-linejnaya-algebra – единое окно доступа к образовательным ресурсам;

https://elibrary.ru – научная электронная библиотека.

Учебное издание

СКРИННИКОВА Анна Владимировна,
ДАВЫСКИБА Оксана Викторовна,
ПОЛИЩУК Наталья Алексеевна,
ТЕМНИКОВА Светлана Владимировна

Алгебра. Часть 1. Матрицы. Определители. СЛАУ
В 2-х частях

Электронное учебное пособие

В авторской редакции
Редактор – Темникова С.В.
Корректор – Скринникова А.В.
Компьютерная верстка – Скринникова А.В.

Подписано в печать 28.11.2022. Бумага офсетная.
Гарнитура Times New Roman.
Печать ризографическая. Формат $60\times 84/16$. Усл. печ. л. 5,58.
Тираж 100 экз. Заказ № 139.

Издатель
ГОУ ВО ЛНР «ЛГПУ»
«Книта»
ул. Оборонная, 2, г. Луганск, ЛНР, 91011. Т/ф: (0642) 58-03-20
e-mail: knitaizd@mail.ru