МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

ЧАСТЬ I

О. Н. Ие, А. В. Скринникова

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
ЛУГАНСКОЙ НАРОДНОЙ РЕСПУБЛИКИ

ГОУ ВПО ЛНР «ЛУГАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ ТАРАСА ШЕВЧЕНКО»

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

ЧАСТЬ I

О. Н. Ие, А. В. Скринникова

Учебно-методическое пособие
для студентов I курса
дневной и заочной форм обучения
по специальностям «Математика» и
«Системный анализ»

Луганск
2016

УДК 517 (075.8)
ББК 22.161 я 73
М 34

Р е ц е н з е н т ы:

Малый В.В. – заведующий кафедрой прикладной математики ГОУ ВПО ЛНР «Луганский государственный университет имени Владимира Даля», кандидат технических наук, доцент

Швыров В.В. – доцент кафедры информационных технологий и систем ГОУ ВПО ЛНР «Луганский государственный университет имени Тараса Шевченко», кандидат физико-математических наук, доцент

Кривко Я.П. – доцент кафедры фундаментальной математики ГОУ ВПО ЛНР «Луганский государственный университет имени Тараса Шевченко», кандидат педагогических наук, доцент

М 34 **Математический анализ:** учебно-методическое пособие; в 2-х ч. / сост. : О. Н. Ие, А. В. Скринникова. Ч.1. – Луганск : Копиртехсервис, 2016. – 198 с.

Учебно-методическое пособие содержит необходимый теоретический материал и практические задания по четырем темам: «Предел и непрерывность», «Дифференциальное исчисление функций одной переменной», «Неопределенный интеграл», «Определенный и несобственный интеграл». Практическая часть состоит из двух контрольных работ, каждая из которых содержит 20 однотипных заданий. Также приводятся подробные решения типовых задач для каждой темы.

Пособие полностью соответствуют программе курса «Математический анализ» по специальностям «Математика» и «Системный анализ»

УДК 517 (075.8)
ББК 22.161 я 73

Рекомендовано к печати учебно-методическим советом
ГОУ ВПО ЛНР «ЛГУ имени Тараса Шевченко»
(протокол №   от   октября   2016 года).

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Математический анализ, будучи одним из фундаментальных разделов математики, играет важную роль в формировании высококвалифицированных специалистов. Причем, его важность проявляется двояко. С одной стороны, математический анализ снабжает специалиста мощным инструментарием, который может быть с успехом использован для решения обширного класса прикладных задач и построения математических моделей. С другой стороны, знание математического анализа и овладение его основными методами является необходимой предпосылкой для изучения целого ряда дисциплин, таких как функциональный анализ, дифференциальные уравнения, численные методы и целого ряда других.

Одной из форм обучения является самостоятельная работа с учебниками, пособиями и методическими указаниями. При этом вопрос подбора литературы, адекватной стоящим перед студентом задачам, является крайне актуальным. Дело в том, что обилие учебников и интернет-ресурсов, ориентированных на самую разную аудиторию, с различными подходами к изложению материала и разной степенью детализации, не позволяет студенту быстро выбрать необходимую ему литературу. Поэтому, наличие методических рекомендаций для самостоятельной работы является необходимым условием эффективного и качественного обучения студента.

Настоящее учебно-методическое пособие по дисциплине «Математический анализ» содержит четыре темы: пределы, производные, неопределенные и определенные интегралы. По каждой теме приводятся краткие теоретические сведения, необходимые для решения практических заданий. Для закрепления пройденных тем служат вопросы самопроверки. После теоретического материала представлены детальные решения типовых задач по темам, также даны задания для самостоятельной индивидуальной работы по 30 вариантов каждое.

Для оценочного контроля знаний студентов разработано две контрольные работы. Контрольная работа №1 содержит 27 заданий, контрольная работа №2 – 13 заданий с подпунктами. Каждое задание содержит 20 однотипных задач. В каждом задании студент решает одну задачу, номер которой совпадает с порядковым номером студента в академическом журнале его группы.

Настоящее учебное пособие может быть использовано:

- на практических занятиях;
- для самостоятельного изучения материала;
- для выполнения индивидуальных заданий;
- для подготовки к зачету;
- для подготовки к экзамену;
- для решения контрольных работ.

ТЕМА 1. ПРЕДЕЛ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ

Теоретический материал

1.1. Пределы последовательностей и функций

Функция, областью определения которой является множество N, а множеством значений R, называется *числовой последовательностью.* Сокращенно последовательность

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$$

обозначается $\{x_n\}$, числа $x_1, x_2, x_3, \ldots$ называются *членами последовательности*, число n – *номером* члена последовательности, x_n – *общим членом* последовательности. Последовательность $\{x_n\}$ считается заданной, если задан n-й член последовательности, т.е. задана функция $f(n) = x_n$.

Примеры числовых последовательностей:

1) n^3 или 1, 8, 9, 27, 125,…, n^3,… – монотонная, неограниченная;

2) $\left\{\dfrac{(-1)^n}{n}\right\}$ или $-1, \dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{4}, \ldots, \dfrac{(-1)^n}{n}, \ldots$ – монотонная, ограниченная;

3) $\left\{\dfrac{(-1)^n + 1}{2}\right\}$ или 0, 1, 0, 1, …, $\dfrac{(-1)^n + 1}{2}$, … – немонотонная, ограниченная.

Число A называется *пределом числовой последовательности* $\{x_n\}$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $N = N(\varepsilon) > 0$, такое, что для всех $n > N$, где N – целое, выполняется неравенство $|x_n - A| < \varepsilon$. Если

A – предел последовательности x_n, то это записывается так: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$.

Последовательность, имеющая предел, называется *сходящейся,* в противном случае – *расходящейся.*

С понятием предела числовой последовательности $\{x_n\}$ тесно связано понятие предела функции $y = f(x)$ при $x \to +\infty$ (или $x \to -\infty$). Если в первом случае переменная n, возрастая, принимает лишь целые значения, то во втором случае переменная x, изменяясь, принимает любые значения. При этом удобно использовать понятие окрестности U_∞.

Всякий интервал, содержащий точку a, называется *окрестностью точки* a. Множество точек x таких, что $|x - a| < \varepsilon$ (где $\varepsilon > 0$), называется ε*-окрестностью точки* a. При $x \to \infty$ окрестность обозначим U_∞.

Число A называется *пределом функции* $y = f(x)$ *при* x*, стремящимся к бесконечности*, если для любого сколь угодно малого положительного числа $\varepsilon > 0$, найдется такая окрестность U_∞, что для всех $x \in U_\infty$ выполняется неравенство

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

Обозначение $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$.

Иначе сформулированные определения пределов последовательности и функции можно найти в [11-14].

Геометрический смысл определения: при $x \to +\infty$ $(x \to -\infty)$ ординаты графика функции $y = f(x)$ будут заключены в полосе $A - \varepsilon < y < A + \varepsilon$, какой бы узкой эта полоса ни была (см. рис. 1.1), если $x \in (a, +\infty)$ ($x \in (-\infty, a)$).

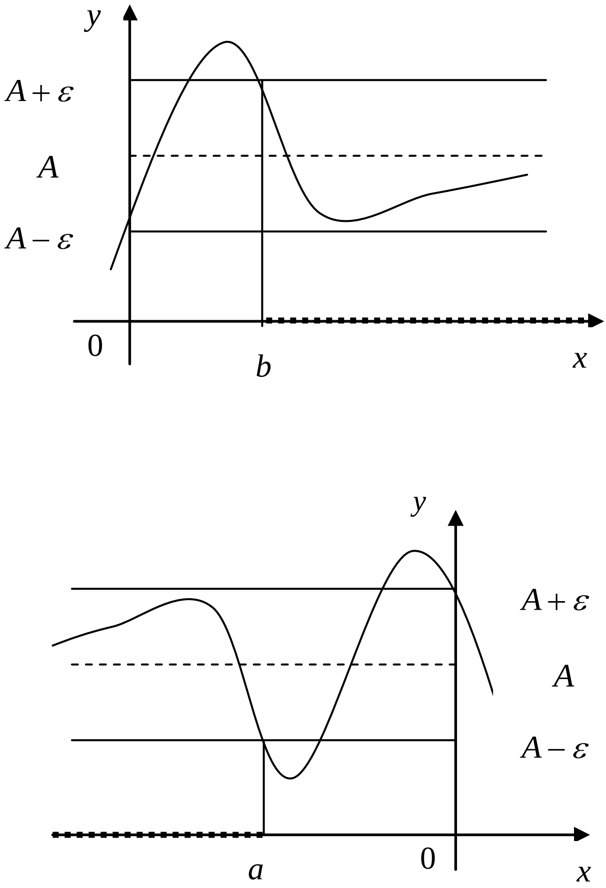

Рис. 1.1

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0. Тогда число A называется *пределом функции* $y = f(x)$ *при* $x \to x_0$ *(в точке* $x = x_0$*),* если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$

$\delta = \delta(\varepsilon)$, такое, что при $0 < |x - x_0| < \delta$ справедливо неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$. Если A - предел функции $f(x)$ при $x \to x_0$, то пишут: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$. В самой точке x_0 функция $f(x)$ может и не существовать ($f(x_0)$ не определена). Аналогично запись $\lim f(x) = A$ обозначает, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $N = N(\varepsilon) > 0$, такое, что при $|x| > N$ выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Геометрический смысл предела функции в точке: число A называется пределом функции $y = f(x)$ при $x \to x_0$, если для любой построенной ε-окрестности точки A существует проколотая окрестность точки x_0 ($U_{x_0} = (a, b)$) такая, что как только $x \in U_{x_0}$, то соответствующие ординаты графика функции $f(x)$ будут заключены в интервале $(A - \varepsilon, A + \varepsilon)$ (см. рис. 1.2).

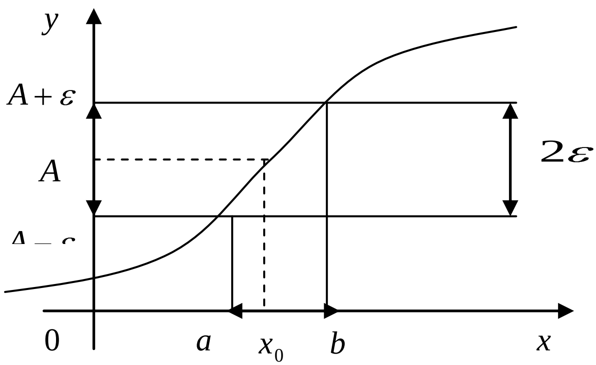

Рис. 1.2

Если существует предел вида $\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ x<x_0}} f(x)$, который обозначают также $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ или $f(x_0-0)$, то он называется *пределом слева функции* $f(x)$ *в точке* x_0. Аналогично если существует предел вида $\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ x>x_0}} f(x)$ (в другой записи $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$ или $f(x_0+0)$), то он называется *пределом справа функции* $f(x)$ *в точке* x_0. Пределы слева и справа называются *односторонними.* Для существования предела функции $f(x)$ в точке x_0 необходимо и достаточно, чтобы оба односторонних предела в точке x_0 существовали и были равны, т.е. $f(x_0-0)=f(x_0+0)$.

1.2. Основные теоремы о пределах. Раскрытие простейших неопределенностей

Рассмотрим основные теоремы о пределах.

Теорема 1.1. *Пусть существуют конечные пределы* $\lim\limits_{x\to x_0} f_i(x)$ $\left(i=\overline{1,n}\right)$. *Тогда*

$$\lim_{x\to x_0}\sum_{i=1}^{n} f_i(x)=\sum_{i=1}^{n}\lim_{x\to x_0} f_i(x),$$

$$\lim_{x\to x_0}\prod_{i=1}^{n} f_i(x)=\prod_{i=1}^{n}\lim_{x\to x_0} f_i(x).$$

Теорема 1.2. *Пусть существуют конечные пределы* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ *и* $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)\neq 0$. *Тогда*

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to x_0}f(x)\,/\lim_{x\to x_0}\varphi(x).$$

(Все записи верны и при $x_0=\pm\infty$.)

Если условия этих теорем не выполняются, то могут возникнуть неопределенности вида $\infty-\infty, \frac{\infty}{\infty}, \frac{0}{0}$ и др., которые в простейших случаях раскрываются с помощью алгебраических преобразований.

Широко используются следующие два *замечательных предела*:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1;$

2. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim\limits_{a\to 0}(1+\alpha)^{1/a}=e\approx 2,71828.$

Доказательства представленных теорем можно найти, например, в [8, 9].

1.3. Сравнение бесконечно малых функций

Если $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$ (т.е. для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta>0$, такое, что при $0<|x-x_0|<\delta$ справедливо неравенство $|\alpha(x)<\varepsilon|$), то $\alpha(x)$ называется *бесконечно малой функцией при* $x\to x_0$.

Для сравнения двух бесконечно малых функций $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ при $x\to x_0$ находят предел их отношения:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=C. \qquad (1.1)$$

Если $C \neq 0$, то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются *бесконечно малыми величинами одного и того же порядка;* если $C = 0$, то $\alpha(x)$ называется *бесконечно малой более высокого порядка по сравнению с* $\beta(x)$, а $\beta(x)$ – *бесконечно малой более низкого порядка по сравнению с* $\alpha(x)$.

Если $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{[\beta(x)]^k} = C \quad (0 < |C| < \infty)$, то $\alpha(x)$ называется *бесконечно малой порядка* k *по сравнению с* $\beta(x)$ при $x \to x_0$.

Рассмотрим некоторые свойства бесконечно малых функций.

Теорема 1.3. *Если $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ бесконечно малые функции при $x \to x_0$ $(x \to \infty)$, а $\varphi(x)$ – ограниченная функция при $x \to x_0$ $(x \to \infty)$, то:*

1) *$\alpha(x) + \beta(x)$ – бесконечно малая при $x \to x_0$ $(x \to \infty)$;*
2) *$\alpha(x) \cdot \beta(x)$ – бесконечно малая при $x \to x_0$ $(x \to \infty)$;*
3) *$\alpha(x) \cdot \varphi(x)$ и $\beta(x) \cdot \varphi(x)$ – бесконечно малые функции при $x \to x_0$ $(x \to \infty)$;*
4) *$\dfrac{\alpha(x)}{\varphi(x)}$ и $\dfrac{\beta(x)}{\varphi(x)}$ – бесконечно малые функции при $\underset{(x \to \infty)}{x \to x_0}$ $(\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} \varphi(x) \neq 0)$.*

Если $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$, то бесконечно малые $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ при $x \to x_0$ называются *эквивалентными (равносильными) величинами:* $\alpha(x) \sim \beta(x)$.

В качестве примера приведем следующую таблицу эквивалентных бесконечно малых функций при $x \to 0$:

1. $\sin x \sim x$ при $x \to 0$.
2. $tgx \sim x$ при $x \to 0$.
3. $\arcsin x \sim x$ при $x \to 0$.
4. $arctgx \sim x$ при $x \to 0$.
5. $\ln(1+x) \sim x$ при $x \to 0$.
6. $1 - \cos x \sim \dfrac{x^2}{2}$ при $x \to 0$.
7. $e^x - 1 \sim x$ при $x \to 0$.
8. $a^x - 1 \sim x \ln a$ при $x \to 0$, $a > 1$, $x > 1$.
9. $\sqrt[n]{1+x} - 1 \sim \dfrac{x}{n}$ при $x \to 0$.
10. $(1+x)^k - 1 \sim kx$ при $x \to 0$.

Легко доказать, что предел отношения бесконечно малых функций $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ при $x \to x_0$ равен пределу отношения эквивалентных им бесконечно малых функций $\alpha^*(x)$ и $\beta^*(x)$ при $x \to x_0$, т. е. верны предельные равенства:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{\alpha^*(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta^*(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{\alpha^*(x)}{\beta^*(x)}.$$

1.4. Непрерывность функций

Функция $y = f(x)$ называется *непрерывной при* $x = x_0$ (в точке x_0), если:

1) функция $f(x)$ определена в точке x_0 и ее окрестности;

2) существует конечный предел функции $f(x)$ в точке x_0;

3) этот предел равен значению функции в точке x_0, т.е.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0). \tag{1.2}$$

Если положить $x = x_0 + \Delta x$, то условие непрерывности (1.2) будет равносильно условию

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta f(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \left(f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \right) = 0,$$

т.е. функция $y = f(x)$ непрерывна в точке x_0 тогда и только тогда, когда бесконечно малому приращению аргумента Δx соответствует бесконечно малое приращение функции $\Delta f(x_0)$.

Функция, непрерывная во всех точках некоторой области, называется *непрерывной в этой области.*

Точка x_0, в которой нарушено хотя бы одно из трех условий непрерывности функции, называется *точкой разрыва функции.* Если в точке x_0 существуют конечные пределы $f(x_0 - 0)$ и $f(x_0 + 0)$, такие, что $f(x_0 - 0) \neq f(x_0 + 0)$, то x_0 называется *точкой разрыва первого рода.* Если хотя бы один из пределов $f(x_0 - 0)$ или $f(x_0 + 0)$ не существует или равен бесконечности, то точку x_0 называют *точкой разрыва второго рода.* Если $f(x_0-0)=f(x_0+0)$ и функция $f(x)$ не определена в точке x_0, то точку x_0 называют *устранимой точкой разрыва функции.* Например, для функций $y=x\cos x$ и $y=\frac{\sin x}{x}$ точка $x=0$ является устранимой точкой разрыва.

Рассмотрим свойства функций, непрерывных в точке:

Теорема 1.4. *Если функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны в точке x_0, то их сумма $f(x)+\varphi(x)$, произведение $f(x)\cdot\varphi(x)$ и частное $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ (при условии $\varphi(x_0)\neq 0$) являются функциями непрерывными в точке x_0.*

1.5. Вопросы для самоконтроля

1. Дайте определение предела числовой последовательности.
2. Сформулируйте геометрическую интерпретацию и свойства, вытекающие из определения предела.
3. Сформулируйте и поясните бесконечно малые и бесконечно большие переменные величины, их связь и свойства.
4. Дайте определение функции.
5. Сформулируйте и поясните основные элементарные функции и их свойства и графики.
6. Дайте определение предела функции.

7. Сформулируйте геометрическую интерпретацию предела функции.

8. Дайте определение предела бесконечно большой функции.

9. Сформулируйте и поясните основные теоремы о пределах функции.

10. Запишите и поясните замечательные пределы.

11. Сформулируйте и проиллюстрируйте на примерах сравнение бесконечно малых. Запишите таблицу эквивалентных бесконечно малых.

12. Дайте определение непрерывности функции.

13. Сформулируйте и поясните теоремы о непрерывных функциях.

14. Сформулируйте и поясните свойства непрерывных функций.

15. Дайте определение точек разрыва функции. Классификация точек разрыва.

Решение типовых задач на тему 1

Пример 1. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^3}{n^3-3}=2$ (указать $N(\varepsilon)$).

Решение.

По определению число 2 называется пределом числовой последовательности $\left\{\dfrac{2n^3}{n^3-3}\right\}$, если

$$\forall\varepsilon>0\ \ \exists N(\varepsilon): n>N(\varepsilon)\Rightarrow\left|\frac{2n^3}{n^3-2}-2\right|<\varepsilon .$$

Зададим ε>0. Найдем, при каких n справедливо неравенство $\left|\dfrac{2n^3}{n^3-2}-2\right|<\varepsilon$, т.е. решим это неравенство относительно n:

$$\left|\frac{2n^3-2n^3+4}{n^3-2}\right|<\varepsilon\text{, т.е. }\left|\frac{4}{n^3-2}\right|<\varepsilon\text{ или }\left|n^3-2\right|<\frac{\varepsilon}{4};$$

т. к. $n^3-2>0$ при $n>1$

$$\left|n^3-2\right|=n^3-2\ n^3-2>\frac{4}{\varepsilon};\ n^3>\frac{4}{\varepsilon}+2;\ n>\sqrt[3]{\frac{4}{\varepsilon}+2}.$$

Мы доказали, что 2 является пределом последовательности $\left\{\dfrac{2n^3}{n^3-3}\right\}$.

Найдем $N(\varepsilon)$: $n>\sqrt[3]{\dfrac{4}{\varepsilon}+2}>\left[\sqrt[3]{\dfrac{4}{\varepsilon}+2}\right]+1$, где $\left[\sqrt[3]{\dfrac{4}{\varepsilon}+2}\right]$ – целая часть положительного числа, она может быть меньше рассматриваемого числа, поэтому увеличиваем его на единицу.

Ответ: $N(\varepsilon)=\left[\sqrt[3]{\dfrac{4}{\varepsilon}+2}\right]+1$.

Пример 2. Вычислить предел последовательности $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^n-5^n}{3^n+5^n}$.

Решение.

Имеем неопределенность вида $\dfrac{\infty}{\infty}$. Сократим числитель и знаменатель на старший член:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^n-5^n}{3^n+5^n}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{3^n}{5^n}-\dfrac{5^n}{5^n}}{\dfrac{3^n}{5^n}+\dfrac{5^n}{5^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\dfrac{3}{5}\right)^n-1}{\left(\dfrac{3}{5}\right)^n+1}=-1$$

Ответ: -1.

Пример 3. Вычислить предел $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+4n}-n\right)$.

Решение.

Имеем неопределенность вида $\infty-\infty$. Помножим и разделим на сопряженное:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+4n}-n\right)=\left[\infty-\infty\right]=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n^2+4n}-n\right)\left(\sqrt{n^2+4n}+n\right)}{\sqrt{n^2+4n}+n}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{n^2+4n-n^2}{\sqrt{n^2+4n}+n}=\lim_{x\to\infty}\frac{4n}{\sqrt{n^2+4n}+n}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{4n}{n}}{\sqrt{\dfrac{n^2}{n^2}+\dfrac{4n}{n^2}}+\dfrac{n}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{4}{\sqrt{1+\dfrac{4}{n}}+1}=2.$$

Ответ: 2.

Пример 4. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{5x^2+13x+6}{3x^2+2x-8}$.

Решение.

При подстановке в числитель и знаменатель предельного выражения вместо x значения -2 получаем неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Разложив числитель и знаменатель на множители и сократив подобные получим дробь , при подстановке в которую значения -2 неопределенность уходит.

Краткая запись решения в символах математики:

$$\lim_{x\to-2}\frac{5x^2+13x+6}{3x^2+2x-8}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to-2}\frac{x+2\quad 5x+3}{x+2\quad 3x-4}=$$

$$=\lim_{x\to-2}\frac{5x+3}{3x-4}=\frac{5\cdot(-2)+3}{3\cdot(-2)-4}=\frac{7}{10}=0,7.$$

Ответ: 0,7.

Замечание. При решении задач на пределы используют краткую запись решения в математических символах.

Пример 5. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{7x^4+2x^3+5}{6x^4+3x^2-7x}$.

Решение.

Имеем неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$. Сократим числитель и знаменатель на старший член x^4. Учитывая, что $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x^2}$, $\frac{1}{x^3}$ и $\frac{1}{x^4}$ стремятся к нулю при $x\to\infty$, получим

$$\lim_{x\to\infty}\frac{7x^4+2x^3+5}{6x^4+3x^2-7x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{x^4(7+2/x+5/x^4)}{x^4(6+3/x^2-7/x^3)}=\frac{7}{6}.$$

Ответ: 7/6.

Пример 6. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{4x+3}{2x-5}\right)^{1+7x}$.

Решение.

Имеем неопределенность вида $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)^{\infty}$. Выделим целую часть дроби $\dfrac{4x+3}{2x-5}=2+\dfrac{13}{2x-5}$, причем $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{13}{2x-5}=0$, поэтому

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{4x+3}{2x-5}\right)^{1+7x}=\lim_{x\to-\infty}2^{1+7x}=2^{-\infty}=0.$$

Ответ: 0.

Пример 7. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{10x-3}{2x^3+4x+3}$.

Решение.

Решение аналогично решению примера 5.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{10x-3}{2x^3+4x+3}=\left[\frac{-\infty}{-\infty}\right]=\lim_{x\to-\infty}\frac{10-3/x}{x^2(2+4/x^2+3/x^3)}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{10}{x^2}=0.$$

Ответ: 0.

Пример 8. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{1-\sin(x/2)}{\pi^2-x^2}$.

Решение.

Имеем неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$. Воспользуемся первым замечательным пределом (см. п.п. 1.2), предварительно применив тригонометрические преобразования.

$$\lim_{x\to\pi}\frac{1-\sin(x/2)}{\pi^2-x^2}=\lim_{x\to\pi}\frac{2\sin^2\quad \pi-x\quad /4}{\pi-x\quad \pi+x}=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to\pi}\frac{\sin\quad \pi-x\quad /4}{\pi+x}=\frac{1}{2}\frac{0}{2\pi}=0.$$

Ответ: 0.

Пример 9. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{21+x}-5}{x^3-64}$.

Решение.

Имеем неопределенность вида $\dfrac{\sqrt{21+4}-5}{4^3-64}=\dfrac{0}{0}$. Помножим числитель и знаменатель на выражение, сопряженное числителю, чтобы избавиться от иррациональности в числителе:

$$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{21+x}-5}{x^3-64}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{21+x}-5\quad \sqrt{21+x}+5}{x^3-64\quad \sqrt{21+x}+5}=$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{1}{x^2+4x+16\quad \sqrt{21+x}+5}=\frac{1}{480}.$$

Ответ: 1/480.

Пример 10. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x}{2x-3}\right)^{2-5x}$.

Решение.

Воспользуемся вторым замечательным пределом (см. п.п. 1.2), поскольку имеем неопределенность вида 1^{∞}.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x}{2x-3}\right)^{2-5x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{2x-3}\right)^{2-5x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{3}{2x-3}\right)^{(2x-3)/3}\right)^{3(2-5x)/(2x-3)}=e^{-15/2}.$$

Ответ: $e^{-15/2}$.

Пример 11. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 8x}{\ln(1+4x)}$, используя эквивалентные бесконечно малые функции.

Решение.

Пользуясь таблицей эквивалентных бесконечно малых функций при $x\to 0$ из п.п. 1.3 имеем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin 8x}{\ln(1+4x)}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{8x}{4x}=2.$$

Ответ: 2.

Пример 12. Исследовать функцию $f(x)=8^{1/(x-3)}+1$ на непрерывность в точках $x_1=3,\ x_2=4$.

Решение.

Для исследования на непрерывность необходимо воспользоваться сведениями п.п. 1.4.

Для точки $x_1=3$ имеем:

$$\lim_{x\to 3-0}f(x)=\lim_{x\to 3-0}\left(8^{1/(x-3)}+1\right)=8^{-\infty}+1=1,$$

$$\lim_{x\to 3+0}f(x)=\lim_{x\to 3+0}\left(8^{1/(x-3)}+1\right)=8^{\infty}+1=\infty,$$

т.е. в точке $x_1=3$ функция $f(x)$ терпит бесконечный разрыв ($x_1=3$ – точка разрыва второго рода).

Для точки $x_2=4$ имеем:

$$\lim_{x\to 4-0} f(x) = \lim_{x\to 4-0}\left(8^{1/(x-3)}+1\right)=9,$$

$$\lim_{x\to 4+0} f(x) = \lim_{x\to 4+0}\left(8^{1/(x-3)}+1\right)=9,$$

$$f(4)=8^{1/(4-3)}+1=9.$$

Следовательно, в точке $x_2=4$ функция $f(x)$ непрерывна.

Ответ: в $x_1=3$ разрыв второго рода, в $x_2=4$ функция $f(x)$ непрерывна.

Пример 13. Исследовать данную функцию на непрерывность и построить ее график:

$$f(x)=\begin{cases} x^2, -\infty < x \le 0, \\ (x-1)^2, 0 < x \le 2, \\ 5-x, 2 < x < +\infty \end{cases}$$

Решение.

Функция $f(x)$ определена и непрерывна на интервалах $(-\infty;0)$, $(0;2)$ и $(2,+\infty)$, где она задана непрерывными элементарными функциями. Следовательно, разрыв возможен только в точках $x_1=0$ и $x_2=2$. Для точки $x_1=0$ имеем:

$$\lim_{x\to 0-0} f(x) = \lim_{x\to 0-0} x^2 = 0,$$

$$\lim_{x\to 0+0} f(x) = \lim_{x\to 0+0} (x-1)^2 = 1, f(0) = x^2|_{x=0} = 0,$$

т.е. функция $f(x)$ в точке $x_1=0$ имеет разрыв первого рода (т.к. $f(x_0-0)\ne f(x_0+0)$, см. п.п. 1.4).

Для точки $x_2=2$ находим:

$$\lim_{x\to 2-0} f(x) = \lim_{x\to 2-0} (x-1)^2 = 1,$$

$$\lim_{x\to 2+0} f(x) = \lim_{x\to 2+0} (5-x) = 3,$$

$$f(2) = (x-1)^2|_{x=2} = 1,$$

т.е. в точке $x_2 = 2$ функция также имеет разрыв первого рода.

График данной функции изображен на рисунке 1.3: слева парабола $y = x^2$, затем, на (0;2] парабола $y = (x-1)^2$ и справа прямая $y = 5 - x$.

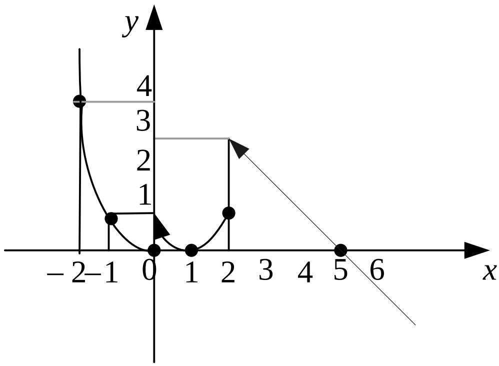

Рис. 1.3

Задачи для самостоятельной работы студентов

ЗАДАНИЕ 1

Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ (указать $N(\varepsilon)$).

1. $a_n = \dfrac{3n-2}{2n-1}, a = \dfrac{3}{2}.$
2. $a_n = \dfrac{4n-1}{2n+1}, a = 2.$
3. $a_n = \dfrac{7n+4}{2n+1}, a = \dfrac{7}{2}.$
4. $a_n = \dfrac{2n-5}{3n+1}, a = \dfrac{2}{3}.$
5. $a_n = \dfrac{7n-1}{n+1}, a = 7.$
6. $a_n = \dfrac{4n^2+1}{3n^2+2}, a = \dfrac{4}{3}.$
7. $a_n = \dfrac{9-n^3}{1+2n^3}, a = -\dfrac{1}{2}.$
8. $a_n = \dfrac{4n-3}{2n+1}, a = 2.$
9. $a_n = \dfrac{1-2n^2}{2+4n^2}, a = -\dfrac{1}{2}.$
10. $a_n = -\dfrac{5n}{n+1}, a = -5.$
11. $a_n = \dfrac{n+1}{1-2n}, a = -\dfrac{1}{2}.$
12. $a_n = \dfrac{2n+1}{3n-5}, a = \dfrac{2}{3}.$
13. $a_n = \dfrac{1-2n^2}{n^2+3}, a = -2.$
14. $a_n = \dfrac{3n^2}{2-n^2}, a = -3.$
15. $a_n = \dfrac{n}{3n-1}, a = \dfrac{1}{3}.$
16. $a_n = \dfrac{3n^3}{n^3-1}, a = 3.$
17. $a_n = \dfrac{4+2n}{1-3n}, a = -\dfrac{2}{3}.$
18. $a_n = \dfrac{5n+15}{6-n}, a = -5.$
19. $a_n = \dfrac{3-n^2}{4+2n^2}, a = -\dfrac{1}{2}.$
20. $a_n = \dfrac{2n-1}{2-3n}, a = -\dfrac{2}{3}.$
21. $a_n = \dfrac{3n-1}{5n+1}, a = \dfrac{3}{5}.$
22. $a_n = \dfrac{4n-3}{2n+1}, a = 2.$
23. $a_n = \dfrac{1-2n^2}{2+4n^2}, a = -\dfrac{1}{2}.$
24. $a_n = \dfrac{5n+1}{10n-3}, a = \dfrac{1}{2}.$

25. $a_n = \dfrac{2-2n}{3=4n}, a = -\dfrac{1}{2}.$

26. $a_n = \dfrac{23-4n}{2-n}, a = 4.$

27. $a_n = \dfrac{1+3n}{6-n}, a = -3.$

28. $a_n = \dfrac{2n+3}{n+5}, a = 2.$

29. $a_n = \dfrac{3n^2+2}{4n^2-1}, a = \dfrac{3}{4}.$

30. $a_n = \dfrac{2-3n^2}{4+5n^2}, a = -\dfrac{3}{5}.$

ЗАДАНИЕ 2

Вычислить пределы числовых последовательностей.

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(3-n)^2+(3+n)^2}{(3-n)^2-(3+n)^2}.$

2. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(3-n)^4+(2-n)^4}{(1-n)^4-(1+n)^4}.$

3. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(3-n)^4-(2-n)^4}{(1-n)^3-(1+n)^3}.$

4. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(1-n)^4-(1+n)^4}{(1+n)^3-(1-n)^3}.$

5. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(6-n)^2-(6+n)^2}{(6+n)^2-(1-n)^2}.$

6. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)^3-(n+1)^2}{(n-1)^3-(n+1)^3}.$

7. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(1+2n)^3-8n^3}{(1+2n)^2+4n^2}.$

8. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(3-4n)^2}{(n-3)^3-(n+3)^3}.$

9. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(3-n)^3}{(n+1)^2-(n+1)^3}.$

10.
$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)^2+(n-1)^2-(n+2)^3}{(4-n)^3}.$

11. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2(n+1)^2+(n-2)^3}{n^2+2n-3}.$

12. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)^3+(n+2)^3}{(n+4)^3+(n+5)^3}.$

13. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+3)^3+(n+4)^3}{(n+3)^4-(n+4)^4}.$

14. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)^4-(n-1)^4}{(n+1)^3+(n-1)^3}.$

15. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{8n^3-2n}{(n+1)^4-(n-1)^4}.$

16.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+6)^3-(n+1)^3}{(2n+3)^2+(n+4)^2}.$$

17.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(2n-3)^3-(n+5)^3}{(3n-1)^3+(2n+3)^3}.$$

18.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+10)^2+(3n+1)^2}{(n+6)^3-(n+1)^3}.$$

19.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)^3+(3n+2)^3}{(2n+3)^3-(n-7)^3}.$$

20.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+7)^3-(n+2)^3}{(3n+2)^2+(4n+1)^2}.$$

21.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)^3-(2n+3)^3}{(2n+1)^2+(2n+3)^2}.$$

22. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3-(n-1)^3}{(n+1)^4-n^4}.$

23. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+2)^4-(n-2)^4}{(n+5)^2+(n-5)^2}.$

24. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^4-(n-1)^4}{(n+1)^3+(n-1)^3}.$

25. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^3-(n-1)^3}{(n+1)^2-(n-1)^2}.$

26. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^3-(n-1)^3}{(n+1)^2-(n-1)^2}.$

27.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)^3+(n-2)^3}{n^4+2n^2-1}.$$

28. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^3+(n-1)^2}{n^3-3n}.$

29. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^3+(n-1)^3}{n^3+1}.$

30.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)^2-(n-2)^2}{(n+3)^2}.$$

ЗАДАНИЕ 3

Вычислить пределы числовых последовательностей.

1. $\lim\limits_{n\to\infty} n(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1})$.

2. $\lim\limits_{n\to\infty} n(\sqrt{n(n-2)}-\sqrt{n^2-3})$.

3. $\lim\limits_{n\to\infty}(n-\sqrt[3]{n^3-5})n\sqrt{n})$.

4. $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{(n^2+1)(n^2-4)}-\sqrt{n^4-9})$.

5. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^5-8}-n\sqrt{n(n^2+5)})}{\sqrt{n}}$.

6. $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2-3n+2}-n)$.

7. $\lim\limits_{n\to\infty}(n+\sqrt[3]{4-n^3})$.

8. $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n(n+2)}-\sqrt{n^2-2n+3})$.

9. $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{(n+2)(n+1)}-\sqrt{(n-1)(n+3)})$.

10. $\lim\limits_{n\to\infty} n^2(\sqrt{n(n^4-1)}-\sqrt{n^5-8})$.

11. $\lim\limits_{n\to\infty} n(\sqrt[3]{5+8n^3}-2n)$.

12. $\lim\limits_{n\to\infty} n^2(\sqrt[3]{5+n^3}-\sqrt[3]{3+n^3})$.

13. $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt[3]{(n+2)^2}-\sqrt[3]{(n-3)^2})$.

14. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{(n+1)^3}-\sqrt{n(n-1)(n-3)}}{\sqrt{n}}$.

15. $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+3n-2}-\sqrt{n^2-3})$.

16. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n}(\sqrt{n+2} - \sqrt{n-3})$.

17. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n(n^5+9)} - \sqrt{(n^4-1)(n^{2+5})}}{n}$.

18. $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n(n+5)} - n)$.

19. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n^3+8}(\sqrt{n^3+2} - \sqrt{n^3-1})$.

20. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{(n^3+1)(n^2+3)} - \sqrt{n(n^4+2)}}{2\sqrt{n}}$.

21. $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{(n^2+1)(n^2+2)} - \sqrt{(n^2-1)(n^2-2)})$.

22. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{(n^5+1)(n^2-1)} - n\sqrt{n(n^4+1)}}{n}$.

23. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{(n^4+1)(n^2-1)} - \sqrt{n^6-1}}{n}$.

24. $\lim\limits_{n\to\infty} (n - \sqrt{n(n-1)})$.

25. $\lim\limits_{n\to\infty} n^3(\sqrt[3]{n^2(n^6+4)} - \sqrt[3]{(n^8-1)})$.

26. $\lim\limits_{n\to\infty} (n\sqrt{n} - \sqrt{n(n+1)(n+2)})$.

27. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[3]{n}(\sqrt[3]{n^2} - \sqrt[3]{n(n-1)})$.

28. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n+2}(\sqrt{n+3} - \sqrt{n-4})$.

29. $\lim\limits_{n\to\infty} n(\sqrt{n^4+3} - \sqrt{n^4-2})$.

30. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n(n+1)(n+2)}(\sqrt{n^3-3} - \sqrt{n^3-2})$.

ЗАДАНИЕ 4

Найти $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ и вычислить значение при $x = x_0$;

исследовать на непрерывность данную функцию.

1. $y=\dfrac{x-1}{2x+1}$; $x_0 = 0$

2. $y=x-e^x$; $x_0 = -1$

3. $y=ctg 4x$; $x_0 = 1$

4. $y=\dfrac{x-4}{2x-1}$; $x_0 = 2$

5. $y=\dfrac{x-5}{2x-3}$; $x_0 = 0$

6. $y=\dfrac{x+1}{2x-5}$; $x_0 = 1$

7. $y=\ln(x+2)$; $x_0 =-1$

8. $y=1+e^{-x}$; $x_0 = \ln 2$

9. $y=\dfrac{x+3}{2x+3}$; $x_0 =3$

10. $y=\dfrac{x+4}{2x+5}$; $x_0 = 1$

11. $y=\lg x+2$; $x_0 = 10$

12. $y=x-\cos x$; $x_0 = \pi$

13. $y=\dfrac{x+3}{x+4}$; $x_0 = 0$

14. $y=x^2+3x+1$; $x_0=1$

15. $y=\dfrac{x+5}{x+6}$; $x_0 = -1$

16. $y=\dfrac{x-1}{x+2}$; $x_0 = 0$

17. $y=3-x^3$; $x_0 = 2$

18. $y=2-5^x$; $x_0 = -1$

19. $y=1-tgx$; $x_0 = 0$

20. $y=\dfrac{x-5}{x+6}$; $x_0 = -3$

21. $y=\dfrac{2x}{1-x}$; $x_0 = 2$

22. $y=\dfrac{9x}{x-3}$; $x_0 = -2$

23. $y=1-\dfrac{1}{2-x}$; $x_0 = 1$

24. $y=\sin 3x+2x$; $x_0=0$

25. $y=\dfrac{2}{(x+1)^2}$; $x_0 = 2$

26. $y=\dfrac{2x}{x+2}$; $x_0 = 3$

27. $y=3^x$; $x_0 = e$

28. $y=(1-x)^2$; $x_0 = 0$

29. $y=\dfrac{2x}{x+5}$; $x_0 = 1/3$

30. $y=\dfrac{7x}{6-x}$; $x_0 =1/2$

ТЕМА 2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Теоретический материал

2.1. Производная, ее геометрический и физический смысл

Напомним, что *приращением функции* $y = f(x)$ называется разность

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x),$$

где Δx – приращение аргумента x. Из рис. 2.1 видно, что

$$\Delta y / \Delta x = tg\,\beta \qquad (2.1)$$

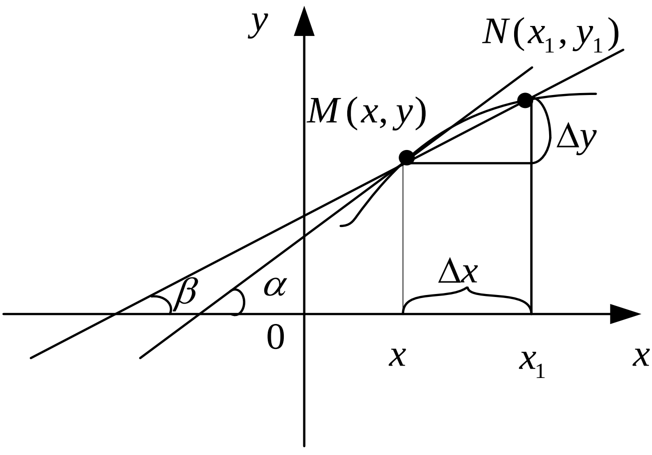

Рис. 2.1

Предел отношения приращения функции Δy к приращению аргумента Δx при произвольном стремлении Δx к нулю называется *производной* *функции* $y = f(x)$ *в точке* x и обозначается одним из следующих символов: $y', f'(x), \dfrac{dy}{dx}$.

Таким образом, по определению

$$y' = f'(x) = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \qquad (2.2)$$

Если указный в формуле (2.2) предел существует и является конечным, то функцию $f(x)$ называют *дифференцируемой в точке* x, а операцию нахождения производной y' – *дифференцированием.*

Геометрический смысл производной: из равенства (2.1) и определения производной (см. формулу (2.2)) следует, что производная в точке x равна тангенсу угла α наклона касательной, проведенной в точке $M(x, y)$, к графику функции $y = f(x)$ (см. рис. 2.1).

Механический (физический) смысл производной: производная $y' = f'(x)$ определяет скорость изменения функции в точке x относительно аргумента x.

2.2. Правила и формулы дифференцирования

Если C – постоянное число и $u = u(x)$, $\upsilon = \upsilon(x)$ – некоторые дифференцируемые функции, то справедливы следующие *правила дифференцирования:*

1) $(C)' = 0$;

2) $(x)' = 1$;

3) $(u \pm \upsilon)' = u' \pm \upsilon'$;

4) $(Cu)' = Cu'$;

5) $(u\upsilon)' = u'\upsilon + u\upsilon'$;

6) $\left(\dfrac{u}{\upsilon}\right)' = \dfrac{u'\upsilon - u\upsilon'}{\upsilon^2}$ $(\upsilon \neq 0)$;

7) $\left(\dfrac{C}{\upsilon}\right)' = -\dfrac{C\upsilon'}{\upsilon^2}$ $(\upsilon \neq 0)$;

8) если $y = f(u)$, $u = \varphi(x)$, т.е. $y = f(\varphi(x))$ – сложная функция, составленная из дифференцируемых функций, то

$$y'_x = y'_u u'_x \text{ или } \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx};$$

9) если для функции $y = f(x)$ существует обратная дифференцируемая функция $x = g(y)$ и $\dfrac{dg}{dy} = g'(y) \neq 0$, то

$$f'(x) = 1/g'(y).$$

На основании определения производной и правил дифференцирования можно составить *таблицу производных основных элементарных функций:*

1) $(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1}u'$ $(\alpha \in R)$;

2) $(\alpha^u)' = \alpha^u \ln a \cdot u'$;

3) $(e^u)' = e^u u'$;

4) $(\log_a u)' = \dfrac{1}{u \ln a}u'$;

5) $(\ln u)' = \frac{1}{u} u'$;

6) $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$;

7) $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$;

8) $(tgu)' = \frac{1}{\cos^2 u} u'$;

9) $(ctgu)' = -\frac{1}{\sin^2 u} u'$;

10) $(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} u'$;

11) $(\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} u'$;

12) $(arctgu)' = \frac{1}{1+u^2} u'$;

13) $(arcctgu)' = -\frac{1}{1+u^2} u'$.

Доказательства правил и формул дифференцирования просты, их можно найти в [2-5, 7-14].

2.3. Производные высших порядков

Производной второго порядка или *второй производной функции* $y = f(x)$ называется производная от ее первой производной, т.е. $(y')'$.

Обозначается вторая производная одним из следующих символов: $y'', f''(x), \frac{d^2 y}{dx^2}$. Если $s = s(t)$ –

закон прямолинейного движения материальной точки, то $s' = \frac{ds}{dt}$ - скорость, а $s'' = \frac{d^2 s}{dt^2}$ - ускорение этой точки.

Если зависимость функции y от аргумента x задана в параметрическом виде уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, то:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)}, \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{y'}{x'}\right)\frac{1}{x'}, \qquad (2.3)$$

где штрих обозначает производную по t.

Производной n*-го порядка функции* $y = f(x)$ называется производная от производной $(n-1)$-го порядка данной функции. Для n*-й* производной употребляются следующие обозначения: $y^{(n)}$, $f^{(n)}(x)$, $\frac{d^n y}{dx^n}$. Таким образом,

$$y^{(n)} = \left(y^{(n-1)}\right)' = \frac{dy^{(n-1)}}{dx}. \qquad (2.4)$$

2.4. Приложения производной. Правило Лопиталя

Уравнение касательной к кривой $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0, f(x_0))$:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0). \qquad (2.5)$$

Уравнение нормали (перпендикуляра) к кривой $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0, f(x_0))$:

$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) \quad (f'(x_0) \neq 0). \qquad (2.6)$$

При $f'(x_0)=0$ уравнение нормали имеет вид $x=x_0$.

Углом между кривыми в точке их пересечения называют угол между касательными к кривым в этой точке.

Правило Лопиталя (для раскрытия неопределенностей вида $\frac{0}{0}$ ***и*** $\frac{\infty}{\infty}$***).*** *Если функции* $y=f(x)$ *и* $y=\varphi(x)$ *удовлетворяют условиям теоремы Коши в некоторой окрестности точки* $x=x_0$, *стремятся к нулю (или* $\pm\infty$*) при* $x\to x_0$ *и существует* $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$, *то существует также* $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ *и эти пределы равны, т.е.*

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}. \tag{2.7}$$

Правило Лопиталя справедливо и при $x_0=\pm\infty$.

Если частное $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ вновь дает в предельной точке неопределенность одного из двух названных видов и функций $f'(x)$, $\varphi'(x)$ удовлетворяют всем требованиям, ранее указанным для функций $f(x)$ и $\varphi(x)$, то можно перейти к отношению вторых производных и т.д. Однако следует помнить, что предел отношения самих функций может существовать, в то время как отношение производных не стремится ни к какому пределу.

2.5. Исследование поведения функций и их графиков

Функция $y=f(x)$ называется *возрастающей (убывающей)* в некотором интервале, если большему значению аргумента из этого интервала соответствует большее (меньшее) значение функции, т.е. при $x_1<x_2$ выполняется неравенство $f(x_1)<f(x_2)$ $(f(x_1)>f(x_2))$.

1. Если дифференцируемая функция $y=f(x)$ на отрезке $[a;b]$ возрастает (убывает), то ее производная на этом отрезке неотрицательна (неположительна), т.е. $f'(x)\geq 0$ $(f'(x)\leq 0)$.

2. Если непрерывная на отрезке $[a;b]$ и дифференцируемая внутри него функция имеет положительную (отрицательную) производную, то она возрастает (убывает) на этом отрезке.

Функция $y=f(x)$ называется *неубывающей (невозрастающей)* в некотором интервале, если для любых $x_1<x_2$ из этого интервала $f(x_1)\leq f(x_2)$ $(f(x_1)\geq f(x_2))$.

Интервалы, в которых функция не убывает или не возрастает, называются *интервалами монотонности функции.* Характер монотонности функции может изменяться только в тех точках ее области определения, в которых меняется знак первой производной. Точки, в которых первая производная функции обращается в нуль или терпит разрыв, называются *критическими.*

Точки экстремума функции относятся к очень важным, «узловым» точкам графика функции, знание которых определяет структуру графика.

Точка x_1 называется *точкой локального максимума функции* $y = f(x)$, если для любых достаточно малых $|\Delta x| \neq 0$ выполняется неравенство $f(x_1 + \Delta x) < f(x_1)$ (см. рис. 2.2). Точка x_2 называется *точкой локального минимума функции* $y = f(x)$, если для любых малых $|\Delta x| \neq 0$ справедливо неравенство $f(x_2 + \Delta x) > f(x_2)$ (см. рис. 2.3). Точки максимума и минимума называют *точками экстремума функции,* а максимумы и минимумы функции - ее *экстремальными значениями.*

Теорема 2.1 (необходимый признак локального экстремума). *Если функция* $y = f(x)$ *имеет в точке* $x = x_0$ *экстремум, то либо* $f'(x_0) = 0$, *либо* $f'(x_0)$ *не существует.*

В точках экстремума дифференцируемой функции касательная к ее графику параллельна оси Ox.

Для отыскания экстремумов функции поступают следующим образом: находят все критические точки, а затем исследуют каждую из них (в отдельности) с целью выяснения, будет ли в этой точке максимум или минимум, или же экстремума в ней нет.

Таким образом, если в некоторой точке x_0 функция имеет экстремум, то эта точка критическая. Обратное утверждение неверно, т. е. если точка x_0 – критическая точка функции, то она *может и не быть точкой локального экстремума.*

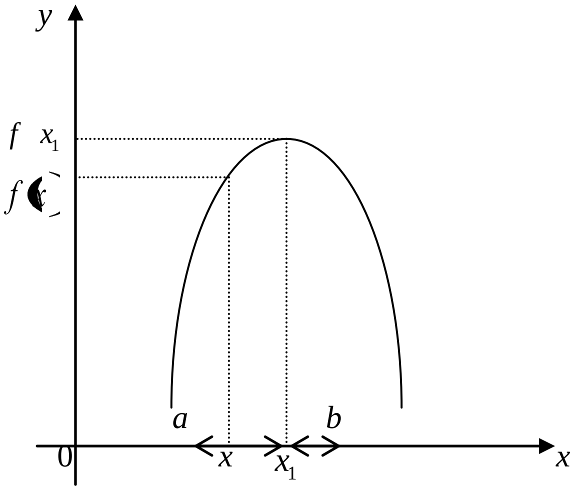

Рис. 2.2

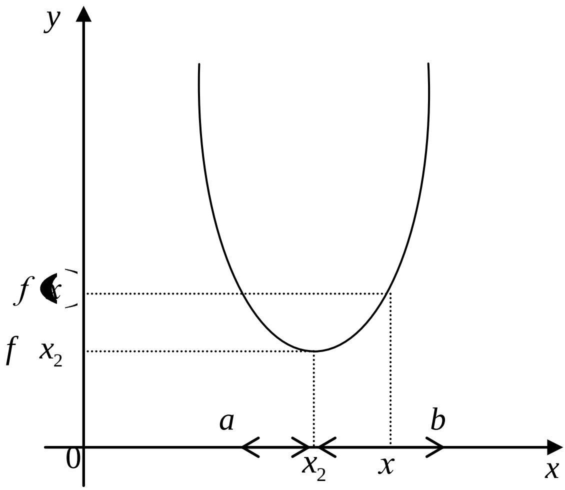

Рис. 2.3

Например, если $f(x) = x^3$, то $f'(x) = 3x^2 = 0$ при $x = 0$, т. е. точка $x = 0$ является критической. Но тем не менее в точке $x = 0$ функция $f(x) = x^3$ не имеет локального экстремума (см. рис. 2.4). Поэтому критические точки называют точками возможного экстремума, а условие $f'(x_0) = 0$ является лишь необходимым.

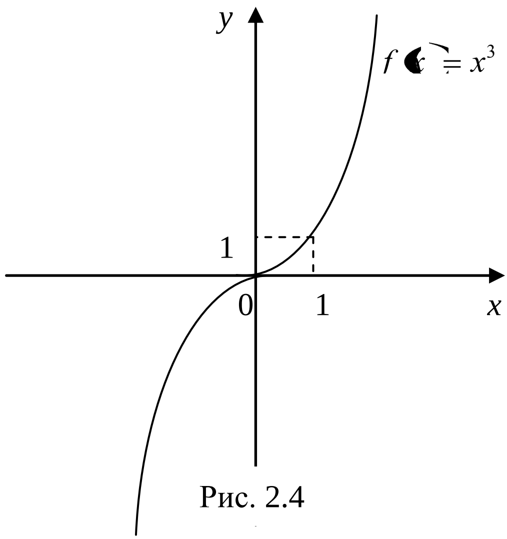

Рис. 2.4

Установим достаточные условия существования экстремума.

Теорема 2.2 (первый достаточный признак локального экстремума). *Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна в некотором интервале, содержащем критическую точку $x = x_0$, и дифференцируема во всех точках этого интервала (кроме, быть может, самой точки x_0). Если $f'(x)$ при $x < x_0$ положительна, а при*

$x > x_0$ *отрицательна, то при* $x = x_0$ *функция* $y = f(x)$ *имеет максимум. Если же* $f'(x)$ *при* $x < x_0$ *отрицательна, а при* $x > x_0$ *положительна, то при* $x = x_0$ *данная функция имеет минимум.*

Теорема 2.3 (второй достаточный признак локального экстремума функции). *Пусть функция* $y = f(x)$ *дважды дифференцируема и* $f'(x_0) = 0$. *Тогда в точке* $x = x_0$ *функция имеет локальный максимум, если* $f''(x_0) < 0$*, и локальный минимум, если* $f''(x_0) > 0$.

В случае, когда $f''(x_0) = 0$, точка $x = x_0$ может и не быть экстремальной.

Алгоритм отыскания наибольшего и наименьшего значений (абсолютного максимума и абсолютного минимума) непрерывной на отрезке [a, b] функции основан на следующих рассуждениях. Известно, что непрерывная на отрезке [a, b] функция $y = f(x)$ достигает на этом отрезке своего наибольшего M и наименьшего m значений. Эти значения могут достигаться либо на концах отрезка [a, b], либо в одной из критических точек, попадающих в интервал (a, b) (см. рис. 2.5-2.7). Действительно, по определению точки локального экстремума являются внутренними точками отрезка [a, b] и находятся среди критических точек функции $f(x)$, попавших в интервал (a, b). Вместе с тем, если точка абсолютного экстремума является внутренней точкой отрезка [a, b], то она также является

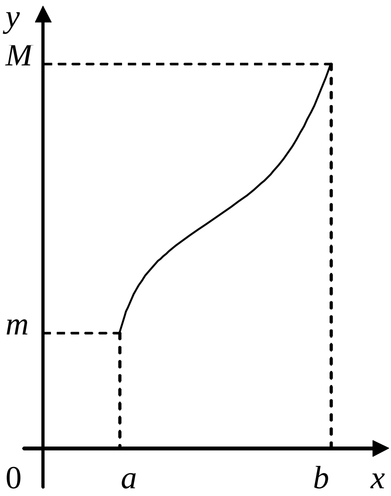

Рис. 2.5

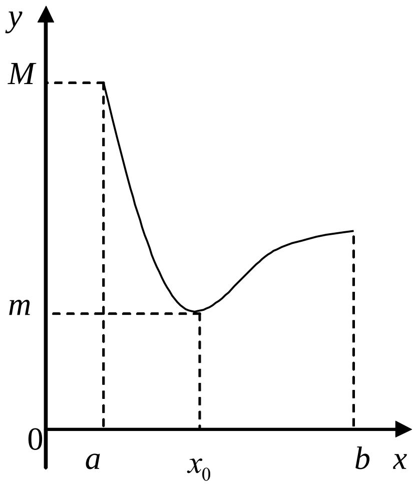

Рис. 2.6

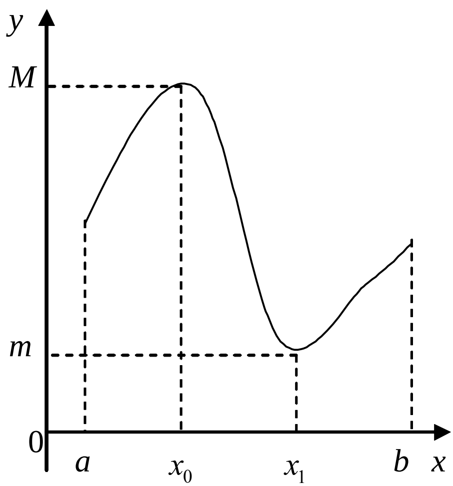

Рис. 2.7

и точкой локального экстремума. Поэтому точку абсолютного экстремума следует искать среди критических точек интервала (a, b) и граничных точек a и b.

Для отыскания *наибольшего и наименьшего значений* функции $y = f(x)$ на отрезке [a, b] можно пользоваться схемой:

1) Вычисляем производную $f'(x)$.
2) Находим критические точки функции (в которых $f'(x) = 0$ или не существует) и выбираем те из них, которые попадают в интервал (a, b).
3) Вычисляем значения функции в выбранных критических точках и на концах отрезка и выбираем из них наибольшее $f_{наиб.}$ и наименьшее $f_{наим.}$.

Рассмотрим теперь другие «узловые» точки функции, которые также следует найти, чтобы качественно построить её график.

Кривая, заданная функцией $y = f(x)$, называется *выпуклой* (выпуклой вверх) в интервале $(a;b)$, если все точки кривой лежат не выше любой ее касательной в этом интервале, и *вогнутой* (выпуклой вниз) в интервале $(a;b)$, если все ее точки лежат не ниже любой ее касательной в этом интервале (см. рис. 2.8).

Точка кривой $M(x_0, f(x_0))$, отделяющая выпуклую ее часть от вогнутой, называется *точкой перегиба кривой.* Предполагается, что в точке M существует касательная (см. рис. 2.8).

Теорема 2.4 (достаточное условие выпуклости (вогнутости) графика функции). *Если во всех точках* *интервала* $(a;b)$ *вторая производная функции* $y=f(x)$ *отрицательна (положительна), т.е.* $f''(x)<0$ $(f''(x)>0)$, *то кривая* $y=f(x)$ *в этом интервале выпукла (вогнута).*

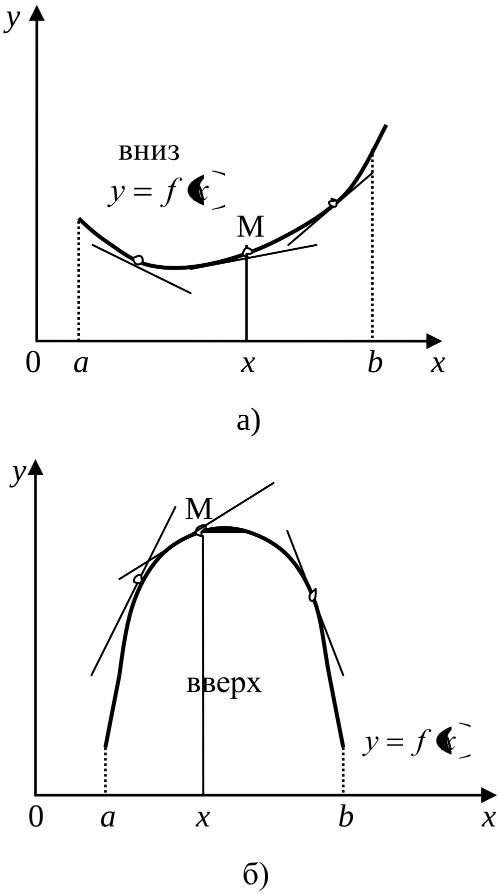

Рис. 2.8

В точке перегиба, отделяющей промежуток выпуклости от промежутка вогнутости, вторая производная функции изменяет свой знак, поэтому в таких точках вторая производная функции или обращается в нуль, или не существует.

Теорема 2.5 (достаточный признак точки перегиба). *Если в точке* $x = x_0$ $f''(x_0) = 0$ *или* $f''(x_0)$ *не существует и при переходе через эту точку производная* $f''(x)$ *меняет знак, то точка с абсциссой* $x = x_0$ *кривой* $y = f(x)$ *– точка перегиба.*

При исследовании поведения функции при $x \to +\infty$ или при $x \to -\infty$, или в окрестности точек разрыва второго рода, часто оказывается, что график функции сколь угодно близко приближается к той или иной прямой. Такие прямые называются *асимптотами* графика функции.

Прямая L называется *асимптотой* данной *кривой* $y = f(x)$, если расстояние от точки M кривой до прямой L при удалении точки M в бесконечность стремится к нулю. Из определения следует, что асимптоты могут существовать только у кривых, имеющих сколь угодно далекие точки («неограниченные» кривые).

Существует три вида асимптот: наклонные (рис. 2.9), вертикальные (рис. 2.10) и горизонтальные (рис. 2.11).

Если существуют числа $x = x_i$ $(i = \overline{1,n})$, при которых $\lim\limits_{x \to x_i} f(x) = \pm\infty$, т.е. функция имеет бесконечные разрывы, то прямые $x = x_i$ называются вертикальными асимптотами кривой $y = f(x)$.

Если существуют конечные пределы

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x\to\pm\infty} \left(f(x) - kx \right), \qquad (2.6)$$

то прямые $y = kx + b$ – *наклонные асимптоты кривой* $y = f(x)$ (при $k = 0$ – *горизонтальные*). При $x \to \pm\infty$ можем прийти к двум значениям для k. Если имеем одно значение для k, то при $x \to \pm\infty$ можем получить два значения для b.

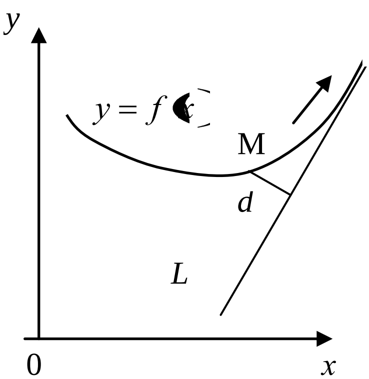

Рис. 2.9

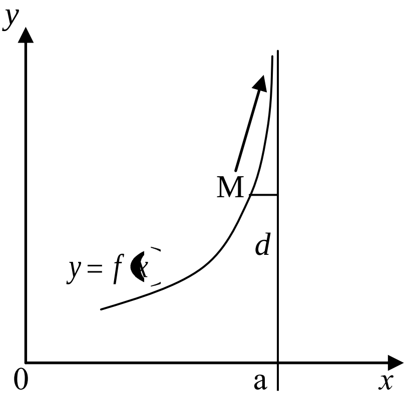

Рис. 2.10

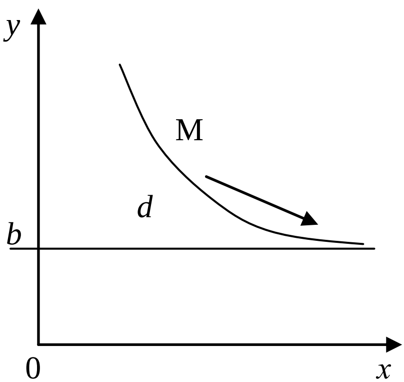

Рис. 2.11

2.6. Схема полного исследования функции

Изучение заданной функции и построение ее графика целесообразно проводить по следующей схеме:

1) указать область определения функции;

2) найти точки разрыва функции, точки пересечения ее графика с осями координат и вертикальные асимптоты (если они существуют);

3) установить наличие или отсутствие четности, нечетности, периодичности функции;

4) исследовать функцию на монотонность и экстремум;

5) определить интервалы выпуклости и вогнутости, точки перегиба;

6) найти асимптоты графика функции;

7) произвести необходимые дополнительные вычисления;

8) построить график функции.

Отметим, что исследование функции проводится одновременно с построением ее графика, т.е. получаемые в процессе исследования результаты сразу же наносятся на график.

В том случае, если исследуемая функция окажется четной или нечетной, то при построении графика используют симметрию графика относительно оси ординат или начала координат.

2.7. Вопросы для самоконтроля

1. Дайте определение производной функции.
2. Сформулируйте физический смысл производной функции.
3. Сформулируйте и поясните геометрическую интерпретацию производной функции.

4. Поясните связь между непрерывностью и дифференцируемостью функций.
5. Сформулируйте и поясните основные правила дифференцирования.
6. Дайте определение производной обратной функции.
7. Дайте определение производной сложной функции.
8. Запишите производные основных элементарных функций.
9. Дайте определение дифференциала.
10. Сформулируйте правила нахождения дифференциалов суммы, разности, произведения, частного двух функций.
11. Сформулируйте и поясните геометрическое значение дифференциала и приближенные вычисления.
12. Дайте определение производных различных порядков от функций, заданных явно, неявно и в параметрическом виде.
13. Дайте определение дифференциалов различных порядков.
14. Сформулируйте и проиллюстрируйте на примерах правило Лопиталя.
15. Сформулируйте и поясните исследование возрастания и убывания функций с помощью производной.
16. Сформулируйте необходимые и достаточные условия существования экстремума функции.
17. Сформулируйте и поясните исследование функции на экстремум с помощью второй производной.
18. Дайте определение выпуклой и вогнутой кривой; точек перегиба.

19. Сформулируйте и поясните достаточный признак точек перегиба.
20. Дайте определение асимптот. Поясните способы нахождения асимптот.
21. Сформулируйте общий план исследования функций и построения графиков.

Решение типовых задач на тему 2

Пример 1. В произвольной точке найти производную функции $y = 9x^5 - 4/x^3 + \sqrt[3]{x^7} - 3x + 4$.

Решение.

Для решения данной задачи необходимы знания правил и формул дифференцирования (см. п.п. 2.2). Функция y представляет собой сумму пяти многочленов: трех степенных, одного первой степени и свободного члена. Согласно правилам дифференцирования производная суммы равна сумме производных: $y' = (9x^5)' - (4/x^3)' + (\sqrt[3]{x^7})' - (3x)' + 4'$. Далее, для первых трех слагаемых – степенных функций – применим пункт 1 таблицы производных, для 4-го – пункт 4 правил дифференцирования, для 5-го – пункт 1 тех же правил. Получаем краткую запись решения:

$$y' = 9 \cdot 5x^4 - 4(-3)x^{-4} + \frac{7}{3}x^{4/3} - 3 =$$

$$= 45x^4 + \frac{12}{x^4} + \frac{7}{3}\sqrt[3]{x^4} - 3.$$

Замечание. При решении подобных задач достаточно использовать краткую запись решения в математических символах. Выражение, полученное после нахождения производной необходимо упростить, если это возможно.

Пример 2. В произвольной точке найти производную функции $y=\sqrt[4]{(2x^2-3x+1)^3}-6/(x+1)^3$.

Решение.

Данная функция является суммой сложной функции (многочлен в степени) и степенной, поэтому применим правила дифференцирования 3 и 8 и получим следующую запись в математических символах:

$$y'=\frac{3}{4}(2x^2-3x+1)^{-1/4}(4x-3)-6(-3)(x+1)^{-4}=$$

$$=\frac{3}{4}\frac{4x-3}{\sqrt[4]{2x^2-3x+1}}+\frac{18}{(x+1)^4}.$$

Пример 3. Найти производную функции

$$y=tg^5(x+2)\cdot\arccos 3x^2.$$

Решение.

Находим производную произведения двух сложных функций и упрощаем полученное выражение:

$$y'=5tg^4(x+2)\cdot\frac{1}{\cos^2(x+2)}\arccos 3x^2+$$

$$+tg^5(x+2)\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{1-9x^4}}\right)\cdot 6x=$$

$$=\frac{5tg^4(x+2)\cdot\arccos 3x^2}{\cos^2(x+2)}-\frac{tg^5(x+2)\cdot 6x}{\sqrt{1-9x^4}}=$$

$$=5tg^4(x+2)\cdot\left(\frac{\arccos 3x^2}{\cos^2(x+2)}-\frac{6x}{\sqrt{1-9x^4}}\right).$$

Пример 4. В произвольной точке найти производную функции $y = \arcsin^5 4x \cdot \log_2 \ x-5 \ $.

Решение.

Находим производную произведения двух сложных функций и упрощаем полученное выражение:

$$y' = 5\arcsin^4 4x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-16x^2}} \cdot 4\log_2 \ x-5 \ +$$

$$+\arcsin^5 4x \cdot \frac{1}{x-5 \ \ln 2} =$$

$$= \frac{20\arcsin^4 4x \cdot \log_2 \ x-5}{\sqrt{1-16x^2}} + \frac{\arcsin^5 4x}{x-5 \ \ln 2} =$$

$$= \arcsin^4 4x \left(\frac{20 \cdot \log_2 \ x-5}{\sqrt{1-16x^2}} + \frac{\arcsin 4x}{x-5 \ \ln 2} \right).$$

Пример 5. Найти производную функции $y = 3^{-x^4} ctg 7x^3$.

Решение.

Находим производную произведения двух сложных функций:

$$y' = 3^{-x^4} \ln 3 \cdot \ -4x^3 \ \ ctg 7x^3 + 3^{-x^4} \left(\frac{1}{-\sin^2 7x^3} \right) \cdot 21x^2 =$$

$$= -4\ln 3 \cdot 3^{-x^4} x^3 ctg 7x^3 - \frac{21x^2 \cdot 3^{-x^4}}{\sin^2 7x^3} =$$

$$= -\frac{3^{-x^4} x^2}{\sin^2 7x^3} \ \ 4\ln 3 \cdot x \cos 7x^3 + 21 \ .$$

Пример 6. Найти производную функции

$$y = \frac{\sqrt{3x^2 - 7x + 5}}{e^{-x^4}}.$$

Решение.

Преобразовав знаменатель данной функции $\dfrac{\sqrt{3x^2-7x+5}}{e^{-x^4}}=\sqrt{3x^2-7x+5}\cdot e^{x^4}$, находим производную произведения двух сложных функций:

$$y'=\left(\sqrt{3x^2-7x+5}\cdot e^{x^4}\right)'=\frac{(6x-7)\,e^{x^4}}{2\sqrt{3x^2-7x+5}}+$$

$$+\sqrt{3x^2-7x+5}\,e^{x^4}\cdot 4x^3=$$

$$=\frac{(6x-7)\,e^{x^4}}{2\sqrt{3x^2-7x+5}}+4x^3e^{x^4}\sqrt{3x^2-7x+5}=$$

$$=e^{x^4}\left(\frac{6x-7}{2\sqrt{3x^2-7x+5}}+4x^3\sqrt{3x^2-7x+5}\right).$$

Пример 7. Найти производную функции

$$y=\lg\left(x^2-3x+5\right)/arcctg^2 5x.$$

Решение.

Преобразовав знаменатель данной функции, находим производную произведения двух сложных функций:

$$y'=\left(\lg\left(x^2-3x+5\right)\cdot arcctg^{-2}5x\right)'=$$

$$=\frac{2x-3}{\left(x^2-3x+5\right)\ln 10}arcctg^{-2}5x-$$

$$-\lg\left(x^2-3x+5\right)\cdot 2arcctg^{-3}5x\cdot\left(-\frac{1}{1+25x^2}\right)\cdot 5=$$

$$=\frac{1}{arcctg^2 5x}\left(\frac{2x-3}{\left(x^2-3x+5\right)\ln 10}+\frac{\lg\left(x^2-3x+5\right)}{2arcctg 5x}\cdot\frac{5}{1+25x^2}\right).$$

Пример 8. Найти производную функции

$$y=\frac{3\ln\left(x^2-5\right)}{\left(x+3\right)^7}.$$

Решение.

Находим производную частного двух сложных функций:

$$y'=3\frac{\frac{1}{x^2-5}\cdot 2x\left(x+3\right)^7-7\left(x+3\right)^6\ln\left(x^2-5\right)}{\left(x+3\right)^{14}}=$$

$$=3\cdot(x+3)^6\cdot\frac{2x(x+3)-7\ln(x^2-5)}{(x^2-5)(x+3)^{14}}.$$

Пример 9. Найти производную функции

$$y=\sqrt[7]{\left(x+5\right)/\left(x-5\right)}\,ctg\left(3x-4\right).$$

Решение.

Находим производную произведения двух сложных функций и упрощаем полученное выражение:

$$y'=\frac{1}{7}\left(\frac{x+5}{x-5}\right)^{-6/7}\frac{\left(x-5\right)-\left(x+5\right)}{\left(x-5\right)^2}ctg\left(3x-4\right)-$$

$$-\frac{1}{\sin^2\left(3x-4\right)}\cdot 3\sqrt[7]{\frac{x+5}{x-5}}=$$

$$=\frac{1}{7}\left(\frac{x-5}{x+5}\right)^{6/7}\frac{-10}{\left(x-5\right)^2}ctg\left(3x-4\right)-\frac{3}{\sin^2\left(3x-4\right)}\cdot\sqrt[7]{\frac{x+5}{x-5}}=$$

$$=\frac{1}{7}\left(\frac{x+5}{x-5}\right)^{-6/7}\frac{x-5-\ \ x+5}{x-5\ \ ^{2}}ctg\ \ 3x-4\ \ -$$

$$-\frac{1}{\sin^{2}\ \ 3x-4}\cdot 3\left(\frac{x+5}{x-5}\right)^{1/7}\ =$$

$$=-\left(\frac{x+5}{x-5}\right)^{1/7}\cdot\left(\frac{10}{7}\cdot\frac{ctg\ \ 3x-4}{x-5\ \ ^{2}}\cdot\frac{x-5}{x+5}+\frac{3}{\sin^{2}\ \ 3x-4}\right)=$$

$$=-\left(\frac{x+5}{x-5}\right)^{1/7}\cdot\left(\frac{10}{7}\cdot\frac{ctg\ \ 3x-4}{x^{2}-25}+\frac{3}{\sin^{2}\ \ 3x-4}\right).$$

Пример 10. Найти производную функции

$$y=\ \sin 7x\ ^{arctg\ \ 3x-5}\ .$$

Решение.

Имеем степенно-показательную функцию. Прологарифмируем обе части функции. Применив свойства логарифмов, получаем:

$$\ln y=arctg\ \ 3x-5\ \cdot\ln\ \ \sin 7x\ \ .$$

Далее, находим производные сложных функций слева и справа:

$$\frac{1}{y}y'=\frac{1}{1+\ \ 3x-5\ \ ^{2}}\cdot 3\ln\ \ \sin 7x\ \ +arctg\ \ 3x-5\ \cdot\frac{7\cos 7x}{\sin 7x}.$$

Отсюда:

$$y'=\ \sin 7x\ ^{arctg\ \ 3x-5}\left(\frac{3\ln\ \ \sin 7x}{1+\ \ 3x-5\ \ ^{2}}+\frac{7arctg\ \ 3x-5\ \cdot\cos 7x}{\sin 7x}\right)$$

Пример 11. Найти y' и y'', если

$$\left.\begin{aligned} x&=3t^{4}-t^{2},\\ y&=t^{3}-5.\end{aligned}\right\}$$

Решение.

Имеем функцию, заданную параметрически. Так как

$$\left.\begin{array}{l} x' = 12t^3 - 2t, \\ y' = 3t^2 \end{array}\right\} \text{ и } \left.\begin{array}{l} x'' = 36t^2 - 2, \\ y'' = 6t \end{array}\right\}$$

то по формуле (2.3) находим первую производную:

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{3t^2}{12t^3 - 2t} = \frac{3t}{12t^2 - 2},$$

по формуле (2.4) – вторую:

$$y''_x = \frac{y''_t x'_t - x''_t y'_t}{x'^3_t} = \frac{6t\left(12t^3 - 2t\right) - \left(36t^2 - 2\right)\cdot 3t^2}{\left(12t^3 - 2t\right)^3} =$$

$$= \frac{72t^4 - 12t^2 - 108t^4 + 6t^2}{\left(12t^3 - 2t\right)^3} = -\frac{3\left(6t^2 + 1\right)}{4t\left(6t^2 - 1\right)^3}.$$

Пример 12. Найти $y'''\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$, если $y = \dfrac{1}{8} - \dfrac{1}{4}\cos^2 x$.

Решение.

Последовательно находим:

$$y' = \frac{1}{2}\cos x \cdot \sin x = \frac{1}{4}\sin 2x,$$

$$y'' = \frac{1}{2}\cos 2x,$$

$$y''' = -\sin 2x,$$

$$y'''\left(\pi/4\right) = -\sin\left(\pi/2\right) = -1.$$

Пример 13. Записать уравнение касательной к кривой $y = x^2 - 9x - 4$ в точке с абсциссой $x = -1$.

Решение.

Уравнение касательной найдем по формуле (2.5).

Ордината точки касания $y(-1)=1+9-4=6$. В любой точке $y'=2x-9$. В точке касания $y'(-1)=-11$. Поэтому имеем уравнение касательной (по точке $(-1,6)$ и угловому коэффициенту -11):

$$y-6=-11(x+1),$$

$$y=-11x-5.$$

Ответ: $y=-11x-5.$

Пример 14. По оси Ox движутся две материальные точки, законы движения которых $x_1=\frac{t^3}{3}-4$ и $x_2=\frac{7}{2}t^2-12t+3$ (x измеряется в метрах, t – в секундах). В какой момент времени их скорости окажутся равными?

Решение.

Воспользуемся физическим смыслом производной.

Находим скорости обеих точек: $x_1'=t^2, x_2'=7t-12.$ Так как $x_1'=x_2'$, то $t^2=7t-12$, $t^2-7t+12=0,$ откуда $t_1=3$ с, $t_2=4$ с.

Ответ: в моменты 3 и 4 с.

Пример 15. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln(x^2+1)}{\sqrt[5]{3x-1}}$**.**

Решение.

Так как под знаком предела числитель и знаменатель дроби стремятся к бесконечности при

$x \to \infty$, то приходим к неопределенности вида $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Следовательно, можно применить правило Лопиталя, см. формулу (2.7). Имеем:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\;\; x^2+1}{\sqrt[5]{3x-1}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\;\; x^2+1\;\;'}{(\sqrt[5]{3x-1})'}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2x/\;\; x^2+1}{3/\sqrt[5]{\;\;3x-1\;\;^4}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=$$

$$=\frac{2}{3}\lim_{x\to\infty}\frac{x\sqrt[5]{\;\;3x-1\;\;^4}}{x^2+1}=\frac{2}{3}\lim_{x\to\infty}\frac{x\sqrt[5]{\;\;3x-1\;\;^4}\;\;'}{x^2+1\;\;'}=$$

$$=\frac{2}{3}\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[5]{\;\;3x-1\;\;^4}+12x/(5\cdot\sqrt[5]{\;\;3x-1\;\;})}{2x}=$$

$$=\frac{2}{3}\lim_{x\to\infty}\frac{3x-1+12x/5}{2x\sqrt[5]{\;\;3x-1}}=\frac{2}{3}\lim_{x\to\infty}\frac{15x-5+12x}{10x\sqrt[5]{3x-1}}=$$

$$=\frac{1}{15}\lim_{x\to\infty}\frac{27x-5}{x\sqrt[5]{3x-1}}=\frac{1}{15}\lim_{x\to\infty}\frac{27-5/x}{\sqrt[5]{3x-1}}=$$

$$=\frac{1}{15}\lim_{x\to\infty}\frac{27}{\sqrt[5]{3x-1}}=0.$$

Ответ: 0.

Пример 16. От канала шириной 32м отходит под прямым углом другой канал шириной 4м. Определить наибольшую длину бревен, которые можно сплавлять по этой системе каналов. Толщину бревна не учитывать.

Решение.

Обозначим длину бревна через l. Сделаем рисунок (рис. 2.12) для иллюстрации задачи. Тогда:

$$l = |AC| = |AB| + |BC|, |AB| = \frac{|AE|}{\cos\varphi} = \frac{32}{\cos\varphi},$$

$$|BC| = \frac{|CD|}{\sin\varphi} = \frac{4}{\sin\varphi}, l = \frac{32}{\cos\varphi} + \frac{4}{\sin\varphi}.$$

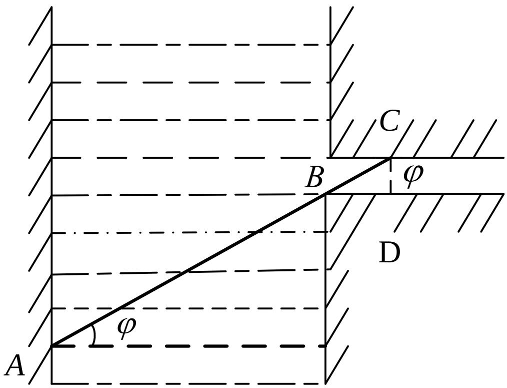

Рис. 2.12

Исследуем функцию l на экстремум:

$$l' = \frac{dl}{d\varphi} = \frac{32}{\cos^2\varphi}\sin\varphi - \frac{4}{\sin^2\varphi}\cos\varphi = \frac{32\sin^3\varphi - 4\cos^3\varphi}{\sin^2\varphi\cdot\cos^2\varphi}.$$

Если $l' = 0$, то $32\sin^3\varphi - 4\cos^3\varphi = 0$. Так как $\cos\varphi \neq 0$, то из последнего уравнения имеем: $tg^3\varphi = 1/8$, $tg\varphi = 1/2$, $\sin\varphi = 1/\sqrt{5}$, $\cos\varphi = 2/\sqrt{5}$, $\varphi \approx 26^\circ 34'$. В окрестности этого значения φ знак производной l' определяется знаком ее числителя, т.е. выражения $u\ \ \varphi\ = 32\sin^3\varphi - 4\cos^3\varphi$. Имеем:

$$u\ \ \varphi\ \Big|_{\varphi=26^\circ} \approx 32\cdot 0,438^3 - 4\cdot 0,899^3 \approx 2,696 - 2,904 < 0,$$

$$u\ \ \varphi\ \Big|_{\varphi=27^\circ} \approx 32\cdot 0,454^3 - 4\cdot 0,891^3 \approx 2,994 - 2,829 > 0,$$

т.е.

$$l\ \ \varphi\ \Big|_{\varphi=26^\circ 34'} = l_{\max}.$$

Следовательно, при $\varphi \approx 26^\circ 34'$ расстояние $|AC|$ будет минимальным, поэтому наибольшая длина $l_{\max}$ бревна, сплавляемого из одного канала в другой, не может быть больше этого расстояния. Окончательно получаем:

$$l_{\max} = 20\sqrt{5} \approx 44,72.$$

Ответ: 44,72 м.

Пример 17. Провести полное исследование функции $y = \ x+3\ ^2 / \ x-4\ $ и построить ее график.

Решение.

Исследуем данную функцию, придерживаясь указанной в п.п. 2.6 схемы.

1. Областью определения функции является множество $x \in \ -\infty; 4\ \cup\ 4; +\infty\ $.

2. Легко находим, что $x = 4$ – вертикальная асимптота, причем:

$$\lim_{x\to 4-0} y = \lim_{x\to 4-0} \frac{\ x+3\ ^2}{x-4} = -\infty,$$

$$\lim_{x\to 4+0} y = \lim_{x\to 4+0} \frac{\ x+3\ ^2}{x-4} = +\infty.$$

3. Исследуем функцию y на четность. Поскольку $y(-x) \neq y(x),\ y(-x) \neq -y(x)$, то функция y ни четная ни нечетная.

4. Исследуем функцию на возрастание, убывание, локальный экстремум:

$$y' = \frac{2(x+3)(x-4) - (x+3)^2}{(x-4)^2} = \frac{x^2 - 8x - 33}{(x-4)^2}.$$

Из $y' = 0$ следует $x^2 - 8x - 33 = 0$, откуда $x_1 = 11$, $x_2 = -3$. В интервале $(-\infty; -3)$ $y' > 0$, следовательно, функция возрастает в этом интервале; в $(-3; 4)$ $y' < 0$, т.е. функция убывает. Поэтому функция в точке $x = -3$ имеет локальный максимум: $y(-3) = 0$. В интервале $(4; 11)$ $y' < 0$, следовательно, функция убывает на этом интервале; в $(11; +\infty)$ $y' > 0$, т.е. функция возрастает. В точке $x = 11$ имеем локальный минимум: $y(11) = 28$.

5. Исследуем график функции на выпуклость, вогнутость и определим точки перегиба. Для этого найдем

$$y'' = \frac{(2x-8)(x-4)^2 - (x^2 - 8x - 33) \cdot 2(x-4)}{(x-4)^4} =$$

$$= \frac{2x^2 - 8x - 8x + 32 - 2x^2 + 16x + 66}{(x-4)^3} = \frac{98}{(x-4)^3}.$$

Очевидно, что в интервале $(-\infty; 4)$ $y'' < 0$, и в этом интервале кривая выпукла; в $(4; +\infty)$ $y'' > 0$, т.е. в этом интервале кривая вогнута. Так как при $x = 4$ функция не определена, то точка перегиба отсутствует.

6. Находим наклонные асимптоты в виде $y = kx + b$, где согласно выражениям (2.8):

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{(x+3)^2}{x(x-4)} = 1,$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-kx\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{(x+3)^2}{x-4}-x\right)=$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+6x+9-x^2+4x}{x-4}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{10x+9}{x-4}=10.$$

Таким образом, существует единственная наклонная асимптота $y=x+10$.

7. Дополнительно найдем точки пересечения графика данной функции с осями координат: $(0,-9/4)$ и $(-3,0)$. Ордината точки графика $y>0$ при $x>4, y<0$ при $x<4$.

8. График функции изображен на рис. 2.13 жирными линиями.

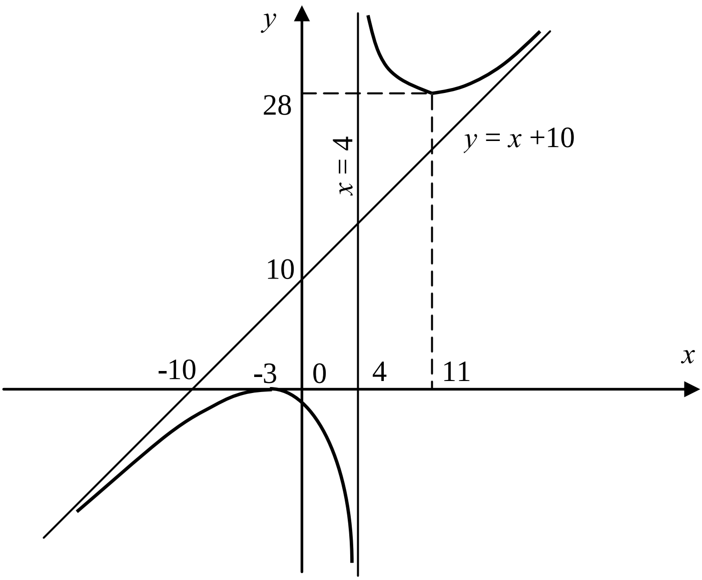

Рис. 2.13

Задачи для самостоятельной работы студентов

ЗАДАНИЕ 1

Найти производные данных функций, используя формулы дифференцирования, в произвольной точке.

1. а) $y=\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$; б) $y=(e^{\sin x}+3x)^3$;

   в) $y=\ln\operatorname{arctg}\sqrt{x}$; г) $y=(x+1)^{\sin x}$.

2. а) $y=\dfrac{\sqrt{2x^2-2x+1}}{x}$; б) $y=(2^{x^2}-\cos 3x)^3$;

   в) $y=x\arccos 3x$; г) $y=(\sin x)^x$.

3. а) $y=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$; б) $y=(5^{\cos x}-\sin x)^3$;

   в) $y=\ln\arccos x$; г) $y=(\cos x)^x$.

4. а) $y=\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x}$; б) $y=(2^{tg\,x}+\arcsin 3x)^2$;

   в) $y=\ln\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$; г) $y=(\ln x)^x$.

5. а) $y=\dfrac{3+x}{\sqrt{1-x}}$; б) $y=(2^{\sqrt{x}}-\cos 2x)^4$;

   в) $y=\arcsin\sqrt{1-x}$; г) $y=(x)^{\ln x}$.

6. а) $y=\dfrac{2x}{\sqrt{x^2-5}}$; б) $y=(3^{\sin x}-\sin^2 x)^3$;

   в) $y=\ln\operatorname{tg}5x$; г) $y=(x+1)^{\sqrt{x}}$.

7. а) $y=\dfrac{x}{\sqrt{x^3-4x}}$; б) $y=(5^{\sin x}+\cos x)^3$;

   в) $y=\operatorname{arctg}\sqrt{2+x}$; г) $y=(x)^{x^2}$.

8. а) $y=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-x}}$; б) $y=(3^{\cos x}-\sin^2 x)^3$;

в) $y = \ln \arcsin x$; г) $y = x^{\sin x}$.

9. а) $y = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - 4}}$; б) $y = (4^{tgx} - \cos x)^2$;

в) $y = \ln \operatorname{tg} 5x$; г) $y = (x)^{\frac{1}{x}}$.

10. а) $y = \dfrac{5 + x}{\sqrt{2 - x}}$; б) $y = (x^{\frac{2}{3}} + 3\sin^{2x}\ )^2$;

в) $y = \arcsin 5x$; г) $y = (x)^{2\sin x}$.

11. а) $y = \dfrac{3x - 4}{\sqrt{x^2 + 3x}}$; б) $y = (3^{\sin 2x} - \cos^2 x)^3$;

в) $y = \ln \arcsin \sqrt{1 - x^2}$; г) $y = (2x + 3)^{tg\ x}$.

12. а) $y = \dfrac{x + 3}{\sqrt{x^3 - 6x}}$; б) $y = (2^{arctgx} - \cos x)^3$;

в) $y = \ln \dfrac{3x + 2}{x^2 + 2x}$; г) $y = (1 + \cos x)^{x}$.

13. а) $y = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - 5}}$; б) $y = (3^{\cos 3x} - \sin x)^2$;

в) $y = \ln \dfrac{2x + 1}{2x - 1}$; г) $y = (x + 2)^{x}$.

14. а) $y = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - 4}}$; б) $y = (2^{\arcsin x} + tg2\ x)^3$;

в) $y = \ln \dfrac{1}{x - 1}$; г) $y = (x^2 + 1)^{tgx}$.

15. а) $y = \dfrac{x}{\sqrt{x^3 + 1}}$; б) $y = (5^{tg\,2x} - x^2)^3$;

в) $y = \ln \sqrt[3]{\dfrac{x^2 + 4}{x^2 - 1}}$; г) $y = (\arcsin x)^{2x}$.

16. а) $y = \dfrac{4x + 1}{\sqrt{x^2 - 4}}$; б) $y = (4^{tg\,3x} + \sqrt{x})^2$;

в) $y = \arcsin\sqrt{1-4x^2}$; г) $y = (x+3)^{\sin x}$.

17. а) $y = \dfrac{2x-3}{\sqrt{x^2+1}}$; б) $y = (3^{tg\,2x} - \ln x)^3$;

в) $y = \ln\sqrt[5]{\dfrac{4-3x^2}{x^2-4x}}$; г) $y = (tg2x)^{x}$.

18. а) $y = \dfrac{3x-8}{\sqrt{x^2+3x}}$; б) $y = (2^{\cos x} + \sin^2 x)^2$;

в) $y = \ln\sqrt[4]{\dfrac{5-x^2}{x^2-15x}}$; г) $y = (x+1)^{tgx}$.

19. а) $y = \dfrac{2x+5}{\sqrt{x^4+2x}}$; б) $y = (4^{ac\cos x} - \ln x)^3$;

в) $y = \ln\arcsin 5x$; г) $y = (x+5)^{3x}$.

20. а) $y = \dfrac{x^2-10}{\sqrt{x^4-3}}$; б) $y = (6^{\sin x} + \sqrt[3]{x})^4$;

в) $y = \mathrm{arcc\,tg}\sqrt{x}$; г) $y = (1+\dfrac{1}{x})^{x}$.

21. а) $y = \dfrac{x}{\sqrt{x-1}}$; б) $y = ctg\sqrt{x}$;

в) $y = \text{x}\ \ 2^{\arccos x}$; г) $y = x^{x+1}$.

22. а) $y = \dfrac{3x-2}{\sqrt{x^2+3}}$; б) $y = (e^{tg\,3x} - \sqrt[4]{x})^3$;

в) $y = \ln\cos\dfrac{x}{3}$; г) $y = (x+6)^{\frac{1}{x}}$.

23. а) $y = \dfrac{x}{\sqrt[3]{2+x}}$; б) $y = \sin^3 2x$;

в) $y = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2}$ г) $y = x^{\frac{2}{x}}$.

24. а) $y=\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$;   б) $y=arctg\,\dfrac{1}{x}$;

в) $y=x\,e^{-x}$;   г) $y=x^{x^2}$.

25. а) $y=x\sqrt[3]{1+x^2}$;   б) $y=\dfrac{\sin 3x}{1-\sin 3x}$;

в) $y=2^{\frac{1-x}{1+x}}$;   г) $y=x^{\frac{2}{x+4}}$.

26. а) $y=\dfrac{\sqrt{1+3x^3}}{x}$;   б) $y=x\arcsin\,\dfrac{2x}{3}$;

в) $y=e^{-\cos^3 5x}$;   г) $y=x^{\sin 3x}$.

27. а) $y=\dfrac{2x}{2+3x^2}$;   б) $y=e^{-x^2}\cos^2(2x+3)$;

в) $y=x\,arctg 5x$;   г) $y=(\sin 3x)^x$.

28. а) $y=\sqrt[4]{(5x-1)^3}$;   б) $y=\dfrac{1+tg\,x}{1-tg\,x}$;

в) $y=\arcsin\sqrt{x}$;   г) $y=x^{\frac{5}{x}}$.

29. а) $y=x^2\sqrt[3]{2+x}$;   б) $y=\cos^3 2x$;

в) $y=e^{\frac{1}{x^2}}$;   г) $y=(\sin x)^{\cos x}$.

30. а) $y=\dfrac{1}{x\sqrt{x^2+1}}$;   б) $y=\sin\sqrt{4+x^2}$;

в) $y=(e^{\sin x}-1)^2$;   г) $y=x^{\sqrt{x}}$.

ЗАДАНИЕ 2

Найти y' функции y, заданной неявно и параметрическими уравнениями в произвольной точке

1. а) $x^2+y^2-2y=0$;   б) $\begin{cases} x=t-\ln t \\ y=3t^2-2t^3 \end{cases}$

2. а) $\sin x - \operatorname{arctg} y = 0$; б) $\begin{cases} x = 2\ tg\, t \\ y = 3\sec t \end{cases}$

3. а) $e^{x} - x - y^{3} = 0$; б) $\begin{cases} x = \arcsin t \\ y = 3t - t^{2} \end{cases}$

4. а) $x \sin y - y \cos x = 0$; б) $\begin{cases} x = c\, tg\, t \\ y = \sec^{2} t \end{cases}$

5. а) $e^{x} - x^{2} - e^{y} = 0$; б) $\begin{cases} x = 2\, t - \sin 2t \\ y = 8\sin^{3} t \end{cases}$

6. а) $2x - \sin 2x - y^{2} = 0$; б) $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$

7. а) $e^{xy} - x^{2} + y^{2} = 0$; б) $\begin{cases} x = a\ \cos^{2} t \\ y = b\ \sin^{3} t \end{cases}$

8. а) $y \sin x + \cos y = 0$; б) $\begin{cases} x = t^{2} + \ln t \\ y = 2t^{3} + 3t \end{cases}$

9. а) $\cos(x - y) - 2x + 4y = 0$; б) $\begin{cases} x = \mathrm{a}\ (\sin t - t\cos t)\ ; \\ y = a(\cos t + t \sin t) \end{cases}$

10. а) $xy - \dfrac{y}{x} = 0$; б) $\begin{cases} x = t + \ln\ \cos t \\ y = t - \ln\ \sin t \end{cases}$

11. а) $xy + \ln y = 0$; б) $\begin{cases} x = 2t - \sin 2t\ ; \\ y = \sin^{3} t \end{cases}$

12. а) $e^{x+y} - \sin\dfrac{y}{x} = 0$ б) $\begin{cases} x = t + \dfrac{1}{2}\sin 2t \\ y = \cos^{3} t \end{cases}$

13. а) $(x + y)^{2} = x - y$; б) $\begin{cases} x = t^{3} + 2t\ ; \\ y = t^{3} + 8t - 1 \end{cases}$

14. а) $y(\ln x - x\ln y) = x + y$; б) $\begin{cases} x = t^2 + t + 1; \\ y = t^3 + t \end{cases}$

15. а) $x^3 y^3 - 2xy + 3 = 0$; б) $\begin{cases} x = \operatorname{ctg} t; \\ y = \sec^2 t \end{cases}$

16. а) $x^2 y^2 - \cos x = 0$; б) $\begin{cases} x = \cos^3 t; \\ y = t - \sin t \end{cases}$

17. а) $\cos(xy) - 2x = 0$; б) $\begin{cases} x = 2\cos^3 2t; \\ y = \sin^3 2t \end{cases}$

18. а) $\dfrac{x}{y} + xy - 2 = 0$ б) $\begin{cases} x = \sqrt{3}\cos t; \\ y = \sin t \end{cases}$

19. а) $5x^2 y^2 - 7y + 4 = 0$; б) $\begin{cases} x = 2t - t^2; \\ y = 3t - t^3 \end{cases}$

20. а) $x^3 y^3 - 2xy + 1 = 0$; б) $\begin{cases} x = t\cos t; \\ y = t\sin t \end{cases}$

21. а) $x^2 + xy + y^2 = 3$; б) $\begin{cases} x = 1 - t^2; \\ y = t - t^3 \end{cases}$

22. а) $x^2 + y^2 - xy = 0$; б) $\begin{cases} x = t(1 - \sin t); \\ y = t\cos t \end{cases}$

23. а) $x^3 + y^3 - 3xy = 0$; б) $\begin{cases} x = 3\cos t; \\ y = 4\sin t \end{cases}$

24. а) $x^4 + y^4 - x^2 y^2 = 0$; б) $\begin{cases} x = t^3 + 1; \\ y = t^2 + t + 1 \end{cases}$

25. а) $y - x e^{y} - 1 = 0$; б) $\begin{cases} x = \sin t; \\ y = a^{t} \end{cases}$

26. а) $y^3 + e^{xy} = 0$; б) $\begin{cases} x = 2e^{t}; \\ y = e^{-t} \end{cases}$

27. а) $x\,y + e^{y} = 0$; б) $\begin{cases} x = t - t^{4}; \\ y = t^{2} - t^{3} \end{cases}$

28. а) $x^{3}y^{3} - \sin y + 3 = 0$; б) $\begin{cases} x = 2\cos t; \\ y = \sin t \end{cases}$

29. а) $\sin x + x\,y^{2} = 0$; б) $\begin{cases} x = t^{3} + 1; \\ y = t^{2} \end{cases}$

30. а) $x^{3}y^{2} - \cos y + 4 = 0$; б) $\begin{cases} x = \sin t; \\ y = \cos 2t \end{cases}$

ЗАДАНИЕ 3

Найти наибольшее и наименьшее значение функции $y = f(x)$ на отрезке $[a;b]$.

1. $y = \frac{x^{3}}{3} + x^{2} - 3x + 2$, [-2; 3]
2. $y = \frac{x^{4}}{2} - 9x^{2} + 1$, [-4;1]
3. $y = x^{3} - 3x^{2} - 9x + 4$, [-2; 2]
4. $y = -\frac{x^{4}}{2} + 4x^{2}$, [-1; 3]
5. $y = \frac{x^{3}}{3} - \frac{x^{2}}{2} - 6x - 1$, [-3; 0]
6. $y = \frac{3x^{4}}{4} - 6x^{2} - 2$, [0; 2]
7. $y = -\frac{2x^{3}}{3} + 3x^{2} - 2$, [-1; 2]
8. $y = -\frac{x^{4}}{4} + 2x^{2} + 3$,[-3;1]
9. $y = -\frac{x^{3}}{3} + x^{2} + 3$, [-1; 3]
10. $y = \frac{x^{4}}{4} - 2x^{2} - 3$, [-2;3]
11. $y=2x^{3} - 9x^{2} - 24x - 7$, [-2; 3]
12. $y = \sin 2x - x$, $[0; \frac{\pi}{4}]$
13. $y = 3x - 2\sqrt{x}$, [0; 4]
14. $y = x^{4} - 8x^{2} + 3$, [-2; 2]
15. $y = \frac{1}{3}x^{3} - 2x^{2} + 3$, [-1; 2]
16. $y = x^{3} + 3x^{2} + 5$, [-3; 2]
17. $y = x^{3} - 3x^{2} + 3$, [1; 3]
18. $y=x^{3} - 6x^{2} + 2$, [-2; 2]
19. $y=2x^{3} - 3x^{2} - 12x + 1$, [-2; 4]
20. $y=-2x^{3} - 9x^{2} + 6$, [-2;1]

21. $y=2x^{3}-15x^{2}+24x+5$, [0; 3] 22. $y=x^{4}-8x^{2}+3$, [-2; 2]

23. $y=2x-\sqrt{x}$, [0; 4] 24. $y=x^{3}-9x^{2}+24x-10$, [0;3]

25. $y=x-2\ln x$, [1; e] 26. $y=x^{3}-3x+3$, $[-3;\frac{3}{2}]$

27. $y=-3x^{4}+6x^{2}-1$, [-2;2] 28. $y=\frac{x^{3}}{3}-2x^{2}+3x+1$, [-1;5]

29. $y=\frac{x-1}{x+1}$, [0; 4] 30. $y=x^{2}+\frac{16}{x}-16$, [1; 4]

ЗАДАНИЕ 4

Провести полное исследование функций $y=f(x)$ и построить их графики.

1. а) $y=2x^{3}-x^{2}+4x+1$
   б) $y=\frac{x^{3}+2}{x}$
2. а) $y=2x^{3}-15x^{2}+24x+5$
   б) $y=x+\frac{2}{x^{2}}$
3. а) $y=3x^{4}-2x^{2}+x$
   б) $y=x-\frac{1}{x}$
4. а) $y=x^{4}+x^{2}-2$
   б) $y=\frac{x^{2}-1}{x^{2}-4}$
5. а) $y=x^{3}-5x^{2}+5$
   б) $y=\frac{4x^{2}}{x^{3}-1}$
6. а) $y=x^{3}+x^{2}-x$
   б) $y=x+\frac{\ln x}{x}$
7. а) $y=-x^{4}+x^{2}-1$
   б) $y=\frac{x^{2}-2x+2}{x-1}$
8. а) $y=-2x^{4}-6x^{2}+3$
   б) $y=\frac{2}{x^{2}-5x+6}$
9. а) $y=x^{3}-10x^{2}+7$
   б) $y=\sqrt[3]{1-x^{3}}$
10. а) $y=x^{3}-27x$
    б) $y=xe^{\frac{-x^{2}}{2}}$
11. а) $y=3x^{4}-2x^{2}+1$
    б) $y=\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$
12. а) $y=x^{4}-2x^{3}-4$
    б) $y=\frac{1-x^{3}}{x^{2}}$

13. а) $y = x^4 - x^2 + 5$

б) $y = x^2 e^{\frac{1}{x}}$

14. а) $y = x^4 - x^3$

б) $y = \dfrac{x^2+1}{1+x}$

15. а) $y = 2x^3 - 3x^2 - x + 3$

б) $y = \dfrac{1}{x} + 4x^2$

16. а) $y = 2x^3 - x + 2$

б) $y = \dfrac{4}{x} + \dfrac{1}{x^4}$

17. а) $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1$

б) $y = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$

18. а) $y = -2x^3 - 9x^2 + 6$

б) $y = \dfrac{\ln x}{x^2}$

19. а) $y = 2x^3 - 15x^2 + 24x + 5$

б) $y = x\,\mathrm{e}^{-x}$

20. а) $y = x^4 - 8x^2 + 3$

б) $y = \ln(x^2 - 6x + 10)$

21. а) $y = x^3 - 3x^2 + 3$

б) $y = \dfrac{(x+1)^2}{x-2}$

22. а) $y = x^3 - 6x^2 + 2$

б) $y = \dfrac{2x-1}{(x-1)^2}$

23. а) $y = x^4 - 8x^2 + 3$

б) $y = \dfrac{(x+1)^2}{x^2+1}$

24. а) $y = x^4 - 6x^2 + 1$

б) $y = \dfrac{2x}{x^2+4}$

25. а) $y = \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^2}{2} - 6x - 1$

б) $y = \dfrac{3\ln x}{x}$

26. а) $y = -\dfrac{2x^3}{3} + 3x^2 - 2$

б) $y = \dfrac{4-x^2}{x^2+4}$

27. а) $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 4$

б) $y = \ln(4 + x^2)$

28. а) $y = x^3 - x^2 - 9x$

б) $y = \ln(x^2 - 2x + 2)$

29. а) $y = \dfrac{x^3}{3} + x^2 - 3x + 2$

б) $y = \dfrac{(x+3)^2}{x^2+9}$

30. а) $y = \dfrac{x^4}{2} - 9x^2 + 1$

б) $y = \dfrac{4x}{x^2-4}$

ЗАДАНИЕ 5

1. В какой момент времени скорость тела, движущегося по закону $S(t) = 3t^2 - 15t + 2$, равна нулю?
2. Угол φ (рад) оборота тела вокруг оси

изменяется от времени t по закону $\phi(t)=3t^2-2t-4$. Вычислить угловую скорость в произвольный момент времени t и установить, при каком значении t (с) она будет равна 40 рад/с.

3. В какой момент времени скорость тела, движущегося по закону $S(t) = 5t^2 - 3t + 4$, окажется равной 27 ед.?

4. Тело движется прямолинейно по закону $S(t) = t^3 - 6t^2 - 4t - 8$. Определить скорость тела в конце 5-й секунды (t = 5сек.). Путь S выражен в метрах.

5. Радиус шара R равномерно возрастает со скоростью 2 см/с. С какой скоростью возрастает объем шара? Найти эту скорость в момент, когда R достигнет 10 см (R=0 при t=0).

6. Построить график скорости тела, движущегося по закону:

$$S(t)=\begin{cases}\frac{t^3}{3}-8 \text{ при } |t|\le 2,\\ 4t-3 \text{ при } |t|\ge 2\end{cases}$$

7. Тело, выпущенное вертикально вверх, двигается по закону $h(t)=8t-5t^2$. Найти скорость тела в момент столкновения с землей. (-8)

8. Построить график скорости движения тела, заданного уравнениями:

$$S(t)=\begin{cases}-\frac{1}{3}t^3+2t^2-1 \text{ при } 0\le t\le 3\\ 3t \text{ при } t\ge 3\end{cases}$$

9. Найти острый угол между параболами $y=x^2-2$ и $y=-x^2+6$ в точке их пересечения, имеющей положительную абсциссу.

10. Дано уравнение пути движущегося тела

$S(t) = 2\sin\frac{t+\pi}{4}$. Найти ускорение тела при $t = \pi$.

11. Дано уравнение движения тела $S(t) = 3 - 8t + 3{,}5t^2$. Найти ускорение тела в любой момент времени и построить график.

12. К параболе $y = 3x^2 - 5x + 8$ в некоторой точке проведена касательная под углом 45є к оси абсцисс. Найти точку касания. (1;6)

13. Дано уравнение движения тела

$$S(t) = A\sin(\omega t + \phi),$$

где A, ϕ, ω – постоянные величины. Определить ускорение в любой момент времени t и при $t = 0$.

14. Построить график изменения ускорения тела по заданным уравнениям движения:

$$S(t) = \begin{cases} \frac{t^3}{24} + t^2 - 3 \text{ при } 0 \le \mathrm{t} \le 4, \\ -\frac{t^3}{6} + 3{,}5t^2 - 1 \text{ при } 4 \le \mathrm{t} \le 10, \\ -1{,}5t^2 \text{ при } \mathrm{t} > 10 \end{cases}$$

15. К графику функции $y = \frac{x+2}{x-2}$ провести (найти уравнение) касательную, параллельную прямой $y = -x + 2$.

16. Вычислить площадь треугольника, ограниченного осями координат и касательной к графику функции $y = \frac{x}{2x-1}$ в точке $x_0 = 1$. (2)

17. Дано уравнение движения тела $S(t) = \frac{1}{12}t^4 - \frac{1}{6}t^3 - 3t + 1$. В какие моменты времени ускорение движения равно нулю?

18. Тело массой m движется по закону $S(t) = \frac{1}{12}t^4 + 2$. Вывести формулу для определения силы, действующей на тело в любой момент времени t.

19. Тело массой m движется по закону $S(t)$ = 0,3 $\sin(10t - \pi)$. Определить силу, действующую на тело, при $t = \frac{1}{20}\pi$.

20. Зависимость пути от времени при прямолинейном движении двух тел задана уравнениями $S = \frac{2}{3}t^3 + t^2 - t + 14$; $s = \frac{2}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2 + 11t - 8$. В какой момент времени скорости их движения будут равными?

21. Тело массой m движется по закону $S(t) = 8t^2 - t + 2$. Найти силу, действующую на тело, при $t = 4$.

22. Найти ускорение тела, движущегося по закону $S(t) = \frac{1}{2}\sin 2t$, при $t = \frac{\pi}{4}$.

23. Материальная точка движется прямолинейно по закону $S = 60t - 5t^3$. Через какое время после начала движения точка остановится? Найти расстояние, пройденное точкой до остановки. (2с, 80м)

24. Тело массой 5 кг движется прямолинейно по закону $S(t) = t^2 + 2$. Найти кинетическую энергию тела через 2 с после начала движения.

25. Тело движется прямолинейно по закону $S(t) = t^2 + 2t + 3$ (м). Определить его скорость и ускорение в момент времени $t = 3$ сек.

26. Тело движется прямолинейно по закону $S(t) = t^3 - 8t^2 + 5t - 4$. Через сколько секунд от начала движения тело будет находиться в покое?

27. Тело движется прямолинейно по закону

$S(t)=\frac{1}{3}t^3-5t^2+24t-\frac{1}{3}$. Какой путь пройдет тело от начала движения до первой остановки?

28. Тело движется прямолинейно по закону $S(t)=12t - t^2$. Через сколько секунд от начала движения тело остановится?

29. Построить график ускорения движения тела, заданного уравнением

$$S(t)=\frac{1}{12}t^3+\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{2}t-4 \text{ в интервале } 0 < t < 10.$$

30. $S(t)=8-2t+24t^2-0,3t^5$. В какой момент времени тело имеет наибольшую скорость? Найти эту скорость.

ЗАДАНИЕ 6

Составить функцию по условию задачи и исследовать ее на экстремум.

1. В прямоугольный треугольник с гипотенузой 16см и углом 60є вписан прямоугольник, основание которого лежит на гипотенузе. Найти размеры прямоугольника, чтобы он имел наибольшую площадь?

2. Из круглого бревна диаметром 40 см требуется вырезать балку прямоугольного сечения с основанием b и высотой h. Прочность балки p пропорциональна bh^2. При каких значениях b и h прочность балки будет наибольшей?

3. Сечение тоннеля имеет форму прямоугольника, завершенного сверху полукругом. Периметр сечения 18 м. При каком радиусе полукруга площадь сечения будет наибольшей?

4. Оросительный канал имеет форму равнобочной трапеции, боковые стороны которой равны меньшему основанию. При каком угле наклона боковых сторон сечение канала будет иметь наибольшую площадь?

5. Представить число 10 в виде суммы двух положительных слагаемых, чтобы сумма их квадратов была наименьшей.

6. Под каким углом следует сбить одинаковые доски, чтобы получить водопойный желоб наибольшей вместимости?

7. Полоса жести шириной 60 см должна быть согнута в виде открытого желоба так, чтобы поперечный разрез имел форму трапеции, у которой $AC=CD=DB$ (см. рис.2.14). Определить ширину желоба AB, при которой вместимость его была наибольшей.

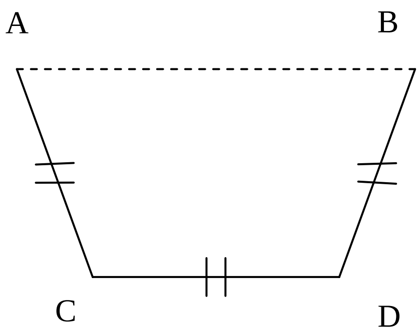

Рис.2.14

8. В равнобедренном треугольнике с основанием 20см и высотой 8 см вписан прямоугольник, одна сторона которого лежит на основании треугольника. Какой должна быть высота этого прямоугольника, чтобы он имел наибольшую площадь?

9. Из квадратного жестяного листа, сторона которого равна 1,8 м, требуется сделать открытый сверху ящик возможно большего объема, вырезая равные квадраты по углам, удаляя их и, затем, загибая жесть, чтобы образовать бока ящика. Какова должна быть длина стороны у вырезаемых квадратов?

10. От канала шириной 4 м отходит под прямым

углом другой канал шириной 2 м. Какой наибольшей длины бревна можно сплавлять по этим каналам из одного в другой (не учитывая толщины бревен).

11. Представить число 48 в виде суммы двух отрицательных слагаемых так, чтобы их произведение было наибольшим.

12. Боковое ребро правильной четырехугольной пирамиды 9см. Найти высоту и сторону основания пирамиды, чтобы ее объем был наибольшим.

13. Из всех цилиндров данного объема V найти тот, который имеет наименьшую полную поверхность.

14. Требуется огородить прямоугольный участок земли, используя в качестве одной из сторон забора часть стены дома. Участок должен иметь определенную площадь. Как следует выбрать соотношение между длинами его сторон, чтобы на постройку забора пошло наименьшее количество материала?

15. Требуется огородить забором прямоугольный участок с таким расчетом, чтобы площадь участка составляла 216 м^2 земли, и разделить затем этот участок на две равные части. Каковы должны быть размеры участка, чтобы на постройку заборов пошло наименьшее количество материала?

16. Два коридора шириной 2,4 м и 1,6 м пересекаются под прямым углом. Определить наибольшую длину лестницы, которую можно перенести горизонтально из одного коридора в другой.

17. Из прямоугольного листа жести, размером 48×18 см^2 требуется изготовить открытую сверху коробку, вырезая по углам листа равные квадраты и загибая оставшиеся боковые полосы под прямым углом. Каковы должны быть стороны вырезаемых квадратов, чтобы вместимость коробки была наибольшей?

18. Определить размеры открытого бассейна с

квадратным дном объемом V так, чтобы на облицовку его стен и дна пошло наименьшее количество материала.

19. Требуется изготовить закрытый цилиндрический бак максимальной вместимости. Каковы должны быть размеры бака, т.е. радиус основания и высота, если на его изготовление имеется S м^2 материала?

20 .Из имеющихся досок можно сделать забор длиной L м. Как этим забором огородить прямоугольный участок наибольшей площади, используя в качестве одной стороны стенку прилегающего здания?

21. Одна сторона прямоугольного участка примыкает к берегу канала, а три другие огораживаются забором. Каковы должны быть размеры этого участка, чтобы его площадь равнялась 800 м^2, а длина забора наименьшая.

22. Требуется изготовить коническую воронку с образующей, равной 20 см. Какова должна быть высота воронки, чтобы ее объем был наибольшим

23. Определить, каким должно быть сопротивление электронагревательного прибора, включенного в цепь тока сопротивлением R, для того, чтобы в нем выделилось максимальное количество тепла, если $Q= r\,J^2$, $J=\dfrac{E}{R+r}$, где E – электродвижущая сила, Q – выделяемое тепло.

28. Найти сумму $1+2\cdot\frac{1}{3}+3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2+\ldots+100\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{99}$ (рассмотреть функции $g(x)=1+2\cdot x+3\cdot x^2+\ldots+100\cdot x^{99}$ и $f(x)=x+x^2+\ldots+x^{100}$).

29. При каких значениях a функция $x(t)=at^2+at$

возрастает на R?

30. При каких значениях a функция $x(t)=at+\cos 3t$ не имеет точек экстремума?

ЗАДАНИЕ 7

Вычислить предел функции, используя правило Лопиталя.

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^3}$ 2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^{2x}+x^2}{x^3+3x+2}$

3. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x}{1-\sin\dfrac{\pi x}{2}}$ 4. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}$

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}x-x}{x-\sin x}$ 6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-2x}}{\ln(4+x)}$

7. $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\,\mathrm{tg}\dfrac{\pi x}{2}$ 8. $\lim\limits_{x\to 1}\ln x\cdot\ln(x-1)$;

9. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$ 10. $\lim\limits_{x\to +\infty}x^{\frac{1}{x}}$

11. $\lim\limits_{x\to 1}x^{\frac{1}{x-1}}$ 12. $\lim\limits_{x\to 0}x^{\frac{3}{2+\ln x}}$

13. $\lim\limits_{x\to 0}(\mathrm{ctg}x)^{\frac{1}{\ln x}}$ 14. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\mathrm{tg}x}$

15. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x^2)^{\frac{1}{x}}$ 16. $\lim\limits_{x\to 0}x^{\sin x}$

17. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\ln(1+x)}$ 18. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-3x-1}{\sin^2 5x}$

19. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln x}{1+2\ln\sin x}$ 20. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln(x-1)}{\mathrm{ctg}x\cdot x}$

21. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}x}{x+\sin x}$ 22. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x}\right)$

23. $\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos x)\cdot \mathrm{ctg}\, x$

24. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos^2 x-1)\cdot \mathrm{ctg}^2 x$

25. $\lim\limits_{x\to 0}\arcsin x\cdot x^2$

26. $\lim\limits_{x\to 0} arctgx\cdot x$

27. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}+3x}{\sin^2 3x}$

28 $\lim\limits_{x\to\pi/2}\dfrac{2^{\cos x}-1}{\ln\sin x}$

29. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+1}{\sin(x+1)}$

30. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x}{\log_2 x}$

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №1

Студентам заочной формы обучения для успешного освоения теоретических основ и приобретения практических навыков решения задач по темам 1 и 2 рекомендуется решить по одной задаче с каждого задания. Студентам дневной формы обучения – меньшее количество, на усмотрение преподавателя.

Задание 1. Вычислить следующие пределы:

1.1. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-12x+20}$

1.2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3-x^2+2x}{x^2+x}$

1.3. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{6+x-x^2}{x^3-27}$

1.4. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-x-1}{3x^2-x-2}$

1.5. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-7x+4}{x^2-5x+6}$

1.6. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{12+x-x^2}{x^3-27}$

1.7. $\lim\limits_{x\to 1/3}\dfrac{3x^2+2x-1}{27x^3-1}$

1.8. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-4x-5}{x^2-2x-3}$

1.9. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3x^2+2x-1}{-x^2+x+2}$

1.10. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3x^2-11x+6}{2x^2-5x-3}$

1.11. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{x^2+x-6}$

1.12. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-x-2}{x^3+1}$

1.13. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-16}{x^2+x-20}$

1.14. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{4x^2+11x-3}{x^2+2x-3}$

1.15. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3x^2-7x-6}{2x^2-7x+3}$

1.16. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{4x^2+7x-2}{3x^2+8x+4}$

1.17. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{5x^2+4x-1}{3x^2+x-2}$

1.18. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-4x-5}{3x^2+2x-2}$

1.19. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{7x^2+4x-3}{2x^2+3x+1}$

1.20. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{3x^2-3x+2}{x^2-x-12}$

Задание 2. Вычислить следующие пределы:

2.1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-5x^2+2}{2x^3+5x^2-x}$

2.2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3+7x}{2x^3-4x^2+5}$

2.3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^4-3x^2+7}{x^4+2x^3+1}$

2.4. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^3-2x^2+4x}{2x^3+5}$

2.5. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-4x^2+28x}{5x^3+3x^2+x-1}$

2.6. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+10x+3}{2x^2+5x-3}$

2.7. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-3x^4+x^2+x}{x^4+3x-2}$

2.8. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+7x+3}{5x^2-3x+4}$

2.9. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-x^2+3x+1}{3x^2+x-5}$

2.10. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-3x^2+10}{7x^3+2x+1}$

2.11. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2+5x-7}{2x^2-x+10}$

2.12. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4+2x+1}{x^4-x^3+2x}$

2.13. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+2x+9}{2x^2-x+4}$

2.14. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+5x-7}{3x^2+x+1}$

2.15. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+7x-2}{3x^3-x-4}$

2.16. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{18x^2+5x}{8-3x-9x^2}$

2.17. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4-6x^2+2}{x^4+4x-3}$

2.18. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^2+4x-5}{4x^2-3x+2}$

2.19. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^4-4x^2+3}{2x^4+1}$

2.20. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-4x+2}{6x^2+5x+1}$

Задание 3. Вычислить следующие пределы:

3.1. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{5x+7}\right)^{x+1}$

3.2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+1}{x-1}\right)^{x}$

3.3. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{2x-1}\right)^{3x}$

3.4. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{2x-1}{4x+1}\right)^{3x-1}$

3.5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{5x+8}{x-2}\right)^{x+4}$

3.6. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x+1}{3x-1}\right)^{2x+1}$

3.7. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{2x+1}{x-1}\right)^{4x}$

3.8. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{2x-1}\right)^{5x}$

3.9. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x+3}{2x-4}\right)^{x+2}$

3.10. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{2x+1}{3x-1}\right)^{x-1}$

3.11. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{5x-3}{x+4}\right)^{x+3}$

3.12. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{2x-3}{7x+4}\right)^{x}$

3.13. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x-5}{3x+4}\right)^{2x}$

3.14. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{4x-5}\right)^{2x}$

3.15. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x-2}{3x+1}\right)^{5x}$

3.16. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{3x-4}{x+6}\right)^{x-1}$

3.17. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-2}{3x+10}\right)^{3x}$

3.18. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{2x-3}{x+4}\right)^{6x+1}$

3.19. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x+3}{3x-1}\right)^{2x}$

3.20. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{6x+5}{x-10}\right)^{5x}$

Задание 4. Вычислить следующие пределы:

4.1. $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^5-2x+4}{2x^4+3x^2+1}$

4.2. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^4+2x-5}{2x^2+x+7}$

4.3. $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3x^2+7x-4}{x^5+2x-1}$

4.4. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x-x^6}{x^2-2x+5}$

4.5. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^3+7x-1}{3x^4+2x+5}$

4.6. $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x^3+7x^2+4}{x^4+5x-1}$

4.7. $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3x^6-5x^2+2}{2x^3+4x-5}$

4.8. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^7+5x^2-4x}{3x^2+11x-7}$

4.9. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{7x^2+5x+9}{1+4x-x^3}$

4.10. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4+x^2-6}{2x^2+3x+1}$

4.11. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^2+5x+7}{3x^4-2x^2+x}$

4.12. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3+4x^2-7x}{2x^2+7x-3}$

4.13. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{5x^3-3x^2+7}{2x^4+3x^2+1}$

4.14. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2-3x+1}{1+2x-x^4}$

4.15. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^3+3x^2+5}{3x^2-4x+1}$

4.16. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^2-5x+2}{4x^3+2x-1}$

4.17. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{11x^3+3x}{2x^2-2x+1}$

4.18. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^2+3x+5}{4x^3-2x^2+1}$

4.19. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{6x^3+5x^2-3}{2x^2-x+7}$

4.20. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+4x-7}{x^4-2x^3+1}$

Задание 5. Вычислить следующие пределы:

5.1. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos 8x}{3x^2}$

5.2. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 3x-\sin x}{5x}$

5.3. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-\cos 5x}{2x^2}$

5.4. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{tg3x}{2\sin x}$

5.5. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{tgx-\sin x}{3x^2}$

5.6. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arcsin 5x}{\sin 3x}$

5.7. $\lim\limits_{x\to1}(1-x)tg\dfrac{\pi x}{2}$

5.8. $\lim\limits_{x\to\pi/2}\dfrac{1-\sin x}{\pi-2x}$

5.9. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{tg2x-\sin 2x}{x^2}$

5.10. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos^2 x}{xtgx}$

5.11. $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{tgx}-\dfrac{1}{\sin x}\right)$

5.12. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin^2 3x-\sin^2 x}{x^2}$

5.13. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 7x+\sin 3x}{x\sin x}$

5.14. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos 5x}{2x^2}$

5.15. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 2x-\cos 4x}{3x^2}$

5.16. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg\,2x}{tg3x}$

5.17. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg3x-\sin 3x}{2x^2}$

5.18. $\lim\limits_{x\to \pi/4}\dfrac{1-\sin 2x}{\pi-4x}$

5.19. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 4x-\cos^3 4x}{3x^2}$

5.20. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin 2x}-\dfrac{1}{tg\,2x}\right)$

Задание 6. Вычислить следующие пределы:

6.1. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+x-12}{\sqrt{x-2}-\sqrt{4-x}}$

6.2. $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{\sqrt{x+12}-\sqrt{4-x}}{x^2+2x-8}$

6.3. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{\sqrt{x+10}-\sqrt{4-x}}{2x^2-x-21}$

6.4. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt{2-x}-\sqrt{x+6}}{x^2-x-6}$

6.5. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{3+2x}-\sqrt{x+4}}{3x^2-4x+1}$

6.6. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-3x+2}{\sqrt{5-x}-\sqrt{x+1}}$

6.7. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3x^2+4x+1}{\sqrt{x+3}-\sqrt{5+3x}}$

6.8. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2x^2-9x+4}{\sqrt{5-x}-\sqrt{x-3}}$

6.9. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+6}}{2x^2-7x-15}$

6.10. $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{\sqrt{3x+17}-\sqrt{2x+12}}{x^2+8x+15}$

6.11. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+2}-\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+1}-1}$

6.12. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{7-x}-\sqrt{7+x}}{\sqrt{7}x}$

6.13. $\lim\limits_{x\to -0}\dfrac{3x}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$

6.14. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}$

6.15. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{5+x}-2}{\sqrt{8-x}-3}$

6.16. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x+4}-3}{\sqrt{x-1}-2}$

6.17. $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{\sqrt{x-3}-2}{\sqrt{x+2}-3}$

6.18. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{4x-3}-3}{x^2-9}$

6.19. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{5x+1}-4}{x^2+2x-15}$

6.20. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2-\sqrt{x^2+4}}{3x^2}$

Задание 7. Вычислить следующие пределы:

7.1. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+4}{x+8}\right)^{-3x}$

7.2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^{2x-3}$

7.3. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x}{1+2x}\right)^{-4x}$

7.4. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x}\right)^{2-3x}$

7.5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+5}{2x+1}\right)^{5x}$

7.6. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x}\right)^{-5x}$

7.7. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{x+1}\right)^{1+2x}$

7.8. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x-1}\right)^{x-4}$

7.9. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x}{2x-3}\right)^{3x}$

7.10. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-7}{x}\right)^{2x+1}$

7.11. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x+4}\right)^{3x+2}$

7.12. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+1}{2x-1}\right)^{x+2}$

7.13. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-2}{x+1}\right)^{2x-3}$

7.14. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{x-3}\right)^{x-5}$

7.15. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-4}{3x+2}\right)^{2x}$

7.16. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x+4}\right)^{3x-1}$

7.17. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-4}{2x}\right)^{-3x}$

7.18. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+5}{x}\right)^{3x+4}$

7.19. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-7}{x+1}\right)^{4x-2}$

7.20. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{x}\right)^{3-2x}$

Задание 8. Найти пределы, используя эквивалентные бесконечно малые функции.

8.1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+3x^2)}{x^3-5x^2}$ **8.2.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 5x}{tg3x}$

8.3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x}{tg2x}$ **8.4.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-1}{x^3+27x}$

8.5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg6x}{2x^2-3x}$ **8.6.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 3x}{2x}$

8.7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{arctg2x}$ **8.8.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+3x)}{\sin 2x}$

8.9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{tg3x}$ **8.10.** $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sin(x-3)}{x^2-5x+6}$

8.11. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 3x-\cos x}{2x^2}$ **8.12.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 6x}{4x^2}$

8.13. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg3x}{\ln(1+2x)}$ **8.14.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 4x}{tg5x}$

8.15. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{5x}-1}{\sin 2x}$ **8.16.** $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{tg(x+2)}{x^2-4}$

8.17. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sin(x+2)}{x^3+8}$ **8.18.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 2x}{tg4x}$

8.19. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^3-64}{tg(x-4)}$ **8.20.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 2x-\cos 4x}{3x^2}$

Задание 9. Исследовать данные функции на непрерывность и построить их графики.

9.1. $f(x)=\begin{cases} x+4, x<-1, \\ x^2+2, -1\le x<1, \\ 2x, x\ge 1 \end{cases}$

9.2. $f(x)=\begin{cases} x+1, x\le 0, \\ \;x+1\;\;^{2}, 0<x\le 2, \\ -x+4, x>2 \end{cases}$

9.3. $f\;\;x\;\;=\begin{cases} x+2, x\le -1, \\ x^2+1, -1<x\le 1, \\ -x+3, x>1 \end{cases}$

9.4. $f\;\;x\;\;=\begin{cases} -x, x\le 0, \\ -(x-1)^2, 0<x<2, \\ x-3, x\ge 2 \end{cases}$

9.5. $f\;\;x\;\;=\begin{cases} -2(x+1), x\le -1, \\ (x+1)^3, -1<x<0, \\ x, x\ge 0 \end{cases}$

9.6. $f(x)=\begin{cases} -x, x\le 0, \\ x^2, 0<x\le 2, \\ x+1, x>2 \end{cases}$

9.7. $f(x)=\begin{cases} x^2+1, x\le 1, \\ 2x, 1<x\le 3, \\ x+2, x>3 \end{cases}$

9.8. $f(x)=\begin{cases} x-3, x<0, \\ x+1, 0\le x\le 4, \\ 3+x, x>4 \end{cases}$

9.9. $f(x)=\begin{cases} \sqrt{1-x}, x\le 0, \\ 0, 0<x\le 2, \\ x-2, x>2 \end{cases}$

9.10. $f(x)=\begin{cases}2x^2, x\le 0,\\ x, 0<x\le 1,\\ 2+x, x>1\end{cases}$

9.11. $f(x)=\begin{cases}\sin x, x<0,\\ x, 0\le x\le 2,\\ 0, x>2\end{cases}$

9.12. $f(x)=\begin{cases}\cos x, x\le \pi/2,\\ 0, \pi/2<x<\pi,\\ 2, x\ge \pi\end{cases}$

9.13. $f(x)=\begin{cases}x-1, x\le 0,\\ x^2, 0<x<2,\\ 2x, x\ge 2\end{cases}$

9.14. $f(x)=\begin{cases}x+1, x<0,\\ x^2-1, 0\le x<1,\\ -x, x\ge 1\end{cases}$

9.15. $f\quad x\quad=\begin{cases}-x, x<0,\\ x^2+1, 0\le x<2,\\ x+1, x\ge 2\end{cases}$

9.16. $f\quad x\quad=\begin{cases}x+3, x\le 0,\\ 1, 0<x\le 2,\\ x^2-2, x>2\end{cases}$

9.17. $f\quad x\quad=\begin{cases}x-1, x<0,\\ \sin x, 0\le x<\pi,\\ 3, x\ge \pi\end{cases}$

18. $f(x)=\begin{cases}-x+1, x<-1,\\ x^2+1, -1\le x\le 2,\\ 2x, x>2\end{cases}$

9.19. $f(x)=\begin{cases}1, x\le 0,\\ 2^x, 0<x\le 2,\\ x+3, x>2\end{cases}$

9.20. $f(x)=\begin{cases}-x+2, x\le -2,\\ x^3, -2<x\le 1,\\ 2, x>1\end{cases}$

Задание 10. Исследовать данные функции на непрерывность в указанных точках.

10.1. $f(x)=2^{1/(x-3)}+1;\ x_1=3,\ \ x_2=4$

10.2. $f(x)=5^{1/(x-3)}-1;\ x_1=3,\ \ x_2=4$

10.3. $f(x)=(x+7)/(x-2);\ x_1=2,\ x_2=3$

10.4. $f(x)=(x-5)/(x+3);\ x_1=-2,\ x_2=-3$

10.5. $f(x)=4^{1/(3-x)}+2;\ x_1=2,\ x_2=3$

10.6. $f(x)=9^{1/(2-x)};\ x_1=0,\ x_2=2$

10.7. $f(x)=2^{1/(x-5)}+1;\ x_1=4,\ x_2=5$

10.8. $f(x)=5^{1/(x-4)}-2;\ x_1=3,\ \ x_2=4$

10.9. $f(x)=6^{1/(x-3)}+3;\ x_1=3,\ \ x_2=4$

10.10. $f(x)=7^{1/(5-x)}+1;\ x_1=4,\ x_2=5$

10.11. $f(x)=(x-3)\ \ (x+4);\ x_1=-5,\ x_2=-4$

10.12. $f(x)=(x+5)/(x-2);\ x_1=3,\ \ x_2=2$

10.13. $f(x)=5^{2/(x-3)}$; $x_1=3,\ x_2=4$

10.14. $f(x)=4^{2/(x-1)}-3$; $x_1=1,\ x_2=2$

10.15. $f(x)=2^{5/(1-x)}-1$; $x_1=0,\ x_2=1$

10.16. $f(x)=8^{4/(x-2)}-1$; $x_1=2,\ x_2=3$

10.17. $f(x)=5^{4/(3-x)}+1$; $x_1=2,\ x_2=3$

10.18. $f(x)=3x/(x-4)$; $x_1=4,\ x_2=5$

10.19. $f(x)=2x/(x^2-1)$; $x_1=1,\ x_2=2$

10.20. $f(x)=2^{3/(x+2)}+1$; $x_1=-2,\ x_2=-1$

В заданиях 11-20 продифференцировать данные функции

11.1. $y=2x^5-\dfrac{4}{x^3}+\dfrac{1}{x}+3\sqrt{x}$

11.2. $y=\dfrac{3}{x}+\sqrt[5]{x^2}-4x^3+\dfrac{2}{x^4}$

11.3. $y=3x^4+\sqrt[3]{x^5}-\dfrac{2}{x}-\dfrac{4}{x^2}$

11.4. $y=7\sqrt{x}-\dfrac{2}{x^5}-3x^3+\dfrac{4}{x}$

11.5. $y=7x+\dfrac{5}{x^2}-\sqrt[7]{x^4}+\dfrac{6}{x}$

11.6. $y=5x^2-\sqrt[3]{x^4}+\dfrac{4}{x^3}-\dfrac{5}{x}$

11.7. $y=3x^5-\dfrac{3}{x}-\sqrt{x^3}+\dfrac{10}{x^5}$

11.8. $y=\sqrt[3]{x^7}+\dfrac{3}{x}-4x^6+\dfrac{4}{x^5}$

11.9. $y=8x^2+\sqrt[3]{x^4}-\frac{4}{x}-\frac{2}{x^3}$

11.10. $y=4x^6+\frac{5}{x}-\sqrt[3]{x^7}-\frac{7}{x^4}$

11.11. $y=\sqrt{x^3}-\frac{7}{x}+3x^2-\frac{2}{x^5}$

11.12. $y=x^3-\frac{3}{x}-\sqrt[5]{x^2}$

11.13. $y=5x^3-\frac{8}{x^2}+4\sqrt{x}+\frac{1}{x}$

11.14. $y=\frac{9}{x^3}+\sqrt[3]{x^4}-\frac{2}{x}+5x^4$

11.15. $y=\frac{4}{x^5}-\frac{9}{x}+\sqrt[5]{x^2}-7x^3$

11.16. $y=\frac{8}{x^3}+\frac{3}{x}-4\sqrt{x^3}+2x^7$

11.17. $y=\frac{4}{x}-\sqrt[3]{x^7}-2x^6$

11.18. $y=10x^2+3\sqrt{x^5}-\frac{5}{x^4}$

11.19. $y=\sqrt{x^5}-\frac{3}{x}+\frac{4}{x^3}-3x^3$

11.20. $y=9x^3+\frac{5}{x}-\frac{7}{x^4}+\sqrt[3]{x^7}$

12.1. $y=\sqrt[3]{3x^4}+\frac{4}{x-2\ ^{5}}$

12.2. $y=\sqrt[3]{\ x-3\ ^{4}}-\frac{3}{2x^3+1}$

12.3. $y=\sqrt{x-4\ ^{5}}+\dfrac{5}{4x-1\ ^{2}}$

12.4. $y=\sqrt[5]{x^{2}}-\dfrac{5}{x-1\ ^{3}}$

12.5. $y=\sqrt[4]{-x}-\dfrac{3}{x-5\ ^{4}}$

12.6. $y=\sqrt{2x^{3}+x}-\dfrac{4}{x+2\ ^{3}}$

12.7. $y=\sqrt[3]{x-7\ ^{5}}+\dfrac{5}{4x^{2}}$

12.8. $y=\sqrt[5]{x+4\ ^{6}}-\dfrac{2}{x^{2}-3}$

12.9. $y=\dfrac{3}{\text{x-4}\ ^{7}}-\sqrt{5x^{2}+3}$

12.10. $y=\sqrt[3]{4x^{2}-3x-4}$

12.11. $y=\dfrac{7}{x-1\ ^{3}}$

12.12. $y=\dfrac{4}{x-4\ ^{4}}$

12.13. $y=\sqrt[3]{x-1}+\dfrac{8}{x-5\ ^{2}}$

12.14. $y=\dfrac{3}{x+2\ ^{5}}-\sqrt[7]{5x}$

12.15. $y=\sqrt[4]{x-1\ ^{5}}-\dfrac{4}{x^{2}}$

12.16. $y=\sqrt[5]{x-2\ ^{6}}-\dfrac{3}{x^{3}-4}$

12.17. $y=\dfrac{3}{x+4\;^{2}}-\sqrt[3]{4+x^4}$

12.18. $y=\dfrac{2}{x-1\;^{3}}-\dfrac{8}{x-7}$

12.19. $y=\sqrt{1+5x}+\dfrac{3}{x-3\;^{4}}$

12.20. $y=\sqrt[3]{4x}-\dfrac{5}{x+1\;^{3}}$

13.1. $y=\sin^3 2x\cdot\cos 8x^5$

13.2. $y=\cos^5 3x\cdot tg\;\;4x+1\;^{3}$

13.3. $y=tg^4 x\cdot\arcsin 4x^5$

13.4. $y=\arcsin^3 2x\cdot ctg 7x^4$

13.5. $y=ctg 3x\cdot\arccos 3x^2$

13.6. $y=\arccos^2 4x\cdot\ln\;\;x-3$

13.7. $y=\ln^5 x\cdot arctg 7x^4$

13.8. $y=arctg^3 4x\cdot 3^{\sin x}$

13.9. $y=2^{\cos x}\cdot arcctg 5x^3$

13.10. $y=4^{-x}\cdot\ln^5\;\;x+2$

13.11. $y=3^{tgx}\cdot\arcsin 7x^4$

13.12. $y=5^{x^2}\cdot\arccos 2x^5$

13.13. $y=\sin^4 3x\cdot arctg 2x^3$

13.14. $y=\cos^3 4x\cdot arcctg\sqrt{x}$

13.15. $y=tg^3 2x\cdot\arcsin x^5$

13.16. $y=ctg^7 x\cdot\arccos 2x^3$

13.17. $y=e^{-\sin x}tg 7x^6$

13.18. $y = e^{\cos x} ctg 8x^3$

13.19. $y = \cos^5 x \cdot \arccos 4x$

13.20. $y = \sin^3 7x \cdot arcctg 5x^2$

14.1. $y = arcctg^2 5x \cdot \ln \;\; x - 4$

14.2. $y = arctg^3 2x \cdot \ln \;\; x + 5$

14.3. $y = \arccos^4 x \cdot \ln \;\; x^2 + x$

14.4. $y = \sqrt{\arccos 2x} \cdot 3^{-x}$

14.5. $y = tg^4 3x \cdot arctg 7x^2$

14.6. $y = 5^{-x^2} \arcsin 3x^3$

14.7. $y = arctg^5 x \cdot \log_2 \;\; x - 3$

14.8. $y = \log_3 \;\; x + 5 \;\; \cdot \arccos 3x$

14.9. $y = e^{-x} \cdot \arcsin^2 5x$

14.10. $y = \log_4 \;\; x - 1 \;\; \cdot \arcsin^4 x$

14.11. $y = \;\; x - 4 \;\; ^5 \cdot arcctg 3x^2$

14.12. $y = ctg^3 4x \cdot arctg 2x^3$

14.13. $y = e^{-\cos x} arctg 7x^5$

14.14. $y = \;\; x + 1 \;\; \arccos 3x^4$

14.15. $y = 2^{\sin x} arcctg x^4$

14.16. $y = 3^{-x^3} arctg 2x^5$

14.17. $y = 3^{\cos x} \arcsin^2 3x$

14.18. $y = \ln(x - 10) \cdot \arccos^2 4x$

14.19. $y = \lg \;\; x - 2 \;\; \cdot \arcsin^5 x$

14.20. $\log_3 \;\; x + 1 \;\; \cdot arctg^5 7x$

15.1. $y = tg^4 3x \cdot \arcsin 2x^3$

15.2. $y = (x-2)^4 \arcsin 5x^4$

15.3. $y = 2^{-x^3} arctg 7x^4$

15.4. $y = (x+6)^5 arcctg 3x^5$

15.5. $y = 3^{\cos x} \ln(x^2 - 3x + 7)$

15.6. $y = \log_2(x-7) \cdot arctg\sqrt{x}$

15.7. $y = \arccos^3 5x \cdot tgx^4$

15.8. $y = (x-5)^7 arcctg 7x^3$

15.9. $y = \arccos x^2 \cdot ctg 7x^3$

15.10. $y = 5^{-x^2} \arccos 5x^4$

15.11. $y = arctg^4 x \cdot \cos 7x^4$

15.12. $y = 4(x-7)^6 \arcsin 3x^5$

15.13. $y = (x+5)^2 \arccos^3 5x$

15.14. $y = 2^{-\sin x} \arcsin^3 2x$

15.15. $y = (x+2)^7 \arccos\sqrt{x}$

15.16. $y = (x-7)^5 \arcsin 7x^4$

15.17. $y = \ln x \cdot \arccos 3x^4$

15.18. $y = \log_2(x-4) \cdot arctg^3 4x$

15.19. $y = (x-7)^4 arcctg^2 7x$

15.20. $y = \sqrt[3]{x-3} \arccos^4 2x$

16.1. $y = \dfrac{e^{\arccos^2 x}}{\sqrt{x+5}}$

16.2. $y = \dfrac{(x-4)^2}{e^{arcctgx}}$

16.3. $y=\dfrac{e^{-x^3}}{\sqrt{x^2+5x-1}}$

16.13. $y=\dfrac{e^{-\sin 2x}}{x+5\ ^{4}}$

16.4. $y=\dfrac{e^{-ctg\,5x}}{3x^2-4x+2}$

16.14. $y=\dfrac{e^{\cos 5x}}{\sqrt{x^2-5x-2}}$

16.5. $y=\dfrac{\sqrt{7x^3-5x+2}}{e^{\cos x}}$

16.15. $y=\dfrac{e^{-\sin 2x}}{x+5\ ^{4}}$

16.6. $y=\dfrac{e^{tg\,3x}}{\sqrt{3x^2-x+4}}$

16.16. $y=\dfrac{e^{-tg\,3x}}{4x^2-3x+5}$

16.7. $y=\dfrac{e^{\sin x}}{x-5\ ^{7}}$

16.17. $y=\dfrac{e^{-\sin 4x}}{2x-5\ ^{6}}$

16.8. $y=\dfrac{\sqrt[3]{2x^2-3x+1}}{e^{-x}}$

16.18. $y=\dfrac{3x^2-5x+10}{e^{-x^4}}$

16.9. $y=\dfrac{\sqrt{x^3+4x-5}}{e^{x^3}}$

16.19. $y=\dfrac{e^{-x}}{2x^2-x+4\ ^{2}}$

16.10. $y=\dfrac{e^{ctg\,5x}}{x+4\ ^{3}}$

16.20. $y=\dfrac{e^{4x}}{3x+5\ ^{3}}$

16.11. $y=\dfrac{\sqrt{3+2x-x^2}}{e^{x}}$

16.12. $y=\dfrac{e^{3x}}{\sqrt{3x^2-4x-7}}$

17.1. $y=\dfrac{\log_5\ 3x-7}{ctg\,7x^3}$

17.2. $y=\dfrac{\ln\ 5x-3}{4tg\,3x^4}$

17.3. $y=\dfrac{\ln\ 7x+2}{5\cos 42x}$

17.4. $y=\dfrac{\sin^3 5x}{\ln\ 2x-3}$

17.5. $y=\dfrac{\cos^2 3x}{\lg\ 3x-4}$

17.6. $y=\dfrac{tg^3 2x}{\lg\ 5x+1}$

17.7. $y=\dfrac{\log_3\ 4x+5}{2ctg\sqrt{x}}$

17.8. $y=\dfrac{\ln\ 7x-3}{3tg^2 4x}$

17.9. $y=\dfrac{\lg\ 11x+3}{\cos^2 5x}$

17.10. $y=\dfrac{ctg^2 5x}{\ln\ 7x-2}$

17.11. $y=\dfrac{tg^2\ \ x-2}{\lg\ \ x+3}$

17.12. $y=\dfrac{\sin^3\ \ 5x+1}{\lg\ 3x-2}$

17.13. $y=\dfrac{\cos^4\ \ 7x-1}{\lg\ \ x+5}$

17.14. $y=\dfrac{\sin^3\ \ 4x+3}{\ln\ 7x+1}$

17.15. $y=\dfrac{ctg^3\ \ 2x-3}{\log_3\ \ x+2}$

17.16. $y=\dfrac{\lg^3 x}{\sin 5x^2}$

17.17. $y=\dfrac{\ln^2\ \ x+1}{\cos 3x^4}$

17.18. $y=\dfrac{\log_2\ \ 7x-5}{tg\sqrt{x}}$

17.19. $y=\dfrac{\log_3\ \ 4x-2}{ctg 2x}$

17.20. $y=\dfrac{\ln^3\ \ x-5}{tg\ \ {}^1\!/_x}$

18.1. $y=\dfrac{9arctg\ \ x+7}{x-1\ ^2}$

18.2. $y=\dfrac{8arctg\ \ 2x+3}{x+1\ ^3}$

18.3. $y=\dfrac{7\arccos\ \ 4x-1}{x+2\ ^4}$

18.4. $y=\dfrac{6\arcsin\ \ x+5}{x-2\ ^5}$

18.5. $y=\dfrac{3arcctg\ \ 2x-5}{x+1\ ^4}$

18.6. $y=\dfrac{2arctg\ \ 3x+2}{x-3\ ^2}$

18.7. $y=\dfrac{4\arccos 3x}{x+2\ ^5}$

18.8. $y=\dfrac{\arcsin\ \ 3x+8}{x-7\ ^3}$

18.9. $y=\dfrac{arctg\,(4x+1)}{(x-4)^2}$

18.10. $y=\dfrac{3\arcsin(2x-7)}{(x+2)^4}$

18.11. $y=\dfrac{2\lg(4x+5)}{(x+6)^4}$

18.12. $y=\dfrac{5\ln(5x+7)}{(x-7)^2}$

18.13. $y=\dfrac{4\log_3(3x+1)}{(x+1)^2}$

18.14. $y=\dfrac{7\log_4(2x-5)}{(x-1)^5}$

18.15. $y=\dfrac{\ln(7x+2)}{(x-6)^4}$

18.16. $y=\dfrac{4\lg(3x+7)}{(x+1)^7}$

18.17. $y=\dfrac{5\log_2(x^2+1)}{(x-3)^4}$

18.18. $y=\dfrac{6\log_3(2x+9)}{(x+4)^2}$

18.19. $y=\dfrac{2\ln(2x^2+3)}{(x-7)^4}$

18.20. $y=\dfrac{7\log_5(x^2+x)}{(x+3)^3}$

19.1. $y=\sqrt{\dfrac{2x+1}{2x-1}}\log_2(x-3x^2)$

19.2. $y=\sqrt[3]{\dfrac{2x-5}{2x+3}}\lg(4x+7)$

19.3. $y=\sqrt[4]{\dfrac{x+3}{x-3}}\ln(5x^2+1)$

19.4. $y=\sqrt[5]{\dfrac{x+1}{x-1}}\log_3 x^2$

19.5. $y=\sqrt[6]{\dfrac{7x-4}{7x+4}}\log_5(3x^2+2x)$

19.6. $y=\sqrt[7]{\dfrac{2x-3}{2x+1}}\lg(7x-10)$

19.7. $y=\sqrt[8]{\dfrac{5x+1}{5x-1}}\ln\ 3x-x^2$

19.8. $y=\sqrt[9]{\dfrac{x+3}{x-3}}\log_5\ 2x-3$

19.9. $y=\sqrt{\dfrac{6x+5}{6x-5}}\lg\ 4x+7$

19.10. $y=\sqrt[3]{\dfrac{4x-1}{4x+1}}\ln\ 2x^3-3$

19.11. $y=\sqrt[4]{\dfrac{x+6}{x-6}}\sin\ 3x^2+1$

19.12. $y=\sqrt[5]{\dfrac{x-7}{x+7}}\cos\ 2x^3+x$

19.13. $y=\sqrt[6]{\dfrac{x-9}{x+9}}tg\ 3x^2-4x+1$

19.14. $y=\sqrt[7]{\dfrac{x-4}{x+4}}ctg\ 2x+5$

19.15. $y=\sqrt[8]{\dfrac{x-2}{x+2}}\sin x^2$

19.16. $y=\sqrt[9]{\dfrac{x-3}{x+3}}\cos\ x^2-3$

19.17. $y=\sqrt{\dfrac{3x-2}{3x+2}}tg\ 2x^2-9$

19.18. $y=\sqrt{\dfrac{2x+3}{2x-3}}ctg\ 3x^2+5$

19.19. $y=\sqrt[4]{\dfrac{x+5}{x-5}}\sin\ 3-x$

19.20. $y = \sqrt[5]{\dfrac{x-6}{x+6}} \cos\ 7x+2$

20.1. $y = \ \arccos\ x+2 \ ^{tg3x}$

20.2. $y = \ \arcsin 2x \ ^{ctg\ x+1}$

20.3. $y = \ arctg\ \ x+7 \ ^{\cos 2x}$

20.4. $y = \ arcctg\ \ x-3 \ ^{\sin 4x}$

20.5. $y = \ ctg\ \ 3x-2 \ ^{\arcsin 3x}$

20.6. $y = \ tg\ \ 4x-3 \ ^{\arccos 2x}$

20.7. $y = \ \cos\ 2x-5 \ ^{arctg 5x}$

20.8. $y = \ \sin\ 7x+4 \ ^{arcctgx}$

20.9. $y = \ \arcsin 2x \ ^{\ln\ x+3}$

20.10. $y = \ \arccos 3x \ ^{\lg\ 5x-1}$

20.11. $y = \ arctg 5x \ ^{\log_2\ x+4}$

20.12. $y = \ arctg 7x \ ^{\lg\ x+1}$

20.13. $y = \ \log_4\ 2x+3 \ ^{\arcsin x}$

20.14. $y = \ \log_5\ 3x+2 \ ^{\arccos x}$

20.15. $y = \ \lg\ 7x-5 \ ^{arctg 2x}$

20.16. $y = \ \ln\ 5x-4 \ ^{arcctgx}$

20.17. $y = \ \log_2\ 6x+5 \ ^{\arcsin 2x}$

20.18. $y = \ \lg\ 4x-3 \ ^{\arccos 4x}$

20.19. $y = \ \ln\ 7x-3 \ ^{arctg 5x}$

20.20. $y = \ \log_5 \ 2x+5 \ ^{arctgx}$

Задание 21. Найти y' **и** y''

21.1. $\begin{cases} x = \ 2t+3 \ \cos t, \\ y = 3t^3 \end{cases}$

21.2. $\begin{cases} x = 2\cos^2 t, \\ y = 3\sin^2 t \end{cases}$

21.3. $\begin{cases} x = 6\cos^3 t, \\ y = 2\sin^3 t \end{cases}$

21.4. $\begin{cases} x = 1/ \ t+2 \ , \\ y = \ t/ \ t+2 \ ^2 \end{cases}$

21.5. $\begin{cases} x = \ 2t+3 \ \cos t, \\ y = 3t^3 \end{cases}$

21.6. $\begin{cases} x = \sqrt{t}, \\ y = \sqrt[5]{t} \end{cases}$

21.7. $\begin{cases} x = 2t / \ 1+t^3 \ , \\ y = t^2 / \ 1+t^2 \end{cases}$

21.8. $\begin{cases} x = \sqrt{t^2-1}, \\ y = \ t+1 \ / \sqrt{t^2-1} \end{cases}$

21.9. $\begin{cases} x = 4t+2t^2, \\ y = 5t^3-3t^2 \end{cases}$

21.10. $\begin{cases} x = \ \ln t \ / t, \\ y = t\ln t \end{cases}$

21.11. $\begin{cases} x = e' \cos t, \\ y = e' \sin t \end{cases}$

21.12. $\begin{cases} x = t^4, \\ y = \ln t \end{cases}$

21.13. $\begin{cases} x = 5\cos t, \\ y = 4\sin t \end{cases}$

21.14. $\begin{cases} x = 5\cos^2 t, \\ y = 3\sin^2 t \end{cases}$

21.15. $\begin{cases} x = arctgt, \\ y = \ln \ 1+t^2 \end{cases}$

21.16. $\begin{cases} x = \arcsin t, \\ y = \sqrt{1-t^2} \end{cases}$

21.17. $\begin{cases} x = 3 \ t-\sin t \ , \\ y = 3 \ 1-\cos t \end{cases}$

21.18.
$\begin{cases} x = 3 \ \sin t - t\cos t \ , \\ y = 3 \ \cos t + t\sin t \end{cases}$

21.19. $\begin{cases} x = \sin 2t, \\ y = \cos^2 t \end{cases}$

21.20. $\begin{cases} x = e^{3t}, \\ y = e^{-3t} \end{cases}$

Задание 22. Для данной функции y и аргумента x_0 вычислить $y'''\ \ x_0$

22.1. $y = \sin^2 x, x_0 = \pi / 2$

22.2. $y = arctgx, x_0 = 1$

22.3. $y = \ln\ \ 2 + x^2\ \ , x_0 = 0$

22.4. $y = e^x \cos x, x_0 = 0$

22.5. $y = e^x \sin 2x, x_0 = 0$

22.6. $y = e^{-x} \cos x, x_0 = 0$

22.7. $y = \sin 2x, x_0 = \pi$

22.8. $y = \ \ 2x + 1\ ^5, x_0 = 1$

22.9. $y = \ln\ \ 1 + x\ \ , x_0 = 2$

22.10. $y = \frac{1}{2} x^2 e^x, x_0 = 0$

22.11. $y = \arcsin x, x_0 = 0$

22.12. $y = \ \ 5x - 4\ ^5, x_0 = 2$

22.13. $y = \sin x, x_0 = \pi / 2$

22.14. $y = x^2 \ln x, x_0 = 1/3$

22.15. $y = x \sin 2x, x_0 = -\pi / 4$

22.16. $y = e^x \cos x, x_0 = 0$

22.17. $y = x^4 \ln x, x_0 = 1$

22.18. $y = x + arctgx, x_0 = 1$

22.19. $y = \cos^2 x, x_0 = \pi / 4$

22.20. $y = \ln\ \ x^2 - 4\ \ , x_0 = 3$

Задание 23. Решить следующие задачи.

23.1. Записать уравнение касательной к кривой $y = x^2 - 7x + 3$ в точке с абсциссой $x = 1$.

23.2. Записать уравнение нормали к кривой $y = x^2 - 16x + 7$ в точке с абсциссой $x = 1$.

23.3. Записать уравнение касательной к линии $y = \sqrt{x-4}$ в точке с абсциссой $x = 8$.

23.4. Записать уравнение нормали к линии $y = \sqrt{x+4}$ в точке с абсциссой $x = -3$.

23.5. Записать уравнение касательной к кривой $y = x^3 - 2x^2 + 4x - 7$ в точке $2,1$.

23.6. Записать уравнение нормали к кривой $y = x^3 - 5x^2 + 7x - 2$ в точке $1,1$.

23.7. Определить угловой коэффициент касательной к кривой $x^2 - y^2 + xy - 11 = 0$ в точке $3,2$.

23.8. В какой точке кривой $y^2 = 4x^3$ касательная перпендикулярна к прямой $x + 3y - 1 = 0$.

23.9. Записать уравнения касательной к кривой $y = x^2 - 6x + 2$ в точке с абсциссой $x = 2$.

23.10. Записать уравнение касательной к кривой $y = x^2/4 - x + 5$ в точке с абсциссой $x = 4$.

23.11. Записать уравнение нормали к кривой $y = x^4/4 - 27x + 60$ в точке с абсциссой $x = 2$.

23.12. Записать уравнение касательной к кривой $y = -\dfrac{x^2}{2} + 7x - 15/2$ в точке с абсциссой $x = 3$.

23.13. Записать уравнение нормали к кривой $y = 3tg2x + 1$ в точке с абсциссой $x = \pi/2$.

23.14. Записать уравнение касательной к кривой $y = 4tg3x$ в точке с абсциссой $x = \pi/9$.

23.15. Записать уравнение нормали к кривой $y = 6tg5x$ в точке с абсциссой $x = \pi / 20$.

23.16. Записать уравнение касательной к кривой $y = 4\sin 6x$ в точке с абсциссой $x = \pi / 18$.

23.17. Выяснить, в каких точках кривой $y = \sin 2x$ касательная составляет с осью Ox угол $\pi / 4$.

23.18. Выяснить, в какой точке кривой $y = 2x^3 - 1$ касательная составляет с осью Ox угол $\pi / 3$.

23.19. Выяснить, в какой точке кривой $y = x^3 / 3 - x^2 / 2 - 7x + 9$ касательная составляет с осью Ox угол $-\pi / 4$.

23.20. Выяснить, в каких точках кривой $y = x^3 / 3 - 5x^2 / 2 + 7x + 4$ касательная составляет с осью Ox угол $\pi / 4$.

Задание 24. Решить следующие задачи.

24.1. Траектория движения тела- кубическая парабола $12y = x^3$. В каких ее точках скорости возрастания абсциссы и ординаты одинаковы? (*Ответ:* (2, 2/3), (-2, -2/3).)

24.2. Закон движения материальной точки $s = 3t^2 / 4 - 3t + 7$. В какой момент времени скорость ее движения будет равна 2 м/с? (*Ответ:* 10/3 с.)

24.3. По оси Ox движутся две материальные точки, законы движения которых $x = 4t^2 - 7$ и $x = 3t^2 - 4t + 38$. С какой скоростью эти точки удаляются друг от друга в момент встречи? (*Ответ:* 40 м/с или 26 м/с)

24.4. Материальная точка движется по гиперболе $xy = 12$ так, что ее абсцисса x равномерно возрастает со скоростью 1 м/с. С какой скоростью изменяется ордината точки, когда она проходит положение (6,2)? (*Ответ:* -1/3 м/с.)

24.5. В какой точке параболы $y^2 = 4x$ ордината возрастает вдвое быстрее, чем абсцисса? (*Ответ:* (1/4, 1).)

24.6. Закон движения материальной точки $s = t^4 - 3t^2 + 2t - 4$. Найти скорость движения точки в момент времени $t = 2$ с. (*Ответ:* 22 м/с.)

24.7. Закон движения материальной точки $s = 3t^4 - t^3 + 4t^2 + 6$. Найти скорость ее движения в момент времени $t = 2$ с. (*Ответ:* 100 м/с.)

24.8. Закон движения материальной точки $s = 4\cos\left(\frac{t}{4} + \frac{\pi}{4}\right) + 6$. Найти ее скорость в момент времени $t = \pi$ с. (*Ответ:* -1 м/с.)

24.9. Закон движения материальной точки $s = 4\sin\left(\frac{t}{3} + \frac{\pi}{6}\right) - 8$. Найти ее скорость в момент времени $t = \pi / 2$ с. (*Ответ:* 2/3 м/с.)

24.10. Закон движения материальной точки $s = -3\cos\left(\frac{t}{4} + \frac{\pi}{12}\right) + 10$. Найти ее скорость в момент времени $t = \pi / 3$ с. (*Ответ:* 3/8 м/с.)

24.11. Закон движения материальной точки $s = \frac{5}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2 + 7$. В какой момент времени ее скорость будет равна 42 м/с? (*Ответ:* 3с.)

24.12. Закон движения материальной точки $s = 4t^3 - 2t + 11$. В какой момент времени ее скорость будет равна 190 м/с? (*Ответ:* 4с.)

24.13. Закон движения материальной точки $s = \frac{5}{3}t^3 - 2t + 7$. Найти скорость ее движения в момент времени $t = 4$ с. (*Ответ:* 78 м/с.)

24.14. Закон движения материальной точки $s = 2t^5 - 6t^3 - 58$. Найти скорость ее движения в момент времени $t = 2$ с. (*Ответ:* 88 м/с.)

24.15. По оси Ox движутся две материальные точки, законы движения которых $x = 3t^2 - 8$ и $x = 2t^2 + 5t + 6$. С какой скоростью удаляются эти точки друг от друга в момент встречи? (*Ответ:* 42 м/с, 33 м/с.)

24.16. По оси Ox движутся две материальные точки, законы движения которых $x = 5t^2 - t + 6$ и $x = 4t^2 + 18$. С какой скоростью удаляются эти точки друг от друга в момент встречи? (*Ответ:* 39 м/с, 32 м/с.)

24.17. По оси Ox движутся две материальные точки, законы движения которых $x = \frac{4}{3}t^3 - 7t + 16$ и $x = t^3 + 2t^2 + 5t - 8$. В какой момент времени их скорости окажутся равными? (*Ответ:* 6 с.)

24.18. Закон движения материальной точки $s = \frac{1}{3}t^3 - 2t^2 - 11t + 275$. В какой момент времени скорость ее движения будет равна 10 м/с? (*Ответ:* 7 с.)

24.19. Материальная точка движется по гиперболе $xy = 20$ так, что ее абсцисса равномерно возрастает со скоростью 1 м/с. С какой скоростью изменяется ее ордината, когда точка проходит положение (4, 5)? (*Ответ:* -1,25 м/с.)

24.20. В какой точке параболы $y^2 = 8x$ ордината возрастает вдвое быстрее, чем абсцисса? (*Ответ:* (1/2, 2).)

Задание 25. Найти указанные пределы, используя правило Лопиталя.

25.1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln\ \ x+5}{\sqrt[4]{x+3}}$

25.2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^{\ln x}-x}{x-1}$

25.3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx-x}{x-\sin x}$

25.4. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-4\sin^2\ \ \pi x/6}{1-x^2}$

25.5. $\lim\limits_{x\to a}\arcsin\dfrac{x-a}{a}\cdot ctg\ \ x-a$

25.6. $\lim\limits_{x\to\infty}\ \pi-2arctgx\ \ \ln x$

25.7. $\lim\limits_{x\to\infty}\ a^{1/x}-1\ \ x$

25.8. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{x}{\ln x}\right)$

25.9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x^2}{x^2-\sin x^2}$

25.10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx-x}{2\sin x+x}$

25.11. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^{1/x^2}-1}{2arctgx^2-\pi}$

25.12. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-2x^2-x+2}{x^3-7x+6}$

25.13. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^3}$

25.14. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x}{x^5}$

25.15. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x}{1-\sin\ \ \pi x/2}$

25.16. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}$

25.17. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{chx-1}{1-\cos x}$

25.18. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\pi / x}{ctg\ \ \pi x/2}$

25.19. $\lim\limits_{x\to \pi/4}\dfrac{1-\cos^2 x-2tgx}{1+\cos 4x}$

25.20. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\ \sin mx}{\ln\ \sin x}$

Задание 26. Решить следующие задачи.

26.1. Полотняный шатер объемом V имеет форму прямого конуса. Какого должно быть отношение высоты конуса к радиусу его основания, чтобы на шатер пошло наименьшее количество полотна? (*Ответ:* $\sqrt{2}$.)

26.2. В равнобедренный треугольник с основанием a и углом при основании α вписать параллелограмм наибольшей площадью так, чтобы одна из его сторон лежала на основании, а другая на боковой стороне треугольника. Найти длины сторон параллелограмма. (*Ответ:* $a/2$ и $a/\ \ 4\cos a$.)

26.3. Найти соотношение между радиусом R и высотой H цилиндра, имеющего при данном объеме V наименьшую полную поверхность. (*Ответ:* $H=2R$.)

26.4. Требуется сделать коническую воронку с образующей, равной 20 см. Какой должна быть высота воронки, чтобы ее объем был наименьшим? (*Ответ:* $20\sqrt{3}/3$ *см.*)

26.5. Периметр равнобедренного треугольника равен $2p$. Каково должно быть его основание, чтобы объем тела, образованного вращением этого треугольника вокруг его основание, был наибольшим? (*Ответ:* $p/2$.)

26.6. Найти высоту конуса наибольшего объема, который можно вписать в шар радиусом R. (*Ответ:* $4R/3$.)

26.7. Проволокой, длина которой l м, необходимо огородить клумбу, имеющую форму кругового сектора. Каким должен быть радиус круга, чтобы площадь клумбы была наибольшей? (*Ответ:* $l/4$ м.)

26.8. Определить наибольшую площадь прямоугольника, вписанного в полукруг радиусом a. (*Ответ:* a^2.)

26.9. Бревно длиной 20м имеет форму усеченного конуса, диаметр оснований которого равны 2 м и 1 м. Требуется вырубить из бревна балку с квадратным поперечным сечением, ось которой совпадала бы с осью бревна, а объем был бы наибольшим. Каковы должны быть размеры балки? (*Ответ:* длина балки 40/3м, сторона поперечного сечения $2\sqrt{2}/3$) м.)

26.10. С корабля, который стоит на якоре в 9 км от берега, нужно послать гонца в лагерь, расположенный в 15 км от ближайшей к кораблю точки берега. Скорость посыльного при движении пешком- 5 км/ч, а на лодке- 4 км/ч. В каком месте он должен пристать к берегу, чтобы попасть в лагерь в кратчайшее время? (*Ответ:* в 3км от лагеря.)

26.11. Полоса жести шириной a, имеющая прямоугольную форму, должна быть согнута в виде открытого кругового цилиндрического желоба так, чтобы его сечение имело форму сегмента. Каким должен быть центральный угол φ, опирающийся на дугу этого сегмента, чтобы вместимость желоба была наибольшей? (*Ответ:* $\varphi = \pi$.)

26.12. Из круглого бревна диаметром d надо вырезать балку прямоугольного сечения. Каковы должны быть ширина b и высота h этого сечения, чтобы балка, будучи горизонтально расположенной и равномерно нагруженной, имела наименьший прогиб? (Величина прогиба обратно пропорциональна произведению ширины b поперечного сечения и куба высоты h.) (*Ответ:* $b = d/2, h = d\sqrt{3}/2$.)

26.13. Человеку нужно добраться из пункта A, находящегося на одном берегу реки, в пункт B на другом ее берегу. Зная, что скорость движения по берегу в k раз больше скорости движения по воде, определить, под каким углом человек должен пересечь реку, чтобы достичь пункта B в кратчайшее время. Ширина реки h, расстояние между пунктами A и B (вдоль берега) равно a. (*Ответ:* $\max\ \arccos(1/k), arctg(h/a)$).

26.14. На прямолинейном отрезке AB, соединяющем два источника света: A (силой ρ) и B (силой q), найти точку M, освещаемую слабее всего, если $|AB| = a$. (Освещенность обратно пропорциональна квадрату расстояния от источника света.) (*Ответ:* на расстоянии $\dfrac{a\sqrt[3]{p}}{\sqrt[3]{p}+\sqrt[3]{q}}$ от точки A.)

26.15. Лампа висит над центром круглого стола радиусом r. При какой высоте лампы над столом освещенность предмета, лежащего на его крае, будет наилучшей? (Освещенность прямо пропорциональна косинусу угла падения лучей света и обратно пропорциональна квадрату расстояния от источника света.) (*Ответ:* $r/\sqrt{2}$.)

26.16. Из всех цилиндров, вписанных в данный конус, найти тот, у которого боковая поверхность наибольшая. Высота конуса H, радиус основания R. (*Ответ:* радиус основания цилиндра $R/2$, высота $H/2$.)

26.17. Из бумажного круга вырезан сектор, а из оставшейся его части склеена коническая воронка. Какой угол должен иметь вырезанный сектор, чтобы объем воронки был наибольшим? (*Ответ:* $2\pi\sqrt{2/3}$.)

26.18. Из всех конусов с данной боковой поверхностью S найти тот, у которого объем наибольший. (*Ответ:* радиус основания конуса $\sqrt{\frac{S}{\pi\sqrt{3}}}$, высота $\sqrt{\frac{S\ \ 3\pi-1}{\pi\sqrt{3}}}$.)

26.19. Пункт B находится на расстоянии 60км от железной дороги. Расстояние по железной дороге от пункта A до ближайшей к пункту B точки C составляет 285км. На каком расстоянии от точки C надо построить станцию, от которой проложат шоссе к пункту B, чтобы затрачивать наименьшее время на передвижения между пунктами A и B, если скорость движения по железной дороге равна 52км/ч, а скорость движения по шоссе- 20км/ч. (*Ответ:* 25км.)

26.20. Канал, ширина которого a м, под прямым углом впадает в другой канал шириной b м. Определить наибольшую длину бревен, которые можно справлять по этой системе каналов. (*Ответ:* $a^{2/3}+b^{2/3}\;\;^{3/2}$ м.)

27. Провести полное исследование указанных функций и построить их графики.

27.1. $y=\frac{x^2-2x+2}{x-1}$ **27.2.** $y=\frac{x+1}{x-1\;\;^{2}}$

27.3. $y=e^{1/\;\;5+x}$ **27.4.** $y=x/\;\;9-x$

27.5. $y=\dfrac{4x-x^2-4}{x}$

27.6. $y=\dfrac{x^2}{4x^2-1}$

27.7. $y=\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$

27.8. $y=x+\dfrac{\ln x}{x}$

27.9. $y=x-\ln\left(1+x^2\right)$

27.10. $y=\dfrac{x^3}{x^2-x+1}$

27.11. $y=x^2-2\ln x$

27.12. $y=x^3e^{-x^2/2}$

27.13. $y=\dfrac{x^2-x-1}{x^2-2x}$

27.14. $y=\dfrac{(x-2)^2}{x+1}$

27.15. $y=-\ln\dfrac{1+x}{1-x}$

27.16. $y=\ln\left(x^2+1\right)$

27.17. $y=\dfrac{x^2+6}{x^2+1}$

27.18. $y=x\ln x$

27.19. $y=(x-1)e^{3x+1}$

27.20. $y=\dfrac{x^2-3x+2}{x+1}$

ТЕМА 3. ПЕРВООБРАЗНАЯ И НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Теоретический материал

3.1. Основные определения и свойства

Функция $F(x)$ называется *первообразной* для $f(x)$, если $F'(x)=f(x)$ или $dF(x)=f(x)\,dx$.

Всякая непрерывная функция $f(x)$ имеет бесчисленное множество первообразных, которые отличаются друг друга на постоянное число.

Общее выражение $F(x)+c$ совокупности всех первообразных для функции $f(x)$ называется *неопределенным интегралом* от этой функции и обозначается:

$$\int f(x)\,dx=F(x)+c\,.$$

При этом $d\left[F(x)+c\right]=f(x)\,dx$, где $f(x)\,dx$ – подынтегральное выражение, $f(x)$ – подынтегральная функция.

Операцию нахождения неопределенного интеграла называют интегрированием.

Свойства интегралов

1) $d\left(\int f(x)\,dx\right)=f(x)\,dx$

2) $\int dF(x)=F(x)+c$, в частности, $\int dx=x+c$

$\int d\sin x=\sin x+c$, $\qquad \int d\ln x=\ln x+c$

3) $\int k\cdot f(x)\,dx=k\int f(x)\,dx$, где $k=\mathrm{const}$

4) $\int\left[f(x)\pm g(x)\right]dx=\int f(x)\,dx\pm\int g(x)\,dx$

Таблица основных интегралов

1. $\int a\,du = au + c \qquad (a \in R,\ c - \text{const},\ u = u(x))$

2. $\int u^m du = \dfrac{u^{m+1}}{m+1} + c$ (для любого $m \neq -1$)

 2.1. $\int \dfrac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + c$

 2.2. $\int \dfrac{du}{u^2} = -\dfrac{1}{u} + c$

3. $\int \dfrac{du}{u} = \ln|u| + c$

4. $\int a^u du = \dfrac{a^u}{\ln a} + c \qquad (a \in R,\ a > 0,\ a \neq 1)$

5. $\int e^u du = e^u + c$

6. $\int \cos u\,du = \sin u + c$

7. $\int \sin u\,du = -\cos u + c$

8. $\int \dfrac{du}{\cos^2 u} = \mathrm{tg}\,u + c$

9. $\int \dfrac{du}{\sin^2 u} = -\mathrm{ctg}\,u + c$

10. $\int \dfrac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \begin{cases} \arcsin \dfrac{u}{a} + c \\ -\arccos \dfrac{u}{a} + c \end{cases} \qquad (a \in R)$

11. $\int \dfrac{du}{\sqrt{a^2 + u^2}} = \begin{cases} \dfrac{1}{a}\,\mathrm{arctg}\,\dfrac{u}{a} + c \\ -\dfrac{1}{a}\,\mathrm{arcctg}\,\dfrac{u}{a} + c \end{cases} \qquad (a \in R)$

12. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right| + c$

13. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + c$

Доказательства свойств и табличных интегралов можно найти, например, в [8, 9].

3.2. Методы интегрирования. Метод замены переменной (подстановки)

Существуют три способа интегрирования: непосредственное, заменой переменной и по частям.

Непосредственное интегрирование состоит в том, что подынтегральную функцию путем тождественных преобразований с использованием формул алгебры и тригонометрии, а также, используя свойства интегралов, сводят к табличным интегралам.

Для вычисления интеграла $\int f(x)\,dx$ сделаем замену $x = \varphi(t)$, где $\varphi(t)$ выбирается так, чтобы после преобразований данного интеграла и новой переменной t, получился интеграл, который берется непосредственно.

Предварительно находим $dx = \varphi'(t)\,dt$, тогда

$$\int f(x)\,dx = \int f\left[\varphi(t)\right]\varphi'(t)\,dt. \qquad (3.1)$$

После нахождения первообразной $F(t)$ необходимо вернуться к первоначальной переменной x.

Следующие интегралы удобно решать указанной заменой:

$$\int R\left(\sqrt{a^2-x^2}\right)dx,\ x=a\sin t;\ dx=a\cos t dt;$$

$$\int R\left(\sqrt{a^2+x^2}\right)dx,\ x=a\operatorname{tg} t;\ dx=\frac{a}{\cos t}dt;$$

$$\int R\left(\sqrt{x^2-a^2}\right)dx,\ x=\frac{a}{\sin t};\ dx=\frac{-\cos tdta}{\sin^2 t}dt.$$

Формулой (3.1) часто пользуются справа налево:

$$\int f\left[\varphi(x)\right]\varphi'(x)\,dx=\int f(t)\,dt,\ \varphi(x)=t.$$

При этой замене надо помнить, что в составе подынтегрального выражения должен быть дифференциал функции $f(x)$.

Такой метод называется подведением под знак дифференциала

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx=\int f\left[\varphi(x)\right]d\left[\varphi(x)\right].$$

3.3. Метод интегрирования по частям

Пусть $u=u(x)$ и $v=v(x)$ – дифференцируемые функции. По свойству дифференциала

$$d(uv)=vdu+udv,\quad \text{или}\quad udv=d(uv)-vdu.$$

Интегрируя левую и правую части последнего равенства, получим:

$$\int u\,dv=\int d(uv)-\int v\,du,\ \text{или}$$

$$\int udv=uv-\int vdu. \qquad (3.2)$$

Формула (3.2) называется формулой интегрирования по частям.

Эта формула чаще всего применяется тогда, когда под интегралом имеется произведение алгебраической и трансцендентной функции, например, $\int x^2 e^x dx$ или $\int (x+1)\ln x dx$, $\int x \operatorname{arctg} x dx$ или $\int e^x \sin 2x dx$.

udv – это все подынтегральное выражение, часть которого мы обозначаем за u, а часть за dv. При этом:

1) за u принимается функция, которая дифференцированием упрощается;

2) за dv – та часть, интеграл от которой известен или легко может быть взят;

3) в состав dv обязательно входит dx.

В итоге верного выбора u и dv интеграл в (3.2) должен быть проще исходного.

Метод интегрирования по частям может применяться в одном примере несколько раз.

Иногда повторное интегрирование по частям приводит к уравнению относительно искомого интеграла

$$\int f(x)dx = u \cdot v - k\int f(x)dx, \qquad k \neq -1,$$

если

$$J = \int f(x)dx,$$

то получаем уравнение:

$$J = uv - kJ,$$

откуда

$$J + kJ = uv \quad \Rightarrow \quad (1+k)J = uv \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad J = \frac{1}{k+1} u \cdot v$$

или

$$\int f(x)dx = \frac{u \cdot v}{k+1} + c.$$

Только по частям берутся интегралы:

а) $\int P_m(x)\cos\alpha x dx$, $u = P_m(x) = a_0x^m + ... + a_m$ многочлен m-ой степени,

$\int P_m(x)\sin\alpha x dx$,

$\int P_m(x) e^{\alpha x} dx$,

б) $\int P_m(x)\arcsin x dx$,

$\int P_m(x)\,\mathrm{arctg} x dx$,

$\int P_m(x)\ln^n x dx$,

в) $\int e^{\alpha x}\sin\beta x dx$,

$\int e^{\alpha x}\cos\beta x dx$.

Интегралы типа (в) интегрируются дважды по частям.

3.4. Интегрирование рациональных выражений

К *простейшим дробям* относятся дроби вида:

1. $\dfrac{A}{x-a}$,
2. $\dfrac{A}{(x-a)^k}$,
3. $\dfrac{Ax+B}{x^2+px+q}$, при $D = \dfrac{p^2}{4} - q < 0$,
4. $\dfrac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}$, при $D = \dfrac{p^2}{4} - q < 0$

($A, B, a, p, q \in R$, $k \leq N$).

При интегрировании дробей типа 1 – 2 достаточно ввести подстановку $x-a=u$, $dx=du$ (или $dx=d(x-a)$), тогда

а) $\int\frac{Adx}{x-a}=A\int\frac{dx}{x-a}=A\int\frac{du}{u}=$

$=A\ln|u|+c=A\ln|x-a|+c$;

б) $\int\frac{Adx}{(x-a)^k}=A\int\frac{d(x-a)}{(x-a)^k}=A\int u^{-k}du=$

$=A\frac{u^{-k+1}}{1-k}+c=\frac{A}{(1-k)(x-a)^{k-1}}+c$, ($k\neq-1$).

Чтобы проинтегрировать дроби типа 3 – 4, необходимо выделить полный квадрат из квадратного трехчлена, затем свести интеграл к табличному.

Дробь $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ называется *рациональной*, где $P_m(x)$, $Q_n(x)$ – многочлены m-ой и n-ой степеней.

Если $m\geq n$, дробь неправильная.

Если $m<n$, дробь правильная.

Неправильную дробь представляют в виде суммы целой части и правильной дроби. Операция выделения целой части может быть выполнена делением числителя на знаменатель.

Теорема 3.1. *Всякая правильная рациональная дробь может быть представлена в виде суммы конечного числа простейших дробей вида 1 – 4.*

Пусть дробь $\frac{B_m(x)}{Q_n(x)}$ правильная. Разложим знаменатель дроби $Q_n(x)$ на множители. Найдем его корни, т. е. значения x, при которых знаменатель обращается в нуль. Тогда многочлен $Q_n(x)$ разложится на множители:

$$Q_n(x) = A_0x^n + A_1x^{n-1} + \ldots + A_n =$$
$$= A_0(x-a)(x-b)\ldots(x^2+px+q),$$

где a, b – действительные корни многочлена. Множитель x^2+px+q не разложим на линейные множители, т. к. $D = \frac{p^2}{4} - q < 0$.

Вид элементарной дроби и число их в разложении определяется корнями знаменателя данной дроби. Каждому множителю знаменателя соответствует определенного вида дробь. Укажем, какому множителю какая дробь соответствует:

$$(x-a) \to \frac{A}{x-a}$$

$$(x-a)^{\mathrm{k}} \to \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \ldots + \frac{A_k}{(x-a)^k}$$

$$(x^2+px+q) \to \frac{Ax+B}{x^2+px+q}, \text{ если } D = \frac{p^2}{4} - q < 0.$$

$$(x^2+px+q)^{\mathrm{k}} \to \frac{A_1x+B_1}{x^2+px+q} +$$
$$+ \frac{A_2x+B_2}{(x^2+px+q)^2} + \ldots + \frac{A_kx+B_k}{(x^2+px+q)^k},$$

если $D = \frac{p^2}{4} - q < 0$.

Таким образом, чтобы проинтегрировать рациональную дробь, необходимо:

1) Проверить, является ли эта дробь правильной. Если дробь неправильная, выделить целую часть, разделив числитель на знаменатель.
2) Правильную рациональную дробь разложить на сумму простейших дробей.
3) Найти неизвестные коэффициенты.
4) Проинтегрировать простейшие дроби.

3.5. Интегрирование некоторых иррациональных выражений

Основным методом решения интегралов от иррациональных выражений является метод замены переменной.

Цель замены – преобразовать данное иррациональное выражение к рациональной дроби.

1. Интегралы вида $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ сводятся к

$$\begin{cases} \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 \pm d^2}} & \text{при } a>0, \\ \int \frac{dt}{\sqrt{d^2 - t^2}} & \text{при } a<0, \end{cases}$$

предварительно необходимо выделить полный квадрат под знаком корня, сделать замену и проинтегрировать по таблице интегралов.

2. Для взятия интеграла вида $\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$ необходимо:

1) Сделать в числителе производную подкоренного выражения.

2) Разбить на два интеграла, один из которых степенной, а другой вида 1.

3. Интеграл вида $\int R\left[x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\alpha}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\beta}\right]dx$ берется подстановкой $\frac{ax+b}{cx+d} = t^s$, где s – наименьший общий знаменатель дробей α и β.

4. $\int R\left[x, \sqrt{a^2+x^2}\right]dx$, $x = a\operatorname{tg} t$;

$\int R\left[x, \sqrt{a^2-x^2}\right]dx$, $x = a\sin t$;

$\int R\left[x, \sqrt{x^2-a^2}\right]dx$, $x = \frac{a}{\sin t}$.

5. $\int x^m (a+bx^n)^p dx$ – иррациональный бином интегрируется в трех случаях при помощи подстановок Чебышева:

1) если p – целое, при $p > 0$ – интегрируется непосредственно, при $p < 0$ – подстановка $x = t^{\mu}$, где μ – общий знаменатель дробей m и n;

2) если $\frac{m+1}{n}$ – целое (>0, <0, $=0$) подстановка $a + bx^n = t^s$, где s – знаменатель дроби $p = \frac{2}{s}$;

3) если $\frac{m+1}{n} + p$ – целое (>0, <0, $=0$) подстановка $a + bx^n = t^s x^n$.

3.6. Интегрирование тригонометрических выражений

1. $\int R\left(\sin x, \cos x\right) dx$ берется универсальной тригонометрической подстановкой

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t\,,\ \Rightarrow\quad \sin x=\frac{2t}{1+t^2}\,,\quad \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}\,;\ dx=\frac{2dt}{1+t^2}\,.$$

В некоторых случаях полезнее использовать подстановки, которые дают лучший результат, чем при использовании универсальной подстановки.

2. Если в подынтегральном выражении при замене $\sin x$ на $-\sin x$ и $\cos x$ на $-\cos x$ функция не меняет своего знака, т.е. если

$$\int R\left(\sin x, \cos x\right) dx=\int R\left(-\sin x, -\cos x\right) dx\,,$$

то применяют подстановку $\operatorname{tg} x=t$.

3. Если $\int R\left(\sin x, \cos x\right) dx=-\int R\left(-\sin x, \cos x\right) dx$, т.е. при замене $\sin x$ на $-\sin x$ подынтегральная функция меняет знак, то подстановка $\cos x=t$.

4. Если $\int R\left(\sin x, \cos x\right) dx=-\int R\left(\sin x, -\cos x\right) dx$, т.е. при замене $\cos x$ на $-\cos x$ подынтегральная функция меняет знак, то подстановка $\sin x=t$.

5. $\int \cos^n x dx$; при n – четном,

$$\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}\,;\ \cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}\,;$$

$\int \sin^n x dx$; при n – нечетном по правилу 3 или 4.

6. $$\int \sin ax\cos bx dx=\frac{1}{2}\int\left[\sin\left(a-b\right)x+\sin\left(a+b\right)x\right]dx\,,$$

$$\int \sin ax\sin bx dx=\frac{1}{2}\int\left[\cos\left(a-b\right)x-\cos\left(a+b\right)x\right]dx\,,$$

$$\int \cos ax \cos bx dx = \frac{1}{2}\int \left[\cos (a+b) x + \cos (a-b) x\right] dx .$$

3.7. Интегралы, не выражающиеся через элементарные функции

К таким интегралам относится интеграл вида $\int R(x, \sqrt{P(x)})dx$, где $P(x)$ – многочлен степени выше второй. Эти интегралы называются *эллиптическими.*

Если степень многочлена $P(x)$ выше четвертой, то интеграл называется *ультраэллиптическим.*

Если интеграл такого вида выражается через элементарные функции, то он называется *псевдоэллиптическим.*

Не могут быть выражены через элементарные функции следующие интегралы:

1) $\int e^{-x^2} dx$ – интеграл Пуассона,

2) $\int \sin x^2 dx;$ $\int \cos x^2 dx$ – интегралы Френеля ,

3) $\int \frac{dx}{\ln x}$ – интегральный логарифм,

4) $\int \frac{e^x}{x} dx$ – приводится к интегральному логарифму,

5) $\int \frac{\sin x}{x} dx$ – интегральный синус,

6) $\int \frac{\cos x}{x} dx$ – интегральный косинус.

Более подробные сведения можно почерпнуть в [1-16], а также в Интернет-ресурсах [17-20].

3.7. Вопросы для самоконтроля

22. Дайте определение первообразной.
23. Дайте определение неопределенного интеграла.
24. Запишите таблицу интегралов.
25. Сформулируйте и поясните свойства неопределенных интегралов.
26. Сформулируйте и проиллюстрируйте на примерах способ интегрирования заменой переменных.
27. Сформулируйте и проиллюстрируйте на примерах способы интегрирования функций, содержащих квадратный трехчлен.
28. Сформулируйте и проиллюстрируйте на примерах интегрирование по частям.
29. Сформулируйте и проиллюстрируйте на примерах интегрирование рациональных функций.
30. Сформулируйте и поясните метод неопределенных коэффициентов.
31. Дайте определение правильных и неправильных рациональных дробей.
32. Поясните нахождение интегралов от рациональных дробей.
33. Поясните нахождение интегралов от иррациональных функций.
34. Запишите три подстановки Эйлера.
35. Сформулируйте и проиллюстрируйте на примерах интегрирование дифференциального бинома.

36. Поясните нахождение интегралов от тригонометрических функций. Универсальная подстановка.
37. Запишите функции, интегралы от которых не выражаются через элементарные функции.
38. Дайте определение эллиптического интеграла.
39. Дайте определение интегрального синуса, косинуса, логарифма.

Решение типовых задач на тему 3

Пример 1. Найти неопределенный интеграл, используя замену переменной $\int x\sqrt{x^2+9}\,dx$.

Решение.

Под интегралом стоит функция от $\left(x^2+9\right)$ и x в первой степени. Так как $d\left(x^2+9\right)=\left(x^2+9\right)'dx=2xdx$, умножим и разделим выражение под интегралом на 2 и заменим $2xdx$ на $d\left(x^2+9\right)$. Получим

$$\int x\sqrt{x^2+9}dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int 2x\sqrt{x^2+9}dx=\frac{1}{2}\int\left(x^2+9\right)^{1/2}2xdx=$$

$$=\frac{1}{2}\int\left(x^2+9\right)^{1/2}d\left(x^2+9\right).$$

Если обозначить $\left(x^2+9\right)=t$, то можно заметить, что получился табличный интеграл. Вычислим его и вернёмся к переменной x.

$$\int x\sqrt{x^2+9}dx = \frac{1}{2}\int \left(x^2+9\right)^{1/2} d\left(x^2+9\right) =$$

$$= \left[x^2+9=t\right] = \frac{1}{2}\int t^{1/2}dt =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{t^{3/2}}{3/2} + C = \frac{1}{3}\sqrt{\left(x^2+9\right)^3} + C.$$

Пример 2. Найти неопределенный интеграл, используя замену переменной $\int \sqrt[3]{\left(3x^2+5x+7\right)^4}\left(6x+5\right)dx$.

Решение.

Аналогично предыдущему примеру заметим, что $d(3x^2+5x+7) = (6x+5)dx$, поэтому:

$$\int \sqrt[3]{\left(3x^2+5x+7\right)^4}\left(6x+5\right)dx =$$

$$= \left[d\left(3x^2+5x+7\right) = \left(6x+5\right)dx\right] =$$

$$= \int \left(3x^2+5x+7\right)^{4/3} d\left(3x^2+5x+7\right) =$$

$$= \left[3x^2+5x+7=t\right] = \int t^{4/3}dt =$$

$$= \frac{t^{7/3}}{7/3} + C = \frac{3}{7}\left(3x^2+5x+7\right)^{7/3} + C.$$

Пример 3. Найти неопределенный интеграл, используя формулу интегрирования по частям $\int \left(2x^2+5\right)\ln 3x dx$.

Решение.

Воспользуемся методом интегрирования по частям (см. выражение (3.2)).

$$\int (2x^2+5)\ln 3x dx =$$

$$= \left[\begin{array}{l} u(x)=\ln 3x, \quad du=(\ln 3x)'dx=\dfrac{1}{3x}\cdot 3dx=\dfrac{1}{x}dx, \\ dv=(2x^2+5)dx, \quad v=\int (2x^2+5)dx=\dfrac{2x^3}{3}+5x \end{array} \right] =$$

$$= \ln 3x \cdot (2x^3/3+5x) - \int (2x^3/3+5x)\cdot \frac{1}{x}dx =$$

$$= (2x^3/3+5x)\cdot \ln 3x - 2x^3/9 - 5x + C.$$

Пример 4. Найти неопределенный интеграл дробно-рационального выражения $\int \dfrac{x^5+x^2+6x}{(x+1)^2(x^2-x+1)}dx.$

Решение.

Выделим целую часть неправильной дроби. Для этого в знаменателе необходимо раскрыть скобки.

$$\begin{array}{l|l} -\; x^5+x^2+6x & x^4+x^3+x+1 \\ \quad x^5+x^4+x^2+x & \overline{x-1} \\ \hline \quad -\; -x^4+5x & \\ \qquad -x^4-x^3-x-1 & \\ \hline \qquad\qquad x^3+6x+1. & \end{array}$$

$$\frac{x^5+x^2+6x}{(x+1)^2(x^2-x+1)} = x-1+\frac{x^3+6x+1}{(x+1)^2(x^2-x+1)}.$$

Разложим правильную дробь на элементарные.

$$\frac{x^3+6x+1}{(x+1)^2(x^2-x+1)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{Cx+D}{x^2-x+1}=$$

$$=\frac{A(x+1)(x^2-x+1)}{(x+1)^2(x^2-x+1)}=$$

$$=\frac{B(x^2-x+1)+(Cx+D)(x+1)^2}{(x+1)^2(x^2-x+1)}.$$

Получаем, что

$$x^3+6x+1=A(x^3+1)+B(x^2-x+1)+$$

$$+C(x^3+2x^2+x)+D(x^2+2x+1)$$

и систему из 4-х уравнений:

$$\begin{cases} A+C=1 \\ B+2C+D=0 \\ -B+C+2D=6 \\ A+B+D=1. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим: A = 1, B = -2, C = 0, D = 2, поэтому

$$\frac{x^3+6x+1}{(x+1)^2(x^2-x+1)}=\frac{1}{x+1}-\frac{2}{(x+1)^2}+\frac{2}{x^2-x+1}.$$

Искомый интеграл:

$$\int\frac{x^5+x^2+6x}{(x+1)^2(x^2-x+1)}\,dx=\int(x-1)\,dx+$$

$$+\int\frac{dx}{x+1}-2\int\frac{dx}{(x+1)^2}+2\int\frac{dx}{x^2-x+1}=$$

$$=\frac{x^2}{2}-x+\int\frac{d(x+1)}{x+1}-2\int(x+1)^{-2}d(x+1)+$$

$$+2\int\frac{d(x-1/2)}{(x-1/2)^2+3/4}=$$

$$=\frac{x^2}{2}-x+\ln|x+1|+\frac{2}{x+1}+\frac{4}{\sqrt{3}}\,arctg\,\frac{x-1/2}{\sqrt{3}/2}+C.$$

Пример 5. Найти неопределенный интеграл иррационального бинома $\int x^7\sqrt{1+x^4}dx$.

Решение.

Воспользуемся подстановкой Чебышева:

$$\int x^7\sqrt{1+x^4}dx=\int x^7\left(1+x^4\right)^{\frac{1}{2}}dx=$$

$$=\left[\begin{array}{c} m=7;\;\; n=4;\;\; p=\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{m+1}{n}=\dfrac{7+1}{4}=2 \text{ - целое} \end{array}\right]=$$

$$=\left[\begin{array}{c} \left(1+x^4\right)=t^2 \\ 4x^3dx=2tdt \\ x^4=t^2-1 \\ t=\sqrt{1+x^4} \end{array}\right]=\int x^3\cdot x^4\left(1+x^4\right)^{\frac{1}{2}}dx=$$

$$=\int t\cdot\frac{1}{2}\left(t^2-1\right)tdt=\int\frac{1}{2}\left(t^4-t^2\right)dt=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{t^5}{5}-\frac{t^3}{3}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{\left(1+x^4\right)^5}}{5}-\frac{\sqrt{\left(1+x^4\right)^3}}{3}\right)+C.$$

Пример 6. Найти неопределенный интеграл

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x - 2\sin x \cos x + 1}.$$

Решение.

Имеем интеграл вида $\int R(\sin x, \cos x)dx$, где функция R четная относительно $\sin x$ и $\cos x$. Для преобразования функции R в рациональную используется подстановка $t = tgx$:

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x - 2\sin x \cos x + 1} =$$

$$= \begin{bmatrix} \mathrm{tg}\, x = t \quad x = \mathrm{arctg}\, t \quad dx = \dfrac{dt}{1+t^2} \\ \sin x = \dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \quad \cos x = \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}} \end{bmatrix} =$$

$$= \int \frac{dt}{1+t^2 \left(\frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \right)^2 - 2\frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} + 1} =$$

$$= \int \frac{dt}{2t^2 - 2t + 1} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{\left(t - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{1}{4}} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 2\mathrm{arctg} \quad 2t - 1 \quad + c = \mathrm{arctg} \quad 2\mathrm{tg}\, x - 1 \quad + C.$$

Пример 7. Найти неопределенный интеграл

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2 - 3x - 5}}.$$

Решение.

Вначале выделим в подкоренном выражении полный квадрат, затем сделаем замену переменной.

$$\int\frac{dx}{\sqrt{2x^2-3x-5}}=$$

$$=\left[\begin{array}{l} 2x^2-3x-5=2\left(x^2-3/2\cdot x-5/2\right)= \\ =2\left(x^2-2\cdot x\cdot 3/4+9/16-9/16-5/2\right)= \\ =2\left(\left(x-3/4\right)^2-49/16\right) \end{array}\right]=$$

$$=\int\frac{dx}{\sqrt{2\left(\left(x-3/4\right)^2-49/16\right)}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{dx}{\sqrt{\left(x-3/4\right)^2-49/16}}=\left[d\left(x-3/4\right)=dx\right]=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{d\left(x-3/4\right)}{\sqrt{\left(x-3/4\right)^2-49/16}}=\left(x-3/4=t\right)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{dt}{t^2-49/16}=\frac{1}{\sqrt{2}\cdot 2\cdot\frac{7}{4}}\ln\left|\frac{t-\frac{7}{4}}{t+\frac{7}{4}}\right|+C=$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{7}\ln\left|\frac{x-\frac{5}{2}}{x+1}\right|+C\ .$$

Пример 8. Найти неопределенный интеграл

$$\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx.$$

Решение.

Имеем интеграл вида $\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$, который берется тригонометрической подстановкой:

$$\int\sqrt{a^2-x^2}dx=\left[\begin{aligned}x&=a\sin t;\\ dx&=a\cos tdt\end{aligned}\right]=$$

$$=\int\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}\,a\cos tdt=\int a^2\cos^2 tdt=$$

$$=\frac{a^2}{2}\int(1+\cos 2t)dt=$$

$$=\frac{a^2t}{2}+\frac{a^2}{4}\sin 2t+C=\frac{a^2t}{2}+\frac{a^2}{2}\sin t\cos t+C=$$

$$=\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+C.$$

Пример 9. Найти неопределенный интеграл

$$\int\frac{dx}{9+8\cos x+\sin x}.$$

Решение.

Применим универсальную тригонометрическую подстановку $t=tg\frac{x}{2}$, тогда $x=2arctgt,\ dx=\frac{2dt}{1+t^2}$, а

$$\sin x=\frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}=\frac{2t}{1+t^2},\ \cos x=\frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Получаем:

$$\int\frac{dx}{9+8\cos x+\sin x}=\int\frac{2dt}{(1+t^2)\left[9+\dfrac{8(1-t^2)}{1+t^2}+\dfrac{2t}{1+t^2}\right]}=$$

$$=2\int\frac{dt}{t^2+2t+17}=2\int\frac{dt}{(t+1)^2+16}=$$

$$=\frac{1}{2}arctg\,\frac{t+1}{4}+C=\frac{1}{2}arctg\,\frac{tg\dfrac{x}{2}+1}{4}+C.$$

Пример 10. Найти неопределенный интеграл $\int\sin^4 xdx$.

Решение.

Используем общеизвестную тригонометрическую формулу для понижения порядка синуса:

$$\int\sin^4 xdx=\int\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x\right)^2 dx=\frac{1}{4}\int(1-\cos 2x)^2 dx=$$

$$=\frac{1}{4}\int(1-2\cos 2x+\cos^2 2x)dx=$$

$$=\frac{1}{4}\int dx-\frac{1}{2}\int\cos 2xdx+\frac{1}{4}\int\cos^2 2xdx=$$

$$=\frac{x}{4}-\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{4}\int\frac{1}{2}(1+\cos 4x)dx=\frac{x}{4}-\frac{\sin 2x}{4}+$$

$$+\frac{1}{8}\int dx+\int\cos 4xdx=\frac{x}{4}-\frac{\sin 2x}{4}+\frac{x}{8}+\frac{\sin 4x}{32}=$$

$$=\frac{1}{4}\left[\frac{3x}{2}-\sin 2x+\frac{\sin 4x}{8}\right]+C.$$

Пример 11. Найти неопределенный интеграл

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1-2x}-\sqrt[4]{1-2x}}.$$

Решение.

Имеем интеграл вида $\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx$, где n – натуральное число. Рационализируем подынтегральное выражение подстановкой $\sqrt[4]{1-2x} = t$, тогда $dt = \frac{-2dx}{4\left(\sqrt[4]{1-2x}\right)^3} = \frac{-dx}{2t^3}$ и

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-2x} - \sqrt[4]{1-2x}} = \int \frac{-2t^3 dt}{t^2 - t} = -2\int \frac{t^2 dt}{t-1} =$$

$$= -2\int\left(t + \frac{t}{t-1}\right)dt = -2\int t dt - 2\int \frac{t}{t-1}dt =$$

$$= -t^2 - 2\int\left(1 + \frac{1}{t-1}\right)dt = -t^2 - 2t - 2\ln|t-1| + C =$$

$$= -\sqrt{1-2x} - 2\sqrt[4]{1-2x} - 2\ln\left|\sqrt[4]{1-2x} - 1\right| + C.$$

Задачи для самостоятельной работы студентов

ЗАДАНИЕ 1

Вычислить интегралы

1. $\int \frac{dx}{2\cos^2 3x}$

2. $\int \sin(1-x^2)xdx$

3. $\int \cos\frac{1}{x}\cdot\frac{dx}{x^2}$

4. $\int \frac{ctg(x+1)dx}{\sin^2(x+1)}$

5. $\int \frac{dx}{2x-1}$

6. $\int \frac{5^{tgx}}{\cos^2 x}dx$

7. $\int \frac{x+1}{6x^2+5}dx$

8. $\int \frac{\cos 2xdx}{\sin x+\cos x}$

9. $\int \frac{dx}{x(4-\ln^2 x)}$

10. $\int \frac{2^x-3^{x+1}}{6^{x-1}}dx$

11. $\int tg3xdx$

12. $\int (\cos^2 4x-3\sin^2 bx)dx$

13. $\int (x-3)\cos 2xdx$

14. $\int x^2\ln(1-x^2)dx$

15. $\int (x^2-3x+1)e^{-2x}dx$

16. $\int (arcctgx-3x^3)dx$

17. $\int \frac{x^4dx}{x^4+6x^2+8}$

18. $\int \frac{x^4+16}{x^5-4x^3}dx$

19. $\int \frac{x^2-6x+1}{1-x^4}dx$

20. $\int \frac{6x^2+8x+18}{x^3+8x^2+19x+20}dx$

21. $\int \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt[3]{x^2}}dx$

22. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+3}}$

23. $\int x\sqrt{x+2}dx$

24. $\int \frac{dx}{2\sin x+3\cos x+2}$

25. $\int \frac{dx}{9-10\sin^2 x}$

26. $\int (x^3-1)\ln^2 xdx$

27. $\int \frac{dx}{\cos^3 x}$

28. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+4}}$

29. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+3}}$

30. $\int \frac{x+1}{x^4+5}dx$

ЗАДАНИЕ 2

Вычислить интегралы

1. $\int \left(2^x + \frac{15}{\sqrt{4-x^2}} \right) dx$

2. $\int e^x (e^x+2)^9 dx$

3. $\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^4}}$

4. $\int \frac{\sin xdx}{1-3\cos x}$

5. $\int \frac{2^x}{1-2^x} dx$

6. $\int \frac{cos^4 2x-3}{\cos^2 2x} dx$

7. $\int tg(3x-1)dx$

8. $\int \frac{5x-x^3}{2x^4+1}dx$

9. $\int \frac{dx}{x^2+6x+11}$

10. $\int \frac{4dx}{1-3x}$

11. $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^4-3x^2-1}}$

12. $\int \frac{x^3-2\ln x}{x} dx$

13. $\int (5x-3)e^{6x}dx$

14. $\int \frac{\ln^2 x}{\sqrt{x}}dx$

15. $\int (x^2+2x-1)\cos 2xdx$

16. $\int (x\arcsin x-2)dx$

17. $\int \frac{x^3+3x^2-3x+1}{x^3+x^2+x+1} dx$

18. $\int \frac{2x^4-1}{x^5-4x^3} dx$

19. $\int \frac{(x^2-3)dx}{x^4+5x^2+6}$

20. $\int \frac{xdx}{1-x^3}$

21. $\int \frac{\sqrt[4]{x-1}dx}{x-1+\sqrt[12]{(x-1)^{11}}}$

22. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(2+\sqrt[3]{x})}$

23. $\int \frac{dx}{x\sqrt{25-x^2}}$

24. $\int \frac{dx}{\cos^2 x+4\sin^2 x}$

25. $\int \cos^4 x\sin^2 xdx$

2б. $\int \frac{2\cos 3x-1}{\sin 3x-\cos 3x}dx$

27. $\int \frac{dx}{3-7\cos x}$

28. $\int \frac{\sqrt{x^3}dx}{(7-4x^2)^2}$

29. $\int \frac{dx}{\cos^3 x}$

30. $\int \frac{x+5}{x^4+2}dx$

ЗАДАНИЕ 3

Вычислить интегралы

1. $\int tg(2x+5)dx$

2. $\int e^x(e^x+2)^3dx$

3. $\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^4}}$

4. $\int \frac{\sin xdx}{\cos x+3}$

5. $\int \frac{3x^2}{5x-1}dx$

6. $\int \frac{x^3+3x}{4x^4-3}dx$

7. $\int \left(3^{-2x}+\frac{5}{\sqrt{4-x^2}}\right)dx$

8. $\int \frac{3ctgx}{\sin^2 x}dx$

9. $\int \frac{3^{x-1}+4^{x-2}}{12^x}dx$

10. $\int (2\sin^2 4x-5e^{6x})dx$

11. $\int \frac{\cos(tgx)}{\cos^2 x}dx$

12. $\int \frac{6+4x^2-\sin 3x}{\sin 3x(3+2x^2)}dx$

13. $\int (6x-2)e^{5x}dx$

14. $\int \frac{2-xarctgx}{x}dx$

15. $\int (x^2+3x+1)\sin 2xdx$

16. $\int \frac{\ln^2 x}{\sqrt{x^3}}dx$

17. $\int \frac{x^3+3x^2-3x+1}{x^3+x^2+x+1}dx$

18. $\int \frac{3x^4-4}{x^5-9x^3}dx$

19. $\int \frac{x^3-2x}{x^4+3x^2+2}dx$

20. $\int \frac{xdx}{8-x^3}$

21. $\int \frac{dx}{\sqrt{x-3}(2+\sqrt[3]{x-3})}$

22. $\int \frac{\sqrt[4]{x}dx}{x+\sqrt[12]{x^{11}}}$

23. $\int \frac{dx}{x\sqrt{4-x^2}}$

24. $\int \sin^3 x\cos^2 xdx$

25. $\int \frac{dx}{3+2\cos x}$

26. $\int \frac{dx}{4\cos^2 x+\sin^2 x}$

27. $\int \frac{\sqrt{x^5}dx}{(2-3x^2)^2}$

28. $\int \frac{7e^{5x}dx}{3-2e^{5x}}$

29. $\int \frac{dx}{x^4+x^2+1}$

30. $\int \frac{x^4\,dx}{x^4+5x^2+4}$

ЗАДАНИЕ 4

Вычислить интегралы

1. $\int \frac{e^{2x}dx}{e^x-2}$

2. $\int \frac{tg^3 x-3}{\cos^2 x}dx$

3. $\int \frac{dx}{2-5x}$

4. $\int \frac{2-4x}{\sqrt{1-3x^2}}dx$

5. $\int \cos(2x+5)dx$

6. $\int \frac{(\arccos x)^4\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$

7. $\int \frac{x+e^{arctg x}}{1+x^2}dx$

8. $\int \frac{2^{3x}-3\cos^2 5x}{4}dx$

9. $\int \frac{\sin 2x dx}{4+\cos^2 x}$

10. $\int \frac{3\sqrt{2+x^2}-8x}{x^2+2}dx$

11. $\int \frac{x^3+x}{x^4+1}dx$

12. $\int \frac{dx}{\sin^2 x\sqrt{9-4ctg^2 x}}$

13. $\int (1-3x)e^{-2x}dx$

15. $\int (x^2-3x+2)\sin x dx$

14. $\int \frac{2x^3-\arccos x}{5}dx$

17. $\int \frac{(3x+27)dx}{x^3+6x^2+9x}$

16. $\int (x^2+1)\ln x dx$

19. $\int \frac{x^5+5x^3+2x^2+6x-5}{x^4+5x^2+6}dx$

18. $\int \frac{(x^2-3x)dx}{x^3+x^2+3x+3}$

21. $\int \frac{dx}{\sqrt{2-x}(9+\sqrt[3]{2-x})}$

20. $\int \frac{xdx}{1-x^3}$

23. $\int \frac{\sin 2x + 4}{(1 - \sin 2x)^2} dx$

25. $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$

27. $\int \frac{x \cdot \sqrt[3]{2+x}}{x + \sqrt[3]{2+x}} dx$

29. $\int \frac{1}{x^3 \cdot \sqrt[5]{1 + \frac{1}{x}}} dx$

22. $\int \frac{dx}{\sqrt{(16 + x^2)^3}}$

24. $\int \frac{dx}{2\sin 2x + \cos^2 x}$

26. $\int \frac{\arcsin \sqrt{1-x}}{\sqrt{x}} dx$

28. $\int \sin^7 x dx$

30. $\int (x^3 + 2) \ln^2 x dx$

ТЕМА 4. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ И НЕСОБСТВЕННЫЙ ИНТЕГРАЛЫ

Теоретический материал

4.1. Основные определения и свойства

Если

1) пределы интегрирования a и b конечны,

2) функция $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$ и имеет первообразную $F(x)$,

то определенный интеграл выражается конечным числом и может быть вычислен по *формуле Ньютона-Лейбница*:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a). \qquad (4.1)$$

Геометрически определенный интеграл (4.1) представляет собой алгебраическую сумму площадей фигур, составляющих криволинейную трапецию *aABb,* в которой площади частей, распложенных выше оси *OX*, берутся со знаком плюс, а площади частей, расположенных ниже оси *OX*, – со знаком минус (см. рис. 4.1).

Будем рассматривать интегрируемые функции. Имеют место следующие свойства.

1. $\int_a^{в} C \cdot f(x)\,dx = C\int_a^{в} f(x)\,dx$, где C = const (4.2)

2. $\int_a^b \left(f(x) \pm g(x)\right)dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$ (4.3)

3. $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$ (4.4)

4. Если на $[a,b]$, где $a<b$ $f(x)\le g(x)$, то

$$\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx. \qquad (4.5)$$

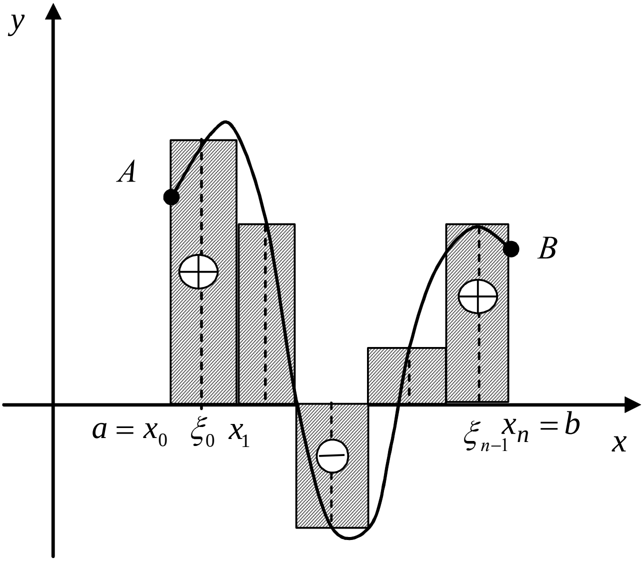

Рис. 4.1

Теорема 4.1. *Пусть функция* $\varphi(t)$, *непрерывная вместе со своей на производной на* $[\alpha,\beta]$, $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$, *и функция* $f(x)$ *непрерывна* $\forall x\in[a,b]$. *Тогда справедливо равенство*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,dt. \qquad (4.6)$$

Замечание. В отличие от неопределенного интеграла, ввиду того, что изменяются пределы интегрирования, в определенном интеграле нет необходимости возвращаться к исходной переменной интегрирования.

Теорема 4.2. *Если функции* $u(x)$ *и* $v(x)$ *непрерывно дифференцируемы на отрезке* $[a,b]$*, то*

$$\int_a^b u\,dv = u\,v\Big|_a^b - \int_a^b v\,du. \qquad (4.7)$$

Эта формула называется *формулой интегрирования по частям для определенного интеграла.*

Интегралы

а) $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$; б) $\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$; в) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$

относятся к *несобственным интегралам I-го рода*, т. к. для них не выполнено условие 1), а именно: один из пределов интегрирования не является конечными, а условие 2) выполнено. Вычисление таких интегралов можно проводить по формуле Ньютона-Лейбница, при этом $F(\infty)$ считается как предельное значение, которое может быть конечным, бесконечным или не иметь смысла.

Если в результате вычислений получили конечное число, то несобственный интеграл называется сходящимся, в противном случае интеграл расходится.

Те интегралы $\int_a^b f(x)\,dx$, для которых не выполняется условие 2), а условие 1) выполнено, относятся к *несобственным интегралам II-го рода*. $f(x)$ имеет бесконечный разрыв в одной или нескольких точках.

Вычисление несобственных интегралов II-го рода и определение их сходимости или расходимости можно проводить по формуле Ньютона-Лейбница, определив точки бесконечного разрыва. Более подробно исследование несобственных интегралов изложено в [13].

4.2. Формулы площадей плоских фигур

Площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $y = f(x)$, отрезком $[a,b]$ на оси Ox и прямыми $x = a$ и $x = b$, $a<b$ вычисляется по формуле

$$S = \int_a^b f(x)dx\,. \qquad (4.8)$$

Площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиками функций $y=f_1(x)$ и $y=f_2(x)$, $a<b$ вычисляется по формуле.

$$S = \int_a^b \; f_2(x) - f_1(x) \; dx\,. \qquad (4.9)$$

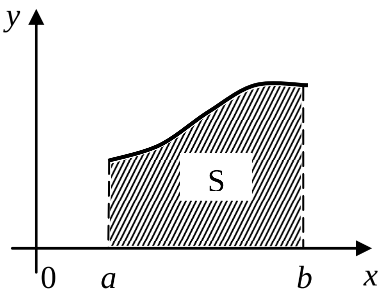

Рис. 4.2

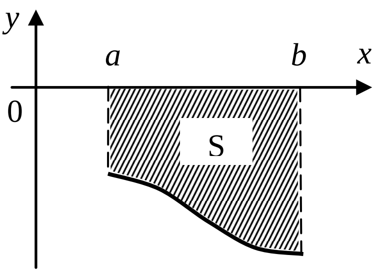

Рис. 4.3

$$S = \int_a^b f(x)dx \qquad\qquad S = -\int_a^b f(x)dx$$

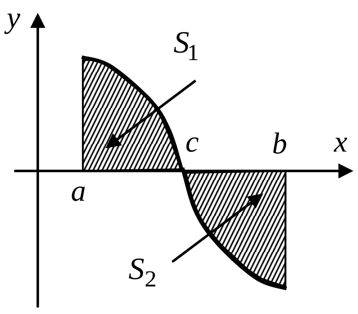

Рис. 4.4

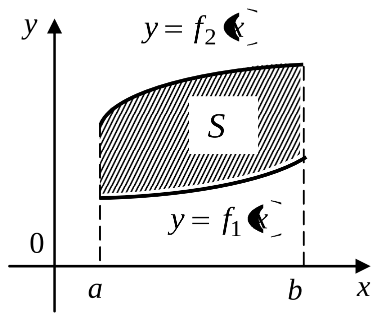

Рис. 4.5

$$S = S_1 + S_2 = \int_a^c f(x)\,dx - \int_c^b f(x)\,dx. \qquad S = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]\,dx.$$

Площадь криволинейной трапеции, верхняя граница которой задана параметрически, вычисляют по формуле (4.10)

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} \psi(t)\varphi'(t)\,dt\,, \qquad (4.10)$$

где верхняя граница задана функциями $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $\alpha \le t \le \beta$.

Площадь криволинейного сектора в полярной системе координат равна

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi)\,d\varphi\,, \qquad (4.11)$$

где $\rho = \rho(\varphi)$ – кривая, заданная в полярной системе координат, $\alpha \le \varphi \le \beta$.

4.3. Вычисление длин дуг плоских кривых

Длина кривой, заданной уравнением $y = f(x)$, $a \le x \le b$:

$$L=\int_a^b\sqrt{1+f'^2(x)}dx. \qquad (4.12)$$

Длина кривой, заданной параметрическими уравнениями $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, $\alpha\le t\le\beta$:

$$L=\int_\alpha^\beta\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}dt. \qquad (4.13)$$

Длина кривой, заданной в полярной системе координат уравнением $\rho=\rho\ \ \varphi\ \ $, $\alpha\le\varphi\le\beta$:

$$L=\int_\alpha^\beta\sqrt{\rho(\varphi)+\rho'^2(\varphi)}d\varphi. \qquad (4.14)$$

4.4. Формулы объемов тел вращения и площадей поверхностей вращения

Объем тела, полученного вращением криволинейной трапеции $0\le y\le f(x)$, $a\le x\le b$ вокруг оси Ox вычисляют по выражению (см. рис. 4.6):

$$V=\pi\int_a^b y^2(x)dx. \qquad (4.15)$$

Объем тела, полученного вращением криволинейной трапеции $0\le x\le\varphi(y)$, $c\le y\le \mathrm{d}$ вокруг оси Oy:

$$V=\pi\int_a^b x^2(y)dy. \qquad (4.16)$$

Площадь поверхности, образованной вращением кривой, заданной уравнением $x=\varphi(y)$, $c\le y\le \mathrm{d}$, вокруг оси Oy:

$$S=2\pi\int_c^d\varphi(y)\sqrt{1+\varphi'^2(y)}dy. \qquad (4.17)$$

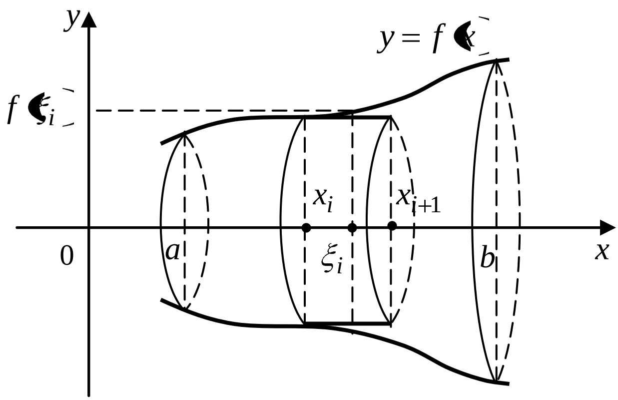

Рис. 4.6

Площадь поверхности, образованной вращением кривой, заданной параметрическими уравнениями $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, $\alpha \le t \le \beta$:

$$S = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} \psi(t)\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,dt\,. \qquad (4.18)$$

Площадь поверхности, образованной вращением кривой, заданной уравнением в полярных координатах $\rho = \rho(\varphi)$, $\alpha \le \varphi \le \beta$:

$$S = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} \rho \sin(\varphi)\sqrt{\rho^2+\rho'^2}\,d\varphi\,. \qquad (4.19)$$

4.5. Физические приложения определенного интеграла

Если дуга материальной кривой задана уравнением $y = f(x)$, $a \le x \le b$ и имеет плотность $\rho = \rho(x)$, то:

1) *статические моменты* этой дуги M_x и M_y

относительно осей OX и OY соответственно равны

$$M_x = \int_a^b \rho(x) \cdot f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx,$$

$$M_y = \int_a^b \rho(x) \cdot x\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx.$$

2) *моменты инерции* I_x и I_y относительно осей OX и OY вычисляются по формулам

$$I_x = \int_a^b \rho(x) \cdot f^2(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx,$$

$$I_y = \int_a^b \rho(x) \cdot x^2\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx.$$

3) *координаты центра тяжести* $\bar{x}$ и $\bar{y}$ этой кривой вычисляются по формулам

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m} = \frac{1}{m}\int_a^b \rho(x) \cdot x\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx,$$

$$\bar{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{1}{m}\int_a^b \rho(x) \cdot f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx,$$

где $m = \int_a^b \rho(x) \cdot \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$ – масса дуги.

Теорема Гульдена. *Площадь поверхности, образованной вращением дуги плоской кривой вокруг оси, лежащей в плоскости дуги и ее не пересекающей, равна произведению длины дуги на длину окружности, описываемой ее центром масс.*

Если материальная плоская область ограничена кривой $y = f(x) \geq 0$, прямыми $x = a$, $x = b$, $y = 0$ и имеет постоянную плотность ρ, то:

1) *статические моменты* относительно осей OX и OY соответственно равны

$$M_x = \frac{\rho}{2}\int_a^b y^2 dx, \quad M_y = \rho\int_a^b xy\, dx.$$

2) *координаты центра тяжести* $\overline{x}$ и $\overline{y}$ плоской области находятся по формулам

$$\overline{x} = \frac{\int_a^b xy\, dx}{\int_a^b y\, dx}, \quad \overline{y} = \frac{\frac{1}{2}\int_a^b y^2 dx}{\int_a^b y\, dx}.$$

Работа переменной силы $F = F(x)$, действующей в направлении оси OX на отрезке $[a,b]$, вычисляется по формуле

$$A = \int_a^b F(x)dx.$$

Путь, пройденный материальной точкой по прямой с переменной скоростью $V = V(t)$ за промежуток времени от t_1 до t_2, вычисляется по формуле

$$S = \int_{t_1}^{t_2} V(t)dt.$$

4.6. Вопросы для самоконтроля

1. Дайте понятие определенного интеграла.
2. Сформулируйте и поясните геометрический смысл определенного интеграла.

3. Сформулируйте и поясните основные свойства определенного интеграла.
4. Сформулируйте теорему о среднем.
5. Запишите формулу Ньютона-Лейбница.
6. Сформулируйте и проиллюстрируйте на примерах основные правила интегрирования определенного интеграла.
7. Сформулируйте и поясните геометрические приложения определенного интеграла.
8. Сформулируйте и проиллюстрируйте на примерах вычисление площадей плоских фигур в декартовой системе координат.
9. Запишите формулу вычисления площадей плоских фигур в полярной системе координат.
10. Сформулируйте и проиллюстрируйте на примерах вычисление длины дуги кривой, заданной в полярных координатах.
11. Запишите формулу вычисления длины дуги кривой, заданной параметрически.
12. Сформулируйте и проиллюстрируйте на примерах вычисление объема тела по параллельным сечениям.
13. Сформулируйте и проиллюстрируйте на примерах вычисление объема тела вращения.
14. Запишите формулу вычисления поверхности тела вращения.
15. Как определить центр тяжести и моменты инерции тела?

Решение типовых задач на тему 4

Пример 1. Вычислить определенные интегралы:

$$\text{а) } \int_0^{\pi/4} \sin 2x dx, \text{ б) } \int_0^3 x\sqrt{1+x}dx.$$

Решение.

а) Воспользуемся таблицей интегралов и формулой Ньютона-Лейбница:

$$\int_0^{\pi/4} \sin 2x dx = \frac{1}{2}\cos 2x \Big|_0^{\pi/4} = \frac{1}{2}(\cos 2\cdot\frac{\pi}{4} - \cos 0) =$$

$$= \frac{1}{2}(\cos\frac{\pi}{2} - \cos 0) = \frac{1}{2}(0-1) = -\frac{1}{2}$$

а) Используем метод подстановки:

$$\int_0^3 x\sqrt{1+x}dx = \begin{bmatrix} \sqrt{1+x} = t, \\ x = t^2 - 1, \\ dx = 2tdt, \\ \text{если } x = 0, \text{ то } t = 1, \\ \text{если } x = 3, \text{ то } t = 2 \end{bmatrix} = \int_1^2 \; t^2 - 1 \;\; \cdot t \cdot 2tdt =$$

$$= 2\int_1^2 \; t^4 - t^2 \;\; dt = 2\left(\frac{t^5}{5} - \frac{t^3}{3}\right)\Bigg|_1^2 = 7\frac{11}{15}.$$

Пример 2. Вычислить несобственный интеграл $\int_0^\infty \; 3x^2 + 5 \;\; \cdot \sqrt{x^3 + 5x + 4}dx$ или установить его расходимость**.**

Решение.

Имеем несобственный интеграл 1-го рода.

Находим, что

$$\int_0^{\infty} (3x^2+5)\cdot\sqrt{x^3+5x+4}\,dx =$$

$$=\lim_{b\to\infty}\int_0^{b} (3x^2+5)\cdot\sqrt{x^3+5x+4}\,dx =$$

$$=\lim_{b\to\infty}\int_0^{b} (x^3+5x+4)^{1/2}\,d(x^3+5x+4) =$$

$$=\lim_{b\to\infty}\frac{2}{3}(x^3+5x+4)^{3/2}\Big|_0^b =$$

$$=\lim_{b\to\infty}\frac{2}{3}(b^3+5b+4)^{3/2}-\frac{16}{3}=+\infty,$$

следовательно интеграл расходится.

Ответ: интеграл расходится.

Пример 3. Исследовать на сходимость несобственные интегралы а) $\int_0^1\frac{dx}{e^x-1}$, б) $\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$.

Решение.

Имеем несобственные интегралы 2-го рода.

а) Подынтегральная функция $f(x)=\frac{1}{e^x-1}$ имеет на левом конце $a=0$ промежутка интегрирования особую точку.

Находим, что

$$\int\frac{dx}{e^x-1}=\int\frac{e^x dx}{1-e^x}=\int\frac{d(e^x-1)}{1-e^x}=-\ln\left|1-e^x\right|+C.$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{e^x-1} = \lim_{a\to 0}\int_{a+0}^1 \frac{dx}{e^x-1} = -\lim_{a\to 0}\ln\left|1-e^x\right|\Big|_{a+0}^{1} = \infty$$

и заданный интеграл расходится.

б) $x=1$ – особая точка.

Оценим сверху подынтегральное выражение:

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{1}{\sqrt{\underbrace{1+x^2}_{\ge 1}\quad 1-x\quad \underbrace{1+x}_{\ge 1}}} \le \frac{1}{\sqrt{1-x}}.$$

$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$ сходится $\left(\alpha = \frac{1}{2} < 1\right)$. Следовательно по теореме сравнения сходится и исследуемый интеграл.

Пример 4. Вычислить площадь фигуры ограниченной линиями $y=\frac{4}{x}$, $y=5-x$.

Решение.

Изобразим графики заданных функций (рис. 4.7):

Найдем точки пересечения данных функций. Для этого решим уравнение: $\frac{4}{x}=5-x$. Домножив обе части на x, получим $4=5x-x^2$, или $x^2-5x+4=0$. Корни полученного квадратного уравнения $x_1=1$, $x_2=4$. Таким образом, площадь заштрихованной фигуры:

$$S = \int_1^4 \left((5-x)-\frac{4}{x}\right)dx = 5x-\frac{x^2}{2}-4\ln x\Big|_1^4 =$$

$$= (20-8-4\ln 4)-(5-0{,}5-4\ln 1) =$$

$$= 12-4\ln 4-4{,}5 = 7{,}5-4\ln 4 \cong 1{,}955.$$

Ответ: 1,955 (кв. ед.).

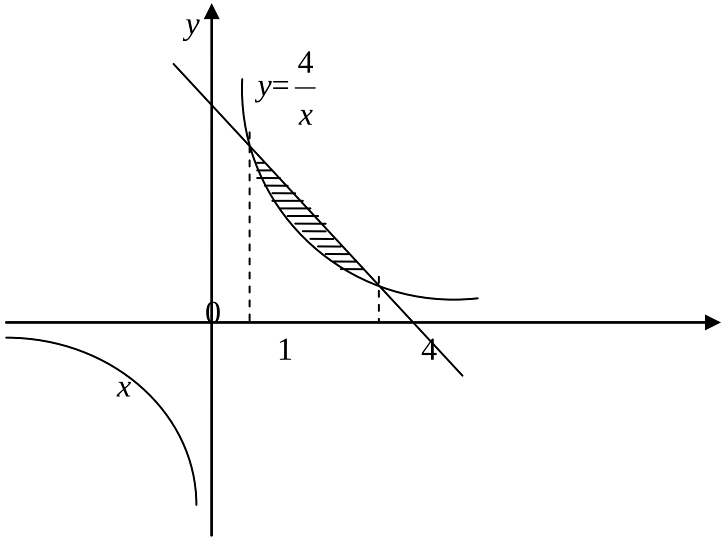

Рис. 4.7

Пример 5. Вычислить площадь фигуры ограниченной линиями $\rho = a\ \ 1+\cos(\varphi)\ \ $.

Решение.

Изобразим данную кривую в полярной системе координат (рис 4.8).

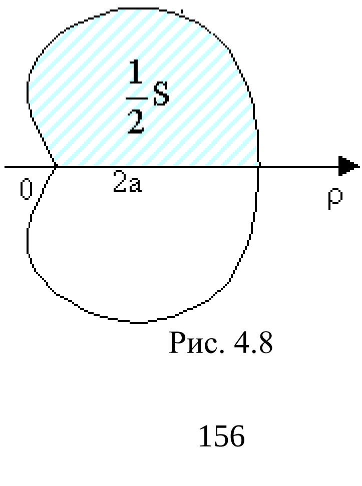

Рис. 4.8

Т.к. кардиоида симметрична, то

$$\frac{1}{2}S=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\rho^2 d\varphi=a^2\int_0^{\pi}(1+\cos\varphi)^2 d\varphi=\frac{1}{2}3\pi a^2\,(\text{кв.ед.}).$$

Ответ: $S=3\pi a^2$ (кв.ед.)

Пример 6. Найти длину дуги полукубической параболы $y=x^{3/2}$ от x=0 до x=5.

Решение.

Изобразим заданную кривую (рис. 4.9).

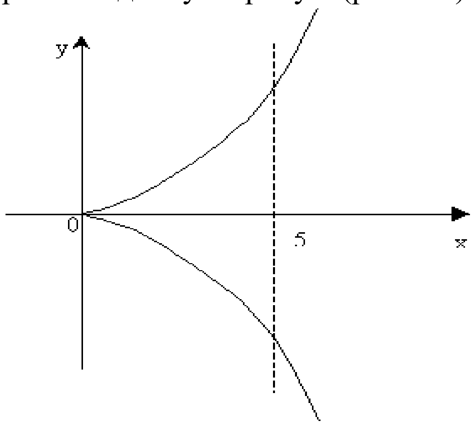

Рис. 4.9

Кривая симметрична относительно оси Ox. Найдем длину верхней ветви кривой. Из уравнения $y=x^{3/2}$ находим $y'=\frac{3}{2}x^{1/2}$. Таким образом,

$$\frac{1}{2}L=\int_0^5\sqrt{1+\frac{9x}{4}}dx=\frac{8}{27}\left(1+\frac{9x}{4}\right)^{3/2}\Bigg|_0^5=\frac{335}{27}\,(\text{ед.}).$$

Следовательно искомая длина $L=670/27\cong 24{,}8$.

Ответ: 24,8 ед.

Пример 7. Найти объем тела, образованного вращением эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ вокруг оси Ox.

Решение.

Поскольку эллипс симметричен относительно осей координат, то достаточно найти площадь половины искомого объема. Таким образом, по выражению (4.15)

$$\frac{1}{2}V=\pi\int_0^a y^2(x)dx=\pi\int_0^a b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx=\pi b^2\int_0^a dx-\frac{\pi b^2}{a^2}\int_0^a x^2dx$$

$$=\ \pi b^2x\Big|_0^a-\frac{\pi b^2x^3}{3a^2}\Bigg|_0^a=\ \frac{2}{3}\pi ab^2\ .$$

Следовательно $V=\frac{4}{3}\pi ab^2$.

Ответ: $\frac{4}{3}\pi ab^2$ ед. куб.

Пример 8. Найти путь, пройденный телом за 4 секунды от начала движения, если скорость тела $v(t)$ = *10t + 2* (м/с).

Решение.

Если $v(t)$ = 10t + 2 (м/с), то путь, пройденный телом от начала движения (t = 0) до конца 4-й секунды, согласно (4.21), равен:

$$\mathrm{S}=\ \int_0^4(10t+2)dt=5t^2\Bigg|_0^4+2t\Bigg|_0^4=80+8=88(м).$$

Ответ: 88 м.

Пример 9. Найти работу, которую нужно затратить, чтобы растянуть пружину на 0,05 м, если сила 100 Н растягивает пружину на 0,01 м

Решение.

По закону Гука упругая сила F, растягивающая пружину, пропорциональна этому растяжению x, т.е. $F = kx$, где k – коэффициент пропорциональности. По условию сила $F = 100$ Н растягивает пружину на $x = 0{,}01$ м, т.е. $100 = k \cdot 0{,}01 \Rightarrow k = 10000$. Тогда $F = kx = 10000x$.

Вычислим работу по выражению (4.20):

$$A = \int_0^{0,05} 10000x\,dx = 10000\frac{x^2}{2}\bigg|_0^{0,05} = 5000x^2\Big|_0^{0,05} =$$

$$= 5000 \cdot 0{,}05^2 = 12{,}5.$$

Ответ: 12,5 Дж.

Пример 10. Вычислить объём тела, образованного вращением вокруг оси ox фигуры, ограниченной линиями $y = x^2, y^2 = x$.

Решение.

Построим ограничивающие линии (рис.4.10):

$y = x^2$ – парабола с вершиной в точке $(0;0)$, симметрична относительно оси OY;

$x = y^2$ – парабола с вершиной в точке $(0;0)$, симметрична относительно оси OX.

$y = 4$ – прямая, параллельная оси OX; $x = 0$ – ось OY.

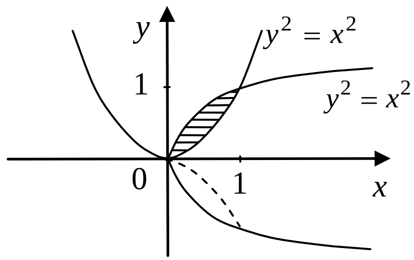

Рис. 4.10

При вращении криволинейной трапеции (рис.4.10) вокруг оси *OX* образуется тело вращения.

По условию фигура вращается вокруг оси *OX*. Тогда искомый объём равен разности двух объёмов: объёма V_{x1}, полученного от вращения вокруг оси *OX* фигуры, ограниченной линиями $y^2 = x, y = 0, x = 1,$ и объёма V_{x2}, полученного от вращения вокруг оси *OX* фигуры, ограниченной линиями $y = x^2, y = 0, x = 1$. Т.е. $V_x = V_{x1} - V_{x2}$.

Вычислим $V_{x1} = \pi \int_a^b f^2(x)dx$:

$$V_{x1} = \pi \int_0^1 xdx = \pi \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{\pi}{2} \text{ (ед}^3\text{.)}$$

Вычислим $V_{x2} = \pi \int_a^b f^2(x)dx$.

Для V_{x2}: $y = x^2$, т.е. $f(x) = x^2 \Rightarrow f^2(x) = x^4$. Тогда

$$V_{x2} = \pi \int_0^1 x^4 dx = \pi \frac{x^5}{5}\Big|_0^1 = \frac{\pi}{5} \text{ (ед}^3\text{.)}$$

Итого $V_x = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5} = \frac{5\pi - 2\pi}{10} = \frac{3\pi}{10}$.

Ответ: $\frac{3\pi}{10}$ (ед. куб.).

Пример 11. Найти площадь *S* поверхности, полученной вращением окружности $(x-a)^2 + y^2 = r^2, r < a$ вокруг оси y.

Решение.

Если вращать заданную окружность вокруг оси оу, то полученная поверхность называется тором.

Центр тяжести окружности совпадает с ее центром, т.е. $x_o = a$, а длина окружности $L = 2\pi r$. По теореме Гульдена

$S = 2\pi a \cdot 2\pi r = 4\pi^2 ar$.

Ответ: $4\pi^2 ar$ ед. кв.

Задачи для самостоятельной работы студентов

ЗАДАНИЕ 1

1. Используя теорему существования определенного интеграла, установить, существует ли определенный интеграл от данной функции по указанному промежутку:

а) $y(x)=\dfrac{3}{x^2+5x}$, $[0,1]$; б) $y(x)=\mathrm{tg}x$, $\left[0;\ \dfrac{\pi}{4}\right]$;

в) $y(x)=\dfrac{1}{x}$, $[2;\ +\infty)$.

2. Используя одно из свойств определенного интеграла, упростите вычисление интеграла $\int\limits_{-1}^{1}(2^x-2^{-x})dx$.

3. Не вычисляя, определить, какой из интегралов больше:

а) $\int\limits_{-1}^{1}e^x dx$ или $\int\limits_{0}^{1}e^x dx$; б) $\int\limits_{0}^{1}\dfrac{dx}{x^2+2}$ или $\int\limits_{0}^{1}\dfrac{dx}{x^2+1}$. Ответ обосновать.

4. Чему равны выражения: $\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(t)\cdot\cos mt\cdot dt$ и $\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(t)\cdot\sin mt\cdot dt$, если а) $f(t)$ – четная функция; б) нечетная функция?

5. Вычислить: а) $\int\limits_{1}^{8}\dfrac{7x\sqrt[3]{x}}{2}dx,$ б) $\int\limits_{-3}^{0}\dfrac{dt}{\sqrt{25+3t}}$, в) $\int\limits_{4}^{25}\dfrac{adt}{\sqrt{t}-1}$.

6. Вычислить $\int\limits_{0}^{\frac{2\pi}{3}}f(x)dx$, если

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x}{\pi^2}, & -\pi \le x < \dfrac{\pi}{3} \\ \dfrac{1}{\sin^2 \dfrac{x}{2}}, & \dfrac{\pi}{3} < x \le \pi \end{cases}.$$

7. Вычислить интегралы, или установить их расходимость:

а) $\int\limits_1^{+\infty} e^{-ax}dx$, $a > 0$, б) $\int\limits_0^{+\infty} \sin(2x + \frac{\pi}{2})dx$;

8. Построить фигуру, ограниченную линиями, и найти её площадь:

а) $y = \ln(x+1)$, $y = 2$, $x = 0$; б) $r = 2\varphi$, $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$.

9. Найти длину дуги кривой: а) $y = (1+x)^{\frac{3}{2}}$, $x \in -1;\ 4$;

б) $\begin{cases} x = \dfrac{t^6}{6} \\ y = 2 - \dfrac{t^4}{4} \end{cases}$, где $t \in \left[0, \sqrt[4]{8}\right]$.

10. Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси OY фигуры, ограниченной линиями: $y = \dfrac{4}{x}$, $y = 3$, $y = 12$ и осью OY.

11. Скорость точки изменятся по закону $v(t) = 3t^2 + 6t + 10$ м/с. Найти путь, пройденный точкой за 6 секунд от начала движения.

12. Определить давление воды на прямоугольный шлюз с основанием 18 м и высотой 6 м.

13. Вычислить работу, необходимую для растяжения пружины на 4 см, если известно, что от нагрузки в 1 Н она растягивается на 1 см.

14. Вычислить интеграл, рассматривая его как предел

интегральной суммы: $\int\limits_0^{10}(3x-1)dx$.

15. Оценить интеграл $\int\limits_{-2}^{2}\frac{dx}{1+x^4}$.

16. Исходя из геометрического смысла определенного интеграла, найти:

а) $\int\limits_0^4(\frac{x}{2}+1)dx$; б) $\int\limits_0^3\sqrt{9-x^2}\,dx$.

17. Исследовать сходимость интеграла $\int\limits_1^{+\infty}\frac{e^{-2x}}{x^2}dx$.

18. Вычислить:

а) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dz}{5-3\cos z}$, б) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x dx}{\sqrt[3]{\sin^2 x}}$, в) $\int\limits_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}}x\sqrt{1+x^2}\,dx$.

19. Найти длину пространственной кривой $x=at^2$, $y=a(t+\frac{1}{3}t^3)$, $z=a(t-\frac{1}{3}t^3)$, $t\in\left[0;\sqrt{3}\right]$.

20. Вычислить: а) $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1-x)\sin 3x dx$; б) $\int\limits_0^{\pi}t^2\cos t dt$.

ЗАДАНИЕ 2

1. Используя теорему существования определенного интеграла, установить, существует ли определенный интеграл от данной функции по указанному промежутку:

а) $y(x)=\frac{4}{3x^2-x}$, $[-1;0]$; б) $y(x)=\frac{1}{2x+1}$, $[1;+\infty)$;

в) $y(x)=\cos 2x$, $\left[-\frac{\pi}{2};0\right]$.

2. Используя одно из свойств определенного интеграла, упростите вычисление интеграла $\int\limits_{-\pi}^{\pi}(x-\sin x)dx$.

3. Не вычисляя, определить, какой из интегралов больше: а) $\int\limits_{1}^{2}\ln x dx$ или $\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}\ln x dx$; б) $\int\limits_{2}^{5}\frac{dx}{x+1}$ или $\int\limits_{2}^{5}\frac{dx}{x}$. Ответ обосновать.

4. Чему равны выражения: $\int\limits_{-\pi}^{\pi}F(t)\cdot\cos mt\cdot dt$ и $\int\limits_{-\pi}^{\pi}F(t)\cdot\sin mt\cdot dt$, если $F(t)$ – четная функция; нечетная функция?

5. Вычислить:

а) $\int\limits_{5}^{5\sqrt{3}}\frac{dx}{25+x^2}$, б) $\int\limits_{-1}^{0}e^{3x}\cdot dx$, в) $\int\limits_{0}^{1}(x^2-1)^7 x dx$, г) $\int\limits_{1}^{2}\frac{2^x dx}{1-4^x}$;

д) $\int\limits_{27}^{125}\frac{dt}{\sqrt[3]{t}-2}$; е) $\int\limits_{0}^{1}\frac{vdz}{z^2+4z+5}$; ж) $\int\limits_{-\pi}^{\pi}(3t+1)\sin\omega t\cdot dt$;

з) $\int\limits_{0}^{1}\arcsin x dx$.

6. Вычислить $\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}f(x)dx$, если $f(x) = \begin{cases} e^{3x}, & x\le 0 \\ \cos nx, & x>0 \end{cases}$.

7. Вычислить интегралы, или установить их расходимость:

а) $\int\limits_{0}^{+\infty}\cos(\pi-3x)dx$; б) $\int\limits_{-\infty}^{0}e^{ax}dx$, $a>0$.

8. Построить фигуру, ограниченную линиями, и найти

её площадь: а) $y = 1$, $y = 3$, $xy = a$, $x = 0$; б) $r^2 = 2a^2 \cos 2\phi$.

9. Найти длину дуги кривой:

а) $y^2 = \dfrac{4}{9}(2-x)^3, \quad x \in \ -1;0 \ $;

б) $\begin{cases} x = \cos t + t \sin t \\ y = \sin t - t \cos t \end{cases}$, где $t \in \ 0, T \ $.

10. Найти объем тела, ограниченного параболоидом вращения $x = 3(y^2 + z^2)$ и плоскостью $x = 2$.

11. Скорость тела изменятся по закону $v(t) = \sqrt{1+t}$ м/с. Найти путь, пройденный телом за 1час и 20 мин от начала движения. Чему равна средняя скорость движения тела за этот промежуток времени?

12. Материальная точка М движется по координатной прямой под действием силы, величина которой меняется пропорционально расстоянию точки от начала координат О. Известно, что направление силы совпадает с направлением оси, и, что она равнялась 1Н, когда расстояние МО было равно 3м. Вычислить работу этой силы по перемещению точки на расстояние 15 м от начала координат.

13. Вычислить интеграл $\int_1^{10} (1+x)dx$, рассматривая его как предел интегральной суммы.

14. Оценить интеграл $\int_0^1 \sqrt{9+x^3}\,dx$.

15. Исходя из геометрического смысла определенного интеграла, найти:

а) $\int_0^2 (4-2x)dx$; б) $\int_0^2 \sqrt{1-\dfrac{x^2}{4}}\,dx$.

16. Исследовать сходимость интеграла $\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{e^{3x}}{x^2+1} dx$.

17. Вычислить $\int\limits_{-\pi}^{0} e^x \sin x \cdot dx$.

18. Найти площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y = 2\sqrt{2-x}$ и касательной к графику функции $y = 1 + e^{-x}$ в точке (0;2).

19. Найти длину кардиоиды $r = a(1+\cos\phi)$.

20. Криволинейная трапеция, ограниченная линиями $y = xe^x$, x =1, y =0, вращается вокруг оси *OX*. Найти объем полученного тела.

21. Найти моменты инерции эллипса $\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 3\sin t \end{cases}$ относительно обеих его осей.

ЗАДАНИЕ 3

1. Используя теорему существования определенного интеграла, установить, существует ли определенный интеграл от данной функции по указанному промежутку:

а) $y(x) = \sin 5x,\ [2;+\infty)$; б) $y(x) = \frac{1}{x-1}, \quad [1;2]$;

в) $y(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$, $[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{4}]$.

2. Используя одно из свойств определенного интеграла, упростите вычисление интеграла $\int\limits_{-3}^{3}(x^5 - x)dx$.

3. Не вычисляя, определить, какой из интегралов

больше: а) $\int_1^3 (x^2-4)dx$ или $\int_2^3 (x^2-4)dx$; б) $\int_0^1 \frac{xdx}{x+1}$ или $\int_0^1 \frac{dx}{x+1}$. Ответ обосновать.

4. Чему равны выражения: $\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cdot\cos at\cdot dt$ и $\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cdot\sin bt\cdot dt$, если а) $f(t)$ – четная функция; б) нечетная функция?

5. Вычислить:

а) $\int_0^8 (\sqrt{2x}+\sqrt[3]{x})dx$, б) $\int_2^6 \sqrt{x-2}\cdot dx$, в) $\int_e^{e^2} \frac{dx}{x\ln x}$,

г) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{1+tgx}}{\cos^2 x}dx$; д) $\int_{-5}^{-1} \frac{kdt}{t^2+6t+13}$; е) $\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$;

ж) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x-1)\cos x\cdot dx$; з) $\int_1^9 \sqrt{x}\ln xdx$.

7. Вычислить $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} f(x)dx$, если

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3x}{\pi^2}, & \frac{\pi}{6} < x \le \pi \\ \frac{4}{\cos^2 x}, & -\pi < x \le \frac{\pi}{6} \end{cases}.$$

8. Вычислить интегралы, или установить их расходимость: а) $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x\ln^2 x}$; б) $\int_0^{\infty} x\cdot\sin x\cdot dx$.

9. Построить фигуру, ограниченную линиями и найти ее площадь:
а) $y = \sin x, \quad y = \cos x$, $x = 0$; б) $r = a(1-\cos\phi)$.
10. Найти длину дуги линии:
а) $y = \ln(1-x^2), \quad x \in [0; \frac{1}{2}]$; б) $\begin{cases} x = \frac{1}{3}t^3 - t, \\ y = t^2 + 2, \end{cases} \quad t \in [0; 3]$.
11. Найти объем тела, полученного вращением эллипса $4x^2 + 9y^2 = 36$ вокруг его малой оси.
12. Найти массу стержня длинною 100 м, если линейная плотность ρ меняется по закону $\rho(x) = (20x + 0{,}15x^2)$ г/см, где x – расстояние от одного из концов стержня.
13. Найти силу, с которой жидкость удельного веса γ давит на вертикальную стенку, имеющую форму полуэллипса, большая ось которого находится на поверхности жидкости. Большая полуось эллипса a, малая ось b.
14. Пружина в спокойном состоянии имеет длину 0,2 м. Сила в 50 Н растягивает ее на 0,01 м. Какую работу нужно совершить, чтобы растянуть пружину от длины 0,22 м до длины 0,32 м?
15. Вычислить интеграл $\int\limits_0^{10}(2x-1)dx$, рассматривая его как предел интегральной суммы.
16. Оценить интеграл $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x \cdot \sin^6 x \cdot dx$.
17. Исходя из геометрического смысла определенного интеграла, найти: а) $\int\limits_0^1 \frac{6-3x}{2}dx$; б) $\int\limits_{-4}^{0}\sqrt{16-x^2}\,dx$.

18. Исследовать сходимость интеграла $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2+1} dx$.

19. Вычислить $\int\limits_0^{\pi} e^{2x} \cos x \cdot dx$.

20. При каком a площадь, ограниченная линиями $y = \frac{3|x|+x}{2}$ и $y = ax^2$, равна $\frac{3}{32}$?

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №2

Студентам заочной формы обучения для успешного освоения теоретических основ и приобретения практических навыков решения задач по темам 1 и 2 рекомендуется решить по одной задаче с каждого задания. Студентам дневной формы обучения – меньшее количество, на усмотрение преподавателя.

Задание 1. Найти неопределенный интеграл, используя замену переменной

1.1. **а)** $\int \frac{dx}{2\cos^2 3x}$, **б)** $\int \sin(1-x^2)xdx$, **в)** $\int \frac{dx}{2x-1}$

1.2. **а)** $\int \left(\frac{15}{\sqrt{4-x^2}} \right) dx$, **б)** $\int e^x (e^x+2)^9 dx$, **в)** $\int \frac{2^x}{1-2^x} dx$

1.3. **а)** $\int \left(\frac{5}{\sqrt{4-x^2}} \right) dx$, **б)** $\int e^x (e^x+2)^3 dx$, **в)** $\int \frac{3x^2}{5x-1} dx$

1.4. **а)** $\int \frac{e^{2x}dx}{e^x-2}$, **б)** $\int \frac{tg^3 x-3}{\cos^2 x} dx$, **в)** $\int \cos(2x+5)dx$

1.5. **а)** $\int \frac{dx}{2\sin^2 2x}$, **б)** $\int \frac{e^{tgx}-6}{3\cos^2 x} dx$, **в)** $\int \sin(1+x^2)xdx$

1.6. **а)** $\int \frac{3^{x+1}-4^{x-1}}{12^x} dx$, **б)** $\int \frac{2}{1-3x} dx$, **в)** $\int \sqrt[4]{2x-5}dx$

1.7. **а)** $\int (\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+x+1)dx$, **б)** $\int \frac{4}{10-7x} dx$, **в)** $\int \frac{dx}{x(1+\ln^2 x)}$

1.8. **а)** $\int \frac{dx}{x\cos^2 \ln x}$, **б)** $\int \frac{dx}{6-7x}$, **в)** $\int \frac{x^2dx}{(x^3+1)^2}$

1.9. **а)** $\int \frac{2^{x+1}-5^{x-1}}{10^x}dx$, **б)** $\int \sqrt[3]{5+6x}dx$, **в)** $\int \cos(2x+5)dx$

1.10. **а)** $\int \frac{dx}{5\sin^2 6x}$, **б)** $\int \cos(7-3x^2)xdx$, **в)** $\int \frac{dx}{8x+9}$

1.11. **а)** $\int \cos\frac{1}{x}\cdot\frac{dx}{x^2}$, **б)** $\int \frac{ctg(x+1)dx}{\sin^2(x+1)}$, **в)** $\int \frac{e^{tgx}}{\cos^2 x}dx$

1.12. **а)** $\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^4}}$, **б)** $\int \frac{\sin xdx}{1-3\cos x}$, **в)** $\int \frac{cos^4 2x-3}{\cos^2 2x}dx$

1.13. **а)** $\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^4}}$, **б)** $\int \frac{\sin xdx}{\cos x+3}$, **в)** $\int (2\sin^2 4x-5e^{6x})dx$

1.14. **а)** $\int \frac{dx}{2-5x}$, **б)** $\int \frac{2-4x}{\sqrt{1-3x^2}}dx$, **в)** $\int \frac{(\arccos x)^4 dx}{\sqrt{1-x^2}}$

1.15. **а)** $\int \cos\frac{1}{x}\cdot\frac{dx}{x^2}$, **б)** $\int (2ctg2x-7x^9)dx$,
в) $\int \frac{ctg(x+17)}{\sin^2(x+17)}dx$

1.16. **а)** $\int \frac{\sin xdx}{4+\cos^2 x}$, **б)** $\int \frac{3x}{\sqrt{1-x^4}}dx$, **в)** $\int \frac{x^3dx}{1+x^4}$

1.17. **а)** $\int e^{5x-2}dx$, **б)** $\int \frac{5x}{\sqrt{3-2x^4}}dx$, **в)** $\int \frac{\sin 5xdx}{1-\cos 5x}$

1.18. **а)** $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{3x-2}}$, **б)** $\int (\sin 2x-2\cos 5x+1)dx$,
в) $\int \frac{8x-arctg2x}{1+4x^2}dx$

1.19. **а)** $\int \frac{\cos xdx}{4+\sin^2 x}$, **б)** $\int \frac{xdx}{1-x^2}$, **в)** $\int \frac{(\arccos x)^4 dx}{\sqrt{1-x^2}}$

1.20. **а)** $\int \sin\frac{2}{x}\cdot\frac{dx}{x^2}$, **б)** $\int \frac{tg(x+6)dx}{4\cos^2(x+6)}$, **в)** $\int \frac{e^{-tgx}-6}{4\sin^2 x}dx$

Задание 2. Найти неопределенный интеграл, используя замену переменной

2.1. а) $\int \frac{x+1}{6x^2+5}dx$, **б)** $\int \frac{2^x-3^{x+1}}{6^{x-1}}dx$,

в) $\int (\cos^2 4x - 3\sin^2 bx)dx$

2.2. а) $\int tg(3x-1)dx$, **б)** $\int \frac{dx}{x^2+6x+11}$, **в)** $\int \frac{x^3-2\ln x}{x}dx$

2.3. а) $\int tg(2x+5)dx$, **б)** $\int \frac{6+4x^2-\sin 3x}{\sin 3x(3+2x^2)}dx$, **в)** $\int \frac{3ctgx}{\sin^2 x}dx$

2.4. а) $\int \frac{x+e^{arctgx}}{1+x^2}dx$, **б)** $\int \frac{3\sqrt{2+x^2}-8x}{x^2+2}dx$, **в)** $\int \frac{x^3+x}{x^4+1}dx$

2.5. а) $\int \frac{x-1}{3x^2+5}dx$, **б)** $\int \frac{\cos 2xdx}{\cos^2 x}$, **в)** $\int \frac{e^x dx}{1+e^{2x}}$

2.6. а) $\int x^2 e^{x^3}dx$, **б)** $\int \frac{3x^3 dx}{\cos^2(x^4-2)}$, **в)** $\int \frac{3\sin x - \cos^3 x}{2\cos x}dx$

2.7. а) $\int \frac{2^x dx}{\sqrt{3+2^{2x}}}$, **б)** $\int x^2\cos(2-5x^3)dx$, **в)** $\int \sqrt[7]{4x-5}dx$

2.8. а) $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{9+x^8}}$, **б)** $\int \frac{4\cos x - \sin^3 x}{7\sin x}dx$, **в)** $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+6x+5}}$

2.9. а) $\int x^2 e^{x^3}dx$, **б)** $\int \frac{\sin 2xdx}{4+\cos 2x}$, **в)** $\int \frac{x^3+x}{x^4+1}dx$

2.10. а) $\int \frac{x-7}{3x^2-8}dx$, **б)** $\int \frac{2^{x+1}-3^{x-1}}{6^{x-1}}dx$,

в) $\int (7\cos^2 4x + 13\sin^2 7x)dx$

2.11. а) $\int \frac{dx}{x(4-\ln^2 x)}$, **б)** $\int \frac{\cos 2xdx}{\sin x + \cos x}$, **в)** $\int tg3xdx$

2.12. а) $\int \frac{1+4x^2-e^{-3x}}{2e^{-3x}(4x^2+1)}dx$, **б)** $\int \frac{5x-x^3}{2x^4+1}dx$, **в)** $\int \frac{4dx}{1-3x}$

2.13. а) $\int \frac{\cos(tgx)}{\cos^2 x}dx$, **б)** $\int \frac{x^3+3x}{4x^4-3}dx$, **в)** $\int \frac{3^{x-1}+4^{x-2}}{12^x}dx$

2.14. а) $\int \frac{2^{3x}-3\cos^2 5x}{4}dx$, **б)** $\int \frac{\sin 2xdx}{4+\cos^2 x}$,

в) $\int \frac{dx}{\sin^2 x\sqrt{9-4ctg^2 x}}$

2.15. а) $\int \frac{dx}{x(1+9\ln^2 x)}$, **б)** $\int \frac{\sqrt{3-5x^2}-8x}{(3-5x^2)}dx$,

в) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+3}}$

2.16. а) $\int \frac{e^x dx}{e^x+3}$, **б)** $\int \frac{3-5tg^3 x}{4\cos^2 x}dx$, **в)** $\int \frac{2\sqrt{1+3x^2}-x}{3x^2+1}dx$

2.17. а) $\int \frac{\cos xdx}{9\sin^2 x-5}$, **б)** $\int \frac{7+5tg^4 x}{6\cos^2 x}dx$, **в)** $\int \frac{4\sqrt{1-5x^2}+2x}{5x^2-1}dx$

2.18. а) $\int \frac{4^x \sin^4 x-3\cdot 4^{x+1}}{4^{x-1}\sin^2 x}dx$, **б)** $\int \cos 2x\cdot e^{3\sin 2x}dx$,

в) $\int \frac{e^x dx}{2-e^x}$

2.19.а) $\int \frac{2x^2 dx}{\sin^2(8x^3-7)}$, **б)** $\int \frac{e^x dx}{(e^x+1)^3}$, **в)** $\int \frac{4\sin x+\cos^3 x}{3\cos x}dx$

2.20. а) $\int \frac{7dx}{x(9+\ln^2 x)}$, **б)** $\int \frac{3\cos 2xdx}{\sin x-\cos x}$, **в)** $\int -tg8xdx$

Задание 3. Найти неопределенный интеграл, используя формулу интегрирования по частям

3.1. а) $\int (x-3)\cos 2x dx$, **б)** $\int (x^2-3x+1)e^{-2x}dx$

3.2. а) $\int (5x-3)e^{6x}dx$, **б)** $\int (x^2+2x-1)\cos 2x dx$

3.3. а) $\int (6x-2)e^{5x}dx$, **б)** $\int (x^2+3x+1)\sin 2x dx$

3.4. а) $\int (1-3x)e^{-2x}dx$, **б)** $\int (x^2-3x+2)\sin x dx$

3.5. а) $\int (x^2-5x)e^{-x}dx$, **б)** $\int \frac{\ln^2 x-2}{x^3}dx$

3.6. а) $\int (x^2-2x+3)\cos 2x dx$, **б)** $\int (x^2 arctgx-5x^7)dx$

3.7. а) $\int x\sin^2 x dx$, **б)** $\int (1-6x^2)e^{2x}dx$

3.8. а) $\int (x+5)\cos 2x dx$, **б)** $\int (x^{10}-3)\ln^2 x dx$

3.9. а) $\int (x^2+1)\cos 3x dx$, **б)** $\int \arcsin^2 x dx$

3.10. а) $\int (x^2+2x-9)e^{-3x}dx$, **б)** $\int (8x+2)\sin 4x dx$

3.11. а) $\int x^2\ln(1-x^2)dx$, **б)** $\int (arcctgx-3x^3)dx$

3.12. а) $\int \frac{\ln^2 x}{\sqrt{x}}dx$, **б)** $\int (x\arcsin x-2)dx$

3.13. а) $\int \frac{2-xarctgx}{x}dx$, **б)** $\int \frac{\ln^2 x}{\sqrt{x^3}}dx$

3.14. а) $\int \frac{2x^3-\arccos x}{5}dx$, **б)** $\int (x^2+1)\ln x dx$

3.15. а) $\int (3x-5)\sin^2 5x dx$, **б)** $\int \frac{2x^3-\arcsin 2x}{3}dx$

3.16. а) $\int \frac{11-5\ln^2 x}{\sqrt{x}}dx$, **б)** $\int (2x+5)e^{2x}dx$

3.17. а) $\int (6\arcsin 2x-4x^5)dx$, **б)** $\int \ln(x^2+4)dx$

3.18. а) $\int (3x\cdot \mathrm{arcctg}x+6x^4)dx$, **б)** $\int (x^2+3x-1)e^{-\frac{x}{2}}dx$

3.19. а) $\int (x^2+1)\ln x dx$, **б)** $\int (5x-2)e^{3x}dx$

3.20. а) $\int x^2\ln(1-x)dx$, **б)** $\int x(arcctgx+5x^3)dx$

Задание 4. Найти неопределенный интеграл дробно-рационального выражения

4.1.а) $\int \frac{x^4dx}{x^4+6x^2+8}$, **б)** $\int \frac{x^2-6x+1}{1-x^4}dx$

4.2.а) $\int \frac{x^3+3x^2-3x+1}{x^3+x^2+x+1}dx$, **б)** $\int \frac{(x^2-3)dx}{x^4+5x^2+6}$

4.3.а) $\int \frac{x^3+3x^2-3x+1}{x^3+x^2+x+1}dx$, **б)** $\int \frac{x^3-2x}{x^4+3x^2+2}dx$

4.4.а) $\int \frac{(x^2-3x)dx}{x^3+x^2+3x+3}$, **б)** $\int \frac{(3x+27)dx}{x^3+6x^2+9x}$

4.5.а) $\int \frac{x^6-6x+1}{x^4-1}dx$, **б)** $\int \frac{x^4dx}{x^4+5x^2+6}$

4.6.а) $\int \frac{(x-4)dx}{x^3-3x^2+2x-6}$, **б)** $\int \frac{(x+4)dx}{(x^2+1)(x^2+2x+2)}$

4.7.а) $\int \frac{x^5-x^4+8}{x^3+4x}dx$, **б)** $\int \frac{xdx}{x^3-1}$

4.8.а) $\int \frac{5-2x^2}{x^3+x^2+2x+2}dx$, **б)** $\int \frac{(3x-5)dx}{x^3-4x^2+3x}$

4.9.а) $\int \frac{5x^3+2}{x^3-5x^2+4x}dx$, **б)** $\int \frac{dx}{x^3+2x^2+4x+8}$

4.10.а) $\int \frac{x^4dx}{x^4+5x^2+4}$, **б)** $\int \frac{x^2+6x}{81-x^4}dx$

4.11.а) $\int \frac{x^4+16}{x^5-4x^3}dx$, **б)** $\int \frac{6x^2+8x+18}{x^3+8x^2+19x+20}dx$

4.12.а) $\int \frac{2x^4-1}{x^5-4x^3}dx$, **б)** $\int \frac{xdx}{1-x^3}$

4.13.а) $\int \frac{3x^4-4}{x^5-9x^3}dx$, **б)** $\int \frac{xdx}{8-x^3}$

4.14.а) $\int \frac{x^5+5x^3+2x^2+6x-5}{x^4+5x^2+6}dx$, **б)** $\int \frac{xdx}{1-x^3}$

4.15.а) $\int \frac{x^4+16}{4x^3-x^5}dx$, **б)** $\int \frac{(2x^3-x+4)dx}{x^4-x^3+4x^2-4x}$

4.16.а) $\int \frac{x^6 dx}{x^3-1}$, **б)** $\int \frac{x^2-6x+1}{1-x^4}dx$

4.17.а) $\int \frac{3x^2+8}{x^3+4x^2+4x}dx$, **б)** $\int \frac{5-2x^2}{x^3+x^2+2x+2}dx$

4.18.а) $\int \frac{x^4 dx}{x^4+5x^2+4}$, **б)** $\int \frac{dx}{x^2-x+1}$

4.19.а) $\int \frac{(x^2-x+1)dx}{x^4+2x^2-3}$, **б)** $\int \frac{xdx}{x^3-27}$

4.20.а) $\int \frac{x^4+6}{x^5-9x^3}dx$, **б)** $\int \frac{6x^2+8x+18}{x^3+8x^2+19x+20}dx$

Задание 5. Найти неопределенный интеграл иррационального бинома

5.1. $\int \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt[3]{x^2}}dx$

5.2. $\int \frac{\sqrt[4]{x-1}dx}{x-1+\sqrt[12]{(x-1)^{11}}}$

5.3. $\int \frac{dx}{\sqrt{x-3}(2+\sqrt[3]{x-3})}$

5.4. $\int \frac{dx}{\sqrt{2-x}(9+\sqrt[3]{2-x})}$

5.5. $\int \frac{\sqrt{x}dx}{x-\sqrt[3]{x^2}}$

5.6. $\int \frac{\sqrt{x}dx}{8-\sqrt[4]{x^3}}$

5.7. $\int \frac{\sqrt{2x-3}dx}{\sqrt[3]{(2x-3)^2}-\sqrt[4]{((2x-3)}}$

5.8. $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}$

5.9. $\int \frac{(1+\sqrt{x})dx}{\sqrt[6]{x^5}(1+\sqrt[3]{x}}$

5.10. $\int \frac{\sqrt{x+1}}{1+x+\sqrt[3]{(x+1)^2}}dx$

5.11. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+3}}$

5.12. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(2+\sqrt[3]{x})}$

5.13. $\int \frac{\sqrt[4]{x}dx}{x+\sqrt[12]{x^{11}}}$

5.14. $\int \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt[4]{x^3}-8}$

5.15. $\int x\sqrt{x+3}dx$

5.16. $\int \frac{(1+\sqrt{2x-1})dx}{\sqrt[6]{(2x-1)^5}(1+\sqrt[3]{2x-1}}$

5.17. $\int \frac{4+\sqrt{x}}{x-9\sqrt[3]{x}}dx$

5.18. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt[4]{x^3})}$

5.19. $\int \frac{\sqrt{x+5}dx}{8-\sqrt{(x+5)^3}}$

5.20. $\int \frac{2dx}{x\sqrt{x^2+5}}$

Задание 6. Найти неопределенный интеграл тригонометрического выражения

6.1 $\int \frac{dx}{9-10\sin^2 x}$.

6.2. $\int \frac{dx}{3-7\cos x}$

6.3. $\int \frac{dx}{3+2\cos x}$

6.4. $\int \frac{dx}{3-7\cos x}$

6.5. $\int \frac{dx}{\cos x+\sin x}$

6.6. $\int \frac{dx}{\sin^4 x}$

6.7. $\int \frac{\cos^3 x dx}{\sin x+5}$

6.8. $\int \frac{dx}{4+5\cos^2 2x}$

6.9. $\int \frac{\sin^5 x dx}{2-\sin^2 x}$

6.10. $\int \frac{dx}{10-9\sin^2 x}$

6.11. $\int \frac{dx}{2\sin x+3\cos x+2}$

6.12. $\int \frac{dx}{\cos^2 x+4\sin^2 x}$

6.13. $\int \frac{dx}{4\cos^2 x + \sin^2 x}$

6.14. $\int \sin^7 x dx$

6.15. $\int \frac{dx}{10 - 9\sin^2 x}$

6.16. $\int \frac{\cos^5 x dx}{1 - \cos x}$

6.17. $\int \frac{dx}{7 - 4\sin x + 5\cos x}$

6.18. $\int \frac{dx}{3 + \cos x}$

6.19. $\int \frac{dx}{\cos^4 x}$

6.20. $\int \frac{dx}{2\cos x + 3\sin x + 2}$

Задание 7. Найти неопределенный интеграл, используя различные методы интегрирования

7.1.а) $\int (x^3 - 1)\ln^2 x dx$, **б)** $\int ctg^3 2x dx$, **в)** $\int \arcsin\sqrt{1 - 9x^2} dx$

7.2.а) $\int \frac{x+5}{x^4+2} dx$, **б)** $\int \frac{2\cos 3x - 1}{\sin 3x - \cos 3x} dx$, **в)** $\int \cos^4 x \sin^2 x dx$

7.3.а) $\int \frac{\sqrt{x^5} dx}{(2 - 3x^2)^2}$, **б)** $\int \frac{7e^{5x} dx}{3 - 2e^{5x}}$, **в)** $\int \frac{3\cos 2x - 2}{\sin 2x - \cos 2x} dx$

7.4.а) $\int (x^3 + 2)\ln^2 x dx$, **б)** $\int \frac{\sin 2x + 4}{(1 - \sin 2x)^2} dx$,

в) $\int \frac{x^2 dx}{(x^2 + 5x - 7)^{3/2}}$

7.5.а) $\int \frac{\sqrt{5x^2 - 3}}{x^2} dx$, **б)** $\int x^2 \ln(x^2 + 1) dx$,

в) $\int \arcsin\sqrt{1 - 4x^2} dx$

7.6.а) $\int \frac{2dx}{x^2\sqrt{4x - 1}}$, **б)** $\int \sin^2 x \cos^4 x dx$, **в)** $\int \frac{e^{-2x}\cos^2 x dx}{10}$

7.7.а) $\int (x^2 + 5x) arctg 9x dx$, **б)** $\int \frac{(1 - 2x)dx}{\sqrt{x^2 - 2x + 4}}$,

в) $\int \frac{x\arcsin x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}dx$

7.8. а) $\int \frac{\sin^4 3x+5}{\sin^3 3x}dx$, **б)** $\int \left(x^2+\frac{4}{x}\right)\sqrt{6x^2+1}dx$,

в) $\int \frac{dx}{\sqrt{15+4x-x^2}}$

7.9. а) $\int \frac{e^{3x}\sin^2 xdx}{27}$, **б)** $\int \cos^2 x\cdot\sin^4 x\cdot dx$,

в) $\int \frac{3x+arctg6x}{x^2}dx$

7.10.а) $\int (x^3-1)\ln^2 xdx$, **б)** $\int tg^3 2xdx$, **в)** $\int \arccos\sqrt{1-9x^2}dx$

7.11. а) $\int \frac{\sin^3 xdx}{3+\cos x}$, **б)** $\int \frac{x+1}{x^4+5}dx$, **в)** $\int \frac{e^x\sqrt{arctge^x}}{1+e^{2x}}dx$

7.12.а) $\int \frac{\cos x+1}{x+\sin x}dx$, **б)** $\int \cos x\sqrt[3]{1-2\sin x}dx$, **в)** $\int \frac{\sqrt{x^3}dx}{(7-4x^2)^2}$

7.13. а) $\int \sqrt{1+3\sin x}\cos xdx$, **б)** $\int \frac{dx}{\cos x\sin^3 x}$,

в) $\int \frac{1-\cos x}{x-\sin x}dx$

7.14.а) $\int \frac{\arcsin\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}}dx$, **б)** $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^4-x^2-1}}$, **в)** $\int \frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x}$

7.15. а) $\int \frac{xdx}{\cos^2 x}$, **б)** $\int e^{2x}\cos xdx$, **в)** $\int \sin^4 x\cos^2 xdx$

7.16. а) $\int \frac{\ln tgxdx}{\cos^2 x}$, **б)** $\int \frac{xdx}{\sqrt{12-3x-2x^2}}$, **в)** $\int \frac{x-\cos x}{x^2-2\sin x}dx$

7.17. а) $\int \frac{1+tg^2 x}{(4+tg^2 x)tgx}dx$, **б)** $\int e^{5x}\cos^3 xdx$, **в)** $\int \frac{\sin xdx}{\sqrt[4]{\cos^5 x}}$

7.18. а) $\int \frac{dx}{\sin x}$, **б)** $\int (x^3+1)\cos 2x dx$, **в)** $\int x^3 \ln(x^4+2)dx$

7.19. а) $\int \frac{\ln ctgx}{\sin^2 x}dx$, **б)** $\int \frac{\sqrt{3x^2-4}}{x^2}dx$, **в)** $\int \frac{xdx}{\sqrt{14-6x-3x^2}}$

7.20. а) $\int \frac{\sin^3 xdx}{3+\cos x}$, **б)** $\int \frac{x+8}{x^4+7}dx$, **в)** $\int \frac{e^x\sqrt{arctge^x}}{1+e^{2x}}dx$

Задание 8. Вычислить определенный интеграл, используя формулу Ньютона-Лейбница:

8.1. а) $\int_1^8 \frac{7x\sqrt[3]{x}}{2}dx,$

б) $\int_{-3}^0 \frac{dt}{\sqrt{25+3t}}$,

в) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1-x)\sin 3xdx$;

г) $\int_0^{\pi} t^2 \cos tdt$.

8.2. а) $\int_5^{5\sqrt{3}} \frac{dx}{25+x^2},$

б) $\int_{-1}^0 e^{3x}\cdot dx$,

в) $\int_{-\pi}^{\pi} (3t+1)\sin \omega t \cdot dt$;

г) $\int_0^1 \arcsin xdx$.

8.3. а) $\int_0^8 (\sqrt{2x}+\sqrt[3]{x})dx,$

б) $\int_2^6 \sqrt{x-2}\cdot dx$,

в) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x-1)\cos x \cdot dx$;

г) $\int_1^9 \sqrt{x}\ln xdx$.

8.4. а) $\int_4^{4\sqrt{3}} \frac{dx}{16+x^2},$

б) $\int_0^1 e^{2x}dx$,

в) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (2t-1)\cos at \cdot dt$, ;

г) $\int_1^e (x\ln x)^2 dx$.

8.5. а) $\int_1^4 \frac{1+\sqrt{y}}{y^2}dy$,

б) $\int_{-2}^{5} \sqrt[3]{5x+2}\cdot dx$,

в) $\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} (2-x)\sin 3x dx$,

г) $\int_1^e x^2 \ln x\cdot dx$.

8.6. а) $\int_1^2 \frac{(x^3+5x)}{2x}dx$,

б) $\int_1^e \frac{\ln(3x+5)}{3x+5}dx$,

в) $\int_1^9 \sqrt{x}\ln x\cdot dx$;

г) $\int_0^\pi x^2\cos kx\cdot dx$, $k\in \mathrm{Z}$.

8.7. а) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin 15x-\cos 3x)dx$,

б) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{xdx}{\cos^2 x^2}$,

в) $\int_{-a}^{a} x\cos\frac{x}{a}dx$;

г) $\int_1^e \omega\ln^2 t\cdot dt$.

8.8. а) $\int_0^4 (1+e^{\frac{x}{4}})dx$,

б) $\int_{-1}^{7} \frac{dt}{\sqrt{3t+4}}$,

в) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\mathrm{z}-7)\cos az\cdot dz$, $a\in Z$

г) $\int_1^e \omega^2(1+\ln x)^2 dx$.

8.9. а) $\int_1^2 \frac{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[4]{x^3}}{\sqrt{x}}dx$,

б) $\int_0^\pi (1+4\sin x)\cos x dx$,

в) $\int_0^\pi x^2\cos kx dx$, $k\in Z$;

г) $\int_0^1 \mathrm{z}\cdot \mathrm{arctg}2p dp$.

8.10. а) $\int_2^4 \sqrt[3]{x}(2+\sqrt{x})dx$,

б) $\int_2^3 \frac{dt}{4-5t}$,

в) $\int_0^3 \arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}dx$,

г) $\int_0^\pi \omega^2 x^3\sin x\cdot dx$.

8.11. а) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x dx}{\sqrt[3]{\sin^2 x}}$,

б) $\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} x\sqrt{1+x^2}dx$;

в) $\int_4^{25} \frac{adt}{\sqrt{t}-1}$;

г) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dz}{5-3\cos z}$;

8.12. а) $\int_0^1 (x^2-1)^7 xdx$,

б) $\int_1^2 \frac{2^x dx}{1-4^x}$;

в) $\int_{27}^{125} \frac{dt}{\sqrt[3]{t}-2}$;

г) $\int_0^1 \frac{vdz}{z^2+4z+5}$;

8.13. а) $\int_e^{e^2} \frac{dx}{x\ln x}$,

б) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{1+tgx}}{\cos^2 x}dx$:

в) $\int_{-5}^{-1} \frac{kdt}{t^2+6t+13}$;

г) $\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$;

8.14. а) $\int_{-1}^0 (t^2-1)^8 tdt$,

б) $\int_0^1 \frac{e^x dx}{1+e^{2x}}$;

в) $\int_0^1 \frac{wdt}{t^2+6t+10}$;

г) $\int_0^{81} \frac{dz}{\sqrt[4]{z}-4}$;

8.15. а) $\int_{-1}^0 \frac{x^2 dx}{1-4x}$;

б) $\int_2^3 \frac{2x-1}{x^2-4x+5}dx$,

в) $\int_1^3 \frac{\sqrt{x}dx}{x+1}$,

г) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{a\cdot dt}{3+2\cdot\cos t}$,

8.16. а) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{\sqrt{4-5t}}$;

б) $\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x-1}\cdot dx$

в) $\int_0^1 \frac{\sin a\cdot dx}{4x^2+4x+5}$;

г) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dz}{2+\cos z}$;

8.17. а) $\int\limits_{1}^{2}\frac{dt}{t^2+4t+5}$;

б) $\int\limits_{-3}^{-2}\frac{tdt}{\sqrt{t^2-1}}$;

в) $\int\limits_{0}^{2}\frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{(x+1)^3}}$;

г) $\int\limits_{\ln 2}^{\ln 3}\frac{dx}{e^x-e^{-x}}$

8.18. а) $\int\limits_{0}^{1}\frac{dz}{(2z+1)^3}$,

б) $\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sin^2\frac{x}{2}\cdot dx$,

в) $\int\limits_{1}^{6}\frac{tdt}{\sqrt{t+3}}$,

г) $\int\limits_{1}^{e}\frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}dx$,

8.19. а) $\int\limits_{1}^{e}\frac{\ln^3 t}{t}dt$;

б) $\int\limits_{3}^{29}\frac{\sqrt[3]{(x-2)^2}dx}{\sqrt[3]{(x-2)^2}+3}$;

в) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}e^{\sin 3x}\cos 3xdx$;

г) $\int\limits_{-2}^{0}\frac{dt}{\sqrt{t^2+2t+9}}$

8.20. а) $\int\limits_{2e}^{3e}\frac{dz}{z\ln^2 z}$,

б) $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\sin xdx}{1-2\cos x}$,

в) $\int\limits_{-a}^{a}x^2\sqrt{a^2-x^2}dx$,

г) $\int\limits_{1}^{2}\frac{dz}{z^2-4z+6}$.

Задание 9. Вычислить интегралы, или установить их расходимость:

9.1. $\int_{1}^{+\infty} e^{-ax}dx$**,** $\boldsymbol{a}$**> 0,**

9.2. $\int_{0}^{+\infty} \cos(\pi - 3x)dx;$

9.3. $\int_{2}^{+\infty} \frac{dx}{x\ln^2 x};$

9.4. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{arctg}^2 x}{x^2+1}dx;$

9.5. $\int_{1}^{\infty} \frac{\ln x}{x}dx$

9.6. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+4x+9}$

9.7. $\int_{0}^{+\infty} x\cos 2x dx$

9.8. $\int_{3}^{+\infty} \frac{2x-3}{x^2-3x+2}dx$

9.9. $\int_{0}^{+\infty} \frac{1+x}{1+x^2}dx$

9.10. $\int_{\pi}^{+\infty} arctgx dx$

9.11. $\int_{0}^{+\infty} \sin(2x+\frac{\pi}{2})dx;$

9.12. $\int_{-\infty}^{0} e^{ax}dx$**,** a> 0**.**

9.13. $\int_{0}^{\infty} x\cdot\sin x\cdot dx$

9.14. $\int_{2}^{+\infty} \frac{dx}{x\ln x}$**,** a> 0**.**

9.15. $\int_{\frac{x}{4}}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)\cdot arctgx}$

9.16. $\int_{e}^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$

9.17. $\int_{1}^{+\infty} xe^{-x^2}dx$

9.18. $\int_{1}^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2}dx$

9.19. $\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x)x^2}$

9.20. $\int_{0}^{+\infty} e^{-\sqrt{x}}dx$

Задание 10. Построить фигуру, ограниченную линиями, и найти ее площадь:

10.1. а) $y = \ln(x+1)$, $y = 2$, $x = 0$; б) $r = 2\varphi$, $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$.

10.2. а) $y = 1$, $y = 3$, $xy = a$, $x = 0$ б) $r^2 = 2a^2 \cos 2\phi$.

10.3. а) $y = \sin x$, $y = \cos x$, $x=0$;

б) $r = a(1 - \cos\phi)$.

10.4. а) $x \cdot y = 4$, $x + y - 5 = 0$; б) $r = \alpha(1+\sin\varphi)$.

10.5. а) $y = -x^2$, $x + y + 2 = 0$; б) $r = a \sin \varphi$, $a > 0$.

10.6. а) $y = -x^2 - 2x + 3$, $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$;

б) $r = a\cos\phi$, $a > 0$.

10.7. а) $y = x^2$, $y = \dfrac{1}{2}x^2$, $y = 2x$; б) $r = a\sin 2\phi$, $a > 0$.

10.8. а) $y = \dfrac{16}{x^2}$, $y = 17 - x^2$; б) $r = a\cos 2\phi$.

10.9. а) $y = (x+1)^2$, $y = 0$, $y = 5 - x$;

б) $r = 2a\cos\phi$ вне $r = a$, $a > 0$.

10.10. а) $y = -x^2 + 4x - 3$, $y = 6 - 2x$, $y = 4x - 3$,

б) $r = 2a\sin\phi$, $r = a$, $r > a$.

10.11. а) $y = \ln(x+1)$, $y = 2$, $x = 0$; б) $r = 2\varphi$, $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$.

10.12. а) $y = 1$, $y = 3$, $xy = a$, $x = 0$, б) $r^2 = 2a^2 \cos 2\phi$.

10.13. а) $y = \sin x$, $y = \cos x$, $x = 0$; б) $r = a(1 - \cos\phi)$.

10.14. а) $x \cdot y = 4$, $x + y - 5 = 0$; б) $r = \alpha(1+\sin\varphi)$.

10.15. а) $y = -x^2$, $x + y + 2 = 0$; б) $r = a \sin \varphi$, $a > 0$.

10.16. а) $y = -x^2 - 2x + 3$, $x = 0$, $x = 2$, $y =$;

б) $r = a\cos\phi$, $a > 0$.

10.17. а) $y = x^2$, $y = \dfrac{1}{2}x^2$, $y = 2x$; б) $r = a\sin 2\phi$, $a > 0$.

10.18. а) $y = \dfrac{16}{x^2}$, $y = 17 - x^2$; б) $r = a\cos 2\phi$.

10.19. а) $y=(x+1)^2$, $y = 0$, $y = 5 - x$;

б) $r=2a\cos\phi$ вне $r = a$, $a > 0$.

10.20. а) $y=-x^2+4x-3$, $y=6-2x$, $y=4x-3$,

б) $r=2a\sin\phi$, $r = a$, $r>a$.

Задание 11. Найти длину дуги кривой:

11.1. а) $y=(1+x)^{\frac{3}{2}}$, $x\in\ -1;\ \ 4$;

б) $\begin{cases} x=\dfrac{t^6}{6} \\ y=2-\dfrac{t^4}{4} \end{cases}$, где $t\in\left[0,\sqrt[4]{8}\right]$.

11.2. а) $y^2=\dfrac{4}{9}(2-x)^3$, $x\in\ -1;0$;

б) $\begin{cases} x=\cos t+t\sin t \\ y=\sin t-t\cos t \end{cases}$, где $t\in\ 0,T$.

11.3. а) $y=\ln(1-x^2)$, $x\in[0;\dfrac{1}{2}]$;

б) $\begin{cases} x=\dfrac{1}{3}t^3-t, \\ y=t^2+2, \end{cases}$ $t\in\ 0;3$.

11.4. а) $y=\dfrac{\sqrt{x}}{3}(3-x)$ между точками пересечения ее с осью OX; б) $\begin{cases} x=8\sin t+6\cos t \\ y=6\sin t-8\cos t \end{cases}$, $t\in\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$.

11.5. а) найти периметр фигуры, ограниченной линиями $y^2 = x^3$, $y = \sqrt{2-x^2}$, $y = 0$.

б) найти длину дуги кривой $\begin{cases} x = t^2 \\ y = \dfrac{t}{3}(t^2 - 3) \end{cases}$ между точками ее пересечения с осью *OX*.

11.6. а) найти длину полукубической параболы $y^2 = \dfrac{5}{p}\left(x - p\right)^3$, отсекаемой прямой x=2p;

б) одной арки циклоиды $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$.

11.7. а) цепной линии $y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ на отрезке [0; a].

б) астроиды $\begin{cases} x = R\cos^2 t \\ y = R\sin^2 t \end{cases}$.

11.8. а) $y = \dfrac{2}{\pi}\ln\sin\dfrac{\pi x}{2}, \quad x \in \left[\dfrac{1}{2}; \dfrac{3}{2}\right]$;

б) $\begin{cases} x = e^t \cos t \\ y = e^t \sin t \end{cases}, \ t \in \left[0; \pi\right]$

11.9. а) $y = e^x$ между точками (0, 1) и (1, e). Указание: в качестве независимой переменной взять y;

б) кардиоиды $\begin{cases} x = a(3\cos t - \cos 3t), \\ y = a(3\sin t - \sin 3t), \end{cases}$ $t \in [0; \frac{\pi}{2}]$.

11.10. а) найти периметр фигуры, ограниченной линиями: $y^2 = 4x, \quad x = 4$.

б) трактрисы: $\begin{cases} x = a(\cos t + \ln tg\frac{t}{2}) \\ y = a\sin t \end{cases}$ от точки (0; a) до точки (b; c).

11.11. а) $y = (1 + x)^{\frac{3}{2}}, \quad x \in \left[-1; \ 4\right]$;

б) $\begin{cases} x = \dfrac{t^6}{6} \\ y = 2 - \dfrac{t^4}{4} \end{cases}$, где $t \in \left[0, \sqrt[4]{8}\right]$.

11.12. а) $y^2 = \dfrac{4}{9}(2-x)^3, \quad x \in \ -1;0\ $;

б) $\begin{cases} x = \cos t + t\sin t \\ y = \sin t - t\cos t \end{cases}$, где $t \in \ 0, T\ $.

11.13. а) $y = \ln(1-x^2), \quad x \in [0; \dfrac{1}{2}]$;

б) $\begin{cases} x = \dfrac{1}{3}t^3 - t, \\ y = t^2 + 2, \end{cases} \quad t \in \ 0;3\ $.

11.14. а) $y = \dfrac{\sqrt{x}}{3}(3-x)$ между точками пересечения ее с осью *OX;* б) $\begin{cases} x = 8\sin t + 6\cos t \\ y = 6\sin t - 8\cos t \end{cases}, \quad t \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$.

11.15. а) найти периметр фигуры, ограниченной линиями $y^2 = x^3$, $y = \sqrt{2-x^2}$, $y = 0$;

б) найти длину дуги кривой $\begin{cases} x = t^2 \\ y = \dfrac{t}{3}(t^2-3) \end{cases}$ между точками ее пересечения с осью *OX*.

11.16. а) полукубической параболы $y^2 = \dfrac{5}{p}\ x - p\ ^3$, отсекаемой прямой $x=2p$;

б) одной арки циклоиды $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$.

11.17. а) цепной линии $y=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ на отрезке $[0;\, a]$;

б) астроиды $\begin{cases} x=R\cos^2 t \\ y=R\sin^2 t \end{cases}$.

11.18. а) $y=\dfrac{2}{\pi}\ln\sin\dfrac{\pi x}{2}, \quad x\in\left[\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{2}\right]$;

б) $\begin{cases} x=e^t\cos t \\ y=e^t\sin t \end{cases}, \ t\in \ 0;\pi$

11.19.а) $y = e^x$ между точками (0, 1) и (1, e). Указание: в качестве независимой переменной взять y.

б) кардиоиды $\begin{cases} x=a(3\cos t-\cos 3t), \\ y=a(3\sin t-\sin 3t), \end{cases}$ $t\in[0;\frac{\pi}{2}]$.

11.20. а) найти периметр фигуры, ограниченной линиями: $y^2=4x, \quad x=4.$ Указание: в качестве независимой переменной взять y.

б) трактрисы: $\begin{cases} x=a(\cos t+\ln tg\frac{t}{2}) \\ y=a\sin t \end{cases}$ от точки (0; a) до точки (b; c).

Задание 12. Найти объем тела.

12.1. Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси OY фигуры, ограниченной линиями:

$$y=\frac{4}{x},\ y = 3,\ y = 12 \text{ и осью } OY.$$

12.2. Найти объем тела, ограниченного параболоидом вращения $x = 3(y^2 + z^2)$ и плоскостью $x = 2$.

12.3. Найти объем тела, полученного вращением эллипса $4x^2+9y^2=36$ вокруг его малой оси.

12.4. Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси OY фигуры, ограниченной линиями

$y^2 = 9x, \quad y = -x$.

12.5. Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной линиями $y = x^2$, $x = y^2$.

12.6. Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной линиями $x^2 + y^2 = 18$, $y = \dfrac{x^2}{3}$ и осью OY.

12.7. Фигура, ограниченная дугой эллипса $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1, \quad (a > b)$ и двумя прямыми, перпендикулярными к оси OX и проходящими через фокусы эллипса, вращается вокруг оси OX. Найти объем тела вращения.

12.8. Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной кривыми $y = 2^x$, $y = 4^x, \quad x = 1$.

12.9. Найти объем тела, полученного при вращении вокруг оси OX фигуры, ограниченной линиями $y = \mathrm{tg}x$, $y = \mathrm{ctg}x$, $x = \dfrac{\pi}{6}$.

12.10. Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси OY фигуры, ограниченной линиями $y^2 - x^2 = 3, \quad xy = 2 \ (x, y > 0)$ и $y = 3$.

12.11. Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси OY фигуры, ограниченной линиями $y = \dfrac{4}{x}$, $y = 3$, $y = 12$ и осью OY.

12.12. Найти объем тела, ограниченного параболоидом вращения $x = 3(y^2 + z^2)$ и плоскостью $x = 2$.

12.13. Найти объем тела, полученного вращением эллипса $4x^2 + 9y^2 = 36$ вокруг его малой оси.

12.14. Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси OY фигуры, ограниченной линиями $y^2 = 9x, \quad y = -x$. Сделать чертеж.

12.15. Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной линиями $y = x^2$, $x = y^2$.

12.16. Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной линиями $x^2 + y^2 = 18, \ \ y = \dfrac{x^2}{3}$ и осью OY.

12.17. Фигура, ограниченная дугой эллипса $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1, \quad (a > b)$ и двумя прямыми, перпендикулярными к оси OX и проходящими через фокусы эллипса, вращается вокруг оси OX. Найти объем тела вращения.

12.18. Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной кривыми $y = 2^x$, $y = 4^x, \quad x = 1$.

12.19. Найти объем тела, полученного при вращении вокруг оси OX фигуры, ограниченной линиями $y = \mathrm{tg} x$, $y = \mathrm{ctg} x$, $x = \frac{\pi}{6}$.

12.20. Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси OY фигуры, ограниченной линиями $y^2 - x^2 = 3, \quad xy = 2 \ (x, y > 0)$ и $y = 3$.

Задание 13. Решить задачи.

13.1. Скорость точки изменятся по закону $v(t) = 3t^2 + 6t + 10$ м/с. Найти путь, пройденный точкой за 6 секунд от начала движения.

13.2. Скорость тела изменятся по закону $v(t) = \sqrt{1+t}$ м/с.

Найти путь, пройденный телом за 1час и 20 мин от начала движения. Чему равна средняя скорость движения тела за этот промежуток времени?

13.3. Найти массу стержня длинною 100 м, если линейная плотность ρ меняется по закону $\rho(x) = (20x + 0{,}15x^2)$ г/см, где x – расстояние от одного из концов стержня.

13.4. Скорость тела, брошенного вертикально вверх с начальной скоростью v_0, без учета сопротивления воздуха равна $v = v_0 - gt$, где t- протекшее время; g – ускорение свободного падения. На какую максимальную высоту поднимется тело?

13.5. Скорость прямолинейного движения тела изменяется по формуле $v(t) = 1 + \sin 2t$ м/с. Найти путь, пройденный телом от начала движения до остановки

13.6. Скорость точки изменяется по закону $v(t) = 4t(36 - t^2)$ м/с. Каково наибольшее удаление точки от начала движения?

13.7. Два тела начали двигаться в один и тот же момент из одной точки в одном направлении. Одно двигалось со скоростью $v_1(t) = 2t$ м/с, другое – со скоростью $v_2(t) = 3t^2 + 4t$ м/с. Какое расстояние между ними было через 4 секунды?

13.8. Два тела начали двигаться в один и тот же момент из одной точки в одном направлении. Одно двигалось со скоростью $v_1(t) = 2t$ м/с, другое – со скоростью $v_2(t) = 9t^2 + 2t$ м/с. Через сколько секунд расстояние между ними будет 81 м?

13.9. Скорость тела, брошенного вертикально вверх с начальной скоростью v_0, с учетом сопротивления воздуха дается формулой $v = C \cdot \mathrm{tg}(-\frac{g}{C}t + \mathrm{arctg}\frac{v_0}{C})$, где t – протекшее время, g – ускорение свободного падения, C

– постоянная. Найти высоту поднятия тела.

13.10. Ракетный снаряд поднимается вертикально вверх. Считая, что при постоянной силе тяжести ускорение ракеты за счет уменьшения ее веса растет по закону $j = \dfrac{k}{a - bt}$, $(a - bt > 0)$, найти скорость ракеты в момент времени t_1, если ее начальная скорость равна нулю.

13.11. Вычислить работу, необходимую для растяжения пружины на 4 см, если известно, что от нагрузки в 1 *Н* она растягивается на 1 см.

13.12. Материальная точка *M* движется по координатной прямой под действием силы, величина которой меняется пропорционально расстоянию точки от начала координат *O*. Известно, что направление силы совпадает с направлением оси, и, что она равнялась 1 *Н*, когда расстояние *MO* было равно 3м. Вычислить работу этой силы по перемещению точки на расстояние 15 м от начала координат

13.13. Пружина в спокойном состоянии имеет длину 0,2 м. Сила в 50 *Н* растягивает ее на 0,01 м. Какую работу нужно совершить, чтобы растянуть пружину от длины 0,22 м до длины 0,32 м?

13.14. Вычислить работу, необходимую для выкачивания масла (плотность γ) из вертикального цилиндрического резервуара высотой H и радиусом R

13.15. Электрический заряд e_0, сосредоточенный в начале координат, отталкивает заряд *e* из точки (*a*, 0) в точку (*b*, 0). Определить работу силы отталкивания F, если известно, $F = \dfrac{e \cdot e_0}{r^2}$, где *r* – расстояние между зарядами.

13.16. Найти работу, затраченную на выкачивание воды из полушара радиуса *R* м.

13.17. Найдите работу против сил выталкивания при погружении шара радиуса R в воду.

13.18. Деревянная прямоугольная балка плавает в воде. Найти работу, необходимую для извлечения балки из воды, если известны ее размеры a = 6 м, b = 0,3 м, c = 0,2 м и плотность дерева ρ = 0,8.

13.19. Тяжелая цепь длиной 100 м поднимается, навиваясь на ворот. Найдите работу силы тяжести при поднятии цепи, пренебрегая размерами ворота, если погонный метр цепи весит 40 кг.

13.20. Какую работу надо затратить, чтобы тело массы m поднять с поверхности Земли, радиус которой R, на высоту h? Чему равна эта работа, если тело удаляется на бесконечность? (Сила, действующая на тело массой m, равна $F=\gamma\frac{mM}{r^2}$, где r – расстояние от центра Земли; M – масса Земли, γ – гравитационная постоянная).

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Берман Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа: уч. пособие. – 22-е изд., перераб. / Г. Н. Берман // СПб: Профессия, 2003. – 386 с.
2. Бермант А. Ф. Краткий курс математического анализа: учебник для вузов / А. Ф. Бермант, И. Г. Араманович // СПб.: Лань, 2005. – 312 с.
3. Бутузов В. Ф Математический анализ в вопросах и задачах: учебное пособие / В.Ф. Бутузов // М.: Высшая школа, 1993. – 356 с.
4. Геворкян П. С. Высшая математика. Основы математического анализа: учебник для вузов / П.С. Геворкян // М.: ФИЗМАТЛИТ, 2011. – 240 с.
5. Геворкян Э. А. Математический анализ: Учебное пособие / Э. А. Геворкян // М.: МЭСИ, 2004. – 328 с.
6. Демидович Б. П. Задачи и упражнения по математическому анализу для втузов: учебное пособие / Б. П. Демидович // М.: АСТ, 2003. – 486 с.
7. Ильин В. А. Математический анализ: учебник / В. А. Ильин, В. А. Садовничий, А. Н. Тихонов // М.: МГУ, 1987. – 348 с.
8. Ильин В. А. Основы математического анализа: в 2-х ч. Ч. 1 / В. А. Ильин, Э. Г. Позняк, Ш. А. Алимов // М: Наука, 1980. – 424 с.
9. Кудрявцев Л. Д. Курс математического анализа: в 3Т. т.1 / Л. Д. Кудрявцев // М.: Высшая школа, 1988. – 464 с.
10. Мордкович А. Г. Математический анализ: учебник / А. Г. Мордкович // М.: Высшая школа, 1990. – 388 с.

11. Никольский С.М. Курс математического анализа: т.1 / С. М. Никольский // М.: Наука, 1990. – 424 с.
12. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисление для втузов, т. 1, 2: Учебное пособие для втузов / Н. С. Пискунов // М.: Наука, 1985. – 560 с.
13. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления / Г. М. Фихтенгольц // М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. т. 1 – 616 с.
14. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления / Г. М. Фихтенгольц // М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. т.2 – 810 с.
15. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления / Г. М. Фихтенгольц // М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. т. 3 – 662 с.
16. Фихтенгольц Г. М. Основы математического анализа / Г. М. Фихтенгольц // М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005, т. 1 – 440 с.

Интернет-ресурсы

17. http://eek.diary.ru/p181572597.htm
18. http://www.mat.net.ua/mat/index-mat-analiz-tf.htm
19. http://www.knigafund.ru/tags/5505
20. http://www.matburo.ru/st_subject.php?p=ma

Учебно-методическое пособие

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Часть 1

Ие Ольга Николаевна
Скринникова Анна Владимировна

*Учебно-методическое пособие
для студентов I курса
дневной и заочной форм обучения
по специальностям «математика» и
«системный анализ»*

Ответственный за выпуск – Ие О.Н.
Компьютерный макет – Скринникова А.В.
Корректор – Кривко Я.П.

Сдано в набор г. Подписано к печати г.
Формат $60\times84/16$. Бумага офсетная. Гарнитура Times New Roman.
Печать офсетная. Кол-во авт. лист. 10,0. Тираж 30 экз.

Издательство «ООО Копиртехсервис».
91011, г. Луганск, ул. Оборонная, 1
тел.: (0642) 42-03-50