Л. В. ЖОВТАН

ИЗБРАННЫЕ ГЛАВЫ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ

ЧАСТЬ 1
УРАВНЕНИЯ

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
ЛУГАНСКОЙ НАРОДНОЙ РЕСПУБЛИКИ

ГОУ ВПО ЛНР «ЛУГАНСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ ТАРАСА ШЕВЧЕНКО»

Л. В. ЖОВТАН

ИЗБРАННЫЕ ГЛАВЫ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ

Часть 1

УРАВНЕНИЯ

Учебно-методическое пособие
для студентов очной и заочной форм обучения
по направлениям подготовки
01.03.01 «Математика»,
44.03.05 «Педагогическое образование (с двумя профилями). Профили:
математика и информатика»

Луганск
2017

УДК 372.851(076)

ББК 74.262.21р3
Ж 78

Рецензенты:

Горбенко Е.Е. – доцент кафедры физики и нанотехнологий, кандидат физико-математических наук, ГОУ ВПО ЛНР «Луганский национальный университет имени Тараса Шевченко»;

Онопченко С.В. – доцент кафедры информационных технологий и систем, кандидат педагогических наук, доцент, ГОУ ВПО ЛНР «Луганский национальный университет имени Тараса Шевченко»;

Филиппова Т.В. – заместитель директора по учебной работе, учитель математики высшей категории, учитель-методист, ГОУ ЛНР «Луганская специализированная школа I–III ступеней № 1 имени профессора Л.М. Лоповка».

Жовтан Л.В.

Ж 78 Избранные главы элементарной математики. Часть 1. Уравнения: Учебно-методическое пособие для студентов очной и заочной форм обучения направлений подготовки 01.03.01 «Математика», 44.03.05 «Педагогическое образование (с двумя профилями). Профили: математика и информатика» / Л.В. Жовтан; ГОУ ВПО ЛНР «Луганский национальный университет имени Тараса Шевченко». – Луганск : «Книта», 2017. – 84 с.

Учебное пособие предназначено для оказания помощи студентам при подготовке к практическим и контрольным работам по курсам «Элементарная математика» и «Школьный курс математики». Содержит основные методы решения уравнений различных типов (рациональных, иррациональных, показательных, показательно-степенных, логарифмических). Каждый метод иллюстрируется значительным количеством примеров с подробным решением каждого из них. Кроме того, приведены примеры уравнений для самостоятельного решения.

Пособие адресовано студентам очной и заочной форм обучения по направлениям подготовки 01.03.01 «Математика», 44.03.05 «Педагогическое образование (с двумя профилями). Профили: математика и информатика», а также может быть рекомендовано учащимся старших классов и учителям математики.

УДК 372.851(076)
ББК 74.262.21р3

Рекомендовано Учебно-методическим советом Луганского национального университета имени Тараса Шевченко в качестве учебно-методического пособия для студентов, обучающихся по направлениям подготовки 01.03.01 «Математика», 44.03.05 «Педагогическое образование (с двумя профилями). Профили: математика и информатика» (протокол № 7 от 22 марта 2017 года)

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Материал, связанный с уравнениями, составляет значительную часть школьного курса математики. Это объясняется тем, что уравнения широко используются в различных разделах математики, при решении важных прикладных задач.

Уравнение как общематематическое понятие является многоаспектным, причем ни один из аспектов нельзя исключить из рассмотрения, особенно если речь идет о проблемах школьного математического образования.

Ввиду важности и обширности материала, связанного с понятием уравнения, его изучение в современной методике преподавания математики организовано в содержательно-методическую линию – линию уравнений. Здесь рассматриваются вопросы формирования понятия уравнения, методов решения уравнений, взаимосвязи изучения уравнений с числовой, функциональной и другими линиями школьного курса математики.

В данном пособии изложены методы решения рациональных, иррациональных, показательных, показательно-степенных и логарифмических уравнений. Цель пособия – в рамках решения задачи подготовки методически грамотного учителя, реализуемой уже на вузовском уровне, помочь студентам в систематизации своих знаний по решению уравнений курса средней школы, а также ознакомить их с некоторыми методами решения уравнений, которым в школе по определенным причинам не уделяется достаточно внимания.

Попыткой достичь этой цели и определяется структура данного пособия: в начале каждого пункта кратко изложен теоретический материал, знание которого является необходимым для решения соответствующих уравнений. Это позволяет использовать пособие, не прибегая к учебникам. Далее определяется метод решения уравнений и разбираются конкретные примеры на применение данного метода. После этого приведены уравнения для самостоятельного решения.

Такая форма изложения, по нашему мнению, является наиболее удобной для активного усвоения методов решения уравнений. Мы попробовали расположить уравнения для самостоятельного решения по возрастанию их сложности, осознавая при этом, что каждый студент, в зависимости от своих знаний и склонностей, возможно, изменил бы порядок уравнений.

Пособие в основном предназначено для студентов очного и заочного отделений, обучающихся по специальности «Математика», при изучении курсов «Элементарная математика и методика преподавания математики» и «Школьный курс математики и методика преподавания математики», а также будет полезен учащимся старших классов и учителям математики.

ОСНОВНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ РАЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Уравнение $f(x) = g(x)$, в котором $f(x)$ и $g(x)$ – некоторые функции относительно аргумента x, рассматриваемые в общей части их областей определения, называется ***уравнением с одним неизвестным x***.

Значения неизвестных, принадлежащие области допустимых значений уравнения и удовлетворяющие ему (т.е. обращающие его в верное равенство), называются ***корнями уравнения***.

Решить уравнение – значит найти все его корни или доказать их отсутствие.

Методы решения уравнений базируются на понятии равносильности (эквивалентности).

Если все корни уравнения $f(x) = g(x)$ являются одновременно корнями уравнения $f_1(x) = g_1(x)$, то второе уравнение называется ***следствием*** первого.

Два уравнения называются ***равносильными*** (***эквивалентными***), если множества их корней совпадают.

В процессе решения уравнение при помощи различных преобразований заменяют более простым, равносильным ему уравнением. Если это не удается, то возможны следующие случаи:

1. При переходе к новому уравнению может произойти потеря корней.
2. Новое уравнение может содержать корни, не являющиеся корнями исходного уравнения (посторонние корни). Посторонние корни можно выявить проверкой (подстановкой всех корней нового уравнения в исходное).

1. ЦЕЛЫЕ РАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Разложение на множители

***Пример* 1.** Решить уравнение

$$8x^4 + 6x^3 - 13x^2 - x + 3 = 0.$$

Решение. Делителями числа 3 будут числа ± 1, ± 3, а делителями числа 8 – числа ± 1, ± 2, ± 4, ± 8. Следовательно, возможные рациональные корни уравнения находятся среди чисел ± 1, ± 3, $\pm 1/2$, $\pm 1/4$, $\pm 1/8$, $\pm 3/2$, $\pm 3/4$, $\pm 3/8$. Подставив эти числа в уравнение, найдем один из его корней: $x_1 = -1/2$. Разделив на $x + 1/2$ многочлен, содержащийся в левой части уравнения, и получив при этом (например, при помощи схемы Горнера) многочлен 3-й степени, найдем еще один корень уравнения: $x_2 = 3/4$. Выполнив описанную выше процедуру для полученного многочлена, перейдем к многочлену второй степени $8x^2 + 8x - 8$. Решив соответствующее квадратное уравнение, найдем корни данного многочлена, а, значит, еще два корня исходного уравнения: $x_3 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$, $x_4 = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$.

Ответ: $x_1 = -\dfrac{1}{2}$, $x_2 = \dfrac{3}{4}$, $x_3 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$, $x_4 = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$.

Задания для самостоятельного решения:

- $x^3 - 8x^2 + 13x - 6 = 0$;
- $x^3 - 7x^2 + 16x - 12 = 0$;
- $10x^3 - 3x^2 - 2x + 1 = 0$;
- $5x^3 - 6x^2 + 11x - 2 = 0$;
- $x^4 + x^3 - x^2 - 7x - 6 = 0$;
- $x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 8x + 4 = 0$;
- $x^5 - x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 2x = 0$;
- $x^5 - 2x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 5x + 6 = 0$

Замена переменной

Пример 2. Решить уравнение

$$(x^2 + 2x)^2 - (x+1)^2 = 55.$$

Решение. Введем замену:

$$t=(x+1)^2,\ t\geq 0 \qquad (*),$$

откуда $\qquad t=x^2+2x+1 \Rightarrow x^2+2x=t-1$.

Тогда исходное уравнение запишем в виде:

$$(t-1)^2-t=55.$$

Его корни: $t_1=-6$, $t_2=9$. Значение t_1 не удовлетворяет условию (*). Вернувшись к прежней переменной, получим уравнение

$$(x+1)^2=9,$$

равносильное совокупности уравнений

$$\left[\begin{array}{l} x+1=3, \\ x+1=-3. \end{array}\right.$$

Решив ее, найдем корни исходного уравнения $x_1=2,\ x_2=-4$.

Ответ: $x_1=2,\ x_2=-4$.

Задания для самостоятельного решения:

- $(x^2+2x)^2-11(x+1)^2+35=0$;
- $(x^2+x+1)(x^2+x+2)-12=0$;
- $(x^2+x+1)(2x^2+2x+3)=3\cdot(1-x-x^2)$;
- $(2x^2+3x-2)(5-6x-4x^2)=-5\cdot(2x^2+3x+2)$;
- $(x^2-5x+7)^2-(x-2)(x-3)=1$.

Уравнения специального вида

Возвратные уравнения

Алгебраическое уравнение вида

$$ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0 \quad (e\neq 0)$$

называется ***возвратным уравнением четвертой степени***, если его коэффициенты связаны следующим соотношением:

$$\frac{a}{e}=\left(\frac{b}{d}\right)^2.$$

Решение данного уравнения может быть сведено соответствующей заменой к решению квадратного уравнения.

<u>Пример 3.</u> Решить уравнение

$$18x^4-3x^3-25x^2+2x+8=0 .$$

Решение. Поскольку $(18/8)=(-3/2)^2$, уравнение является возвратным. Так как $x=0$ не является его корнем, разделим обе части уравнения на x^2:

$$18x^2-3x-25+\frac{2}{x}+\frac{8}{x^2}=0 .$$

Сгруппируем слагаемые в правой части уравнения:

$$2\left(9x^2+\frac{4}{x^2}\right)-\left(3x-\frac{2}{x}\right)-25=0. \qquad (*)$$

Введем обозначение:

$$t=3x-\frac{2}{x} .$$

Возведем обе части замены в квадрат:

$$t^2=9x^2+\frac{4}{x^2}-12 \qquad \Rightarrow \qquad 9x^2+\frac{4}{x^2}=t^2+12 .$$

Тогда уравнение (*) примет вид:

$$2t^2-t-1=0 .$$

Его корни – числа 1 и $-1/2$. Таким образом, исходное уравнение эквивалентно совокупности уравнений

$$\left[\begin{array}{l} 3x-\dfrac{2}{x}=1, \\ 3x-\dfrac{2}{x}=-\dfrac{1}{2} \end{array}\right. ,$$

корни которой $x_1=1,\ x_2=-\dfrac{2}{3},\ x_{3,\ 4}=\dfrac{-1\pm\sqrt{97}}{12}$ являются корнями исходного уравнения.

Ответ: $x_1=1,\ x_2=-\dfrac{2}{3},\ x_{3,\ 4}=\dfrac{-1\pm\sqrt{97}}{12}$.

Задания для самостоятельного решения:

- $2x^4+3x^3-13x^2-6x+8=0$;
- $x^4+x^3+4x^2+5x+25=0$;
- $x^4+2x^3-7x^2-4x+4=0$;
- $9x^4-6x^3-7x^2-4x+4=0$;
- $x^4-2x^3-18x^2-6x+9=0$

Возвратным уравнением шестой степени называется уравнение вида

$$ax^6+bx^5+cx^4+dx^3+ex^2+fx+k=0,$$

в котором выполняется следующее соотношение между коэффициентами:

$$\left(\frac{a}{k}\right)^2=\left(\frac{b}{f}\right)^3=\left(\frac{c}{e}\right)^6$$

Решение данного уравнения может быть сведено соответствующей заменой к решению кубического уравнения.

***<u>Пример</u>* <u>4.</u>** Решить уравнение

$$x^6-x^5+x^4-7x^3+2x^2-4x+8=0.$$

Решение. Проверкой

$$(\ 1/8\ )^2=(\ -1/-4)^3=(1/2\ )^6.$$

убеждаемся, что уравнение является возвратным. Так как $x=0$ не является его корнем, разделим обе части уравнения на x^3:

$$x^3-x^2+x-7+\frac{2}{x}-\frac{4}{x^2}+\frac{8}{x^3}=0.$$

Сгруппируем слагаемые:

$$\left(x^3+\frac{8}{x^3}\right)-\left(x^2+\frac{4}{x^2}\right)+\left(x+\frac{2}{x}\right)-7=0. \qquad (*)$$

Введем замену:

$$t=x+\frac{2}{x}.$$

Возведем обе ее части в квадрат и куб:

$$t^2 = x^2 + \frac{4}{x^2} + 4, \qquad t^3 = x^3 + \frac{8}{x^3} + 6t,$$

откуда $$x^2 + \frac{4}{x^2} = t^2 - 4, \qquad x^3 + \frac{8}{x^3} = t^3 - 6t.$$

Тогда уравнение (*) примет вид:

$$t^3 - t^2 - 5t - 3 = 0,$$

корни которого: $t_{1,\,2} = -1$, $t_3 = 3$. Таким образом, исходное уравнение эквивалентно совокупности уравнений

$$\left[\begin{aligned} x + \frac{2}{x} &= -1, \\ x + \frac{2}{x} &= 3 \end{aligned}\right. .$$

Корни ее $x_1 = 1,\ x_2 = 2$ являются корнями исходного уравнения.

Ответ: $x_1 = 1,\ x_2 = 2$.

Задания для самостоятельного решения:

- $8x^6 - 16x^5 + 2x^4 + 12x^3 + 3x^2 - 36x + 27 = 0$;
- $x^6 + x^5 + x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 4x + 8 = 0$

Симметричные уравнения

Частным случаем возвратных уравнений являются ***симметричные*** уравнения:

$$ax^3 + bx^2 + bx + a = 0,\ a \neq 0 \text{ (3-й степени)},$$

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0,\ a \neq 0 \text{ (4-й степени) и т.п.}$$

Решение симметричного уравнения может быть сведено к решению:

– совокупности уравнений методом группировки (для уравнений 3-й степени);

– квадратного уравнения заменой $t = x + \dfrac{1}{x}$ (для уравнений 4-й степени).

Рассмотрим решение симметричных уравнений отдельно для случая уравнений 3-й и 4-й степени.

<u>Пример 5.</u> Решить уравнение

$$3x^3+8x^2+8x+3=0\,.$$

Решение. Сгруппируем слагаемые:

$$3(x^3+1)+8x(x+1)=0\,.$$

Выполнив некоторые преобразования:

$$3(x+1)(x^2-x+1)+8x(x+1)=0\,,$$

перейдем к эквивалентной совокупности уравнений:

$$\left[\begin{array}{l} x+1=0, \\ 3x^2+5x+3=0. \end{array}\right.$$

Второе из уравнений не имеет действительных корней, поэтому решением совокупности, а значит, и исходного уравнения, будет корень первого уравнения $x=-1$.

Ответ: $x=-1$.

Задания для самостоятельного решения:

- $4x^3+7x^2+7x+4=0$;
- $2x^3-9x^2-9x+2=0$;
- $3x^3+4x^2+4x+3=0$

<u>Пример 6.</u> Решить уравнение

$$x^4+5x^3+2x^2+5x+1=0\,.$$

Решение. Так как $x=0$ не является корнем уравнения, разделим обе части уравнения на x^2:

$$x^2+5x+2+\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}=0\,.$$

Сгруппируем слагаемые:

$$\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+5\left(x+\frac{1}{x}\right)+2=0. \qquad (*)$$

Выполним замену:

$$t=x+\frac{1}{x}\,.$$

Возведем обе ее части в квадрат:

$$t^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 \qquad \Rightarrow \qquad x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2 .$$

Тогда уравнение (*) примет вид:

$$t^2 + 5t = 0 .$$

Корни полученного уравнения: $t_1 = 0$; $t_2 = -5$. Тогда исходное уравнение эквивалентно совокупности уравнений

$$\left[\begin{array}{l} x + \dfrac{1}{x} = 0, \\ x + \dfrac{1}{x} = -5, \end{array}\right.$$

корни которой $x_{1,\,2} = \dfrac{-5 \pm \sqrt{21}}{2}$ являются корнями исходного уравнения.

Ответ: $x_{1,\,2} = \dfrac{-5 \pm \sqrt{21}}{2}$.

Задания для самостоятельного решения:

- $x^4 - 2x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0$;
- $x^4 + 5x^3 + 2x^2 + 5x + 1 = 0$;
- $6x^4 - 13x^3 + 12x^2 - 13x + 6 = 0$;
- $2x^4 - 5x^3 - 3x^2 - 5x + 2 = 0$;
- $2x^4 + x^3 - 6x^2 + x + 2 = 0$

Кососимметричные уравнения (возвратные уравнения второго рода)

Кососиметричными уравнениями 4-й степени называются уравнения вида

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 - bx + a = 0, \; a \neq 0 .$$

Решение уравнений данного типа аналогично решению симметричных уравнений.

Задания для самостоятельного решения:

- $6x^4 - 13x^3 + 12x^2 + 13x + 6 = 0$;

- $x^4+4x^3-7x^2-4x+1=0$;
- $x^4+x^3+2x^2-x+1=0$

ВЫВОДЫ:

1) если исходное возвратное уравнение имеет четную степень, то делим его на $x^{n/2}$, где n – степень уравнения, затем готовим введение вспомогательного неизвестного, сгруппировав члены, равноудаленные от начала и конца левой части уравнения.

2) если исходное возвратное уравнение имеет нечетную степень, то оно всегда имеет корень $x=-1$, причем частное от деления левой части уравнения на $x+1$ представляет собой возвратный многочлен четной степени.

Задания для самостоятельного решения:

- $12x^5+8x^4-45x^3-45x^2+8x+12=0$;
- $15x^5+34x^4+15x^3-15x^2-34x-15=0$

Однородные уравнения

Уравнение вида

$$a_1u^n+a_2u^{n-1}v+a_3u^{n-2}v^2+\ldots+a_nv^n=0$$

называется ***однородным*** уравнением n-й степени относительно неизвестных u и v.

Деление обеих частей данного уравнения на v^n $\left(u^n\right)$ приводит его к уравнению n-й степени относительно неизвестной $t=\dfrac{u}{v}$ или $t=\dfrac{v}{u}$.

Пример 7. Решить уравнение

$$(x^2-1)^2+5(x^4-1)-6(x^2+1)^2=0.$$

Решение. Преобразуем левую часть:

$$(x^2-1)^2+5(x^2-1)(x^2+1)-6(x^2+1)^2=0.$$

Обозначим

$$x^2-1=u, \qquad x^2+1=v.$$

Тогда уравнение примет вид:

$$u^2+5uv-6v^2=0 .$$

Разделим обе части уравнения на v^2:

$$\left(\frac{u}{v}\right)^2+5\frac{u}{v}-6=0 .$$

Выполнив замену

$$t=\frac{u}{v},$$

получим квадратное уравнение

$$t^2+5t-6=0 ,$$

корни которого $t_1=1$, $t_2=-6$. Вернемся к исходным неизвестным. Получим эквивалентную совокупность уравнений

$$\left[\begin{array}{l}\frac{u}{v}=1,\\ \frac{u}{v}=-6\end{array}\right., \qquad \Rightarrow \qquad \left[\begin{array}{l}u=v,\\ u=-6v\end{array}\right., \qquad \Rightarrow \qquad \left[\begin{array}{l}x^2-1=x^2+1,\\ x^2-1=-6(x^2+1)\end{array}\right.,$$

не имеющую действительных корней.

Ответ: уравнение не имеет действительных корней.

Задания для самостоятельного решения:

- $(2x-1)^2+(2x-1)(x+2)-2(x+2)^2=0$;
- $(x-2)^2-6(x^2-4)+5(x+2)^2=0$;
- $(x^2+x+1)^2+8x(x^2+x+4)+15x^2=0$;
- $(2x^2-x+1)^2+x^2(2x^2-x+1)-6x^4=0$;
- $(x-2)^2(x+1)^2-(x-2)(x^2-1)-2(x-1)^2=0$;
- $2(x^2+x+1)^2-7(x-1)^2=13(x^3-1)$;
- $(x+5)^4=13(x+5)^2x^2-36x^4$;
- $20\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^2-5\left(\frac{x+2}{x-1}\right)^2+48\frac{x^2-4}{x^2-1}=0$

Уравнения вида
$(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)=m$, где $a+b=c+d=k$

Уравнение данного вида сводится к квадратному уравнению относительно неизвестной $t=x^2+kx$.

Пример 8. Решить уравнение

$$(x-1)(x+1)(x+2)x=24.$$

Решение. Перемножим попарно множители в левой части так, чтобы суммы чисел в каждой паре были равны, а именно: $(x-1)(x+2)$ и $(x+1)x$. Получим:

$$(x^2+x-2)(x^2+x)=24.$$

Обозначим

$$t=x^2+x.$$

Тогда уравнение примет вид:

$$(t-2)t=24 \qquad \Rightarrow \qquad t^2-2t-24=0.$$

Корни данного квадратного уравнения: $t_1=6$, $t_2=-4$. Возвращаясь к исходной неизвестной, делаем вывод, что исходное уравнение эквивалентно совокупности уравнений

$$\left[\begin{array}{l} x^2+x=6, \\ x^2+x=-4 \end{array}\right..$$

Решив ее, найдем корни исходного уравнения: $x_1=-3,\ x_2=2$.

Ответ: $x_1=-3,\ x_2=2$.

Задания для самостоятельного решения:

- $x(x-1)(x-2)(x-3)=15$;
- $(x-1)x(x+1)(x+2)=24$;
- $(x-4)(x-5)(x-6)(x-7)=1680$;
- $(x-1)(x+1)(x+2)x=24$;
- $(x-4)(x+2)(x+8)(x+14)=304$

Уравнения вида $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$, где $a+b=b+c+d=d+e$

Левая часть уравнения данного вида раскладывается на множители, один из которых x^2-x+1, а второй находится делением левой части уравнения на x^2-x+1.

<u>Пример 9.</u> Решить уравнение

$$x^4+2x^3+3x^2-2x+5=0.$$

Решение. Проверим, относится ли уравнение к рассматриваемому типу:

$$1+2=2+3-2=-2+5.$$

Равенство выполняется, следовательно, левая часть уравнения делится без остатка на трехчлен x^2-x+1. Выполним деление:

$$(x^2-x+1)(x^2+3x+5)=0.$$

Полученное уравнение, в свою очередь, эквивалентно соответствующей совокупности уравнений. Решая ее, приходим к выводу, что она, а, следовательно, и исходное уравнение, не имеют действительных корней.

Ответ: уравнение не имеет действительных корней.

Задания для самостоятельного решения:

- $x^4+3x^3+2x^2-x+5=0$;
- $x^4+x^3+2x^2-x+3=0$

Уравнения вида $(x+a)^4+(x+b)^4=m$

Это уравнение сводится к биквадратному уравнению заменой

$$t=\frac{x+a+x+b}{2}=x+\frac{a+b}{2}.$$

<u>Пример 10.</u> Решить уравнение

$$(x-3)^4+(x-5)^4=2.$$

Решение. Выполнив замену

$$t=\frac{x-3+x-5}{2}=x-4 \Rightarrow x=t+4,$$

получим уравнение

$$(t+1)^4+(t-1)^4=2$$

Раскроя скобки, придем к уравнению

$$t^4+6t^2=0.$$

Данное уравнение имеет один действительный корень $t=0$, откуда $x=4$ – корень исходного уравнения.

Ответ: $x=4$.

Задания для самостоятельного решения:

- $(x-3)^4+(x-1)^4=82$;
- $x^4+(x-1)^4=97$

2. ДРОБНО-РАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Дробно-рациональными уравнениями называются уравнения вида

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=0 \quad (*),$$

где $P(x)$ и $Q(x)$ – многочлены.

Область допустимых значений уравнения (*) задается условием

$$Q(x)\neq 0.$$

Таким образом, для решения уравнения (*) необходимо решить уравнение $P(x)=0$ и из множества его решений отобрать те из них, которые входят в область допустимых значений уравнения (*). Они и будут корнями исходного уравнения.

Пример 11. Решить уравнение

$$\frac{3}{x^2-9}-\frac{1}{x^2-6x+9}=\frac{3}{2x^2+6x}$$

Решение. Преобразуем левую часть уравнения: разложим на множители квадратные трехчлены в знаменателях:

$$\frac{3}{(x-3)(x+3)}-\frac{1}{(x-3)^2}=\frac{3}{2x(x+3)}.$$

Область допустимых значений уравнения: $x \in R \setminus \{\pm 3; 0\}$. Домножим обе части уравнения на общий знаменатель $2x(x-3)^2(x+3)$:

$$6x(x-3)-2x(x+3)=3(x-3)^2, \qquad x^2-6x-27=0.$$

Корни данного уравнения: $x_1=-3;\ x_2=9$. Так как x_1 не входит в область допустимых значений исходного уравнения, то оно имеет единственный корень $x=9$.

Ответ: $x=9$.

Задания для самостоятельного решения:

- $\frac{12x+1}{6x-2}-\frac{9x-5}{3x+1}=\frac{108x-36x^2-9}{4\cdot(9x^2-1)}$;
- $\frac{x^2}{x^2-4}+\frac{x+1}{2(x-2)}=\frac{1}{2-x}-\frac{1}{x+2}$;
- $\frac{1}{2x+3}-\frac{1}{x^2-16}+\frac{1}{2x^2+11x+12}-\frac{x-8}{2x^3+3x^2-32x-48}=0$;
- $\frac{1}{x^2-2x+2}+\frac{2}{x^2-2x+3}=\frac{6}{x^2-2x+4}$;
- $\frac{21}{x^2-4x+10}-x^2+4x=6$;
- $\frac{(x^2-6x)^2}{(x-3)^2}-2=\frac{81}{(x-3)^2}$;
- $\frac{24}{x^2+2x-8}-\frac{15}{x^2+2x-3}=2$;
- $\frac{x^2+2x+1}{x^2+2x+2}+\frac{x^2+2x+2}{x^2+2x+3}=\frac{7}{6}$

Уравнения вида $\dfrac{ax}{cx^2+mx+p}+\dfrac{bx}{cx^2+nx+p}=c$, $c\neq 0$

Поскольку $x=0$ не является корнем уравнения, то можно разделить числитель и знаменатель каждой дроби в левой части уравнения на x:

$$\frac{a}{cx+m+\dfrac{p}{x}}+\frac{b}{cx+n+\dfrac{p}{x}}=c .$$

Данное уравнение в результате замены

$$t=cx+\frac{p}{x}$$

сводится к уравнению

$$\frac{a}{t+m}+\frac{b}{t+n}=c .$$

***Пример* 12.** Решить уравнение

$$\frac{3x}{x^2-4x+1}-\frac{2x}{x^2+x+1}=\frac{8}{3} .$$

Решение. Разделим числитель и знаменатель каждой дроби в левой части уравнения на x:

$$\frac{3}{x-4+\dfrac{1}{x}}-\frac{2}{x+1+\dfrac{1}{x}}=\frac{8}{3} .$$

Обозначив

$$t=x+\frac{1}{x},$$

получим уравнение

$$\frac{3}{t-4}-\frac{2}{t+1}=\frac{8}{3},$$

сводящееся к квадратному уравнению

$$8t^2-27t-65=0,$$

корни которого $t_1=5;$ $t_2=-13/8$. Таким образом, исходное уравнение эквивалентно совокупности уравнений

$$\left[\begin{array}{l} x+\dfrac{1}{x}=5, \\ x+\dfrac{1}{x}=-\dfrac{13}{8} \end{array}\right..$$

Второе уравнение не имеет действительных корней, а корни первого – $x_{1,\,2}=\dfrac{5\pm\sqrt{21}}{2}$.

Ответ: $x_{1,\,2}=\dfrac{5\pm\sqrt{21}}{2}$.

Задания для самостоятельного решения:

- $\dfrac{2x}{2x^2-5x+3}+\dfrac{13x}{2x^2+x+3}=6$;
- $\dfrac{x}{x^2-x+1}+\dfrac{2x}{x^2+x+1}=1$;
- $\dfrac{8x}{x^2+3x+4}+\dfrac{9x}{x^2-2x+4}=4$;
- $\dfrac{4x}{x^2+x+4}+\dfrac{5x}{x^2-5x+4}=-\dfrac{3}{2}$;
- $\dfrac{3x}{x^2-x+1}-\dfrac{2x}{x^2+x+1}=1$

Уравнения вида $f(x)+\dfrac{1}{f(x)}=a+\dfrac{1}{a}$ или $f(x)-\dfrac{1}{f(x)}=a-\dfrac{1}{a}$

Данное уравнение сводится к совокупности уравнений $\left[\begin{array}{l} f(x)=a, \\ f(x)=\dfrac{1}{a} \end{array}\right.$ (соответственно $\left[\begin{array}{l} f(x)=a, \\ f(x)=-\dfrac{1}{a} \end{array}\right.$).

***<u>Пример</u>* 13.** Решить уравнение

$$\frac{x^2-x}{x+5}+\frac{x+5}{x^2-x}=\frac{13}{6}.$$

Решение. Левая часть уравнения представляет собой сумму двух взаимно обратных выражений, правую часть можно представить в виде суммы двух взаимно обратных чисел $2/3+3/2$, т.е.

$$\frac{x^2-x}{x+5}+\frac{x+5}{x^2-x}=\frac{2}{3}+\frac{3}{2}.$$

Тогда получим совокупность уравнений:

$$\left[\begin{array}{l}\dfrac{x^2-x}{x+5}=\dfrac{2}{3},\\[2mm] \dfrac{x^2-x}{x+5}=\dfrac{3}{2}\end{array}\right..$$

Решив ее, найдем корни исходного уравнения: $x_{1,\,2}=\dfrac{5\pm\sqrt{145}}{6}$, $x_{3,\,4}=\dfrac{5\pm\sqrt{145}}{4}$.

Ответ: $x_{1,\,2}=\dfrac{5\pm\sqrt{145}}{6}$, $x_{3,\,4}=\dfrac{5\pm\sqrt{145}}{4}$.

Задания для самостоятельного решения:

- $\dfrac{x^2+1}{x}+\dfrac{x}{x^2+1}=2{,}9$;
- $\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^2+\left(\dfrac{x+1}{x}\right)^2=\dfrac{17}{4}$

Дополнение до полного квадрата

<u>Пример</u> **<u>14.</u>** Решить уравнение

$$x^2+\frac{9x^2}{(x+3)^2}=7.$$

Решение. Дополним левую часть уравнения до квадрата разности, прибавив к обеим частям выражение $-\dfrac{6x^2}{x+3}$:

$$x^2-\frac{6x^2}{x+3}+\frac{9x^2}{(x+3)^2}=7-\frac{6x^2}{x+3}.$$

Так как

$$x^2-\frac{6x^2}{x+3}+\frac{9x^2}{(x+3)^2}=x^2-2\cdot x\cdot\frac{3x}{x+3}+\left(\frac{3x}{x+3}\right)^2,$$

т.е. левая часть уравнения является квадратом разности, получим:

$$\left(x-\frac{3x}{x+3}\right)^2=7-\frac{6x^2}{x+3},$$

откуда
$$\left(\frac{x^2}{x+3}\right)^2=7-\frac{6x^2}{x+3}.$$

Выполнив подстановку:

$$m=\frac{x^2}{x+3},$$

придем к квадратному уравнению

$$m^2=7-6m,$$

корни которого: $m_1=-7,\ \ m_2=1$. Вернувшись к замене, получим совокупность уравнений:

$$\left[\begin{array}{l}\dfrac{x^2}{x+3}=-7,\\[2mm] \dfrac{x^2}{x+3}=1.\end{array}\right.$$

Решив ее, найдем корни исходного уравнения: $x_{1,\,2}=\dfrac{1\pm\sqrt{13}}{2}$.

Ответ: $x_{1,\,2}=\dfrac{1\pm\sqrt{13}}{2}$.

Задания для самостоятельного решения:

- $x^2+\dfrac{x^2}{(1+x)^2}=3$;
- $x^2+\dfrac{81x^2}{(9+x)^2}=40$;
- $\left(\dfrac{x}{x-1}\right)^2+\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^2=\dfrac{10}{9}$;

- $x^2+\left(\dfrac{4x}{x+4}\right)^2=9$;
- $\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^2+\left(\dfrac{x}{x-1}\right)^2=\dfrac{45}{16}$

3. ОСНОВНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ, СОДЕРЖАЩИХ ПЕРЕМЕННУЮ ПОД ЗНАКОМ МОДУЛЯ

При решении уравнений, содержащих переменную под знаком модуля, наиболее часто используются следующие методы:

1) раскрытие модуля по определению;
2) раскрытие модуля, используя его геометрическую интерпретацию;
3) возведение обеих частей уравнения в квадрат;
4) разбиение на промежутки (метод интервалов).

Первый и последний из предлагаемых методов – универсальные, т.е. пригодны для решения любого уравнения, содержащего переменную под знаком модуля. Однако первый метод наиболее эффективен для уравнений, содержащих один модуль, а последний – для уравнений, содержащих более одного модуля.

Раскрытие модуля по определению

По определению, ***модуль*** (***абсолютная величина***) неотрицательного действительного числа равен этому числу, модуль отрицательного действительного числа равен противоположному ему числу:

$$|\,f(x)\,|=\begin{cases} f(x), \text{ если } f(x)\geq 0, \\ -f(x), \text{ если } f(x)<0 \end{cases}.$$

Таким образом, раскрывая по данному определению каждый из модулей, содержащихся в уравнении, от уравнения переходим к совокупности смешанных систем, состоящих из неравенства и уравнения.

Этот метод наиболее эффективен для уравнений, содержащих один модуль.

***<u>Пример</u>* 15.** Решить уравнение

$$|\,3x-4\,|=5\,.$$

Решение. Уравнение равносильно совокупности двух смешанных систем:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}3x-4\ge 0,\\ 3x-4=5;\end{cases}\\ \begin{cases}3x-4<0,\\ -(3x-4)=5.\end{cases}\end{array}\right. ;\qquad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\ge 4/3,\\ x=3;\end{cases}\\ \begin{cases}x<4/3,\\ x=-1/3.\end{cases}\end{array}\right. ;\qquad \left[\begin{array}{l}x=3,\\ x=-\dfrac{1}{3}\end{array}\right. .$$

Ответ: $x_1=3,\ x_2=-1/3$.

***<u>Пример</u>* 16.** Решить уравнение

$$|\,x+4\,|=2x+1\,.$$

Решение. От уравнения перейдем к равносильной совокупности двух смешанных систем:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x+4\ge 0,\\ x+4=2x+1;\end{cases}\\ \begin{cases}x+4<0,\\ -(x+4)=2x+1.\end{cases}\end{array}\right. ;\qquad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\ge -4,\\ x=3;\end{cases}\\ \begin{cases}x<-4,\\ x=-5/3.\end{cases}\end{array}\right. ;\qquad \left[\begin{array}{l}x=3,\\ \varnothing.\end{array}\right. .$$

Так как $x=-5/3$ не удовлетворяет условию $x<-4$, то исходное уравнение имеет единственный корень $x=3$.

Ответ: $x=3$.

Задания для самостоятельного решения:

- $|\,x\,|=x^2+x-2$;
- $\left|\,x^2+x-1\,\right|=2x-1$;
- $2\left|x^2+2x-5\right|=x-1$;
- $\dfrac{7x+4}{5}-x=\dfrac{|\,3x-5\,|}{2}$;
- $\dfrac{x+1}{|\,x-3\,|}=2x$;

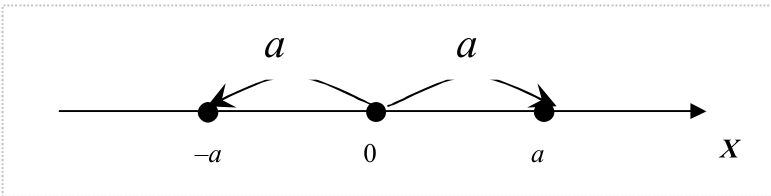
- $\dfrac{(1+x)(2+x)}{x^2-|\,x\,|-2}=3x$;
- $\dfrac{1-2x}{3-|\,x-1\,|=1}$;
- $\left|\,\dfrac{1}{2}x^2-2x+\dfrac{3}{2}\,\right|+\left|\,\dfrac{1}{2}x^2-3x+4\,\right|=\dfrac{3}{4}$;
- $|\,x-|\,4-x\,|\,|-2x=4$

Раскрытия модуля, используя его геометрическую интерпретацию

Данный метод применяется только для уравнений вида

$$|\,f(x)\,|=a\,.$$

Как известно, ***модуль числа*** – это расстояние от начала координат до положения соответствующей точки на числовой прямой. Таким образом, учитывая, что существуют два числа, модуль которых равен a (a и $-a$),



уравнение данного вида сводится к совокупности уравнений

$$\left[\begin{array}{l} f(x)=a, \\ f(x)=-a. \end{array}\right.$$

<u>Пример</u> <u>17.</u> Решить уравнение

$$|\,3x-4\,|=5\,.$$

Решение. Поскольку $|\,5\,|=5$ и $|\,-5\,|=5$, то уравнение равносильно совокупности уравнений:

$$\left[\begin{array}{l}3x-4=5,\\ 3x-4=-5,\end{array}\right.$$

корни которой: $x_1=3,\ x_2=-1/3$.

Ответ: $x_1=3,\ x_2=-1/3$.

***<u>Пример</u>* <u>18.</u>** Решить уравнение

$$\left|\, x^2-3|\,x\,|+1\,\right|=1.$$

Решение. Уравнение заменим равносильной совокупностью уравнений:

$$\left[\begin{array}{l}x^2-3|\,x|\ +1=1,\\ x^2-3|\,x\,|+1=-1.\end{array}\right.$$

Решим каждое из уравнений совокупности раскрытием модуля по определению.

Первое уравнение равносильно совокупности двух смешанных систем:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\ge 0,\\ x^2-3x+1=1;\end{cases}\\ \begin{cases}x<0,\\ x^2+3x+1=1.\end{cases}\end{array}\right. ;\quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\ge 0,\\ x=0\vee x=3;\end{cases}\\ \begin{cases}x<0,\\ x=0\vee x=-3\end{cases}\end{array}\right. ;\quad \left[\begin{array}{l}x=0,\\ x=3,\\ x=-3\end{array}\right.$$

Второе уравнение также равносильно совокупности двух смешанных систем:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\ge 0,\\ x^2-3x+1=-1;\end{cases}\\ \begin{cases}x<0,\\ x^2+3x+1=-1.\end{cases}\end{array}\right. ;\quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\ge 0,\\ x=1\vee x=2;\end{cases}\\ \begin{cases}x<0,\\ x=-1\vee x=-2\end{cases}\end{array}\right. ;\quad \left[\begin{array}{l}x=1,\\ x=2,\\ x=-1,\\ x=-2\end{array}\right.$$

Объединив решения обеих совокупностей, найдем корни исходного уравнения: $x_1=0,\ x_{2,3}=\pm 3,\ x_{4,5}=\pm 1,\ x_{6,7}=\pm 2.$

Ответ: $x_1=0,\ x_{2,3}=\pm 3,\ x_{4,5}=\pm 1,\ x_{6,7}=\pm 2.$

Задания для самостоятельного решения:

- $|\ 3x+2\ |=6$;

- $\left| x^2 - x - 3 \right| = 2$;
- $\left| \dfrac{x+1}{x-1} \right| = 1$;
- $\left| \dfrac{x^2 - 6\sqrt{x} + 7}{x^2 + 6\sqrt{x} + 7} \right| = 1$

Возведение обеих частей уравнения в квадрат

Данный метод используется лишь в случае, если обе части уравнения – выражения одинаковых знаков, при этом

$$\left(\left| f(x) \right| \right)^2 = \left(f(x) \right)^2 .$$

***Пример* 19.** Решить уравнение

$$\left| 3x - 4 \right| = 5 .$$

Решение. Поскольку обе части уравнения неотрицательны, оно равносильно уравнению

$$(3x-4)^2 = 5^2 ,$$

корни которого: $x_1 = 3,\ x_2 = -1/3$.

Ответ: $x_1 = 3,\ x_2 = -1/3$.

***Пример* 20.** Решить уравнение

$$\left| 3x - 4 \right| = \left| 5x + 7 \right| .$$

Решение. Так как обе части уравнения неотрицательны, то оно равносильно следующему уравнению:

$$(3x-4)^2 = (5x+7)^2 .$$

Воспользуемся формулой разности квадратов:

$$(3x - 4 - 5x - 7)(3x - 4 + 5x + 7) = 0 .$$

Корни полученного, а следовательно, и исходного уравнения: $x_1 = -5{,}5$; $x_2 = -3/8$

Ответ: $x_1 = -5{,}5$; $x_2 = -3/8$.

Задания для самостоятельного решения:

- $\left| 2x + 1 \right| = 3$;

- $|\ 3x-5\ |=|\ 5-2x\ |$;
- $|\ x-3\ |=2|\ x+1\ |$

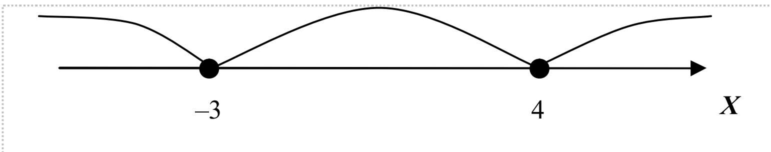
Метод интервалов (разбиения на промежутки)

Данный метод наиболее эффективен для уравнений, содержащих, по крайней мере, два модуля.

***Пример* 21.** Решить уравнение

$$|\ 4-x\ |-|\ x+3\ |=6\ .$$

Решение. На числовой оси отложим значения переменных, при которых каждое из подмодульных выражений обращается в нуль: $x_1=-3;\ \ x_2=4$. Полученные точки разбивают числовую ось на промежутки:



На каждом из них подмодульные выражения сохраняют знак. Определив знак каждого из них, раскроем модули (по определению). При этом контрольной точкой может служить любая точка из соответствующего промежутка:

– для $x\in(-\infty;-3]$: $|\ 4-x\ |=4-x;\ \ |\ x+3\ |=-(x+3)$;

– для $x\in(-3;4]$: $|\ 4-x\ |=4-x;\ \ |\ x+3\ |=x+3$;

– для $x\in(4;+\infty)$: $|\ 4-x\ |=-(4-x);\ \ |\ x+3\ |=x+3$.

Следовательно, исходное уравнение заменим равносильной совокупностью смешанных систем:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\in(-\infty;-3];\\4-x+x+3=6;\end{cases}\\\begin{cases}x\in(-3;4];\\4-x-x-3=6;\end{cases}\\\begin{cases}x\in(4;+\infty);\\-4+x-x-3=6;\end{cases}\end{array}\right.\qquad\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\in(-\infty;-3];\\0x=-1;\end{cases}\\\begin{cases}x\in(-3;4];\\-2x=5;\end{cases}\\\begin{cases}x\in(4;+\infty);\\0x=13;\end{cases}\end{array}\right.\qquad\left[\begin{array}{l}\varnothing\\\begin{cases}x\in(-3;4];\\x=-2,5;\end{cases}\\\varnothing\end{array}\right.$$

Таким образом, корнем исходного уравнения является $x=-2,5$.

Ответ: $x=-2,5$.

Задания для самостоятельного решения:

- $|\,x-3\,|+2|\,x+1\,|=4$;
- $|\,2x-9\,|+|\,x-6\,|+x=4$;
- $5|\,x-2\,|+|\,x+1\,|+|\,x-1\,|+7=3x$;
- $|\,x^2-1\,|=-|\,x\,|\ +1$;
- $\dfrac{|\,x^2-4x\,|+3}{x^2+|\,x-5\,|}=1$

ОСНОВНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Иррациональными уравнениями называются уравнения, содержащие переменную под знаком радикала.

Область допустимых значений иррационального уравнения содержит только те значения переменной, при которых неотрицательны все выражения, стоящие под знаками радикалов четной степени.

При решении иррациональных уравнений применяются следующие формулы:

Для функций f и g, где $k\in N$:

1) $\sqrt[2k]{f}\,\sqrt[2k]{g}=\sqrt[2k]{fg}\ \ (f\ge 0,\ g\ge 0)$

2) $\dfrac{\sqrt[2k]{f}}{\sqrt[2k]{g}}=\sqrt[2k]{\dfrac{f}{g}}\ \ (f\ge 0,\ g>0)$

3) $|f|\sqrt[2k]{g}=\sqrt[2k]{f^{2k}g}\ \ (g \ge 0)$

4) $\sqrt[2k]{\dfrac{f}{g}}=\dfrac{\sqrt[2k]{|\,f\,|}}{\sqrt[2k]{|\,g\,|}}\ \ \left(fg \ge 0,\ g \ne 0\right)$

5) $\sqrt[2k]{fg}=\sqrt[2k]{|\,f\,|}\sqrt[2k]{\,|g\,|}\ \ (fg \ge 0)$

Применяя любую из данных формул формально (без учета указанных ограничений), необходимо иметь в виду, что области допустимых значений левой и правой частей каждой из формул могут отличаться.

Область допустимых значений ее правой части может быть шире область допустимых значений левой части. Следовательно, преобразования уравнения с формальным применением данных формул «слева – направо» (как они записаны) приводят к уравнению, являющемуся следствием исходного. В этом случае могут появиться посторонние корни, поэтому обязательным этапом в решении исходного уравнения является проверка.

Преобразования уравнения с формальным использованием формул «справа – налево» недопустимы, так как возможно сужение области допустимых значений исходного уравнения, и, следовательно, потеря некоторых корней.

Прежде чем приступить к решению иррационального уравнения, целесообразно определить область допустимых значений уравнения. В некоторых случаях после этого отпадает потребность в решении.

Так, для уравнения

$$\sqrt{x-3}+\sqrt{2-x}=3$$

область допустимых значений задается системой неравенств

$$\begin{cases} x-3 \ge 0, \\ 2-x \ge 0, \end{cases}$$

которая не имеет решений. Следовательно, и уравнение не имеет корней.

Для уравнения

$$\sqrt{x-3}+\sqrt{3-x}+25=(x+2)^2$$

область допустимых значений состоит всего лишь из одного значения переменной $x=3$. Поэтому процесс решения данного уравнения (довольно длительный) заменяется поиском ответа на вопрос, является ли $x=3$ решением данного уравнения, что гораздо проще. Для этого достаточно подставить $x=3$ в исходное уравнение и убедиться, что $x=3$ является единственным корнем данного уравнения.

Возведение обеих частей уравнения в одну степень

Одним из методов решения иррациональных уравнений является последовательное возведение обеих его частей в степень, являющуюся наименьшим общим кратным показателей всех входящих в уравнение радикалов.

Сначала изолируют один радикал, а дальше обе части уравнения возводят в степень, потом опять изолируют радикал и т.д. Любое иррациональное уравнение после конечного числа таких преобразований можно привести к рациональному.

При этом применение данного метода в корне отличается в зависимости от того, какая это степень – четная или нечетная.

а) Возведение в четную степень

Уравнение

$$f^{2n}(x)=g^{2n}(x),\ n\in N\ -$$

всего лишь следствие уравнения $f(x)=g(x)$, т.е. не является эквивалентным переходом. Поэтому, если в иррациональном уравнении выполняются преобразования, состоящие в возведении обеих его частей в четную степень, то возможно появление посторонних корней. Они исключаются при помощи проверки (подстановки полученных корней в исходное уравнение) или при выполнении равносильных преобразований:

если обе части уравнения $f(x)=g(x)$ неотрицательны, то уравнения $f(x)=g(x)$ и $\left(f(x)\right)^n=\left(g(x)\right)^n$ равносильны.

<u>Пример 22.</u> Решить уравнение

$$\sqrt{9-5x}-\sqrt{3x-2}=\sqrt{x}.$$

Решение.

Первый способ. Возведем обе части уравнения в квадрат:

$$9-5x+3x-2-2\sqrt{9-5x}\cdot\sqrt{3x-2}=x,$$

откуда
$$7-3x=2\sqrt{-15x^2+37x-18}.$$

Снова возведем в квадрат:

$$49+9x^2-42x=-60x^2+148x-72, \qquad 69x^2-190x+121=0,$$

откуда $x_1=121/69$, $x_2=1$. Выполнив проверку, убедимся, что x_1 – посторонний корень.

Ответ: $x=1$.

Второй способ. Найдем область допустимых значений уравнения. Оно задается системой неравенств

$$\begin{cases} 9-5x\ge 0, \\ 3x-2\ge 0, \\ x\ge 0, \end{cases} \qquad (*),$$

откуда $x\in\left[2/3;9/5\right]$. Запишем исходное уравнение в виде:

$$\sqrt{9-5x}=\sqrt{3x-2}+\sqrt{x}.$$

Возведем обе части уравнения в квадрат. Так как они неотрицательны, данное преобразование является равносильным. Получим:

$$9-5x=3x-2+2\sqrt{3x-2}\cdot\sqrt{x}+x,$$

откуда
$$11-9x=2\sqrt{3x^2-2x}.$$

Правая часть полученного уравнения неотрицательна (исходя из определения квадратного корня), поэтому, прежде чем возвести уравнение в квадрат, потребуем, чтобы его левая часть тоже была неотрицательна:

$$11-9x\ge 0,$$

откуда $x\in\left(-\infty;11/9\right]$. Учитывая (*), получим: $x\in\left[2/3;11/9\right]$. Возведем уравнение в квадрат:

$$121+81x^2-198x=12x^2-8x, \qquad 69x^2-190x+121=0,$$

откуда $x_1 = 121/69$, $x_2 = 1$. Так как $x_1 \notin [2/3; 11/9]$, т.е. является посторонним корнем, делаем вывод, что исходное уравнение имеет единственный корень $x = 1$.

Ответ: $x = 1$.

Задания для самостоятельного решения:

- $\sqrt{6x^3 + 9x^2 + 24x + 22} = 3x + 4$;
- $3\sqrt{x+3} - \sqrt{x-2} = 7$;
- $\sqrt{11x+3} - \sqrt{2-x} - \sqrt{9x+7} + \sqrt{x-2} = 0$;
- $\sqrt{x+16} - x + 4 = 0$;
- $\sqrt{2x+5} + \sqrt{x-1} = 8$;
- $2\sqrt{1-x^2} = x - 2$;
- $\sqrt{4x+9} - \sqrt{11x+1} - \sqrt{7x+4} = 0$;
- $\sqrt{x+7} \cdot \sqrt{3x-2} = 3\sqrt{x-1} \cdot \sqrt{x+2}$;
- $\sqrt{x-2} - \dfrac{1}{\sqrt{x-2}} = \sqrt{2x-6}$;
- $x = \left(\sqrt{1+x} + 1\right)\left(\sqrt{10+x} - 4\right)$.

б) Возведение в нечетную степень

<u>Пример 23.</u> Решить уравнение

$$\sqrt[3]{5x+1} - \sqrt[3]{5x-1} = 2.$$

Решение. Область допустимых значений уравнения: $x \in R$. Возведем обе части уравнения в куб по формуле

$$(a-b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a-b),$$

получим:

$$5x + 1 - (5x-1) - 3\sqrt[3]{25x^2 - 1} \cdot \left(\sqrt[3]{5x+1} - \sqrt[3]{5x-1}\right) = 8.$$

По условию

$$\sqrt[3]{5x+1} - \sqrt[3]{5x-1} = 2,$$

следовательно, заменим разность в скобке на 2, получим:

$$5x+1-(5x-1)-3\sqrt[3]{25x^2-1}\ \cdot\ 2=8. \qquad (*)$$

откуда $\quad 6\sqrt[3]{25x^2-1}=-6; \qquad \sqrt[3]{25x^2-1}=-1;$

$$25x^2-1=-1; \qquad x_{1,\,2}=0.$$

Проверкой убедимся, что $x=0$ является корнем исходного уравнения.

Ответ: $x=0$.

Замечание 1. Замена неизвестной в ряде случаев дает возможность перейти от иррационального уравнения к системе рациональных уравнений.

Замечание 2. Проверка является **обязательной**. Несмотря на то, что возведение обеих частей уравнения в куб является равносильным преобразованием, тем не менее замена (*) может привести к появлению посторонних корней.

Задания для самостоятельного решения:

- $\sqrt[3]{5x+7}-\sqrt[3]{5x-12}=1;$
- $\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}+\sqrt[3]{1-\sqrt{x}}=2;$
- $\sqrt[3]{24+\sqrt{x}}-\sqrt[3]{5+\sqrt{x}}=1;$
- $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x-16}=\sqrt[3]{x-8};$
- $\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}}+\sqrt[3]{1+\frac{2}{x}}=-1;$
- $\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{x-2}-\sqrt[3]{2x-3}=0;$
- $\sqrt[3]{(2-x)^2}+\sqrt[3]{(7+x)^2}-\sqrt[3]{(7+x)(2-x)}=3$

Замена переменной

Пример 24. Решить уравнение

$$x^2+3x-18+4\sqrt{x^2+3x-6}=0.$$

Решение. Введем замену:

$$t=\sqrt{x^2+3x-6},\ t\geq 0 \qquad (*).$$

Возведя обе ее части в квадрат:

$$x^2+3x-6=t^2 .$$

Тогда исходное уравнение преобразуем в следующее квадратное уравнение

$$t^2+4t-12=0 .$$

Корни его: $t_1=-6;\ \ t_2=2$. Значение t_1 не удовлетворяет условию (*). Подставим значение t_2 в уравнение (*):

$$\sqrt{x^2+3x-6}=2 ,$$

откуда $$x^2+3x-6=4 .$$

Решив полученное квадратное уравнение, найдем его корни $x_1=-5;\ \ x_2=2$, которые, в свою очередь, являются корнями исходного уравнения.

Ответ: $x_1=-5;\ x_2=2$.

Замечание. Замена неизвестной в ряде случаев дает возможность перейти от иррационального уравнения к системе рациональных уравнений.

***Пример* 25.** Решить уравнение

$$2x-5+2\sqrt{x^2-5x}+2\sqrt{x-5}+2\sqrt{x}=48 .$$

Решение. Найдем область допустимых значений данного уравнения:

$$\begin{cases} x^2-5x\ge 0, \\ x-5\ge 0, \\ x\ge 0 \end{cases},$$

откуда $x\in[5;+\infty)$. На этом множестве:

$$\sqrt{x^2-5x}=\sqrt{x}\cdot\sqrt{x-5} .$$

Поскольку $2x=x+x$, то уравнение представим в следующем виде:

$$x+2\sqrt{x}\sqrt{x-5}+x-5+2\sqrt{x-5}+2\sqrt{x}-48=0 ,$$

или $$\left(\sqrt{x}\right)^2+2\sqrt{x}\sqrt{x-5}+\left(\sqrt{x-5}\right)^2+2\left(\sqrt{x-5}+\sqrt{x}\right)-48=0 ,$$

т.е. $$\left(\sqrt{x-5}+\sqrt{x}\right)^2+2\left(\sqrt{x-5}+\sqrt{x}\right)-48=0.$$

Обозначив
$$t=\sqrt{x-5}+\sqrt{x},\ t\geq 0 \qquad (*),$$
получим уравнение
$$t^2+2t-48=0,$$
корни которого $t_1=-8$; $t_2=6$. Значение t_1 не удовлетворяет условию (*). Подставим значение t_2 в (*):
$$\sqrt{x-5}+\sqrt{x}=6.$$
Возведем обе части уравнения в квадрат (так как они неотрицательны, то это преобразование равносильно):
$$x-5+2\sqrt{(x-5)x}+x=36, \qquad 2\sqrt{(x-5)x}=41-2x \ (**).$$
Левая часть последнего уравнения неотрицательна, поэтому, прежде чем возвести его в квадрат, потребуем, чтобы его правая часть тоже была неотрицательной:
$$41-2x\geq 0,$$
откуда $x\in(-\infty;20,5]$. Учитывая область допустимых значений исходного уравнения, получим: $x\in[5;20,5]$. Возведем обе части уравнения (**) в квадрат:
$$4(x^2-5x)=(41-2x)^2, \qquad 144x=1681,$$
откуда $x=11\frac{97}{144}\in[5;20,5]$. Следовательно, $x=11\frac{97}{144}$ является корнем исходного уравнения.

Ответ: $x=11\frac{97}{144}$.

***<u>Пример</u>* 26.** Решить уравнение
$$\frac{x^2}{\sqrt{2x+15}}+\sqrt{2x+15}=2x.$$

Решение. Область допустимых значений уравнения задается неравенством
$$2x+15>0,$$

откуда $x \in (-7,5; +\infty)$. Очевидно, что $x = 0$ не является корнем уравнения (убедимся в этом подстановкой его в исходное уравнение). Поэтому разделим обе части уравнения на x:

$$\frac{x}{\sqrt{2x+15}} + \frac{\sqrt{2x+15}}{x} = 2 .$$

Обозначив

$$t = \frac{x}{\sqrt{2x+15}}, \ t \neq 0 \qquad (*),$$

получим уравнение

$$t + \frac{1}{t} = 2 ,$$

или $\qquad t^2 - 2t + 1 = 0 , \qquad (t-1)^2 = 0 ,$

откуда $t = 1$, что удовлетворяет условию (*). Вернемся к исходной переменной, подставив значение t в (*):

$$\frac{x}{\sqrt{2x+15}} = 1 , \qquad x = \sqrt{2x+15} \quad (**).$$

Правая часть полученного уравнения неотрицательна, поэтому, прежде чем возвести уравнение в квадрат, потребуем, чтобы его левая часть тоже была неотрицательной:

$$x \geq 0 ,$$

т.е., с учетом области допустимых значений исходного уравнения, $x \in [0; +\infty)$. Возведем обе части уравнения (**) в квадрат:

$$x^2 = 2x + 15 .$$

Корни данного квадратного уравнения: $x_1 = -3$; $x_2 = 5$. Поскольку $x_1 \notin [0; +\infty)$, т.е. является посторонним корнем, делаем вывод, что исходное уравнение имеет единственный корень $x = 5$.

Ответ: $x = 5$.

<u>Пример 27.</u> Решить уравнение

$$\sqrt{x+5} = 5 - x^2 .$$

Решение. Область допустимых значений уравнения задается неравенством

$$x + 5 \geq 0 ,$$

откуда $x \in [-5;+\infty)$. Поскольку левая часть уравнения неотрицательна, то потребуем, чтобы и правая часть была неотрицательной:

$$5 - x^2 \geq 0,$$

откуда $x \in [-\sqrt{5};\sqrt{5}]$. Следовательно, возможные корни уравнения находятся во множестве $[-\sqrt{5};\sqrt{5}]$ (*). Пусть

$$t = \sqrt{x+5},\ t \geq 0 \qquad (1).$$

Подставим данную замену в исходное уравнение:

$$t = 5 - x^2, \qquad x^2 + t = 5.$$

С другой стороны, возведя обе части (1) в квадрат, получим:

$$t^2 = x + 5, \qquad x - t^2 = -5.$$

Следовательно, получим систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + t = 5, \\ x - t^2 = -5. \end{cases}$$

Сложим почленно уравнения системы:

$$x^2 - t^2 + x + t = 0.$$

Разложим на множители:

$$(x-t)(x+t) + (x+t) = 0, \text{ или } \quad (x+t)(x-t+1) = 0.$$

Используя условие равенства нулю произведения, исходное уравнение приведем к совокупности уравнений:

$$\left[\begin{array}{l} x + t = 0, \\ x - t + 1 = 0 \end{array}\right..$$

Подставим значение t в уравнения совокупности:

$$\left[\begin{array}{l} x + 5 - x^2 = 0, \\ x - 5 + x^2 + 1 = 0 \end{array}\right., \qquad \left[\begin{array}{l} x^2 - x - 5 = 0, \\ x^2 + x - 4 = 0 \end{array}\right.$$

Найдем корни полученных квадратных уравнений: $x_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{21}}{2}$, $x_{3,4} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$. Поскольку $\dfrac{1+\sqrt{21}}{2} > \sqrt{5}$, $\dfrac{-1-\sqrt{17}}{2} < -\sqrt{2}$, то, учитывая (*), найдем корни исходного уравнения: $x_1 = \frac{1-\sqrt{21}}{2}$, $x_2 = \frac{-1+\sqrt{17}}{2}$.

Ответ: $x_1 = \frac{1-\sqrt{21}}{2}$, $x_2 = \frac{-1+\sqrt{17}}{2}$.

***<u>Пример</u>* <u>28.</u>** Решить уравнение

$$6\sqrt[3]{x-3} + \sqrt[3]{x-2} = 5\sqrt[6]{(x-2)(x-3)}.$$

Решение. Область допустимых значений уравнения задается системой неравенств

$$\begin{cases} x-3 \geq 0, \\ x-2 \geq 0 \end{cases}$$

откуда $x \in [3;+\infty)$. Учитывая, что

$$\sqrt[3]{x-3} = \left(\sqrt[6]{x-3}\right)^2, \qquad \sqrt[3]{x-2} = \left(\sqrt[6]{x-2}\right)^2,$$

запишем исходное уравнение в виде:

$$6\left(\sqrt[6]{x-3}\right)^2 - 5\sqrt[6]{(x-2)(x-3)} + \left(\sqrt[6]{x-2}\right)^2 = 0.$$

Следовательно, данное уравнение является однородным уравнением второй степени. Разделим обе его части на $\left(\sqrt[6]{x-2}\right)^2$:

$$6\left(\sqrt[6]{\frac{x-3}{x-2}}\right)^2 - 5 \cdot \sqrt[6]{\frac{x-3}{x-2}} + 1 = 0.$$

Обозначив

$$t = \sqrt[6]{\frac{x-3}{x-2}},\ t > 0, \qquad (*)$$

получим уравнение

$$6t^2 - 5t + 1 = 0,$$

корни которого $t_1 = 1/3$; $t_2 = 1/2$. Оба значения t удовлетворяют условию (*). Подставляя их в (*), получим совокупность иррациональных уравнений:

$$\left[\begin{array}{l}\sqrt[6]{\dfrac{x-3}{x-2}}=\dfrac{1}{3},\\ \sqrt[6]{\dfrac{x-3}{x-2}}=\dfrac{1}{2}.\end{array}\right.$$

Возведя обе части обоих уравнений в шестую степень и решив соответствующие уравнения, найдем решение совокупности: $x_1=3\dfrac{1}{728}$, $x_2=3\dfrac{1}{63}$. Поскольку $x_1,x_2\in[3;+\infty)$, они являются корнями исходного уравнения.

Ответ: $x_1=3\dfrac{1}{728}$, $x_2=3\dfrac{1}{63}$.

Замечание. Замена неизвестной в ряде случаев дает возможность перейти от иррационального уравнения к системе рациональных уравнений.

***Пример*29.** Решить уравнение

$$\sqrt{x+1}-\sqrt[3]{2x-6}=2.$$

Решение. Обозначим:

$a=\sqrt{x+1}$, $a\ge 0$; $\qquad b=\sqrt[3]{2x-6}$ $\qquad$ (*).

Возведем обе части каждого из полученных уравнений соответственно в квадрат и куб:

$$x+1=a^2 \qquad 2x-6=b^3.$$

Умножим первое уравнение на 2 и почленно вычтем из него второе уравнение:

$$2a^2-b^3=8.$$

Поскольку исходное уравнение примет вид

$$a-b=2,$$

придем к системе уравнений

$$\begin{cases}a-b=2,\\ 2a^2-b^3=8.\end{cases}$$

Решение ее сводится к решению уравнения

$$2(2+b)^2-b^3=8,$$

корни которого $b_1=0$, $b_2=4$, $b_3=-2$. Вернемся к замене (*):

$$\left[\begin{array}{l}\sqrt[3]{2x-6}=0,\\ \sqrt[3]{2x-6}=4,\\ \sqrt[3]{2x-6}=-2;\end{array}\right.$$

откуда $x_1=3;\ x_2=35;\ x_3=-1$.

Ответ: $x_1=3;\ x_2=35;\ x_3=-1$.

Замечание. Предлагаем читателю самостоятельно решить данным методом уравнение из примера 23.

Задания для самостоятельного решения:

- $(x+4)(x+1)-3\sqrt{x^2+5x+2}=6$;
- $x^2-4x-6=\sqrt{2x^2-8x+2}$;
- $\sqrt{\dfrac{x+3}{x}}+\sqrt{\dfrac{x}{x+3}}=\dfrac{5}{2}$;
- $\sqrt{\dfrac{x^2+2x+4}{x^2-2x+3}}+\sqrt{\dfrac{x^2-2x+3}{x^2+2x+4}}=\dfrac{5}{2}$;
- $\sqrt{x+\sqrt{x+11}}+\sqrt{x-\sqrt{x+11}}=4$;
- $\sqrt{x^2+2x+1}+\sqrt{4x^2+8x+13}=\sqrt{3x^2+6x+12}$;
- $\sqrt{x+6}-\sqrt[3]{x-2}=2$;
- $\sqrt[3]{x+1}=\sqrt{x-3}$;
- $\sqrt[3]{x+5}-\sqrt[3]{x-2}=1$;
- $\sqrt[4]{47-2x}+\sqrt[4]{35+2x}=4$;
- $\sqrt[4]{15+\dfrac{1}{x}}+\sqrt[4]{2-\dfrac{1}{x}}=3$;
- $\sqrt{x^2+32}-\sqrt[4]{x^2+32}=3$;
- $x\sqrt[3]{x}-4\sqrt[3]{x^2}+4=0$;
- $\sqrt{3x^2+6x+16}+\sqrt{x^2+6x}=2\sqrt{x^2+6x+4}$;

- $\sqrt{3x^2-2x+15}+\sqrt{3x^2-2x+8}=7$;
- $\sqrt{x+5}+\sqrt{x}=2x-15+2\sqrt{x^2+5x}$;
- $\dfrac{2}{2-\sqrt{x}}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{4}{2\sqrt{x}-x}$;
- Найти точки пересечения графиков функций $y=\sqrt{x+2}$ и $\sqrt[3]{3x+2}$.

Вынесение общего множителя за скобки

Если в процессе решения иррационального уравнения при разложении подкоренных выражений на множители появляются одинаковые выражения в обеих частях уравнения, то уравнение сводится к совокупности уравнений более простого вида.

***Пример* 30.** Решить уравнение

$$\sqrt{x^2+x-2}+\sqrt{x^2-4x+3}=\sqrt{x^2-1}\ .$$

Решение. Разложим подкоренные выражения на множители:

$$\sqrt{(x+2)(x-1)}+\sqrt{(x-3)(x-1)}=\sqrt{(x+1)(x-1)}\ .$$

Найдем область допустимых значений уравнения. Она задается системой неравенств:

$$\begin{cases}(x+2)(x-1)\ge 0,\\(x-3)(x-1)\ge 0,\\(x+1)(x-1)\ge 0,\end{cases}$$

откуда $x\in(-\infty;-2]\cup\{1\}\cup[3;+\infty)$. Поскольку каждое слагаемое уравнения имеет общий множитель $\sqrt{x-1}$, то его вынесем за скобки. Используя условие равенства нулю произведения, исходное уравнение приведем к совокупности иррациональных уравнений:

$$\left[\begin{array}{l}\sqrt{x-1}=0,\\ \sqrt{x+2}+\sqrt{x-3}=\sqrt{x+1}.\end{array}\right.$$

Решением первого уравнения является $x=1$, который, в свою очередь, является корнем исходного уравнения.

Решим второе уравнение. Область его допустимых значений задается системой

$$\begin{cases} x+2\geq 0, \\ x-3\geq 0, \\ x+1\geq 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} x+2\geq 0, \\ x-3\geq 0, \\ x+1\geq 0, \end{cases}$$

откуда $x\in[3;+\infty)$ (*). Возведем обе части уравнения в квадрат. Поскольку они неотрицательны, это преобразование является равносильным. Получим:

$$x+2+2\sqrt{(x+2)(x-3)}+x-3=x+1,$$

откуда $$2\sqrt{x^2-x-6}=2-x\,.$$

Левая часть полученного уравнения неотрицательна, поэтому, прежде чем возвести уравнение в квадрат, потребуем, чтобы его правая часть тоже была неотрицательной:

$$2-x\geq 0\,,$$

откуда $x\in\left(-\infty;-2\right]$. Это множество в пересечении с множеством (*) образует $\varnothing$, т.е. второе уравнение корней не имеет. Следовательно, исходное уравнение имеет единственный корень $x=1$.

Ответ: $x=1$.

***<u>Пример</u>* <u>31.</u>** Решить уравнение

$$\sqrt{x-\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}=\frac{x-1}{x}.$$

Решение. Найдем область допустимых значений уравнения. Она задается системой неравенств

$$\begin{cases} x-\dfrac{1}{x}\geq 0, \\ 1-\dfrac{1}{x}\geq 0, \\ x\neq 0, \end{cases}$$

откуда $x\in[-1;0)\cup[1;+\infty)$. Разложим подкоренные выражения в уравнении на множители, а в правой его части почленно разделим числитель на знаменатель:

$$\sqrt{x\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}=1-\frac{1}{x},$$

или $$\sqrt{x\left(1-\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{x}\right)}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}=\left(\sqrt{1-\frac{1}{x}}\right)^2.$$

Поскольку каждое слагаемое уравнения имеет общий множитель $\sqrt{1-\frac{1}{x}}$, то его вынесем за скобки. Используя условие равенства нулю произведения, исходное уравнение приведем к совокупности уравнений:

$$\left[\begin{array}{l}\sqrt{1-\frac{1}{x}}=0,\\ \sqrt{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}+1=\sqrt{1-\frac{1}{x}}.\end{array}\right.$$

Решением первого уравнения является $x=1$, который является корнем исходного уравнения.

Решим второе уравнение. Область его допустимых значений задается системой

$$\begin{cases}x+1\geq 0,\\ \dfrac{x-1}{x}\geq 0.\end{cases}$$

Решение ее совпадает с областью допустимых значений исходного уравнения. Запишем второе уравнение в виде:

$$\sqrt{x+1}+1=\sqrt{\frac{x-1}{x}}.$$

Возведем обе части уравнения в квадрат (поскольку они неотрицательны, это преобразование равносильно):

$$x+1+2\sqrt{x+1}+1=\frac{x-1}{x}, \text{ или } \quad x+2+2\sqrt{x+1}=\frac{x-1}{x}.$$

Умножим обе части уравнения на $x\neq 0$:

$$x^2+2x+2x\sqrt{x+1}=x-1, \qquad x^2+x+2x\sqrt{x+1}+1=0.$$

Запишем последнее уравнение в виде:

$$x^2+2x\sqrt{x+1}+\left(\sqrt{x+1}\right)^2=0.$$

Левая часть его представляет собой полный квадрат:

$$\left(x+\sqrt{x+1}\right)^2=0,$$

откуда $$x+\sqrt{x+1}=0.$$

Обозначив

$$t=\sqrt{x+1},\ t\geq 0 \qquad (*),$$

получим уравнение

$$t^2-1+t=0.$$

Найдем его корни: $t_1=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$, $t_2=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ Значение t_1 не удовлетворяет условию (*). Подставим значение t_2 в (*):

$$\sqrt{x+1}=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}.$$

Возведем обе части уравнения в квадрат (поскольку они неотрицательны, данное преобразование равносильно):

$$x+1=\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^2.$$

Отсюда $x=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\in[-1;0)\cup[1;+\infty)$, следовательно, является корнем исходного уравнения.

Ответ: $x_1=1$, $x_2=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.

***<u>Пример</u>* <u>32.</u>** Решить уравнение

$$\sqrt[3]{2-x}=1-\sqrt{x-1}.$$

Решение. Область допустимых значений уравнения задается неравенством

$$x-1\geq 0,$$

откуда $x\in[1;+\infty)$. Запишем исходное уравнение в виде:

$$\sqrt{x-1}=1+\sqrt[3]{x-2}.$$

Возведем его обе части в квадрат:

$$x-1=1+2\sqrt[3]{x-2}+\sqrt[3]{(x-2)^2},$$

откуда $$x-2-\sqrt[3]{(x-2)^2}-2\sqrt[3]{(x-2)^2}=0.$$

Поскольку $x-2=\left(\sqrt[3]{x-2}\right)^3$, то вынесем за скобки общий множитель $\sqrt[3]{x-2}$:

$$\sqrt[3]{x-2}\left(\sqrt[3]{(x-2)^2}-\sqrt[3]{x-2}-2\right)=0.$$

Используя условие равенства нулю произведения, данное уравнение приведем к совокупности уравнений:

$$\left[\begin{array}{l}\sqrt[3]{x-2}=0,\\ \sqrt[3]{(x-2)^2}-\sqrt[3]{x-2}-2=0.\end{array}\right.$$

Для решения первого уравнения возведем обе его части в куб:

$$x-2=0,$$

откуда $x=2\in[1;+\infty)$. Второе уравнение решим как квадратное относительно $\sqrt[3]{x-2}$, в итоге получим:

$$\left[\begin{array}{l}\sqrt[3]{x-2}=2,\\ \sqrt[3]{x-2}=-1.\end{array}\right.$$

Возведем каждое уравнение данной совокупности в куб, найдем еще два корня совокупности: $x_2=10$, $x_3=1$. Они оба входят во множество $[1;+\infty)$. Поскольку при возведении обеих частей уравнения в квадрат мы не следили за тем, чтобы это преобразование было равносильным, необходимо выполнить проверку для всех трех корней совокупности. Проверкой убеждаемся, что все они являются корнями исходного уравнения.

Ответ: $x_1=2, x_2=10$, $x_3=1$.

Задания для самостоятельного решения:

- $\sqrt{(x-1)^2(x-4)}=|\,x-1\,|\sqrt{16-x^2}$;
- $2\sqrt{x^2-2x-8}-\sqrt{x^2-16}=\sqrt{3x^2-13x+4}$;

- $\sqrt{2x^2+8x+6}+\sqrt{x^2-1}=2x+2$;
- $\sqrt{4x^2+9x+5}-\sqrt{2x^2+x-1}=\sqrt{x^2-1}$;
- $\sqrt{x^2-1}=(x+5)\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$;
- $\sqrt{x^2+3x-4}=\sqrt{2x+2}$;
- $\dfrac{\sqrt{2-x}}{\sqrt{2+x}}=\dfrac{2-x}{2+x}$.

Умножение обеих частей уравнения на сопряженный радикал

Если в процессе решения уравнения выполняются преобразования, состоящие в избавлении уравнения от знаменателя или в умножении уравнения на выражение, область допустимых значений которого не сужается, возможно расширение области допустимых значений исходного уравнения и, как следствие, появление посторонних корней. В этом случае является **обязательной** проверка как составная часть решения уравнения.

***Пример* 33.** Решить уравнение

$$\sqrt{3x^2-2x+15}+\sqrt{3x^2-2x+8}=7.$$

Решение. Умножим обе части уравнения на выражение, сопряженное его левой части. Применим к левой части уравнения формулу разности квадратов:

$$(3x^2-2x+15)-(3x^2-2x+8)=7\cdot\left(\sqrt{3x^2-2x+15}-\sqrt{3x^2-2x+8}\right).$$

Приведем подобные члены:

$$\sqrt{3x^2-2x+15}-\sqrt{3x^2-2x+8}=1.$$

Прибавим данное уравнение к исходному уравнению:

$$\sqrt{3x^2-2x+15}=4.$$

Корни его: $x_1=-1/3$, $x_2=1$. Проверкой убеждаемся, что они являются корнями исходного уравнения.

Ответ: $x_1 = -1/3,\ x_2 = 1$.

Пример**34.** Решить уравнение

$$\left(\sqrt{x+1}+1\right)\left(\sqrt{x+10}-4\right)=x.$$

Решение. Область допустимых значений уравнения задается системой неравенств

$$\begin{cases} x+1 \ge 0, \\ x+10 \ge 0, \end{cases}$$

откуда $x \in [-1; +\infty)$. Умножим обе части уравнения на выражение, сопряженное первому множителю в левой части:

$$\left(\sqrt{x+1}+1\right)\left(\sqrt{x+1}-1\right)\left(\sqrt{x+10}-4\right)=x\left(\sqrt{x+1}-1\right).$$

Применим к первым двум множителям в левой части уравнения формулу разности квадратов:

$$\left(\left(\sqrt{x+1}\right)^2-1\right)\left(\sqrt{x+10}-4\right)=x\left(\sqrt{x+1}-1\right),$$

откуда

$$x\left(\sqrt{x+10}-4\right)=x\left(\sqrt{x+1}-1\right).$$

Поскольку каждое слагаемое уравнения имеет общий множитель x, то его вынесем за скобки. Используя условие равенства нулю произведения, исходное уравнение приведем к совокупности уравнений:

$$\left[\begin{array}{l} x=0, \\ \sqrt{x+10}-4=\sqrt{x+1}-1 \end{array}\right..$$

Несмотря на то, что $x = 0 \in [-1; +\infty)$, подстановкой его в исходное уравнение выясняем, что он не является его корнем.

Решим второе уравнение совокупности. Область его допустимых значений совпадает с областью допустимых значений исходного уравнения. Запишем второе уравнение в виде:

$$\sqrt{x+10}=\sqrt{x+1}+3.$$

Возведем обе его части в квадрат (поскольку они неотрицательны, это преобразование является равносильным):

$$x+10=x+1+6\sqrt{x+1}+9,$$

откуда

$$x=-1 \in [-1; +\infty).$$

Подстановкой его в исходное уравнение убеждаемся, что это – его корень.

Ответ: $x = -1$.

Задания для самостоятельного решения:

- $\sqrt{3x^2+5x+8} - \sqrt{3x^2+5x+1} = 1$;
- $\sqrt{2x^2+3x+5} + \sqrt{2x^2-3x+5} = 3x$;
- $\sqrt{6x^2-59x+149} - \sqrt{x^2-9x+24} = x-5$;
- $\sqrt{15-x} + \sqrt{3-x} = 6$;
- $\sqrt{x^2+9} - \sqrt{x^2-7} = 2$;
- $\dfrac{\sqrt{21+x}+\sqrt{21-x}}{\sqrt{21+x}-\sqrt{21-x}} = \dfrac{21}{x}$;
- $\dfrac{\sqrt{x+6}-\sqrt{6-x}}{\sqrt{x+6}-\sqrt{6-x}} = \dfrac{x}{6}$

Выделение полного квадрата в подкоренных выражениях

В основе этого метода – использование формулы

$$\sqrt{a^2} = |\, a \,| \qquad (*).$$

<u>Пример</u>**<u>35.</u>** Решить уравнение

$$\sqrt{x+2+2\sqrt{x+1}} + \sqrt{x+2-2\sqrt{x+1}} = 2.$$

Решение. Обозначим

$$t = \sqrt{x+1},\ t \ge 0 \qquad (**),$$

откуда $t^2 = x+1 \Rightarrow x = t^2 - 1$.

Тогда, подставив в исходное уравнение вместо x полученное выражение, получим:

$$\sqrt{t^2+2t+1} + \sqrt{t^2-2t+1} = 2.$$

Поскольку под радикалами в левой части уравнения стоят полные квадраты, с учетом формулы (*), получим:

$$\left| t+1 \right| + \left| t-1 \right| = 2 .$$

Решим это уравнение и учтем ограничение (**):

$$0 \le t \le 1 .$$

Возвращаясь к исходному неизвестному, получим неравенство

$$0 \le \sqrt{x+1} \le 1 ,$$

решением которого является множество $\left[-1;0\right]$.

Ответ: $x \in \left[-1;0\right]$.

<u>Пример</u>**<u>36.</u>** Решить уравнение

$$x^2 - 4x\sqrt{x+1} + 8x - 8\sqrt{x+1} + 8 = 0 .$$

Решение. Преобразуем левую часть уравнения:

$$x^2 - 4x\sqrt{x+1} + 4\left(x+1\right) + 4x - 8\sqrt{x+1} + 4 = 0 ,$$

откуда $$\left(x - 2\sqrt{x+1}\right)^2 + 4\left(x - 2\sqrt{x+1}\right) + 4 = 0 .$$

Полученное выражение является квадратом разности:

$$\left(x - 2\sqrt{x+1} + 2\right)^2 = 0 ,$$

т.е. $$x + 1 - 2\sqrt{x+1} + 1 = 0 .$$

Данное выражение, в свою очередь, тоже является квадратом разности:

$$\left(\sqrt{x+1} - 1\right)^2 = 0,$$

откуда $$\sqrt{x+1} = 1 .$$

Корень данного уравнения $x = 0$ является корнем исходного уравнения.

Ответ: $x = 0$.

Задания для самостоятельного решения:

- $\sqrt{x^2 - 2x + 1} + \sqrt{x^2 - 4x + 4} = 1$;
- $\sqrt{x^2 - 6x + 9} + x = \sqrt{9 - 12x + 4x^2}$;
- $\sqrt{x^2 - 4x + 4} + \sqrt{x^2 + 4x + 4} = \sqrt{x^2 - 6x + 9}$;
- $\sqrt{x - 1 + 2\sqrt{x-2}} - \sqrt{x - 1 - 2\sqrt{x-2}} = 1$;

- $\sqrt{x^2+2\sqrt{x^2-1}}-\sqrt{x^2-2\sqrt{x^2-1}}=1$;
- $\sqrt{2x-2\sqrt{2x-1}}-2\sqrt{2x+3-4\sqrt{2x-1}}+3\sqrt{2x+8-6\sqrt{2x-1}}=4$;
- $5\sqrt{x^2-2x+1}-4\sqrt{x^2+6x+9}=11$;
- $\sqrt{x+\sqrt{6x-9}}+\sqrt{x-\sqrt{6x-9}}=\sqrt{6}$

Использование свойств функций

Иногда при решении уравнения $f(x)=g(x)$ оказывается полезным использовать некоторые свойства функций $f(x)$ и $g(x)$.

Так, если одна из функций убывает, а другая возрастает на промежутке X, то данное уравнение либо имеет один корень и тогда можно найти его по крайней мере подбором, либо не имеет корней.

Если функция $f(x)$ на промежутке X ограничена сверху числом A, а функция $g(x)$ снизу тем же числом, то уравнение $f(x)=g(x)$ равносильно системе уравнений

$$\begin{cases} f(x)=A, \\ g(x)=A \end{cases}.$$

<u>Пример</u> **<u>37.</u>** Решить уравнение

$$\sqrt[4]{x-1}+2\sqrt[3]{3x+2}=4+\sqrt{3-x}.$$

Решение. Найдем область допустимых значений уравнения:

$$\begin{cases} x-1\geq 0, \\ 3-x\geq 0, \end{cases}$$

откуда $x\in[1;\ 3]$. Подбором получим, что уравнение имеет корень $x=2$. Поскольку на области допустимых значений уравнения функция $y(x)=\sqrt[4]{x-1}+2\sqrt[3]{3x+2}$ возрастает, а функция $y(x)=4+\sqrt{3-x}$ убывает, то других корней уравнения не имеет.

Ответ: $x=2$.

ОСНОВНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ПОКАЗАТЕЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Решение любого показательного уравнения сводится к решению ***простейшего показательного уравнения*** – уравнению вида

$$a^{f(x)}=a^{g(x)}\ (a>0,\ a\neq 1).$$

Эти уравнения опираются на **теорему (*)**:

Если $a>0$, $a\neq 1$, то уравнение $a^{f(x)}=a^{g(x)}$ равносильно уравнению $f(x)=g(x)$.

Данная теорема отображает свойство степени: две степени с одинаковым положительным и отличным от единицы основанием равны тогда и только тогда, когда равны их показатели.

Приведение обеих частей уравнения к одному основанию

Этим методом решается большинство показательных уравнений. При этом используются формулы для преобразования показательных и степенных выражений.

***Пример*38.** Решить уравнение

$$4^x=8^{2x-3}$$

Решение. Приведем обе части уравнения к основанию 2:

$$4^x=\left(2^2\right)^x=2^{2x},$$

или $$8^{2x-3}=\left(2^3\right)^{2x-3}=2^{3\cdot(2x-3)}=2^{6x-9}.$$

Тогда исходное уравнение сводится к простейшему показательному уравнению:

$$2^{2x}=2^{6x-9},$$

откуда по теореме (*) получим:

$$2x=6x-9, \qquad x=9/4.$$

Ответ: $x=9/4$.

Задания для самостоятельного решения:

- $2^{x^2-3}\cdot 5^{x^2-3}=0,01\cdot\left(10^{x-1}\right)^3$;
- $32^{\frac{x+5}{x-7}}=0,25\cdot 128^{\frac{x+17}{x-3}}$;
- $\sqrt{3}\cdot 3^{\frac{x}{1+\sqrt{x}}}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{2+\sqrt{x}+x}{2(1+\sqrt{x})}}=81$;
- $8^{\frac{x-3}{3x-7}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{0,25^{\frac{3x-1}{x-1}}}}=1$;
- $0,6^x\cdot\left(\frac{25}{9}\right)^{x^2-12}=\left(\frac{27}{125}\right)^3$;
- $\left(\frac{3}{4}\right)^{x-1}\cdot\sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{2}{x}}}=\frac{9}{16}$;
- $\frac{1}{9}\cdot\sqrt[3]{27^{\frac{2x+1}{x}}}=\sqrt{9^{2x+1}}$;
- $\sqrt{2^x\sqrt[3]{4^x\cdot 0,125^{\frac{1}{x}}}}=4\sqrt[3]{2}$;
- $3^{1+\sin x+\sin^2 x+\ldots+\sin^n x}=\sqrt[3]{9}$

Логарифмирование обеих частей уравнения

Если левая и правая части показательного уравнения не сводятся к одному основанию, то, поскольку они положительны, их можно прологарифмировать по одному основанию.

<u>Пример</u> **<u>39.</u>** Решить уравнение

$$5^{2x-1}=7^{3-x}$$

Решение. Обе части уравнения положительны, поэтому их прологарифмируем по одному основанию, например, 10:

$$\lg 5^{2x-1}=\lg 7^{3-x}.$$

Применим свойства логарифмов:

$$(2x-1)\cdot \lg 5=(3-x)\cdot \lg 7 .$$

Выполнив элементарные преобразования, получим уравнение

$$x(2\lg 5+\lg 7)=3\lg 7+\lg 5 ,$$

корень которого $x=\dfrac{3\lg 7+\lg 5}{2\lg 5+\lg 7}$. Это выражение преобразуем, используя формулы: логарифма степени, логарифма произведения, перехода к другому основанию:

$$x=\frac{\lg 7^3+\lg 5}{\lg 5^2+\lg 7}=\frac{\lg(7^3\cdot 5)}{\lg(5^2\cdot 7)}=\frac{\lg 1715}{\lg 175}=\log_{175}1715 .$$

Ответ: $x=\log_{175}1715$.

Замечание. Предлагаем читателю решить это уравнение, прологарифмировав по другому основанию, и убедиться, в случае выполнения соответствующих преобразований, мы получим такой же ответ.

Задания для самостоятельного решения:

- $11^{x-7}=17^{7-x}$;
- $3^{x-3}=5^{x^2-7x+12}$;
- $7^{2x-1}=5^{3-x}$;
- $15^{\log_5 3}\cdot x^{\log_5 9x+1}=1$;
- $x^{2\lg^2 x}=10x^3$;
- $x^{\lg^2 x^2-3\lg x-4,5}=10^{-2\lg x}$;
- $\dfrac{1}{4}x^{\frac{1}{2}\log_2 x}=2^{\frac{1}{4}\log_2^2 x}$

Вынесение общего множителя за скобки

Уравнение вида

$$A_0a^{mx+k_0}+A_1a^{mx+k_1}+\ldots+A_na^{mx+k_n}=M ,$$

где $M, A_0, A_1, ..., A_n$, $a, m, k_0, k_1, ..., k_n$ – постоянные величины, решается вынесением за скобки общего множителя a^{mx+k_i}, где k_i – наименьшее из чисел $k_0, k_1, ..., k_n$.

***Пример*40.** Решить уравнение

$$5^{2x+1} - 3 \cdot 5^{2x-1} = 550$$

Решение. Вынесем в левой части уравнения выражение 5^{2x-1} за скобки:

$$5^{2x-1} \cdot (5^2 - 3) = 550,$$

откуда

$$5^{2x-1} = 5^2.$$

Решив его, найдем корень исходного уравнения $x = 3/2$.

Ответ: $x = 3/2$.

Задания для самостоятельного решения:

- $4^{x-1} + 4^x + 4^{x+1} = 84$;
- $2^{x+1} + 2^{x+3} + 2^x = 5^{x+1} - 5^x$;
- $2^{3\sqrt{x}} + 3 \cdot 2^{3\sqrt{x}-1} = 20$;
- $4^{2x} - 3^{2x-\frac{1}{2}} = 3^{2x+\frac{1}{2}} - 2^{4x-1}$;
- $3^{2x-5} + 3^{2x-7} + 3^{2x-9} = 45\frac{1}{2} + 22\frac{3}{4} + 11\frac{3}{8} + ...$

Замена переменной

Если показательное уравнение имеет вид

$$f(a^x) = 0,$$

где $f(x)$ – некоторая функция, то заменой

$$t = a^x,\ t > 0$$

оно сводится к уравнениям вида

$$a^x = t_i,$$

где t_i – корни уравнения $f(x) = 0$.

***Пример*41.** Решить уравнение

$$5\cdot 2^{3x-3}-3\cdot 2^{5-3x}+7=0$$

Решение. Используя свойства степени, перепишем уравнение в виде

$$\frac{5\cdot 2^{3x}}{2^3}-\frac{3\cdot 2^5}{2^{3x}}+7=0, \text{ или } \qquad \frac{5\cdot 2^{3x}}{8}-\frac{96}{2^{3x}}+7=0.$$

Обозначив

$$t=2^{3x},\ t>0 \qquad (*)$$

и проведя замену переменных, получим уравнение

$$\frac{5\cdot t}{8}-\frac{96}{t}+7=0,$$

которое, в свою очередь, сводится к квадратному уравнению

$$5t^2+56t-768=0,$$

корни которого: $t_1=-96/5$, $t_2=8$. Значение t_1 не удовлетворяет условию (*), поэтому решение исходного уравнения сведем к решению уравнения

$$2^{3x}=8,$$

откуда $x=1$, что является корнем исходного уравнения.

Ответ: $x=1$.

***Пример*42.** Решить уравнение

$$\left(\sqrt{4-\sqrt{15}}\right)^x+\left(\sqrt{4+\sqrt{15}}\right)^x=2.$$

Решение. Нетрудно заметить, что

$$\left(4-\sqrt{15}\right)\cdot\left(4+\sqrt{15}\right)=1,$$

т.е. числа $4-\sqrt{15}$ и $4+\sqrt{15}$, а, следовательно, и выражения $\left(\sqrt{4-\sqrt{15}}\right)^x$ и $\left(\sqrt{4+\sqrt{15}}\right)^x$, является взаимно обратными. Поэтому, обозначив

$$t=\left(\sqrt{4-\sqrt{15}}\right)^x,\ t>0 \qquad (*),$$

получим: $$t+\frac{1}{t}=2.$$

Поскольку $t\neq 0$, то, умножив обе части уравнения на *t*, после преобразований получим квадратное уравнение

$$t^2-2t+1=0,$$

откуда $t=1$. Это значение удовлетворяет условию (*), следовательно, получим уравнение

$$\left(\sqrt{4-\sqrt{15}}\right)^x=1.$$

Перейдем к одному основанию:

$$\left(4-\sqrt{15}\right)^{\frac{x}{2}}=\left(4-\sqrt{15}\right)^0,$$

откуда $x=0$.

Ответ: $x=0$.

Задания для самостоятельного решения:

- $5^x+5^{3-x}=30$;
- $\left(3+2\sqrt{2}\right)^x+\left(3-2\sqrt{2}\right)^x=6$;
- $\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x+\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x=4$;
- $\left(\sqrt{7+4\sqrt{3}}\right)^x+\left(\sqrt{7-4\sqrt{3}}\right)^x=14$;
- $7^{\cos^2 x}+7^{\sin^2 x}=8$;
- $\left|\,3^x-1\,\right|+\left|\,3^x-9\,\right|=8$

Трехчленные показательные уравнения

Уравнение вида

$$A_0a^{2f(x)}+A_1a^{f(x)}+A_2=0,$$

где A_0, A_1, A_2 – постоянные величины, называется ***трехчленным показательным уравнением***.

С помощью подстановки

$$t = a^{f(x)},\ t > 0$$

это уравнение преобразуется в квадратное уравнение

$$A_0 t^2 + A_1 t + A_2 = 0 .$$

Решив его, найдем корни t_1 и t_2. После этого решение уравнение сводится к решению совокупности уравнений

$$\left[\begin{array}{l} a^{f(x)} = t_1, \\ a^{f(x)} = t_2. \end{array}\right.$$

***Пример*43.** Решить уравнение

$$9^{x^2-1} - 36 \cdot 3^{x^2-3} + 3 = 0$$

Решение. Поскольку

$$9^{x^2-1} = \left(3^2\right)^{x^2-1} = \left(3^{x^2-1}\right)^2,$$

$$3^{x^2-3} = 3^{x^2-1-2} = \frac{3^{x^2-1}}{3^2} = \frac{1}{9} \cdot 3^{x^2-1},$$

исходное уравнение примет вид:

$$\left(3^{x^2-1}\right)^2 - 36 \cdot \frac{1}{9} \cdot 3^{x^2-1} + 3 = 0 .$$

Обозначив

$$t = 3^{x^2-1},\ t > 0 \qquad (***)$$

и проведя замену переменных, получим квадратное уравнение

$$t^2 - 4t + 3 = 0 ,$$

корни которого $t_1 = 1,\ \ t_2 = 3$. Оба значения переменной удовлетворяют условию (***), поэтому решение исходного уравнения сведем к решению совокупности уравнений

$$\left[\begin{array}{l} 3^{x^2-1} = 1, \\ 3^{x^2-1} = 3, \end{array}\right.$$

которая, в свою очередь, сводится к совокупности уравнений

$$\left[\begin{array}{l} x^2-1=0, \\ x^2-1=1, \end{array}\right.$$

корни которой $x_{1,2}=\pm 1$, $x_{3,4}=\pm\sqrt{2}$ являются корнями исходного уравнения.

Ответ: $x_{1,2}=\pm 1$, $x_{3,4}=\pm\sqrt{2}$.

Задания для самостоятельного решения:

- $7^{2x}-6\cdot 7^x+5=0$;
- $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x+2}-9\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{x+3}-2^{-1}=0$;
- $3^{1-x}-3^{1+x}+9^x+9^{-x}=6$;
- $9^{x^2-1}-36\cdot 3^{x^2-3}+3=0$;
- $64^{\frac{1}{x}}-2^{2+\frac{3}{x}}+12=0$;
- $3\cdot\sqrt[x]{81}-10\cdot\sqrt[x]{9}+3=0$;
- $\sqrt[x]{64}-\sqrt[x]{2^{3x+3}}+12=0$;
- $4^{\sqrt{3x^2-2x+1}}+2=9\cdot 2^{\sqrt{3x^2-2x}}$;
- $4^{x+\sqrt{x^2-2}}-5\cdot 2^{x-1+\sqrt{x^2-2}}=6$

Показательные уравнения вида
$$A_0a^{kx}+A_1(a\cdot q)^{kx}+A_2(a\cdot q^2)^{kx}=0$$

В уравнениях данного вида основания являются последовательными членами геометрической прогрессии, а показатели одинаковы. Решают эти уравнения делением на любой из крайних членов, что приводит их к уравнениям вида

$$g\left(a^{f(x)}\right)=0.$$

<u>Пример</u> **<u>44.</u>** Решить уравнение

$$3\cdot 16^x+36^x-2\cdot 81^x=0$$

Решение. Разделим обе части уравнения на $81^x \neq 0$:

$$3 \cdot \frac{16^x}{81^x} + \frac{36^x}{81^x} - 2 = 0.$$

С учетом свойств степени

$$3 \cdot \left(\frac{16}{81}\right)^x + \left(\frac{36}{81}\right)^x - 2 = 0, \text{ или } \qquad 3 \cdot \left(\frac{16}{81}\right)^x + \left(\frac{4}{9}\right)^x - 2 = 0.$$

Обозначив

$$t = \left(\frac{4}{9}\right)^x, \ t > 0 \qquad (***),$$

проведем замену переменных, получим квадратное уравнение

$$3t^2 + t - 2 = 0,$$

корни которого $t_1 = -1$, $t_2 = 2/3$. Значение t_1 не удовлетворяет условию (***), поэтому решение исходного уравнения сведем к решению уравнения

$$\left(\frac{4}{9}\right)^x = \frac{2}{3},$$

Используя свойства степени, получим простейшее показательное уравнение

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{2x} = \frac{2}{3},$$

откуда $\qquad 2x = 1,$

т.е. $x = 1/2$ является корнем исходного уравнения.

Ответ: $x = 1/2$.

Задания для самостоятельного решения:

- $6 \cdot 4^x - 13 \cdot 6^x + 6 \cdot 9^x = 0$;
- $27^x - 13 \cdot 9^x + 13 \cdot 3^{x+1} - 27 = 0$;
- $9^{\frac{1}{x}} + 12^{\frac{1}{x}} = 16^{\frac{1}{x}}$;
- $6 \cdot \sqrt[x]{9} - 13 \cdot \sqrt[x]{6} + 6 \cdot \sqrt[x]{4} = 0$;
- $3^{2x^2+6x-9} + 4 \cdot 15^{x^2+3x-5} = 3 \cdot 5^{2x^2+6x-9}$.

Однородные показательные уравнения

Уравнение вида

$$A_0 a^{2f(x)} + A_1 (ab)^{f(x)} + A_2 b^{2f(x)} = 0,$$

где A_0, A_1, A_2 – постоянные величины, называется ***однородным показательным уравнением***.

Деление обеих частей однородного уравнения на $a^{2f(x)}$ $\left(b^{2f(x)}\right)$ сводит его к квадратному уравнению относительно неизвестного

$$t = \left(\frac{a}{b}\right)^{f(x)} \text{ или } t = \left(\frac{b}{a}\right)^{f(x)}, \; t > 0.$$

<u>Пример</u>**<u>45.</u>** Решить уравнение

$$4 \cdot 2^{2x} - 6^x = 18 \cdot 3^{2x}$$

Решение. Запишем уравнение в виде:

$$4 \cdot 2^{2x} - (2 \cdot 3)^x - 18 \cdot 3^{2x} = 0.$$

Разделим обе части уравнения на $3^{2x} \neq 0$:

$$4 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{2x} - \left(\frac{2}{3}\right)^x - 18 = 0.$$

Обозначив

$$t = \left(\frac{2}{3}\right)^x, \; t > 0 \qquad (*)$$

и проведя замену переменных, получим квадратное уравнение

$$4t^2 - t - 18 = 0,$$

корни которого $t_1 = -2$, $t_2 = 9/4$. Значение t_1 не удовлетворяет условию (*), поэтому решение исходного уравнения сведем к решению уравнения

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{9}{4}.$$

Получим простейшее показательное уравнение

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{2}{3}\right)^{-2},$$

откуда $x = -2$ является корнем исходного уравнения.

Ответ: $x = -2$.

<u>Пример</u>**<u>46.</u>** Решить уравнение

$$6^x + 4^x = 9^x.$$

Решение. Представив уравнение в виде

$$3^x \cdot 2^x + 2^x \cdot 2^x = 3^x \cdot 3^x,$$

или
$$\left(3^x\right)^2 - 3^x \cdot 2^x - \left(2^x\right)^2 = 0,$$

можно рассматривать его как однородное. Разделим обе части уравнения на $\left(2^x\right)^2 \neq 0$:

$$\left(\left(\frac{3}{2}\right)^x\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^x - 1 = 0.$$

Обозначив

$$t = \left(\frac{3}{2}\right)^x, \ t > 0 \qquad (*)$$

и проведя замену переменных, получим квадратное уравнение

$$t^2 - t - 1 = 0,$$

корни которого $t_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Условию (*) удовлетворяет только значение $t = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. Поэтому решение исходного уравнения сведем к решению уравнения

$$\left(\frac{3}{2}\right)^x = \frac{1+\sqrt{5}}{2},$$

откуда $x = \log_{\frac{3}{2}}\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$ является корнем исходного уравнения.

Ответ: $x=\log_{\frac{3}{2}}\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$.

Задания для самостоятельного решения:

- $4\cdot 9^x-7\cdot 12^x+3\cdot 16^x=0$;
- $3^{2x+1}-2\cdot 15^x-5^{2x+1}=0$;
- $3^{2x^2+6x-9}+4\cdot 15^{x^2+3x-5}=3\cdot 5^{2x^2+6x-9}$;
- $3^{2x^2-6x+3}+6^{x^2-3x+1}=2^{2x^2-6x+3}$;
- $10\cdot 4^x-9\cdot 2^x\cdot\left(4^x+1\right)+2\cdot\left(16^x+2\cdot 4^x+1\right)=0$

Применение основного логарифмического тождества

Некоторые уравнения сводятся к рассмотренным выше уравнениям, если преобразовать отдельные их элементы, использовав основное логарифмическое тождество

$$a^{\log_a b}=b\ \ (a>0,\ a\neq 1,\ b>0).$$

<u>Пример</u> **<u>47.</u>** Решить уравнение

$$3^{\log_3^2 x}+x^{\log_3 x}=162$$

Решение. Преобразуем первое слагаемое в уравнении:

$$3^{\log_3^2 x}=\left(3^{\log_3 x}\right)^{\log_3 x}=x^{\log_3 x}.$$

Подставим полученное выражение в исходное уравнение:

$$x^{\log_3 x}+x^{\log_3 x}=162,$$

или $\qquad 2\cdot x^{\log_3 x}=162, \qquad x^{\log_3 x}=81.$

Прологарифмируем это уравнение по основанию 3:

$$\log_3\left(x^{\log_3 x}\right)=\log_3 81.$$

Тогда, используя определение и свойства логарифма, получим:

$$\log_3^2 x = 4,$$

а это уравнение эквивалентно совокупности уравнений

$$\left[\begin{array}{l}\log_3 x = 2,\\ \log_3 x = -2.\end{array}\right.$$

Решив ее, найдем корни исходного уравнения: $x_1 = 9$, $x_2 = 1/9$.

Ответ: $x_1 = 9$, $x_2 = 1/9$.

Задания для самостоятельного решения:

- $6^{\log_6^2 x} + x^{\log_6 x} = 12$;
- $2^{\log_2^2 x} + x^{\log_2 x} = 32$;
- $10^{\lg^2 x} + x^{\lg x} = 20$;
- $2^{\log_2(x^2+5x-6)} = 4x$;
- $5^{\lg x} = 50 - x^{\lg 5}$;
- $x^{2\lg 2} - 5 \cdot 2^{\lg x} + 6 = 0$

Использование свойств показательной функции

Решение некоторых уравнений, содержащие неизвестное в показателе степени, предполагает исследование функций, входящие в обе части уравнения.

<u>Пример</u> **<u>48.</u>** Решить уравнение

$$7^{6-x} = x + 2$$

Решение. Корень $x = 5$ найдем подбором. Функция $y = 7^{6-x}$ монотонно убывает, а функция $g(x) = x + 2$ монотонно возрастает. Следовательно, графики этих функций могут пересекаться не более одного раза. Таким образом, других решений уравнение не имеет.

Ответ: $x = 5$.

<u>Пример</u> **<u>49.</u>** Решить уравнение

$$3^x + 4^x = 5^x.$$

Решение. Найдем подбором корень уравнения: $x=2$. Разделим обе части уравнения на $5^x \neq 0$:

$$\left(\frac{3}{5}\right)^x+\left(\frac{4}{5}\right)^x=1.$$

Поскольку функция $y(x)=\left(\frac{3}{5}\right)^x+\left(\frac{4}{5}\right)^x$ монотонно убывает, а функция $y(x)=1$ является постоянной, то графики этих функций могут пересекаться не более одного раза. Таким образом, уравнение имеет один корень.

Ответ: $x=2$.

Задание для самостоятельного решения:

- $5^x+12^x=13^x$

РЕШЕНИЕ ПОКАЗАТЕЛЬНО-СТЕПЕННЫХ УРАВНЕНИЙ

Показательно-степенные уравнения – уравнения вида

$$f(x)^{g(x)}=f(x)^{m(x)}.$$

Если известно, что $f(x)>0$, $f(x)\neq 1$, то необходимо приравнять показатели, т.е. решить уравнение

$$f(x)=m(x).$$

Если условие не исключает возможности $f(x)\leq 0$, $f(x)=1$, то необходимо рассматривать следующие случаи:

1) $f(x)=1$; 2) $\begin{cases} f(x)=-1; \\ g(x)\in Z; \\ m(x)\in Z; \\ g(x),\ m(x) - \text{одной четности}; \end{cases}$

3) $\begin{cases} f(x)=0; \\ g(x)>0; \\ m(x)>0; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} f(x)>0, \\ f(x)\neq 1, \\ g(x)=m(x); \end{cases}$ 5) $\begin{cases} f(x)<0, \\ f(x)\neq -1, \\ g(x)=m(x). \end{cases}$

В последнем случае необходима проверка.

<u>Пример</u> **<u>50.</u>** Решить уравнение

$$(3x-4)^{2x^2+2}=(3x-4)^{5x}.$$

Решение. Поскольку условие не исключает ситуацию, когда $3x-4\le 0$, $3x-4=1$, необходимо рассмотреть указанные выше ситуации.

1) $3x-4=1$.

В этом случае исходное уравнение принимает следующий вид:

$$1^{2x^2+2}=1^{5x},$$

т.е. $1=1$. Значит, корни данного уравнения являются также корнями исходного уравнения. Итак, $x_1=5/3$ – первый корень исходного уравнения.

2) $3x-4=-1$, откуда $x=1$.

В этом случае исходное уравнение принимает следующий вид:

$$(-1)^{2x^2+2}=(-1)^{5x}.$$

Этому уравнению могут удовлетворять только такие значения x, при которых показатели $2x^2+2$ и $5x$ – целые числа. $x=1$ удовлетворяет этому условию. Однако числа $2x^2+2$ и $5x$ для $x=1$ имеют разную четность. Таким образом, $x=1$ не является корнем исходного уравнения.

3) $3x-4=0$, откуда $x=4/3$.

В этом случае исходное уравнение принимает следующий вид:

$$0^{2x^2+2}=0^{5x}.$$

Этому уравнению могут удовлетворять только такие значения x, при которых $2x^2+2>0$ (это верно для всех $x\in R$), $5x>0$, т.е. только положительные значения. Поскольку найденный корень $4/3>0$, найдем еще один корень исходного уравнения $x_2=4/3$.

4) Если $3x-4>0$, $3x-4\ne 1$, то от исходного уравнения придем к уравнению-следствию $2x^2+2=5x$, корни которого $x_1=1/2$, $x_2=2$. Корень x_1 не удовлетворяет условию $3x-4>0$, поэтому не является корнем исходного уравнения. Таким образом, мы найдем еще один корень исходного уравнения $x_3=2$.

5) Если $3x-4<0$, $3x-4\ne -1$, то вновь от исходного уравнения придем к уравнению-следствию $2x^2+2=5x$, откуда

найдем $x_1 = 1/2$, $x_2 = 2$. Корень $x_2 = 2$ не удовлетворяет условию $3x - 4 < 0$, поэтому не является корнем исходного уравнения. Для x_1 выполним проверку:

$$\left(3 \cdot \frac{1}{2} - 4\right)^{2 \cdot (\frac{1}{2})^2 + 2} = \left(3 \cdot \frac{1}{2} - 4\right)^{5 \cdot \frac{1}{2}},$$

$$\text{или } (-2,5)^{4,25} = (-2,5)^{2,5}$$

– неверное равенство (возведение отрицательного числа в дробную степень не существует). Следовательно, $x_1 = 1/2$ также не является корнем исходного уравнения.

Итак, учитывая случаи 1)–5), делаем вывод, что исходное уравнение имеет три корня: $x_1 = 5/3$, $x_2 = 4/3$, $x_3 = 2$.

Ответ: $x_1 = 5/3$, $x_2 = 4/3$, $x_3 = 2$.

Задания для самостоятельного решения:

- $(x+4)^{x^2+9x+8} = 1$;
- $\left(x^2 + x - 57\right)^{3x^2+3} = \left(x^2 + x - 57\right)^{10x}$;
- $(3x-4)^{2x^2+2} = (3x-4)^{5x}$;
- $x^x = x$;
- $|x|^{x^2-2x} = 1$;
- $x^{\sqrt{x}} = \left(\sqrt{x}\right)^x$;
- $x^{\sqrt[3]{x^2}} = \left(\sqrt{x}\right)^x$;
- $(x+1)^{x^2-x} = (x+1)^2$;
- $|\, x-3 \,|^{3-x} = |\, 3-x \,|^{x-3}$;
- $\left(x^2-4\right)^x = (3x+6)^x$

ОСНОВНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЛОГАРИФМИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Логарифмическими уравнениями называются уравнения, содержащие неизвестное под знаком логарифма или в его основании (или то и другое одновременно).

Решение всех логарифмических уравнений сводится к решению ***простейших логарифмических уравнений*** – уравнений вида

$$\log_a x = b \ \ (a > 0,\ a \neq 1).$$

Их решение опирается на одно из важнейших свойств логарифмов:

$$(\log_a m = \log_a n) \Rightarrow (m = n), \text{ где } a > 0,\ a \neq 1,\ m > 0, n > 0\ .$$

При решении логарифмических уравнений используются три основных метода: метод потенцирования, метод замены переменных, метод логарифмирования.

Потенцирование

Этот метод представляет собой переход от уравнения

$$\log_a f(x) = \log_a g(x), \text{ где } a > 0,\ a \neq 1,$$

к уравнению-следствию

$$f(x) = g(x).$$

При этом необходимо убедиться, входят ли корни данного уравнения в область допустимых значений исходного уравнения, которая задается системой неравенств

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0. \end{cases}$$

<u>Пример</u>**<u>51.</u>** Решить уравнение

$$\log_3(x^2 - 4x + 3) = \log_3(3x + 21).$$

Решение. Область допустимых значений уравнения задается системой неравенств

$$\begin{cases} x^2 - 4x + 3 > 0, \\ 3x + 21 > 0, \end{cases}$$

откуда $x \in (-7;1) \cup (3;+\infty)$. Перейдем к уравнению-следствию

$$x^2 - 4x + 3 = 3x + 21,$$

корни которого $x_1 = -2$, $x_2 = 9$ входят в область допустимых значений исходного уравнения, следовательно, являются корнями исходного уравнения.

Ответ: $x_1 = -2$, $x_2 = 9$.

Если уравнение содержит неизвестную не только под знаком логарифма, но и в основании логарифма, т.е. имеет вид

$$\log_{m(x)} f(x) = \log_{m(x)} g(x),$$

то система, задающая область допустимых значений уравнения, пополняется еще двумя неравенствами:

$$m(x) > 0,\ m(x) \neq 1,$$

т.е. принимает следующий вид:

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ m(x) > 0, \\ m(x) \neq 1. \end{cases}$$

<u>Пример</u>**<u>52.</u>** Решить уравнение

$$\log_{x^2-1}(x^3 + 6) = \log_{x^2-1}(4x^2 - x).$$

Решение. Область допустимых значений уравнения задается системой неравенств:

$$\begin{cases} x^3 + 6 > 0, \\ 4x^2 - x > 0, \\ x^2 - 1 > 0, \\ x^2 - 1 \neq 1. \end{cases}$$

Перейдем к уравнению-следствию:

$$x^3 + 6 = 4x^2 - x.$$

Оно имеет три корня: $x_1 = -1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$. Число x_1 не удовлетворяет неравенствам системы, т.е. корнями исходного уравнения являются числа $x_1 = 2$, $x_2 = 3$.

Ответ: $x_1 = 2$, $x_2 = 3$.

Уравнение вида

$$\log_{g(x)} f(x) = n$$

равносильно смешанной системе

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ g(x) \neq 1, \\ f(x) = g(x)^n, \end{cases}$$

где неравенства системы задают область его допустимых значений.

<u>Пример</u>**<u>53.</u>** Решить уравнение

$$\log_x (2x^2 - 3x - 4) = 2$$

Решение. Найдем область допустимых значений уравнения:

$$\begin{cases} 2x^2 - 3x - 4 > 0, \\ x > 0, \\ x \neq 1, \end{cases}$$

откуда $x \in \left(\dfrac{3 + \sqrt{41}}{4}; +\infty \right)$. Решим уравнение-следствие

$$2x^2 - 3x - 4 = x^2.$$

Из двух его корней $x_1 = -1$ и $x_2 = 4$ только x_2 удовлетворяет области допустимых значений исходного уравнения, следовательно, является его корнем.

Ответ: $x = 4$.

Задания для самостоятельного решения:

- $\log_{0,1} \dfrac{2x^2 - 54}{x + 3} = \log_{0,1} (x - 4)$;
- $\log_4 (x^2 + 3x - 4) = \log_4 \dfrac{x - 1}{x - 4}$;

- $1-\lg 5=\frac{1}{3}\left(\lg\frac{1}{2}+\lg x+\frac{1}{3}\lg 5\right)$;
- $\log_{1/3}\left(-\frac{1}{x}\right)=2$
- $\log_2^2(4x)-\log_2^2(2x)=1$;
- $0,2\log_x\frac{1}{32}=-0,5$;
- $\log_{4x+1}7+\log_{9x}7=0$;
- $\log_{x^2}16+\log_{2x}64=3$;
- $\log_2\log_2(5x-4)=1+\log_2\log_2 x$;
- $\log_4(x+12)\cdot\log_x 2=1$;
- $\log_{\log_3 x}3=2$;
- $\lg\sqrt{x-1}+\frac{1}{2}\lg(2x+15)=1$;
- $\log_{x^2+6x+8}\left(\log_{2x^2+2x+3}(x^2-2x)\right)=0$;
- $\lg 2x=2\lg(4x-15)$;
- $\frac{1}{2}\log_5(x+5)+\log_5\sqrt{x-3}=\frac{1}{2}\log_5(2x+1)$;
- $2-x+3\log_5 2=\log_5\left(3^x-5^{2-x}\right)$;
- $\log_{\frac{5+x}{3}}3=\log_{-\frac{1}{x+1}}3$

Использование различных логарифмических формул в процессе преобразования уравнений может привести как к появлению посторонних корней, так и к потере корней исходного уравнения.

В процессе преобразования логарифмических уравнений чаще всего используются следующие формулы:

1) $\log_a(fg)=\log_a f+\log_a g$;

2) $\log_a \frac{f}{g} = \log_a f - \log_a g$;

3) $\log_a f^n = n\log_a f$;

4) $\log_{a^m} f^n = \frac{n}{m}\log_a f$

(где *f* и *g* – некоторые функции, $a > 0,\ a \neq 1, f > 0,\ g > 0$).

Используя любую из этих формул формально (без учета неравенств $f > 0,\ g > 0$), необходимо учитывать, что область допустимых значений левой и правой частей каждой из них могут отличаться.

Таким образом, преобразование уравнения с формальным использованием формул 1–4 "справа – налево" приводит к уравнению, являющемуся следствием исходного уравнения (его область допустимых значений может оказаться шире). В этом случае могут появиться посторонние корни исходного уравнения. Поэтому в конце решения необходимо проверять принадлежность каждого корня последнего уравнения области допустимых значений исходного уравнения.

Преобразование уравнения с использованием формул 1–4 "слева – направо" часто приводят к уравнению, область допустимых значений которого уже области допустимых значений исходного уравнения, и, как следствие, возможна потеря корней исходного уравнения. Во избежание этого, необходимо использовать более общие формулы:

Для функций *f* и *g*, $a > 0,\ a \neq 1, f \neq 0,\ g \neq 0$:

1) $\log_a (fg) = \log_a |f| + \log_a |g|$;

2) $\log_a \frac{f}{g} = \log_a |f| - \log_a |g|$;

3) $\log_a f^{2n} = 2n\log_a |f|$;

4) $\log_{a^{2m}} f^{2n} = \frac{n}{m}\log_{|a|} |f|$.

Область допустимых значений правой части этих формул может быть шире области допустимых значений левой части.

Таким образом, преобразование уравнения с использованием этих формул «слева – направо» приводит к уравнению, являющемуся следствием исходного уравнения. Преобразование уравнения с формальным использованием формул «справа – налево» может привести к потере корней.

***Пример* 54.** Решить уравнение

$$\frac{3}{2}\log_{1/4}(x+2)^2-3=\log_{1/4}(4-x)^3-\log_4(x+6)^3$$

Решение. Область допустимых значений уравнения задается системой

$$\begin{cases}(x+2)^2>0,\\(4-x)^3>0,\\(x+6)^3>0,\end{cases} \text{ или } \qquad \begin{cases}x+2\neq 0,\\4-x>0,\\x+6>0.\end{cases}$$

Решив систему, получим множество $(-6;-2)\cup(-2;4)$. Перейдем в уравнении к основанию $1/4$ и используем формулу логарифма степени:

$$3\log_{1/4}|\,x+2\,|-3=3\log_{1/4}(4-x)+3\log_{1/4}(x+6).$$

Отметим, что при этом область допустимых значений исходного уравнения не изменилось: на нем исходное и полученное уравнения равносильны. Полученное уравнение на области допустимых значений равносильно уравнению:

$$3\log_{1/4}|\,x+2\,|-3=3\log_{1/4}(4-x)+3\log_{1/4}(x+6).$$

Преобразовав данное уравнение и используя свойства логарифмов, получим:

$$4|\,x+2\,|=(4-x)(x+6).$$

Это уравнение равносильно совокупности двух систем:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}-2<x<4,\\4(x+2)=(4-x)(6+x),\end{cases}\\ \begin{cases}-6<x<-2,\\-4(x+2)=(4-x)(x+6),\end{cases}\end{array}\right. \text{ или } \qquad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}-2<x<4,\\x^2+6x-16=0,\end{cases}\\ \begin{cases}-6<x<-2,\\x^2-2x-32=0.\end{cases}\end{array}\right.$$

Первая система имеет решение $x_1 = 2$, вторая – решение $x_2 = 1 - \sqrt{33}$. Два этих числа составляют множество всех решений исходного уравнения.

Ответ: $x_1 = 2;\ x_2 = 1 - \sqrt{33}$.

При решении уравнений формальное использование формулы перехода к другому основанию может привести к потере корней или появлению посторонних корней. Причина этого – то, что левая и правая части имеют разные области существования. Поэтому каждый раз, когда возникает потребность использования формулы перехода к другому основанию, лучше перейти к основанию, равному некоторому числу.

Задания для самостоятельного решения:

- $\log_2^2 (x-1)^2 = 5 + \log_{0,5}(x-1)$;
- $\log_5^4 (x-1)^2 + \log_5^2 (x-1)^3 = 25$;
- $\lg x^2 - \lg^2(-x) = 4$;
- $\lg^2 x - \lg x^4 = \lg^2 5 - 4$;
- $\log_2^2 (2-x) - \log_2 (x-2)^2 + 3\log_2 |x-2| = 2$

Замена переменной

Если логарифмическое уравнение имеет вид

$$f(\log_a x) = 0,$$

где $f(x)$ – некоторая функция, то заменой

$$y = \log_a x$$

оно сводится к уравнениям вида

$$\log_a x = y_i,$$

где y_i – корни уравнения $f(x) = 0$.

<u>Пример 55.</u> Решить уравнение

$$\lg^3 x - \lg^2 x - 6\lg x = 0$$

Решение. Область допустимых значений уравнения $-\ x \in R_+$. Обозначив

$$y = \lg x,$$

получим уравнение:

$$y^3 - y^2 - 6y = 0,$$

корни которого: $y_1 = -2,$. $y_2 = 0,\ \ y_3 = 3$. Таким образом, исходное уравнение эквивалентно совокупности уравнений

$$\left[\begin{array}{l} \lg x = -2, \\ \lg x = 0, \\ \lg x = 3, \end{array}\right.$$

корни которой $x_1 = 0{,}01;\ \ x_2 = 1;\ \ x_3 = 1000$ являются корнями исходного уравнения.

Ответ: $x_1 = 0{,}01;\ x_2 = 1;\ x_3 = 1000$.

<u>Пример 56.</u> Решить уравнение

$$\lg^2(x+1) = \lg(x+1)\lg(x-1) + 2\lg^2(x-1)$$

Решение. Это уравнение – пример ***однородного логарифмического уравнения***. Запишем это уравнение в виде:

$$\lg^2(x+1) - \lg(x+1)\lg(x-1) - 2\lg^2(x-1) = 0.$$

Учитывая то, что корни уравнения $\lg^2(x-1) = 0$ не являются корнями исходного уравнения, разделим обе части уравнения на $\lg^2(x-1)$:

$$\frac{\lg^2(x+1)}{\lg^2(x-1)} - \frac{\lg(x+1)}{\lg(x-1)} - 2 = 0.$$

Обозначив

$$t = \frac{\lg(x+1)}{\lg(x-1)} \qquad (*)$$

и проведя замену переменных, получим квадратное уравнение

$$t^2 - t - 2 = 0,$$

корни которого $t_1 = -1,\ \ t_2 = 2$. Таким образом, исходное уравнение эквивалентно совокупности уравнений

$$\left[\begin{array}{l}\dfrac{\lg(x+1)}{\lg(x-1)}=-1,\\ \dfrac{\lg(x+1)}{\lg(x-1)}=2,\end{array}\right.$$

или, учитывая то, что $\lg^2(x-1)\neq 0$ и $\lg^2(x-1)\neq 0$,

$$\left[\begin{array}{l}\lg(x+1)=-\lg(x-1),\\ \lg(x+1)=2\lg(x-1),\end{array}\right.$$

Область допустимых значений каждого из уравнений, а, следовательно, и совокупности, задается системой неравенств

$$\begin{cases}x+1>0,\\ x-1>0,\end{cases}$$

откуда $x\in(1;+\infty)$. Упростим последнюю совокупность уравнений:

$$\left[\begin{array}{l}x+1=-\dfrac{1}{x-1},\\ x+1=(x-1)^2.\end{array}\right.$$

Корни данной совокупности: $x_1=0$; $x_2=3$; $x_3=\sqrt{2}$; $x_4=-\sqrt{2}$. Поскольку $x_1,x_4\notin(1;+\infty)$, то исходное уравнение имеет два корня: $x_1=3$, $x_2=\sqrt{2}$.

Ответ: $x_1=3$, $x_2=\sqrt{2}$.

Задания для самостоятельного решения:

- $4-\lg x=3\sqrt{\lg x}$;
- $\dfrac{1}{5-4\lg x}+\dfrac{4}{1+\lg x}=3$;
- $\log_x^3 10-\log_x^2 10-6\log_x 10=0$;
- $\log_8 x+\log_8^2 x+\log_8^3 x+\ldots=\dfrac{1}{2}$;
- $2\cdot\sqrt[3]{2\log_{16}^2 x}-\sqrt[3]{\log_2 x}-6=0$;
- $\lg^2 x^3-\lg(0{,}1x^{10})=0$;
- $\sqrt{1+\log_x\sqrt{27}}\cdot\log_3 x+1=0$;

- $\sqrt{\log_2 x} - 0,5 = \log_2 \sqrt{x}$;
- $\sqrt{\log_{0,04} x + 1} + \sqrt{\log_{0,2} x + 3} = 1$

Логарифмирование

Если неизвестное входит в уравнение и под знаком логарифма, и в основании степени, то в некоторых случаях уравнения данного типа могут решаться логарифмированием обеих его частей с последующим использованием приведенных выше методов решения логарифмических уравнений.

***Пример*57.** Решить уравнение

$$x^{2\lg^2 x} = 10x^3 .$$

Решение. Область допустимых значений уравнения – $x \in R_+$. Прологарифмируем обе части уравнения по основанию 10:

$$\lg\left(x^{2\lg^2 x}\right) = \lg(10x^3) .$$

Используя свойства логарифмов, получим уравнение:

$$2\lg^2 x \cdot \lg x = \lg 10 + 3\lg x .$$

Обозначив

$$\lg x = t ,$$

найдем корни уравнения

$$2t^3 - 3t - 1 = 0 :$$

$$t_1 = -1,\ \ t_{2,3} = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2} .$$

Таким образом, исходное уравнение эквивалентно совокупности уравнений

$$\left[\begin{array}{l} \lg x = -1, \\ \lg x = \dfrac{1-\sqrt{3}}{2}, \\ \lg x = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}, \end{array}\right.$$

корни которой $x_1=10^{-1}$; $x_{2,3}=10^{\frac{1\pm\sqrt{3}}{2}}$ входят в область допустимых значений исходного уравнения и, следовательно, являются корнями исходного уравнения.

Ответ: $x_1=10^{-1}$; $x_{2,3}=10^{\frac{1\pm\sqrt{3}}{2}}$.

Задания для самостоятельного решения:

- $x^{2+\log_3 x}=3^8$;
- $\frac{1}{4}x^{\frac{1}{2}\log_2 x}=2^{\frac{1}{4}\log_2^2 x}$;
- $15^{\log_5 3}x^{\log_5 9x+1}=1$;
- $9x^{\lg x}+9x^{-\lg x}=60$;
- $x^{\log_2^2(x^2)-\log_2(2x)-2}-(x+2)^{\log_{(x+2)^2}4}=3$

Использование свойств логарифмической функции

При решении некоторых логарифмических уравнений необходимо провести исследование поведения функций, входящих в обе части уравнения.

__Пример__ **__58.__** Решить уравнение

$$\log_7(x+5)=\log_{1/2}x+4.$$

Решение. Область допустимых значений уравнения задается системой неравенств

$$\begin{cases} x+5>0, \\ x>0, \end{cases}$$

откуда $x\in(0;+\infty)$. Подстановкой убедимся, что $x=4$ является корнем уравнения. Докажем его единственность. Действительно, функция $y=\log_3(x+5)$ возрастает на всей области допустимых значений уравнения, а функция $y=\log_{1/2}x+4$ убывает при всех $x\in(0;+\infty)$. Поэтому:

для всех $x \in (4; +\infty)$ $y(x) > y(4),\ g(x) < g(4) = y(4)$;

для всех $x \in (0; 4)$ $y(x) < y(4),\ g(x) > g(4) = y(4)$.

Следовательно, других корней уравнение не имеет.

Ответ: $x = 4$.

<u>Пример</u> **<u>59.</u>** Решить уравнение

$$\log_7(x+2) = 6 - x$$

Решение. Подстановкой убедимся, что $x = 5$ является корнем уравнения. Функция, стоящая в левой части, возрастает, функция, стоящая в правой части, – убывает, и, как следствие, графики этих функций не могут иметь более одной точки пересечения. Таким образом, других корней уравнение не имеет.

Ответ: $x = 5$.

Задания для самостоятельного решения:

- $3^x = 10 - \log_2 x$;
- $\log_2 x = 3 - x$;
- $\log_2^2 x + (x-1)\log_2 x = 6 - 2x$;
- $\log_2(1+\sqrt{x}) = \log_3 x$

Итак, при решении любого уравнения необходимо руководствоваться следующим правилом: решение каждого уравнения необходимо осуществлять не механически, не оставлять вне внимания ни один переход, где возможна потеря корней или появление посторонних корней. Преобразования, допускающие потерю корней, лучше не использовать. Если приходится выполнять преобразования, которые могут привести к появлению посторонних корней, то в конце решения необходимо провести исследование (например, сделать проверку) по отбору корней, которое в данном случае является необходимой частью решения уравнения, а не просто дополнительным контролем вычислений. Иногда в процессе решения имеет смысл разбить область допустимых значений уравнения на несколько частей и на каждой из них решать уравнение отдельно. Наиболее эффективным при решении уравнений является метод равносильного перехода.

Решение каждого уравнения должно быть оформлено как доказательство теоремы о том, что данному уравнению удовлетворяют те и только те числа, которые указаны в ответе (или о том, что уравнение корней не имеет).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Алгебра, тригонометрия и элементарные функции: учебное пособие для пед. вузов / М.К. Потапов, В.В. Александров, П.И. Пасиченко. – М.: Высшая школа, 2001. – 734 с.

2. Алексеев В.М. Элементарная математика. Решение задач / В.М. Алексеев. – К .: Вища школа. Головное изд-во, 1983. – 351 с.

3. Башмаков М.И. Уравнения и неравенства / М.И. Башмаков. – М.: Наука, 1976.

4. Бородуля И.Т. Показательные и логарифмические уравнения и неравенства / И.Т. Бородуля. – М.: Просвещение, 1968.

5. Завало С.Т. Рівняння та нерівності / С.Т. Завало. – К.: Радянська школа, 1973.

6. Задачи по математике. Уравнения и неравенства / В.В. Вавилов, И.И. Мельников, С.Н. Олехник, П.И. Пасиченко. – М.: Наука, 1988. – 240 с.

7. Каплан Я.Л. Рівняння / Я.Л. Каплан. – К.: Радянська школа, 1968. – 406 с.

8. Литвиненко В.Н. Практикум по элементарной математике. Алгебра, тригонометрия / В.Н. Литвиненко, А.Г. Мордкович. – М.: Просвещение, 1991. – 352 с.

9. Любецкий В.А. Основные понятия элементарной математики: учеб. пособие по курсу «Элементарная математика» для пед. ин-тов и ун-тов / В.А. Любецкий. – М.: Айрис Пресс, 2004 .– 624 с.

10. Практикум з розв’язування задач з математики / Під ред. В.І. Михайловського. – К.: Вища школа, 1978. – 480 с.

11. Сборник задач по математике для поступающих во втузы / Под ред. М.И. Сканави. – М.: Высшая школа, 1992. – 528 с.

12. Талочкин П. Б. Неравенства и уравнения / П.Б. Талочкин. – М.: Просвещение, 1970.

13. Цыпкин А. Г. Справочник по методам решения задач по математике / А.Г. Цыпкин, А.И. Пинский. – М.: Наука, 1989. – 576 с.

Учебное издание

ЖОВТАН Людмила Васильевна

ИЗБРАННЫЕ ГЛАВЫ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ.

Часть 1.
УРАВНЕНИЯ

Учебно-методическое пособие
для студентов очной и заочной форм обучения
по направлениям подготовки
01.03.01 «Математика»,
44.03.05 «Педагогическое образование
(с двумя профилями). Профили: математика и информатика»

В авторской редакции
Редактор – Жовтан Л.В.
Дизайн обложки – Жовтан Л.В.
Корректор – Понасенко А.В.
Верстка – Жовтан Л.В.

Подписано в печать 07.04.2017. Бумага офсетная.
Гарнитура Times New Roman. Печать ризографическая.
Формат 60х84/16. Усл. печ.л. 4,88.
Тираж 50 экз. Заказ. № 11.

Издатель
Издательство ГОУ ВПО ЛНР
«Луганский национальный университет имени Тараса Шевченко»
«Книта»
ул. Оборонная, 2, г. Луганск, ЛНР, 91011.
Т/ф: (0642)58-03-20
e-mail: knitaizd@mail.ru