



# ПРОБЛЕМЫ ПРОЧНОСТИ

*Международный  
научно-технический журнал*

*Основан в июле 1969 г.*

**№ 4 (334) — 1998 г.**

**Учредители:** Национальная академия наук Украины  
Институт проблем прочности НАН Украины  
(Регистрационное свидетельство серия КВ № 129 от 07. 10. 1993 г.)

**Издатель** Институт проблем прочности НАН Украины

**Редакционная коллегия:**

**В. Т. Трощенко** (главный редактор), **В. А. Борисенко**, **Б. А. Грязнов**, **А. Л. Квитка**, **В. Н. Киселевский**, **Б. И. Ковальчук**, **Л. В. Кравчук**, **А. Я. Красовский**, **В. В. Кривенюк**, **А. А. Лебедев**, **В. В. Матвеев**, **В. П. Науменко**, **Г. С. Писаренко**, **Г. В. Степанов**, **В. А. Стрижало** (зам. главного редактора), **В. К. Харченко** (зам. главного редактора), **А. П. Яковлев**

**Редакционный совет:**

**М. Билы** (Словакия), **А. А. Ильюшин** (Россия), **А. Ю. Ишлинский** (Россия), **В. И. Ковпак** (Украина), **С. Коцаньда** (Польша), **Н. А. Махутов** (Россия), **К. Миллер** (Великобритания), **Я. Немец** (Чехия), **Г. Плювинаж** (Франция), **Л. Тот** (Венгрия), **Д. Франсуа** (Франция), **К. В. Фролов** (Россия)

**Редакция журнала «Проблемы прочности»:**

**В. В. Науменко** (зав. редакцией), **Н. Г. Вербицкая** (вед. редактор),  
**Л. Б. Дедух** (редактор), **Н. М. Шинкаренко** (оператор)

**Адрес редакции:** 252014, Киев - 14, ул. Тимирязевская, 2

*Институт проблем прочности НАН Украины*

**Телефон:** (044) 296 5657

**Факс:** (044) 296 1684

*Журнал переводится на английский язык и издается в  
США с 1969 г. издательством Plenum Publishing  
Corporation под названием «Strength of Materials»*



# PROBLEMS of STRENGTH

*International  
scientific & technical journal  
founded in July 1969*

**№ 4 (334) — 1998**

**Founders:** National Academy of Sciences of Ukraine  
Institute for Problems of Strength, Nat. Ac. Sci. of Ukraine

**Publisher:** Institute for Problems of Strength, Nat. Ac. Sci. of Ukraine

**Editorial board:**

V. T. Troshchenko (editor-in-chief), V. A. Borisenko, B. A. Gryaznov, A. L. Kvitka, V. N. Kiselevsky, B. I. Koval'chuk, L. V. Kravchuk, A. Ya. Krasowsky, V. V. Krivenyuk, A. A. Lebedev, V. V. Matveyev, V. P. Naumenko, G. S. Pisarenko, G. V. Stepanov, V. A. Strizhalo (associate editor), V. K. Kharchenko (associate editor), A. P. Yakovlev

**Advisory board:**

M. Bily (Slovakia), A. A. Il'yushin (Russia), A. Yu. Ishlinsky (Russia), V. I. Kovpak (Ukraine), S. Kocanda (Poland), N. A. Makhutov (Russia), K. Miller (UK), Ya. Némec (Czech Republic), G. Pluvinage (France), L. Toth (Hungary), D. Francois (France), K. V. Frolov (Russia)

**Editorial staff:**

V. V. Naumenko, N. G. Verbitskaya, L. B. Dedukh, N. M. Shinkarenko

**Address:** Institute for Problems of Strength  
2 Timiryazevskaya str., Kiev 14, 252014  
Ukraine

**Tel.:** (044) 296 5657

**Fax:** (044) 296 1684

Since 1969 the Journal has been translated into English and published in the USA by Plenum Publishing Corporation under the title *Strength of Materials*

# Содержание

## Научно-технический раздел

ТРОШЕНКО В. Т. Исследование пороговых коэффициентов интенсивности напряжений материалов при циклическом нагружении. Сообщение 1. Методики и результаты исследования .....	5
КОВАЛЬЧЕНКО М. С. Динамика одноосного растяжения вязкоупругого деформационно упрочняемого тела в системе с одной степенью свободы. Сообщение 1. Предписанное движение системы .....	16
ЦЫБАНЕВ Г. В. Определение характеристик рассеяния пределов выносливости материалов на основе энергетического подхода .....	28
ГОПКАЛО А. П. Влияние параметров температурного цикла на циклическую вязкость разрушения стали 5ХЗВЗМФАС .....	34
СТЕПАНОВ Г. В., ХАРЧЕНКО В. В. Влияние динамического поведения материала на проникание длинных стержней при повышенных скоростях (обсуждение проблемы) .....	39
МУЗЫКА Н. Р. Развитие сквозной трещины в листовом материале при двухосном растяжении .....	52
КРАСОВСКИЙ А. Я., ПИНЯК И. С. Описание кинетики роста трещины усталости на основе критерия текущего раскрытия ее вершины .....	60
ФИЛИПОВСКИЙ А. В., ЛОПУШАНСКИЙ В. А. Влияние дисперсности структуры на жаропрочность хромоникелевых сплавов .....	68
МАРЧЕНКО В. Л., ШАМАРИН Ю. Е. Исследование контактных давлений в многослойных осесимметричных конструкциях .....	73
КИРИЧЕВСКИЙ В. В., ДОХНЯК Б. М., КОЗУБ Ю. Г. Применение специальных конечных элементов для определения параметров механики разрушения нелинейных эластомеров с трещинами .....	83
УСОВ А. В., БОГАЧ А. А., ЗЕЛЕНЬКИЙ А. М., ИОРГАЧЕВ Д. В. Повышение эксплуатационных свойств поверхностей деталей из материалов, предрасположенных к трещинообразованию .....	93
БУЛАНОВ Э. А. К вопросу о моментной теории упругости. Плоская деформация. Сообщение 2 .....	106

## Производственный раздел

ТРОШЕНКО В. Т., ГРЯЗНОВ Б. А., ЗАСЛОЦКАЯ Л. А., КОБЕЛЬСКИЙ С. В., КОНОНУЧЕНКО О. В. Методика исследования трещиностойкости материалов образцов с угловой трещиной при циклическом нагружении .....	116
ЛЯШЕНКО Б. А., СОРОКА Е. Б., АКИНИН К. Г. О связи адгезионной прочности и температурных перепадов в теплозащитных покрытиях .....	126

## Хроника

ПУСТОВАЛОВ В. В. 11-я Международная конференция по прочности материалов (ICSMAl1) .....	131
---	-----

Номер подготовлен, набран и сверстан в редакции.

Отпечатан в Специализированной типографии научных журналов НАН Украины.

Подл. к печати 03. 07. 98. Заказ № 101. Тираж 400 экз. Цена договорная.

## Применение специальных конечных элементов для определения параметров механики разрушения нелинейных эластомеров с трещинами

В. В. Киричевский, Б. М. Дохняк, Ю. Г. Козуб

Луганский сельскохозяйственный институт, Луганск, Украина

*Для моделирования сингулярных полей напряжений и деформаций в эластомерах с трещинами используется пространственный квадратичный конечный элемент со сдвинутыми промежуточными узлами в сторону фронта трещины, учитывающий слабую сжимаемость материала. Построены функции формы, отображающие особенность распределения перемещений порядка  $\sqrt{r}$ . Поскольку в области трещины эластомер испытывает большие деформации, расчет конструкции ведется по нелинейному алгоритму, основанному на модифицированном методе Ньютона-Канторовича. Приведены результаты расчетов напряженно-деформированного состояния прямоугольных плит со сквозными и поверхностными полуэллиптическими трещинами при деформациях удлинения до 40%. Полученные решения хорошо согласуются с данными других авторов. Характер распределения нелинейных напряжений позволяет заключить, что в рассмотренном диапазоне нагружения возможно применение коэффициентов интенсивности напряжений для решения задач механики разрушения эластомеров.*

При моделировании поведения эластомерных элементов конструкций с трещинами необходимо учитывать, что в случае больших деформаций в материале они могут быть нелинейными. Исследование напряженно-деформированного состояния необходимо проводить в геометрически нелинейной постановке.

Параметры механики разрушения зависят от характера распределения деформаций и напряжений в окрестности вершины трещины. В зависимости от выбранного закона состояния несжимаемого или слабосжимаемого эластомера перемещения пропорциональны  $r^l$ , где  $l$  может принимать значения из интервала  $(0,1)$  [1,2]. В частности, при использовании закона Гука  $l = 1/2$ .

Запишем обобщенный закон Гука для слабосжимаемого материала:

$$\sigma^{ij} = 2\mu \left[ g^{ik} g^{jl} \varepsilon_{kl} - \frac{1}{3} J_1(\hat{\varepsilon}) \right] + B \left( \sqrt{I_3(G^x)} - 1 \right) g^{ij}, \quad (1)$$

где  $\mu, \lambda$  - коэффициенты Ламе;  $B = 2/3\mu + \lambda$  - коэффициент объемного сжатия.

В устье вершины трещины эластомер испытывает большие деформации. Тензор конечных деформаций в базисной системе координат имеет вид

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( C_i^{m'} u_{m',j} + C_j^{m'} u_{m',i} + u_{m',i} u_j^{m'} \right). \quad (2)$$

Компоненты тензора деформаций можно разложить на линейную и нелинейную составляющие:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^l + \varepsilon_{ij}^n. \quad (3)$$

Первый инвариант тензора деформаций Коши-Грина запишем в виде суммы таких составляющих:

$$J_1(\epsilon) = \epsilon_{ii} = \epsilon_{ii}^n + \epsilon_{ii}^h = J_1^n + J_1^h. \quad (4)$$

С учетом соотношений (2)–(4) выражение (1) можно представить следующим образом:

$$\sigma^{ij} = 2\mu \left( g^{ik} g^{jl} \epsilon_{kl}^n - \frac{1}{3} J_1^n g^{ij} \right) + 2\mu \left( g^{ik} g^{jl} \epsilon_{kl}^h - \frac{1}{3} J_1^h g^{ij} \right) + B(\sqrt{I_3} - 1)g^{ij}. \quad (5)$$

Для линейризации функции объемной деформации разложим  $\sqrt{I_3(G^x)}$  в ряд Тейлора в окрестности  $I_3 = 1$ . Поскольку рассматривается слабосжимаемый материал, ограничимся членами второго порядка:

$$\sqrt{I_3(G^x)} = 1 + \frac{1}{2}(I_3 - 1) - \frac{1}{8}(I_3 - 1)^2. \quad (6)$$

Выразим третий инвариант первой меры деформации Коши–Грина через инварианты тензора конечных деформаций:

$$I_3 = 1 + 2J_1 + 4J_2 + 8J_3. \quad (7)$$

После подстановки (7) и (4) в (6) и (5) и деления на линейные и нелинейные слагаемые получим

$$\begin{aligned} \sigma^{ij} &= 2\mu \left( g^{ik} g^{jl} \epsilon_{kl}^n - \frac{1}{3} J_1^n \right) + B J_1^n + 2\mu \left( g^{ik} g^{jl} \epsilon_{kl}^h - \frac{1}{3} J_1^h \right) + \\ &+ B \left( J_1^h + 2J_2 + 4J_3 - \frac{1}{2} J_1^2 - 2J_2^2 - 8J_3^2 - 2J_1 J_2 - 4J_1 J_3 - 8J_2 J_3 \right) g^{ij} = \\ &= \sigma_n^{ij} + \sigma_h^{ij}. \end{aligned} \quad (8)$$

Линейную составляющую напряжений запишем в виде

$$\sigma^{ij} = 2\mu g^{ik} g^{jl} \epsilon_{kl} + \lambda \Theta g^{ij}, \quad (9)$$

а вариацию удельной потенциальной энергии тела – следующим образом:

$$\delta\Pi = \delta W - \delta A = 0,$$

где  $\delta W$  – вариация энергии деформации внутренних сил;  $\delta A$  – вариация элементарной работы внешних сил.

Полученное выражение представляет собой систему нелинейных уравнений относительно компонент вектора перемещений  $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ . Для решения этой системы используется модифицированный метод Ньютона–Канторовича в сочетании с методом последовательных нагружений. Систему линеаризованных уравнений можно представить в виде

$$Ku + N(u)u + \Sigma \Delta P_k, \quad (10)$$

где  $K$  – оператор линейной части системы разрешающих уравнений;  $u$  – вектор узловых перемещений;  $N(u)$  – оператор нелинейных добавок;  $\Sigma \Delta P_k$  – приращение нагрузки на  $k$ -м шаге нагружения.

Для моделирования сингулярного характера деформаций в эластомерной конструкции с трещиной на основе метода конечных элементов используем специальный квадратичный конечный элемент со сдвинутыми промежуточными узлами (рис. 1). В функции формы узлов, лежащих на ребрах, которые пересекаются с фронтом трещины, вводятся компоненты, пропорциональные  $\sqrt{r}$ :

$$\left\{ \begin{aligned}
 N_1 &= \sqrt{1/8}(1-x_1)(\sqrt{x_2+1}-\sqrt{2})(\sqrt{x_3+1}-\sqrt{2}) \times \\
 &\quad \times (-\sqrt{1/2}x_1-\sqrt{x_2+1}-\sqrt{x_3+1}); \\
 N_3 &= \sqrt{1/8}(1+x_1)(\sqrt{x_2+1}-\sqrt{2})(\sqrt{x_3+1}-\sqrt{2}) \times \\
 &\quad \times (\sqrt{1/2}x_1-\sqrt{x_2+1}-\sqrt{x_3+1}); \\
 N_4 &= 1/2(1+x_1)(1-x_3)(-1+\sqrt{2}\sqrt{x_2+1}-x_2); \\
 N_5 &= \sqrt{1/32}(1+x_1)(1-x_3)\sqrt{x_2+1}(x_1-x_3+\sqrt{2}\sqrt{x_2+1}-3); \\
 N_7 &= \sqrt{1/32}(1-x_1)(1-x_3)\sqrt{x_2+1}(-x_1-x_3+\sqrt{2}\sqrt{x_2+1}-3); \\
 N_8 &= 1/2(1-x_1)(1-x_3)(-1+\sqrt{2}\sqrt{x_2+1}-x_2); \\
 N_9 &= 1/2(1-x_1)(1-x_2)(-1+\sqrt{2}\sqrt{x_3+1}-x_3); \\
 N_{10} &= 1/2(1+x_1)(1-x_2)(-1+\sqrt{2}\sqrt{x_3+1}-x_3); \\
 N_{13} &= \sqrt{1/32}(1-x_1)(1-x_2)\sqrt{x_3+1}(-x_1-x_2+\sqrt{2}\sqrt{x_3+1}-3); \\
 N_{15} &= \sqrt{1/32}(1+x_1)(1-x_2)\sqrt{x_3+1}(x_1-x_2+\sqrt{2}\sqrt{x_3+1}-3).
 \end{aligned} \right. \quad (11)$$

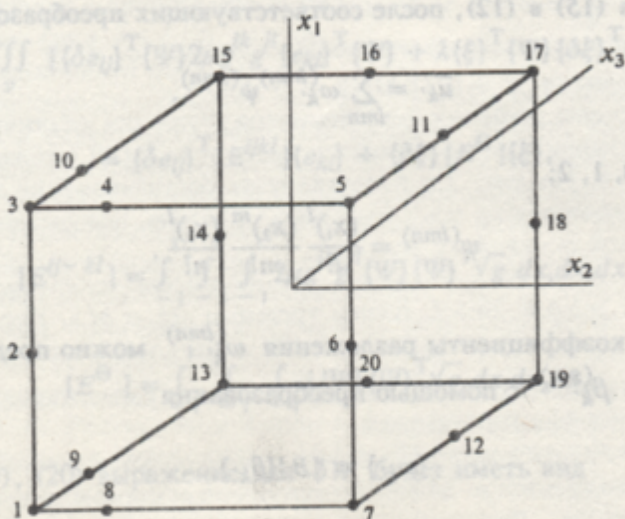


Рис. 1. Специальный конечный элемент.

Для остальных узлов используются обычные функции формы квадратичного элемента серендипова семейства. Распределение перемещений по объему КЭ можно записать в виде

$$\bar{u}_{k'} = \sum_{pqr} \beta_{k'}^{(pqr)} \varphi^{(pqr)}, \quad (12)$$

где

$$\varphi^{(pqr)} = \left( x_1 + \frac{1 - (-1)^p}{2} \right)^{p/2} \left( x_2 + \frac{1 - (-1)^q}{2} \right)^{q/2} \left( x_3 + \frac{1 - (-1)^r}{2} \right)^{r/2},$$

$$p, q, r = 0, 1, 2, 4.$$

Между функциями формы и выбранными функциями существует зависимость

$$\{N\} = [A]^T \{\varphi\}. \quad (13)$$

Сравнивая (11), (12) и (13), получим

$$\{\beta_{k'}\} = [A] \{u_{k'}\}. \quad (14)$$

(Вид матрицы [A] приведен в работе [3].)

Среди предложенных степенных функций есть такие, в которых множителями являются иррациональные выражения вида  $\sqrt{x_i + 1}$ . Разложим иррациональные множители в ряд Тейлора в окрестности центра КЭ, при этом ограничимся членами разложения:

$$\sqrt{x_i + 1} = 1 + \frac{x_i}{2} - \frac{(x_i)^2}{8} + \dots \quad (15)$$

Подставив (15) в (12), после соответствующих преобразований имеем

$$\bar{u}_{k'} = \sum_{lmn} \omega_{k'}^{(lmn)} \psi^{(lmn)}, \quad (16)$$

где  $l, m, n = 0, 1, 2$ ;

$$\psi^{(lmn)} = \frac{(x_1)^l (x_2)^m (x_3)^n}{l! m! n!}.$$

При этом коэффициенты разложения  $\omega_{k'}^{(lmn)}$  можно представить через коэффициенты  $\beta_{k'}^{(pqr)}$  с помощью преобразования

$$\{\omega_{k'}\} = [B] \{\beta_{k'}\}. \quad (17)$$

Запишем следующее уравнение вариации для линейной составляющей энергии деформации:

$$\delta W^n = \iiint_V \sigma_{ij}^n \delta \epsilon_{ij}^n dv, \quad (18)$$

где  $\sigma_{ij}^n$  имеет вид (9).

Компоненты тензора деформаций в соответствии с моментной схемой конечных элементов (МКЭ) разложим в ряд Маклорена в окрестности начала координат:

$$\epsilon_{ij} = \{e_{ij}\}^T \{\Psi_{(ij)}\}.$$

Компоненты  $e_{ij}^{(stg)}$  можно выразить через коэффициенты  $\omega_k^{(mn)}$  с помощью преобразования

$$\{e_{ij}\} = [F_{ij}^{k'}] \{\omega_k\}. \quad (19)$$

Слабую сжимаемость эластомера будем учитывать на основе метода В. В. Киричевского [4], а функцию изменения объема, ответственную за слабую сжимаемость, представим в виде ряда

$$\Theta = \sum_{\mu=0}^1 \sum_{\nu=0}^1 \sum_{\lambda=0}^1 \xi^{(\mu\nu\lambda)} \psi^{(\mu\nu\lambda)},$$

где коэффициенты разложения  $\xi^{(\mu\nu\lambda)}$  определяются соотношением

$$\xi^{(\mu\nu\lambda)} = \frac{\partial^{(\mu+\nu+\lambda)} \epsilon_{ij} g^{ij}}{(\partial x_1)^\mu (\partial x_2)^\nu (\partial x_3)^\lambda} \text{ при } x_1 = x_2 = x_3 = 0. \quad (20)$$

Выражение (20) запишем в матричной форме:

$$\{\xi\} = [F_{\Theta}^{k'}] \{\omega_k\}. \quad (21)$$

После подстановки (9), (19), (21) в (18) получим

$$\begin{aligned} \delta W &= \iiint_V \{ \delta e_{ij} \}^T \{ \Psi \} 2\mu g^{ik} g^{jl} \{ e_{kl} \}^T \{ \Psi \} + \lambda \{ \xi \}^T \{ \Psi \} \{ \delta \xi \}^T \{ \Psi \} \} dv = \\ &= \{ \delta e_{ij} \}^T [E^{ijkl}] \{ e_{kl} \} + \{ \delta \xi \} [E^{\Theta}] \{ \xi \}, \end{aligned} \quad (22)$$

где

$$[E^{ijkl}] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 2\mu g^{ik} g^{jl} \{ \Psi \} \{ \Psi \}^T \sqrt{g} dx_1 dx_2 dx_3;$$

$$[E^{\Theta}] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \lambda \{ \Psi \} \{ \Psi \}^T \sqrt{g} dx_1 dx_2 dx_3.$$

С учетом (19), (20) выражение для  $\delta W$  будет иметь вид

$$\delta W = \{ \delta \omega_{s'} \}^T [F_{ij}^{s'}] [E^{ijkl}] [F_{ld}^{l'}] \{ \omega_r \} + \{ \delta \omega_{s'} \} [F_{\Theta}^{s'}] [E^{\Theta}] [F_{\Theta}^{l'}] \{ \omega_r \}. \quad (23)$$



Для построения матрицы жесткости необходимо в выражении (23) перейти от коэффициентов  $\omega_{s'}$  к значениям перемещений  $u_{s'}$  в узлах конечного элемента. Это можно осуществить с помощью матриц преобразования  $[A]$  и  $[B]$ . На основании (14), (17) получим

$$\{\omega_{s'}\} = [B][A]\{u_{s'}\}. \quad (24)$$

С учетом (24) выражение (23) примет вид

$$\begin{aligned} \delta W &= \{\delta u_{s'}\}^T [A]^T [B]^T [F_{ij}^{s'}]^T [E^{ijkl}] [F_{kl}^{r'}] [B][A]\{u_{r'}\} + \\ &+ \{\delta u_{s'}\}^T [A]^T [B]^T [F_{\Theta}^{s'}]^T [E^{\Theta}] [F_{\Theta}^{r'}] [B][A]\{u_{r'}\} = \\ &= \{\delta u_{s'}\} [K^{s'r'}] \{u_{r'}\}, \end{aligned} \quad (25)$$

где  $[K^{s'r'}]$  – матрица жесткости специального элемента, в которой особенности распределения перемещений учитываются на основе выбранного закона аппроксимации (12):

$$\begin{aligned} [K^{s'r'}] &= [A]^T [B]^T [F_{ij}^{s'}]^T [E^{ijkl}] [F_{kl}^{r'}] [B][A] + \\ &+ [A]^T [B]^T [F_{\Theta}^{s'}]^T [E^{\Theta}] [F_{\Theta}^{r'}] [B][A]. \end{aligned} \quad (26)$$

При конечноэлементном моделировании поведения конструкций с трещиной использовались квадратичные КЭ. Вокруг трещины располагаются специальные КЭ.

С помощью специальных элементов решен ряд задач деформирования эластомерных конструкций с трещинами.

**Задача 1. Растяжение плиты с краевой сквозной трещиной.** Размеры плиты:  $a = 1,2$  м,  $b = 0,2$  м,  $h = 0,05$  м. Длина трещины  $L = 0,04$  м. К торцам плиты приложена растягивающая нагрузка  $\sigma_0 = 10^{-1}$  МПа. Упругие константы материала  $E = 0,21$  МПа,  $\nu = 0,499$ .

Были получены решения для элементов сгущения различных размеров. При размерах квадратичных элементов менее чем  $L/30$  наблюдалась устойчивость решения. На рис. 2,а представлены растягивающие напряжения в точках, расположенных на оси симметрии трещины, полученные при линейной и нелинейной постановке задачи.

**Задача 2. Растяжение плиты с центральной поперечной трещиной.** Размеры плиты  $a:b:h = 24:8:1$ . Длина трещины  $2L = b/5$ . Упругие константы материала  $E = 0,21$  МПа,  $\nu = 0,499$ . Предложенная нагрузка  $\sigma_0 = 10^{-1}$  МПа. На рис. 2,б показано распределение растягивающих напряжений в окрестности фронта трещины.

**Задача 3. Растяжение плиты с симметричными краевыми трещинами.** Размеры плиты  $a:b:h = 24:8:1$ . Длина одной трещины  $L = b/10$ . Приложенная нагрузка  $\sigma_0$ . Результаты представлены на рис. 4. Распределение напряжений в этом случае иллюстрирует рис. 2,в.

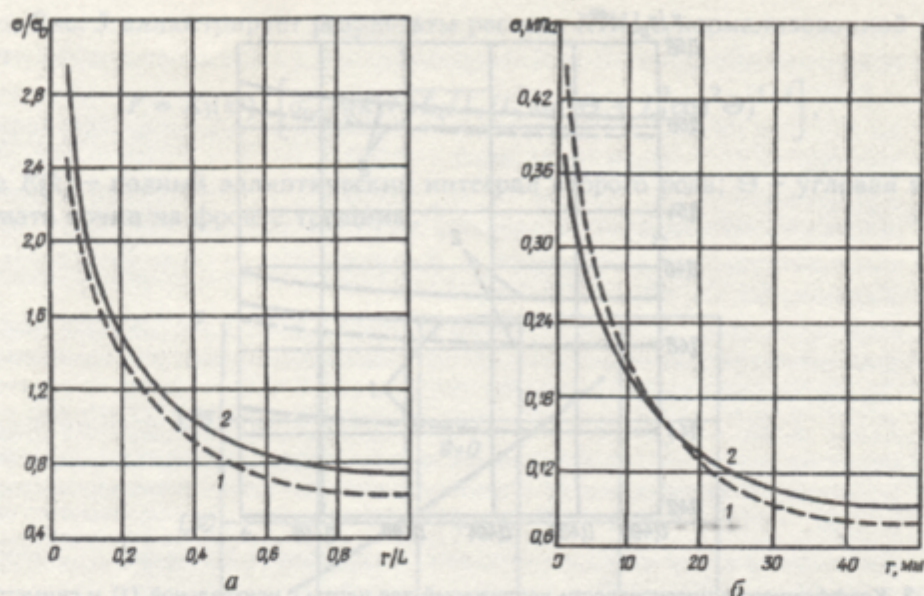


Рис. 2. Распределение напряжений в плите с краевой (а), центральной (б) и симметричными (в) трещинами: 1 – линейная задача; 2 – нелинейная задача.

Каждая из рассмотренных задач была решена при различных нагрузках. Диапазон варьирования удлинений плиты составлял  $10 \pm 40\%$ . Результаты приведены для максимальных нагрузок.

Анализ полученных данных свидетельствует, что характер распределения напряжений в окрестности вершины трещины (при  $r < L/2$ ) для линейного и нелинейного решения совпадает. Таким образом, описать особенность распределения напряжений и перемещений в окрестности вершины трещины можно, как и в линейном случае, с помощью коэффициентов интенсивности напряжений (КИН). Для определения указанных коэффициентов воспользуемся методикой усреднения КИН по прилегающей к вершине трещины области, предложенной авторами работы [5]. Область усреднения имеет размер примерно  $3L/10$ . Для повышения точности вычисления усредненных КИН по напряжениям исключаются значения, полученные в элементах, непосредственно расположенных перед фронтом трещины. Результаты расчетов КИН для эластомеров с различным значением коэффициента Пуассона приведены на рис. 3.

**Задача 4. Растяжение бруса с поверхностной полуэллиптической трещиной.** Размеры бруса  $a:b:t = 16:8:1$ . Размеры трещины  $L_1, L_2$ . На торцах бруса приложена растягивающая нагрузка  $\sigma_0$ . Модуль Юнга  $E = 0,21$ , коэффициент Пуассона  $\nu = 0,49$ . Рассмотрено четыре трещины, отличающиеся геометрией:  $L_2/L_1 = 0,5, L_2/t = 0,15; 0,2; 0,4; 0,6$ .

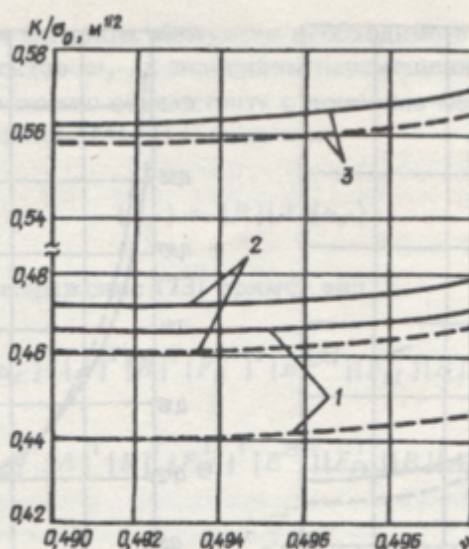


Рис. 3. Коэффициенты интенсивности напряжений для плиты с центральной (1) и симметричными (2) трещинами, а также для плиты с одной краевой трещиной (3). (Сплошные линии – решение получено с использованием квадратных КЭ, штриховые – с помощью линейных КЭ.)

На рис. 4 показано распределение растягивающих напряжений вдоль поверхности бруса ( $\Theta = 0$ ) и оси симметрии трещины, проходящей через самую глубокую точку фронта трещины ( $\Theta = 90^\circ$ ). Коэффициенты интенсивности напряжений для участков фронта трещины определены по перемещениям и напряжениям в соответствующем перпендикулярном слое конечных элементов.

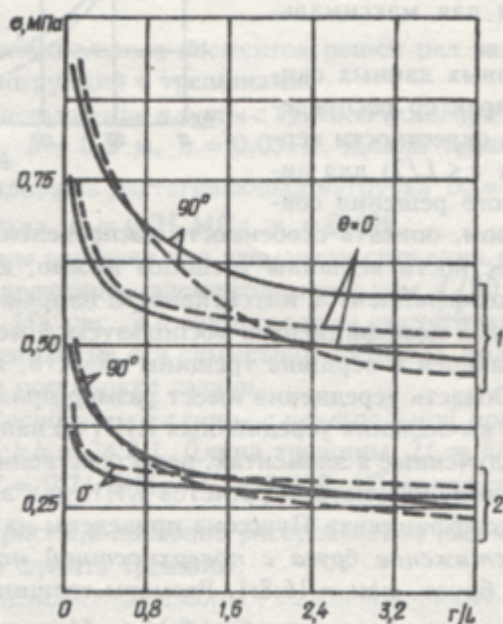


Рис. 4. Распределение напряжений в брус с поверхностной трещиной при его удлинении на 30 (1) и 10% (2). (Штриховые линии – линейная задача, сплошные – нелинейная задача.)

Рис. 5 иллюстрирует результаты расчета КИН в нормализованной форме:

$$F = K_I(\Theta) / \left[ \sigma_0 / E(k) \sqrt{\pi L_2 / L_1} (L_1^2 \sin^2 \Theta + L_2^2 \cos^2 \Theta)^{1/4} \right],$$

где  $E(k)$  – полный эллиптический интеграл второго рода;  $\Theta$  – угловая координата точки на фронте трещины.

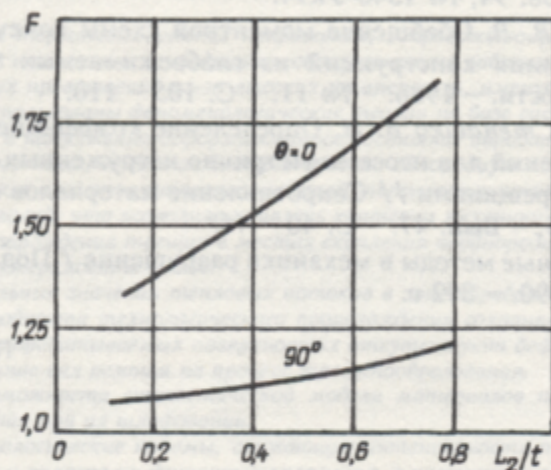


Рис. 5. Коэффициенты интенсивности напряжений на поверхности эластомера и в самой глубокой точке полуэллиптической трещины.

С помощью описанной методики были рассчитаны КИН для бруса с поверхностной полуэллиптической трещиной при коэффициенте Пуассона  $\nu = 0,3$ . Полученные результаты хорошо согласуются с данными работы [6].

## Резюме

Для моделювання сингулярних полів напружень та деформацій в еластомерах з тріщинами використовується просторовий квадратичний кінцевий елемент зі зміщеними проміжними вузлами в бік фронту тріщини, в якому враховано слабку стисливість матеріалу. Побудовано функції форми, що відображають особливості розподілення переміщень порядку  $\sqrt{r}$ . Оскільки в області вершини тріщини еластомер зазнає великих деформацій, розрахунок конструкції проведено за нелінійним алгоритмом, що базується на модифікованому методі Ньютона–Канторовича. Наведено результати розрахунків напружено-деформованого стану прямокутних плит із наскрізними та поверхневими напівеліптичними тріщинами при деформаціях подовження до 40%. Одержані розв'язки добре погоджуються з даними інших авторів. Характер розподілення нелінійних напружень дозволяє зробити висновок про те, що в розглянутому діапазоні навантажень можна використовувати коефіцієнти інтенсивності напружень для розв'язку задач механіки руйнування еластомерів.

1. *Geubelle P. H., Knauss W. G.* Finite strains at the tip of crack in a sheet of hyperelastic material: 1. Homogeneous case // *Elasticity*. – 1994. – 35. – P. 61 – 98.
2. *Le K. C.* On the singular elastostatic field induced by a crack in a Hadamard material // *Q. J. Mech. Appl. Math.* – 1992. – 45, 1. – P. 101 – 117.
3. *Киричевский В. В., Дохняк Б. М., Козуб Ю. Г.* Построение матрицы жесткости специального конечного элемента для решения задач механики разрушения эластомеров. – Луганск, 1994. – 34 с. Деп. в ГНТБ Украины 05. 08. 94, № 1540-Ук94.
4. *Киричевский В. В.* Обобщение моментной схемы конечных элементов для исследования конструкций из слабосжимаемых эластомеров // *Пробл. прочности*. – 1986. – № 11. – С. 105 – 110.
5. *Гуляр А. И., Степашко В. И.* Определение коэффициентов интенсивности напряжений для неосесимметрично нагруженных тел вращения с кольцевыми трещинами // *Сопротивление материалов и теория сооружений*. – 1985. – Вып. 47. – С. 40 – 44.
6. *Вычислительные методы в механике разрушения* / Под ред. С. Атлури. – М.: Мир, 1990. – 392 с.

Поступила 18. 04. 97