Міністерство освіти і науки України
Державний заклад
«Луганський національний університет
імені Тараса Шевченка»

АКТУАРНА МАТЕМАТИКА

ЧАСТИНА 2

Навчальний посібник

Луганськ
ДЗ «ЛНУ імені Тараса Шевченка»
2009

УДК 51-7(075.8)
ББК 22.1я73
А 43

Р е ц е н з е н т и:

Димарський Я.М. **–** доктор фізико-математичних наук, професор, зав. кафедри інформатики Луганського державного університету внутрішніх справ імені Е.О. Дідоренка.

Семенов М.А. **–** кандидат педагогічних наук, доцент кафедри економічної інформатики Луганського національного університету імені Тараса Шевченка.

А-43 **Актуарна математика. Ч. 2**: навч. посіб. для студ. вищ. навч. закл. / упоряд.: О. М. Іє, С. А. Сотникова; Держ. закл. «Луган. нац. ун-т імені Тараса Шевченка». – Луганськ: Вид-во ДЗ «ЛНУ імені Тараса Шевченка», 2009. – 120 с.

Видання призначене для студентів та викладачів, які спеціалізуються з прикладних напрямків статистики, зокрема для студентів, що навчаються за спеціальностями 7.080102 «Статистика», 6.030506 «Прикладна статистика».

Посібник містить програму курсу «Актуарна математика», загальні методичні вказівки, приклади розв'язування задач, питання та завдання для самоконтролю по темах курсу, матеріал для самостійного опрацювання. У другій частині посібника розглядається пенсійне страхування та поведінка страхових компаній як суб'єктів підприємницької діяльності.

УДК 51-7(075.8)
ББК 22.1я73

Затверджено до друку навчально-методичною радою Луганського національного університету імені Тараса Шевченка (протокол № 8 від 06.05.2009 року).

ЗМІСТ

Вступ 5
Структура курсу за темами 6
Модуль 1. Пенсійне страхування 7
Тема 1. Страхові ануїтети. 7
1.1. Комутаційні функції. 7
1.2. Види страхових ануїтетів. 8
Тема 2. Схеми пенсійного страхування. 11
2.1. Пенсійне страхування. 11
2.2. Ощадна схема пенсійного страхування. 12
2.3. Страхова схема пенсійного страхування 13
Тема 3. Загальна теорія пенсійного страхування 16
3.1. Вартість майбутньої пенсії 16
3.2. Індивідуальні методи пенсійного страхування. 18
3.3. Колективні методи пенсійного страхування...... 24
Приклади розв'язання задач до модуля 1 28
Питання для самоконтролю до модуля 1 39
Задачі до модуля 1 40
Модуль 2. Страхові компанії 45
Тема 4. Поведінка страхових компаній. 45
4.1. Модель страхової компанії. 45
4.2. Ймовірність нерозорення страхової компанії.... 46
Тема 5. Перестрахування 49
5.1. Термінологія перестрахування. 49
5.2. Пропорційне перестрахування. 53
5.3. Ексцедентне перестрахування. 54
Тема 6. Розорення страхових компаній. 58
6.1. Задача про розорення 58
6.2. Нерівність Лундбергу 59

6.3. Визначення ймовірності остаточного розорення в експоненціальному випадку 61
Приклади розв’язання задач до модуля 2 65
Питання для самоконтролю до модуля 2............................ 72
Задачі до модуля 2 73
Матеріал для самостійного опрацювання...................... 79
Тема 1. Фінансова стійкість страхових операцій та методи її забезпечення.. 79
1.1. Залежність відхилень результатів від кількості застрахованих об’єктів і середньої ймовірності збитку 79
1.2. Міжгрупове відхилення. 83
1.3. Фінансова стійкість операцій страхування життя. 86
Тема 2. Випадкова величина показника результатів. 87
2.1. Технічний аналіз випадкової величини показника результатів 87
2.2. Стандартне відхилення показника результатів. 94
2.3. Формування портфеля.. 96
2.4. Коефіцієнт безпеки ймовірності розорення. 97
Тема 3. Промислові ризики. 102
3.1. Характеристики ризику в сфері актуарних розрахунків 103
3.2. Метод тарифікації. 106
Предметний покажчик.. 112
Додатки 113
Список використаної та рекомендованої літератури.. 119

ВСТУП

Методи актуарної математики використовуються в страховій діяльності та базуються на актуарних розрахунках. *Актуарні розрахунки* – це система статистичних і економіко-математичних методів розрахунку тарифних ставок і визначення фінансових взаємовідносин страховика і страхувальника.

Одним з важливих напрямків страхової діяльності є *пенсійне страхування*. Під актуарним методом пенсійного фінансування розуміють бюджетний план формування накопичувального пенсійного фонду або принципову схему внесків, призначених для фінансування пенсій.

Важливу роль відіграють актуарні розрахунки й в перестраховій діяльності. *Перестрахування* – це система економічних відносин, у процесі яких страховик, приймаючи на страхування ризики різної величини, частину відповідальності по них, у відповідності зі своїми фінансовими можливостями, передає на визначених погоджених умовах іншим страховикам з метою створення збалансованого портфеля власних активів. Економічною сутністю перестрахування є перерозподіл між страховими організаціями створеного первинного страхового фонду.

У даній частині посібника розглядаються основи пенсійного страхування, перестрахування та діяльність страхових компаній.

Мета курсу «Актуарна математика» – формування у студентів знань, умінь та навичок, необхідних для засвоєння та раціонального використання понять, законів і методів актуарної математики для актуарних розрахунків, як самостійного предмета вивчення, так і засобу для вивчення суміжних дисциплін. Даний посібник призначений для успішного оволодіння читачем понять та методів курсу «Актуарна математика».

СТРУКТУРА КУРСУ ЗА ТЕМАМИ

Частина 1

Модуль 1. Майнове страхування

Тема 1. Актуарні розрахунки.

Тема 2. Тарифна ставка.

Тема 3. Суть та види страхових премій.

Тема 4. Майнове страхування.

Модуль 2. Особисте страхування

Тема 5. Соціальне страхування.

Тема 6. Ймовірністні характеристики тривалості життя.

Тема 7. Залишкова тривалість життя.

Матеріал для самостійного опрацювання

Тема 1. Актуарні розрахунки в добровільному медичному страхуванні.

Тема 2. Страхування на випадок непрацездатності-інвалідності.

Тема 3. Страхування від нещасного випадку та хвороби.

Частина 2

Модуль 1. Пенсійне страхування

Тема 1. Схеми пенсійного страхування.

Тема 2. Загальна теорія пенсійного страхування.

Тема 3. Колективні методи пенсійного страхування.

Модуль 2. Страхові компанії

Тема 4. Поведінка страхових компаній.

Тема 5. Перестрахування.

Тема 6. Розорення страхових компаній.

Матеріал для самостійного опрацювання

Тема 1. Фінансова стійкість страхових операцій та методи її забезпечення.

Тема 2. Випадкова величина показника результатів.

Тема 3. Промислові ризики.

МОДУЛЬ 1. ПЕНСІЙНЕ СТРАХУВАННЯ

- *Страхові ануїтети.*
- *Схеми пенсійного страхування.*
- *Загальна теорія пенсійного страхування.*

Тема 1. Страхові ануїтети
1.1. Комутаційні функції

Страхові виплати, а іноді й страхові премії являють собою потік платежів, який у фінансовій математиці називається ануїтетом (страховою рентою). Вартість *страхового ануїтету*, по суті, є відправним моментом в актуарній математиці. Як відомо, платежі можуть вноситься на початку року – *пренумерандо*, та наприкінці року – *постнумерандо*. У залежності від цього розрізняють і види ануїтетів. Крім цього в страхуванні ренти діляться в залежності від інтервалу часу, у якому відбуваються платежі.

Нагадаємо деякі позначення. Таблиці тривалості життя (ТТЖ) для кожного віку x містять або можна розрахувати: l_x – кількість осіб кожного віку, які залишилися живими з початкової кількості осіб, d_x – кількість осіб, які померли у кожній віковій групі після віку x протягом року, q_x – ймовірність померти протягом року після віку x років, p_x – ймовірність вижити протягом року після віку x років,

$$d_x = l_x q_x, \; p_x = 1 - q_x,$$

$${}_n p_x = \frac{l_{x+n}}{l_x} -$$

ймовірність дожити з віку x до віку $x+n$.

Для спрощення запису страхових ануїтетів та формул застосовують технічний апарат *комутаційних функцій* двох типів.

До першого належать функції

$$\boxed{D_x = l_x v^x},$$

$$\boxed{N_x = \sum_{j=x}^{\omega} D_j},$$

де v – дисконтний множник за ставкою i, ω – граничний вік.

Другий тип включає функції, які застосовуються, коли є m виплат на рік:

- для платежів постнумерандо

$$N_x^{(m)} = N_x + \frac{m-1}{2m} D_x,$$

- для пренумерандо

$$\ddot{N}_x^{(m)} = N_x - \frac{m-1}{2m} D_x.$$

Також до другого типу належать функції

$$C_x = d_x v^{x+1}, \; M_x = \sum_{j=x}^{\omega} C_j.$$

1.2. Види страхових ануїтетів

Страхові ануїтети постнумерандо

1. *Ануїтет довічний, негайний* – індивідууму, починаючи з віку x років довічно наприкінці року виплачується по 1 грн.

$$a_x = p_x v + {}_2p_x v^2 + \ldots + {}_{w\text{-}x}p_x v^{w\text{-}x} =$$
$$= \frac{l_{x+1}v + l_{x+2}v^2 + \ldots + l_w v^{w\text{-}x}}{l_x} \cdot \frac{v^x}{v^x} = \frac{N_{x+1}}{D_x}.$$

2. *Ануїтет відкладений на* n *років, довічний* – сплачується довічно особі у віці $x+n$ років по 1 грн. наприкінці кожного року.

$${}_{n|}a_x = {}_{n+1}p_x v^{n+1} + {}_{n+2}p_x v^{n+2} + \ldots + {}_{w-x}p_x v^{w\text{-}x} =$$
$$= \frac{l_{x+n+1}v^{n+1} + l_{x+n+2}v^{n+2} + \ldots + l_\omega v^{w-x}}{l_x} \cdot \frac{v^x}{v^x} = \frac{N_{x+n+1}}{D_x}.$$

3. *Ануїтет негайний, обмежений* – виплачується особі у віці x років протягом t років, по 1 грн., наприкінці кожного року.

$$a_{xt} = p_x v + {}_2p_x v^2 + \ldots + {}_tp_x v^t =$$
$$= \frac{l_{x+1}v + l_{x+2}v^2 + \ldots + l_{x+t}v^t}{l_x} \cdot \frac{v^x}{v^x} = \frac{N_{x+1} - N_{x+t+1}}{D_x}.$$

4. *Ануїтет відкладений на* n *років, обмежений* – особі, наприкінці кожного року виплачується по 1 грн., починаючи з віку $x+n$ років, протягом t років.

$${}_{n|}a_{x:t} = {}_{n+1}p_x v^{n+1} + {}_{n+2}p_x v^{n+2} + \ldots + {}_{n+t}p_x v^{t+n} =$$
$$= \frac{l_{x+n+1}v^{n+1} + l_{x+n+2}v^{n+2} + \ldots + l_{x+n+t}v^{n+t}}{l_x} \cdot \frac{v^x}{v^x} = \frac{N_{x+n+1} - N_{x+n+t+1}}{D_x}.$$

Страхові ануїтети пренумерандо

1. *Ануїтет довічний, негайний* – індивідууму, починаючи з віку x років довічно на початку року виплачується по 1 грн.

$$\ddot{a}_x = 1 + p_x v + {}_2p_x v^2 + \ldots + {}_{w\text{-}x}p_x v^{w\text{-}x} =$$

$$= \frac{l_x + l_{x+1}v + l_{x+2}v^2 + \ldots + l_w v^{w\text{-}x}}{l_x} \cdot \frac{v^x}{v^x} = \frac{N_x}{D_x}.$$

2. *Ануїтет відкладений на n років, довічний* – сплачується довічно особі у віці $x+n$ років по 1 грн. на початку кожного року.

$$_{n|}\ddot{a}_x = {}_np_x v^n + {}_{n+1}p_x v^{n+1} + {}_{n+2}p_x v^{n+2} + \ldots + {}_{w-x}p_x v^{w\text{-}x} =$$

$$= \frac{l_{x+n}v^n + l_{x+n+1}v^{n+1} + l_{x+n+2}v^{n+2} + \ldots + l_\omega v^{w-x}}{l_x} \cdot \frac{v^x}{v^x} = \frac{N_{x+n}}{D_x}.$$

3. *Ануїтет негайний, обмежений* – виплачується особі у віці x років протягом t років, по 1 грн., на початку кожного року.

$$\ddot{a}_{xt} = 1 + p_x v + {}_2p_x v^2 + \ldots + {}_{t-1}p_x v^{t-1} =$$

$$= \frac{l_x + l_{x+1}v + l_{x+2}v^2 + \ldots + l_{x+t-1}v^{t-1}}{l_x} \cdot \frac{v^x}{v^x} = \frac{N_x - N_{x+t}}{D_x}.$$

4. *Ануїтет відкладений на n років, обмежений* – особі, на початку кожного року виплачується по 1 грн., починаючи з віку $x+n$ років, протягом t років.

$$_{n|}\ddot{a}_{x:t} = {}_np_x v^n + {}_{n+1}p_x v^{n+1} + {}_{n+2}p_x v^{n+2} + \ldots + {}_{n+t-1}p_x v^{t+n-1} =$$

$$= \frac{l_{x+n}v^n + l_{x+n+1}v^{n+1} + \ldots + l_{x+n+t-1}v^{n+t-1}}{l_x} \cdot \frac{v^x}{v^x} = \frac{N_{x+n} - N_{x+n+t}}{D_x}.$$

Тема 2. Схеми пенсійного страхування
2.1. Пенсійне страхування

З економічної точки зору забезпечення *пенсіями* по старості на базі недержавних пенсійних фондів – це довгостроковий інвестиційний процес, на першому етапі якого здійснюються вкладення (пенсійні внески) і послідовне нарощення вкладених сум за рахунок інвестицій вільних коштів, на другому – одержання віддачі від накопичень у вигляді періодичних пенсій.

Пенсійне страхування ділиться на два види:

1. *Нефондоване пенсійне страхування* – виплата пенсій здійснюється з поточних надходжень. У цьому випадку страхові тарифи не розраховуються.
2. *Накопичувальне пенсійне страхування* – для виплати пенсій створюються спеціалізовані фонди. Вони у свою чергу діляться також на три види схем страхових виплат:
   - *Ощадна схема пенсійного страхування* – дана схема не враховує можливість дожиття кожного учасника фонду, передбачається спадкування накопичень, відсутня солідарність учасників у забезпеченні виплат (при смерті одного з учасників його внесок не йде на виплату пенсій), обумовлюється конкретний термін виплат;
   - *Страхова схема пенсійного страхування* – учасники солідарні між собою, враховується ймовірність дожиття застрахованих, немає спадкування накопичень.
   - *Змішана ощадно-страхова схема пенсійного страхування* – тут передбачається послідовне використання описаних вище схем, тобто,

наприклад, у період накопичення застосовується ощадна схема, а в період виплат – страхова.

Розрахунок тарифних ставок у пенсійному страхуванні грунтується на принципі фінансової еквівалентності (рівності зобов'язань). З практичної точки зору основа всіх розрахунків – страхові ануїтети. При застосуванні будь-яких із пенсійних схем із використанням спеціалізованого фонду необхідно вирішити дві задачі:

- визначення розміру пенсії по величині установлених внесків (розрахунок величини внесків по заданих розмірах пенсії),
- розрахунок страхових резервів.

2.2. Ощадна схема пенсійного страхування

У даному випадку пенсія являє собою фінансовий ануїтет, у якому не враховуються ймовірності дожиття до певного віку, тобто, що людина вкладає, то вона й одержує, з урахуванням прибутковості на вкладені кошти.

Існують два випадки ощадної схеми.

1. Внески сплачуються одноразово. Після сплати у фонд початкової суми, вона накопичується з роками (термін n років), пропорційно нормі прибутковості до моменту початку виплат пенсій. Після чого накопичені у фонді кошти поступово витрачаються, доти, поки не скінчаться зовсім (термін t років). У силу фінансової еквівалентності маємо наступний вираз

$$\boxed{E(1+i)^n = R\frac{(1-v^t)}{i}},$$

де $v = \dfrac{1}{1+i}$, i – процентна норма, E – одноразовий внесок, R – річна сума пенсії, n – термін накопичення, t – термін виплати пенсії.

2. Премія сплачується декількома виплатами. Тут схема схожа на попередню. Розділені на рівні частини премії являють собою потік платежів, тому накопичення відбувається повільніше, ніж у першому випадку, за інших рівних умов. Період виплат такий же, як і в першому випадку. Математично дану схему можна відобразити наступним виразом:

$$\boxed{E_{річ}\frac{(1+i)^n-1}{i} = R\frac{(1-v^t)}{i}}.$$

2.3. Страхова схема пенсійного страхування

По суті пенсійне страхування є одним із видів страхування на дожиття. Якби пенсія виплачувалася разовою виплатою, то ці два види страхування були б цілком однаковими. Істотною відмінністю тут є те, що пенсія являє собою страховий ануїтет. Тобто кожна наступна виплата залежить від ймовірності дожиття особи до наступної виплати. Крім цього, усі платежі наводяться до початкового моменту часу (момент першого внеску).

Нетто-премія в даному виді страхування може бути визначена при двох умовах, коли вона вноситься одноразово та коли платежі вносяться рівними виплатами. Система визначення нетто-тарифів грунтується на принципі фінансової еквівалентності зобов'язань страховика та страхувальника.

Нетто-премія вноситься одноразово. Нетто тариф дорівнює вартості ануїтету, що відповідає умовам виплат пенсії, а нетто-премія – добутку нетто-тарифу на розмір пенсії. Умови виплат, у даному випадку, впливають на застосовуваний у розрахунках вигляд ануїтету.

$$\boxed{E_x = R[\text{страховий ануїтет}]}.$$

Розглянемо деякі з них:

- пенсія буде виплачуватися з віку x років довічно, на початку року:

$$E_x = R\ddot{a}_x = R\frac{N_x}{D_x},$$

- пенсія буде виплачуватися з віку $x+n$ років довічно, на початку року:

$$E_x = R\,{}_n\ddot{a}_x = R\frac{N_{x+n+1}}{D_x}.$$

Знаючи формули для визначення ануїтетів, можна визначити розмір пенсії й розмір нетто-премій для будь-якого варіанту пенсійного забезпечення.

Нетто-премія вноситься рівними виплатами. Для забезпечення собі достатньої пенсії потрібно вносити в пенсійний фонд велику суму коштів, яку ми не завжди маємо, або достатньо великим інтервалом часу до моменту виплат пенсій, через що виникає ризик розвалу страхової компанії й інші ризики, пов'язані з нестабільністю політичних і економічних систем.

Зручним варіантом вкладення коштів є схема, що дозволяє не на шкоду собі і близьким вносити частину прибутків у пенсійний фонд, забезпечивши себе в майбутньому пенсією. Платежі можна вносити як щомісяця, так і раз на рік. Розглянемо 2-й варіант. У даному випадку, як розмір пенсії, так і вкладені кошти залежать від ймовірності дожиття, тому, у наведених нижче рівняннях фінансової еквівалентності, як зліва, так і справа використовуються страхові ануїтети.

$$\boxed{\begin{aligned} &E_x[\textit{страховий ануїтетв внесків}] = \\ &= R[\textit{страховий ануїтет пенсій}] \end{aligned}}$$

Наприклад, внески робляться раз на рік починаючи з віку x років до віку $x+t$ років, а пенсія виплачується з віку $x+n$ років, довічно. Як внески, так і пенсії сплачуються наприкінці кожного року:

$$E_{річ} a_{x:t} = R\,{}_n a_x \Rightarrow E_{річ} = R\frac{{}_n a_x}{a_{x:t}} =$$

$$= R\frac{N_{x+n+1}}{D_x}\frac{D_x}{N_{x+1} - N_{x+t+1}} = \frac{N_{x+n+1}}{N_{x+1} - N_{x+t+1}}.$$

Якщо внески відбуваються на початку року, то в даному випадку застосовується ануїтет пренумерандо:

$$E_{річ} \ddot{a}_{x:t} = R\,{}_n \ddot{a}_x\,.$$

Так застосовуючи різні види ануїтетів, можна побудувати різноманітні варіанти пенсійних схем.

Тут, як і скрізь вище, усі рівності будуються за принципом фінансової еквівалентності зобов'язань страховика та страхувальника. Виходячи зі створених рівностей, можна визначити крім щорічних внесків, розмір щорічної пенсії та навпаки.

Тема 3. Загальна теорія пенсійного страхування
3.1. Вартість майбутньої пенсії

Для простоти будемо вважати майбутню пенсію постійної та виплачуваною у формі ануїтету з виплатами на початку кожного року життя починаючи з моменту досягнення пенсійного віку R. Тоді APV (*актуарна сучасна вартість майбутньої пенсії*) одного працюючого («активного») індивідуума, що вступив у схему в момент 0 в a років, на момент досягнення їм віку x років є

$$\boxed{APV = (aA)(x) = v^{R-x}\frac{s(R)}{s(x)}b(R-a)\ddot{a}_R},$$

де $b(R-a)$ – річна пенсійна виплата учасника, що вступає в схему в момент 0 і, що досягає пенсійного віку у $R-a$ момент, $\ddot{a}_R$ – довічний ануїтет, $s(x)$ – функція дожиття, R – пенсійний вік, a символ зліва від основного символу позначає відношення до активного (працюючого) учасника (не плутати з віком a вступу).

Розмір пенсії b залежить від моменту вступу (або виходу на пенсію), тому що передбачається зміна всіх зарплат згодом.

Внески в пенсійну схему можуть вноситися як працюючими учасниками, так і спонсором (роботодавцем); для стислості ми будемо говорити просто про внески, позначимо C_t сумарний внесок, внесений у момент $t = 0,1,2,...$ Позначимо B_t – пенсії, що виплачує фонд в момент t, F_t – величину накопиченого пенсійного фонду на момент t (до виплати пенсій і надходження внесків). Тоді

$$F_{t+1} = (1+i)(F_t + C_t - B_t).$$

Це основне співвідношення, що описує *динаміку фонду*.

Ключовими поняттями теорії пенсійного фінансування є поняття *нормальної ціни* (normal cost) NC_t і *накопиченої відповідальності* (accrued liability) AL_t. Уявимо собі схему, яка не має ніяких проблем із фінансуванням, тобто має необмежено багатого спонсора, який завжди готовий вносити в схему гроші. Нормальна ціна і накопичена відповідальність являють собою, відповідно, внесок, що актуарій попросив би спонсора внести при обраному методі фінансування, і розміру фонду, який би він підтримував. Нормальна ціна та накопичена відповідальність дають, таким чином, «ідеальні» значення C_t, F_t. Вони повинні, звичайно, задовольняти попередньому рівнянню, тобто

$$AL_{t+1} = (1+i)(AL_t + NC_t - B_t)\,.$$

Це рівняння іноді називають *рівнянням рівноваги*, воно виражає «ідеальний» баланс фонду. На кожен момент часу накопичена відповідальність може бути обчислена як різниця *APV* майбутніх пенсійних коштів і *APV* майбутніх нормальних цін.

У реальності пенсійні схеми не мають ні нескінченно багатих спонсорів, ні «ідеальних», тобто стаціонарних і цілком передбачених демографічних і економічних умов. По першій причині планується поступовий вихід на «ідеальний» режим фінансування або наближення до нього. Різниця

$$UL_t = AL_t - F_t$$

називається нефінансованою схемою. Значення UL_0 називається *початковою нефінансованою відповідальністю*. Це сума, яку у принципі потрібно внести в схему при її організації. Актуарій планує її поступове погашення, таким чином, у схемі може існувати «планова» нефінансована відповідальність. З іншого боку, різноманітні відхилення параметрів (смертності, інвестиційної прибутковості, заробітної плати, внесків) від прогнозних актуарних значень можуть призводити до виникнення додаткової «незапланованої» нефінансованої відповідальності.

Обидва види нефінансованої відповідальності можуть трактуватися як спільно, так і окремо. При першому підході (традиційному для Великобританії) актуарій розробляє план додаткових платежів усієї суми UL_t, незалежно від її джерел. Другий підхід, прийнятий у Північній Америці, складається у виділенні актуарного збитку за період $[t-1,t]$

$$L_t = UL_t - \{\text{"планове" значення } UL_t\} = UL_t - UL_t^A$$

і виробленню окремого плану його погашення. Тут під «плановим» значенням UL_t^A розуміється очікуване актуарне значення, розраховане в момент $t-1$. Це значення, яке виникнуло б при точному виконанні всіх актуарних припущень.

3.2. Індивідуальні методи пенсійного страхування

При індивідуальних методах пенсійного фінансування обчислюються нормальні ціни для кожного учасника окремо. Якщо потрібно визначити, наприклад, нормальну ціну роботодавця, то вона утворюється підсумовуванням індивідуальних нормальних цін, підлягаючих внесенню за кожного з робітників.

Розглянемо індивідуального учасника, що вступає в схему в момент $t=0$ у віці a. Нехай $P(x)$ – нормальна ціна (ідеальний внесок) цього учасника для віку x років; будемо вважати, що внески всіх учасників вносяться після кожного повного пропрацьованого року, тобто якщо a – вік вступу в пенсійну схему, то перший внесок вноситься у віці $(a+1)$. Відповідно до актуарного принципу еквівалентності внесків і зобов'язань, для одержання адекватного рівня внесків *APV* одного учасника потрібно дорівняти *APV* пенсій:

$$P(a+1)vs(a+1)+...+P(x)v^{x-a}s(x)+...+$$
$$+P(R)v^{R-a}s(R)=s(a)(aA)(a)$$

(тут *APV* обчислюються на момент вступу).

У лівій частині стоїть сума доданків, кожен з яких показує «вклад» у суму пенсії, що дається даним роком. Іноді ці величини називають ціною страхового року. Індивідуальні методи фінансування зручно описувати в термінах відносних величин цих доданків, або «часток» загальної пенсії.

Введемо величину

$$\boxed{m(x)=\theta P(x)v^{x-a}s(x)},$$

де коефіцієнт θ визначається з умови нормування

$$\boxed{\sum_{x=a+1}^{R} m(x)=1}.$$

Тоді сума

$$\boxed{M(x)=\sum_{t=a+1}^{x} m(t)}$$

показує частку пенсії, що підлягає оплаті, або «покупці», на момент досягнення віку x; тому $M(x)$ називають *кумулятивною функцією* покупки пенсії. При цьому $m(x)$ – частка пенсії, яку «докупають» у віковій рік x, тобто *інтенсивність покупки пенсії*.

Нормальна ціна

$$\boxed{P(x) = (aA)(x)m(x)},$$

а *накопичена відповідальність*

$$\boxed{V(x) = (aV)(x) = (aA)(x) - \sum_{t=x+1}^{R} APV(P(t)) = (aA)(x)M(x)}.$$

Для одержання останньої формули можна скористатися тим, що актуарна сучасна вартість на момент x внеску $P(x+k)$

$$APV(P(x+k)) = (aA)(x)m(x+k).$$

Найпростішими індивідуальними методами пенсійного фінансування є *нормального віку входження EAN* і *індивідуальні з рівномірними преміями ILP*, при яких внески розкладаються по роках рівномірно ($P(x) = const$) або (частіше) як постійна частка від заробітної плати.

У першому випадку

$$\boxed{m(x) = \theta s(x) v^{x-a}},$$

у другому

$$\boxed{m(x) = \theta s(x) v^{x-a} \omega(x-a, x)},$$

(коефіцієнти θ в цих формулах різні та визначаються, як і вище, з умови нормування), w – ставка заробітної плати.

Розходження між *EAN* і *ILP* методами складається в підході до учасників, що вступають у схему у віках, великих a. При *ILP* сума, необхідна для фінансування майбутньої пенсії, просто розкладається рівномірно по роках, що залишилися до виходу При *EAN* же нормальні ціни для тих, хто вступив пізніше початкового віку, рахуються так само, як для інших працюючих; при необхідності заробітна плата «проектується» до віку a, тобто як би рахується, що учасник працював із віку a.

При цьому виникає, звичайно, нефінансована відповідальність, засіб покриття якої не регламентується даним методом і залежить від правил пенсійної схеми. В нашій спрощеній моделі всі учасники вступають у віці a, тому розходжень між *EAN* і *ILP* методами немає, тому нижче говориться тільки про *EAN* методи.

Названі вище методи – представники сімейства *методів віку входження*, методи *проектованих пенсій*. На практиці майбутній розмір пенсії звичайно залежить від заробітної плати протягом кар'єри і тому не відомий заздалегідь. Зазначені методи засновані на «проектуванні» пенсії і потім «розкладанню» її оплати по роках кар'єри. Проте у випадку відхилень заробітної плати від проектованих значень виникають проблема недо- або перефінансування пенсій. Як правило, на практиці не вдасться зберігати пенсійні відрахування на рівні, наприклад, постійного відсотка від заробітної плати.

У США і Канаді популярні більш гнучкі методи *зароблених пенсій*, засновані на розрахунку «заробітної частини» майбутніх пенсій. У найбільш «чистому» вигляді даний метод «заробленої» у віці x пенсії, де рахується пенсія, розмір якої розраховується шляхом застосування існуючих правил пенсійної схеми. Наприклад, пенсія може розраховуватися шляхом множення числа років стажу на фінальну (середню, середню по деяких роках) заробітну плату з деяким коефіцієнтом. Зупинимося на першому принципі (фінального заробітку). Звичайно методи фінансування усе-таки використовують елементи «проектування». Так, нарощування «заробленої» пенсії пропорційно числу років стажу призводить до популярного методу стандартного кредиту. При цьому $m(x)$ стала

$$m(x) = \frac{1}{R-a},$$

тобто за кожен рік «заробляється» одна й та сама частка пенсії. При цьому $M(x) = \frac{x-a}{R-a}$.

Якщо ж вважати функцію $M(x)$ пропорційної не тільки числу років стажу, але і заробітній платі:

$$M(x) = \frac{x-a}{R-a} \frac{w(x-a,x)}{w(R-a,a)},$$

тоді отримуємо

$$m(x) = \theta((x-a)w(x,x) - (x-1-a)w(x-1,x-1)).$$

Пропонуючи різні форми функції $m(x)$ можна «конструювати» різноманітні методи фінансування, що відповідають тим або іншим бажаним властивостям. Для приклада розглянемо два з запропонованих Купером і Хікменом (1967) методів:

- «лінійний», коли
$$m(x) = \theta(1 + 0,3(x-a)),$$
- «експоненціальний метод із прискоренням»:
$$m(x) = \theta e^{0,05(x-a)}.$$

Якщо взяти коефіцієнт у показнику експоненти від'ємним, то утвориться метод з уповільненням, тобто зі зменшенням темпу «покупки пенсії». Цікаво відзначити, що EAN-методи, описані вище, при яких вносяться рівномірні протягом усієї кар'єри внески, насправді відносяться до методів із «зменшенням», тобто пенсія купується найбільш інтенсивно на початку кар'єри.

Крім зазначених, відзначимо два «граничних» методи фінансування: початкове фінансування, при якому вся необхідна сума для забезпечення пенсії робітника вноситься в момент його вступи в схему (тобто у віці a) і термінальне фінансування, коли ця сума вноситься в момент виходу на пенсію (у віці R).

Якщо NC_t^x і AL_t^x – відповідно нормальна ціна та накопичена відповідальність одного учасника при тому або іншому індивідуальному методі, то сумарна нормальна ціна та накопичена відповідальність утворюються підсумовуванням по всіх учасниках:

$$NC_t = \sum_{x=a+1}^{R} NC_t^x s(t,x),$$

$$AL_t = \sum_{x=a+1}^{\infty} AL_t^x s(t,x).$$

3.3. Колективні методи пенсійного страхування

При групових методах фінансування внески в пенсійну схему визначаються для всієї групи учасників у сукупності, тобто безвідносно до того або іншого конкретного учасника.

Нехай $F = F_t$ – наявний пенсійний фонд, $C = C_t$ – внески, $B = B_t$ – пенсії. Річне збільшення фонду

$$\Delta F = (1+i)C + iF - (1+i)B$$

(передбачається, що внески і пенсії сплачуються на початку року, а фонд перераховується теж на початку року до сплати пенсій і внесків).

Якби пенсійна схема функціонувала в «стаціонарному режимі», тобто без змін фонду, то ліва частина рівняння стала б нулем, тому

$$B = C + dF\ ,$$

де

$$d = \frac{i}{1+i}\ -$$

ставка дисконту. Таке «стаціонарне» функціонування можливо тільки в умовах стаціонарної (зрілої) популяції і без змін пенсій у часі, тому Троубрідж (1952) називає останнє рівняння «рівнянням зрілості». Ясно, що при такому «стаціонарному» функціонуванні

$$F = AL,\ C = NC\ .$$

Припустимо, що пенсійний фонд створюється в 2007 році у вже діючій компанії і припускає деякі зобов’язання по виплаті пенсій усім робітникам, що виходять на пенсію починаючи з 2008 року. Для забезпечення початкової накопиченої відповідальності такому фонду будуть потрібні значні резерви, внесені, як правило, спонсором (роботодавцем) протягом ряду років.

Амортизація цієї початкової нефінансованої накопиченої відповідальності може плануватися протягом якогось терміну, що іноді так чи інакше обмежується законодавчо (наприклад, у Канаді існує погашення визначених видів нефінансованих відповідальностей протягом не більш ніж 15 років). Цей термін визначає, у зроблених вище «ідеальних» припущеннях, вихід на «стаціонарний режим» функціонування, що описується «рівнянням зрілості».

Нехай, не існує росту всіх заробітних плат згодом $\alpha = 0$.

Троубрідж класифікує методи фінансування виходячи з величин внесків C і фонду F по досягненні схемою «стаціонарного режиму», або величин NC, AL. Два крайніх випадки – розподільне фінансування (PAYG), при якому не створюється резервів ($F = 0$) і внески в точності дорівнюють виплатам ($C = B$), і повне фінансування, при якому пенсії виплачуються тільки за рахунок інвестиційного прибутку ($C = 0$).

Розглянемо два групових методу: *агрегатний* і *нормальний досягнутого віку (AAN)*.

Принцип *агрегатного методу* полягає в еквівалентності *APV* майбутніх пенсій та *APV* майбутніх внесків плюс наявний фонд. При цьому внески рахуються так само, якщо б умовний індивідуальний внесок учасника (позначимо його c) був сталим (або складав постійний відсоток від зарплатні). Найбільше важливо те, що при цьому не приймаються до уваги учасники, вступ яких у схему очікується в майбутні роки. При постійному c маємо:

$$c\sum_{x=a+1}^{R} s(x)\ddot{a}_{x:\overline{R-x}|} = PVF - F\ ,$$

де PVB – APV усіх майбутніх пенсій, F – наявний фонд.

Сума в лівій частині є «дійсною вартістю років майбутнього робочого стажу». Для одержання сумарного внеску варто помножити c, отримане з цього рівняння, на число працюючих, внески яких надходять в даний момент,

$$C = cN_{\omega} = c\sum_{x=a+1}^{R} s(t,x)\,.$$

Величину поточної вартості пенсій можна записати як

$$PVB = \sum_{x=a+1}^{R-1}(aA)(x)s(x) + V_0\,,$$

де V_0 – APV пенсій учасників, які вже досягли пенсійного віку. Оскільки правила врахування пенсійних прав учасників, що пробили частину свого стажу ще до створення пенсійної схеми або вже ті, хто знаходиться в пенсійному віці в цей момент, можуть бути самими різноманітними, ця величина може розраховуватися по-різному.

Нормальний метод досягнутого віку (AAN) заснований на застосуванні агрегатного фінансування лише до тієї частини пенсій, що відносять до майбутнього стажу. При цьому розподіл індивідуальної пенсії відносно до майбутнього та минулого стажу здійснюється просто пропорційно стажу. Так, у нашій моделі «зароблена» пенсія учасника безпосередньо перед моментом досягнення їм віку x повинна складати частку

$$\frac{x-a-1}{R-a}$$

від повної пенсії. Цю частку і відносять до минулого стажу. Її *APV* дорівнює

$$\frac{x-a-1}{R-a}(aA)(x).$$

Тому *APV* відносної до майбутнього стажу пенсії всіх учасників

$$g=\sum_{x=a+1}^{R}\frac{x-a-1}{R-a}(aA)(x)s(x).$$

Потрібно також обчислити частку фонду f, що відноситься до майбутнього стажу. Для цього потрібно обчислити фонд, який відноситься до минулого стажу, по unit-credit методі, і відняти його з усього наявного фонду. Іншими словами, f буде накопиченою (із процентним прибутком) сумою внесків понад внески, які відповідають unit-credit методу. Тепер до цих величин, що відносяться до майбутнього стажу, застосовується агрегатний метод:

$$c\sum_{x=a+1}^{R}s(x)\ddot{a}_{x:\overline{R-x}|}=g-f,$$

звідкіля одержуємо c. Сумарний внесок дорівнює $C=cN_{\omega}$.

Приклади розв'язання задач до модуля 1

Приклад 1. Знайти величину майбутньої річної пенсії, якщо людина вносить в пенсійний фонд, що працює за ощадною схемою, 10000 грн. за 15 років до виходу на пенсію. За контрактом пенсія буде сплачуватися 10 років, відсоткова норма 7%.

<u>Розв'язок.</u> Маємо випадок ощадної схеми пенсійного страхування, коли внесок робиться одноразово. Отже, рівняння для знаходження величини річної пенсії:

$$E(1+i)^n = R\frac{1-v^t}{i},$$

де $E = 10000$, $n = 15$, $t = 10$, $i = 0{,}07$, $v = (1+i)^{-1} = (1+0{,}07)^{-1}$.

Звідки маємо:

$$R = \frac{E(1+i)^n i}{1-v^t} = \frac{10000(1+0{,}07)^{15}0{,}07}{1-(1+0{,}07)^{-10}} = 3928{,}24 \text{ грн.}$$

Приклад 2. Знайти величину внеску, який людина повинна вносити до пенсійного фонду, що працює за ощадною схемою, якщо вона вступила до фонду за 20 років до виходу на пенсію, за контрактом пенсія буде сплачуватися 25 років, відсоткова норма 4%, сума щорічної пенсії – 12000.

<u>Розв'язок.</u> Маємо випадок ощадної схеми пенсійного страхування, коли внесок робиться одноразово. Отже, рівняння:

$$E(1+i)^n = R\frac{1-v^t}{i},$$

де $n = 20$, $t = 25$, $i = 0{,}04$, $v = (1+i)^{-1} = (1+0{,}04)^{-1}$, $R = 12000$.

Звідки маємо:

$$E = \frac{R(1-v^t)}{(1+i)^n i} = \frac{12000(1-(1+0,04)^{-25})}{(1+0,04)^{20}0,04} = 85556{,}6 \text{ грн.}$$

Приклад 3. Знайти величину майбутньої річної пенсії, якщо людина вносить в пенсійний фонд, що працює за ощадною схемою, 1000 грн. в кінці кожного року протягом 20 років до виходу на пенсію. За контрактом пенсія буде сплачуватися 15 років, відсоткова норма 3%.

Розв'язок. Маємо випадок ощадної схеми пенсійного страхування, коли внески робляться постійно в кінці кожного року. Отже, рівняння для знаходження величини річної пенсії:

$$E_{річ}\frac{(1+i)^n-1}{i} = R\frac{(1-v^t)}{i},$$

де $E_{річ}=1000$, $n=20$, $t=15$, $i=0,03$, $v=(1+i)^{-1}=(1+0,03)^{-1}$.

Звідки маємо:

$$R = \frac{E_{річ}((1+i)^n-1)}{1-v^t} = \frac{1000((1+0,03)^{20}-1)}{1-(1+0,03)^{-15}} = 2250{,}84 \text{ грн.}$$

Приклад 4. Знайти величину щорічного внеску, який людина повинна вносити до пенсійного фонду, що працює за ощадною схемою, якщо вона вступила до фонду за 25 років до виходу на пенсію, за контрактом пенсія буде сплачуватися 30 років, відсоткова норма 5%, сума щорічної пенсії – 15000.

Розв'язок. Маємо випадок ощадної схеми пенсійного страхування, коли внески робляться постійно в кінці кожного року. Отже, рівняння:

$$E_{річ}\frac{(1+i)^n-1}{i}=R\frac{(1-v^t)}{i},$$

де $R=15000$, $n=25$, $t=30$, $i=0{,}05$, $v=(1+i)^{-1}=(1+0{,}05)^{-1}$.

Звідки маємо:

$$E_{річ}=\frac{R(1-v^t)}{(1+i)^n-1}=\frac{15000(1-(1+0{,}05)^{-30})}{(1+0{,}05)^{25}-1}=4831{,}36\ \text{грн.}$$

Приклад 5. Знайти величину майбутньої річної пенсії, якщо чоловік вносить в пенсійний фонд, що працює за страховою схемою, 10000 грн. за 15 років до виходу на пенсію. За контрактом пенсія буде сплачуватися довічно; відсоткова норма 7%; пенсія буде сплачуватися наприкінці року. Розв'язати задачу для випадку, коли чоловік вступив в фонд, зробив внесок і одразу починає отримувати пенсію.

Розв'язок. Маємо випадок страхової схеми пенсійного страхування, коли внесок робиться одноразово. $E_x=10000$, $n=15$, $i=0{,}07$, $v=(1+i)^{-1}=(1+0{,}07)^{-1}$.

1. Чоловік вступив в фонд та отримує зразу пенсію, пенсія сплачується довічно, наприкінці року. Маємо ануїтет постнумерандо довічний, негайний, тобто

$$E_x=R_1a_x=R_1\frac{N_{x+1}}{D_x},$$

$$R_1=\frac{E_x}{a_x}=\frac{E_xD_x}{N_{x+1}}.$$

В даному випадку чоловік вступив у фонд у віці 60 років, тобто з ТТЖ (див. додаток А) для чоловіків маємо $l_x=l_{60}=65{,}130$. Отже, за означенням

$$D_x = l_x v^x ,$$

$$N_x = \sum_{j=x}^{\omega} D_j = \sum_{j=x}^{\omega} l_j v^j .$$

Таким чином, для даного випадку:

$$D_{60} = 65{,}130(1+0{,}07)^{-60} = 1{,}12 ,$$

$$N_{60+1} = 8{,}86 .$$

Майбутня пенсія в даному випадку:

$$R_1 = \frac{E_x D_x}{N_{x+1}} = \frac{10000 \cdot 1{,}12}{8{,}86} = 1268{,}50 \text{ грн.}$$

2. Чоловік вступив в фонд у віці 45 років, пенсія сплачується довічно, наприкінці року. Маємо ануїтет постнумерандо довічний, відкладений на 15 років, тобто

$$E_x = R_2 \; {}_{n|}a_x = R_2 \frac{N_{x+n+1}}{D_x} ,$$

$$R_2 = \frac{E_x}{{}_{n|}a_x} = \frac{E_x D_x}{N_{x+n+1}} .$$

В даному випадку чоловік вступив у фонд у віці 45 років, тобто з ТТЖ для чоловіків маємо $l_x = l_{45} = 84{,}204$.

Отже, для даного випадку:

$$D_{45} = 84{,}204(1+0{,}07)^{-45} = 4{,}01 ,$$

$$N_{60+1} = 8{,}86 .$$

Таким чином, майбутня пенсія в даному випадку:

$$R_2 = \frac{E_x D_x}{N_{x+n+1}} = \frac{10000 \cdot 4{,}01}{8{,}86} = 4524{,}80 \text{ грн.}$$

Приклад 6. Знайти величину майбутньої річної пенсії, якщо жінка вносить в пенсійний фонд, що працює за страховою схемою, 1000 грн. щорічно на початку року протягом 15 років за 20 років до виходу на пенсію. За контрактом пенсія буде сплачуватися 15 років; відсоткова норма 3%; пенсія буде сплачуватися на початку року.

Розв'язок. Маємо випадок страхової схеми пенсійного страхування, коли внесок робиться щорічно. $E_{річ} = 1000$, $n = 20$, $t_1 = 15$, $t_2 = 15$, $i = 0,03$, $v = (1+i)^{-1} = (1+0,03)^{-1}$.

Маємо по-перше, ануїтет пренумерандо негайний, обмежений на 15 років, по-друге, ануїтет пренумерандо, відкладений на 20 років, обмежений на 15 років, тобто

$$E_{річ}\ddot{a}_{xt_1} = R\ {}_{n|}\ddot{a}_{xt_2},$$

$$R = \frac{E_{річ}\ddot{a}_{xt_1}}{{}_{n|}\ddot{a}_{xt_2}} = \frac{E_{річ}(N_x - N_{x+t_1})}{N_{x+n} - N_{x+n+t_2}}.$$

В даному випадку жінка вступила в фонд у віці 35 років, тобто з ТТЖ для жінок маємо

$$l_x = l_{35} = 94,752.$$

Таким чином, для даного випадку:

$$N_x = N_{35} = 790,18,$$

$$N_{x+t_1} = N_{50} = 382,01,$$

$$N_{x+n} = N_{55} = 285,37,$$

$$N_{x+n+t_2} = N_{70} = 87,09.$$

Майбутня пенсія в даному випадку:

$$R = 2058,52 \text{ грн.}$$

Приклад 7. Знайти величину майбутньої річної пенсії, якщо жінка вносить в пенсійний фонд, що працює за страховою схемою, 1200 грн. щорічно наприкінці року протягом 10 років за 15 років до виходу на пенсію. За контрактом пенсія буде сплачуватися довічно; відсоткова норма 5%; пенсія буде сплачуватися на початку року.

Розв'язок. Маємо випадок страхової схеми пенсійного страхування, коли внесок робиться щорічно. $E_{річ} = 1200$, $n = 15$, $t = 10$, $i = 0{,}05$, $v = (1+i)^{-1} = (1+0{,}05)^{-1}$.

Маємо по-перше, ануїтет постнумерандо негайний, обмежений на 10 років, по-друге, ануїтет пренумерандо, відкладений на 15 років, довічний, тобто

$$E_{річ} a_{xt} = R\ {}_{n|}\ddot{a}_x,$$

$$R = \frac{E_{річ} a_{xt}}{{}_{n|}\ddot{a}_x} = \frac{E_{річ}(N_{x+1} - N_{x+t+1})}{N_{x+n}}.$$

В даному випадку жінка вступила в фонд у віці 40 років, тобто з ТТЖ для жінок маємо

$$l_x = l_{40} = 93{,}89.$$

Таким чином, для даного випадку:

$$N_{x+1} = N_{41} = 210{,}70,$$

$$N_{x+t+1} = N_{51} = 109{,}24,$$

$$N_{x+n} = N_{55} = 81{,}54.$$

Майбутня пенсія в даному випадку:

$$R = 1493{,}21 \text{ грн.}$$

Приклад 8. Знайти величину одноразового пенсійного внеску, який повинен сплатити чоловік, якщо він вступив в пенсійний фонд, що працює за страховою схемою, у віці 30 років. За контрактом пенсія буде сплачуватися 20 років у розмірі 10000 грн. на початку року; відсоткова норма 5%.

<u>Розв'язок.</u> Маємо випадок страхової схеми пенсійного страхування, коли внесок робиться одноразово. $R = 10000$, $n = 30$, $t = 20$, $i = 0{,}05$, $v = (1+i)^{-1} = (1+0{,}05)^{-1}$.

Отже, ануїтет пренумерандо, відкладений на 30 років, обмежений на 20 років, тобто

$$E_x = R\,{}_n|\ddot{a}_{xt} = R\frac{N_{x+n} - N_{x+n+t}}{D_x}.$$

В даному випадку чоловік вступив у фонд у віці 30 років, тобто з ТТЖ для чоловіків маємо

$$l_x = l_{30} = 92{,}216.$$

Отже,

$$D_x = l_x v^x,$$

$$N_x = \sum_{j=x}^{\omega} D_j = \sum_{j=x}^{\omega} l_j v^j,$$

для даного випадку:

$$D_{30} = 92{,}216(1+0{,}04)^{-30} = 21{,}34,$$

$$N_{x+n} = N_{30+30} = N_{60} = 35{,}24,$$

$$N_{x+n+t} = N_{30+30+20} = N_{80} = 1{,}78.$$

Таким чином,

$$E_x = 15682{,}26 \text{ грн.}$$

Приклад 9.. Знайти величину щорічного пенсійного внеску, який повинен сплачувати чоловік наприкінці кожного року до виходу на пенсію, якщо він вступив в пенсійний фонд, що працює за страховою схемою, у віці 30 років. За контрактом пенсія буде сплачуватися 20 років у розмірі 10000 грн. на початку року; відсоткова норма 5%.

Розв'язок. Маємо випадок страхової схеми пенсійного страхування, коли внесок робиться щорічно.

$$R = 10000,\ n = 30,\ t_1 = 30,\ t_2 = 20,\ i = 0{,}05,$$

$$v = (1+i)^{-1} = (1+0{,}05)^{-1}.$$

Маємо по-перше, ануїтет постнумерандо негайний, обмежений на 30 років, по-друге, ануїтет пренумерандо, відкладений на 30 років, обмежений на 20 років, тобто

$$E_{річ} a_{xt_1} = R\ {}_{n|}\ddot{a}_{xt_2},$$

$$E_{річ} = \frac{R\ {}_{n|}\ddot{a}_{xt_2}}{a_{xt_1}} = \frac{R(N_{x+n} - N_{x+n+t_2})}{N_{x+1} - N_{x+t_1+1}}.$$

В даному випадку чоловік вступив у фонд у віці 30 років. Маємо:

$$N_{x+1} = N_{31} = 333{,}90,$$

$$N_{x+t_1+1} = N_{30+30+1} = N_{61} = 31{,}75,$$

$$N_{x+n+t_2} = N_{30+30+20} = N_{80} = 1{,}78,$$

$$N_{x+n} = N_{60} = 35{,}24.$$

Щорічний внесок:

$$E_{річ} = 1107{,}44 \text{ грн.}$$

Приклад 10. Знайти нормальну ціну та накопичену відповідальність для кожного року для чоловіка, що вступив у фонд у віці 25 років. Фонд працює за індивідуальним методом з рівномірними преміями *ILP*, де внески розподіляються рівномірно як постійна частка від ставки заробітної плати. Ставка заробітної плати чоловіка на момент вступу до фонду складає 3600 грн. на рік, при цьому в подальшому прогнозується індексація заробітної плати у розмірі 5% кожен рік. Відсоткова норма 3%. Пенсія буде сплачуватися на початку року у розмірі 12000 грн. довічно.

Розв'язок. Маємо випадок індивідуального методу з рівномірними преміями *ILP*. Норма відсотка $i = 0{,}03$, дисконтний множник $v = (1+i)^{-1} = (1+0{,}03)^{-1}$. Рік вступу в фонд $a = 25$, рік виходу на пенсію для чоловіка $R = 60$, індексація $\alpha = 0{,}05$, заробітна плата $\omega(0,a) = 3600$, пенсія $b = 12000$.

Нормальна ціна
$$P(x) = (aA)(x)m(x),$$
а накопичена відповідальність
$$V(x) = (aV)(x) = (aA)(x)M(x).$$

Інтенсивність покупки пенсії при методі *ILP* даної задачі:
$$m(x) = \theta s(x) v^{x-a} \omega(x-a, x),$$
де функція виживання:
$$s(x) = \frac{l_x}{l_0},$$
$l_0 = 100$ для ТТЖ (додаток А); $\omega(x-a,x)$ – ставка заробітної плати (змінюється кожен рік на $\alpha = 5\% = 0{,}05$), θ – коефіцієнт, що визначається з умов нормування:
$$\sum_{x=a+1}^{R} m(x) = 1 \Rightarrow \theta = \frac{1}{\sum_{x=a+1}^{R} s(x) v^{x-a} \omega(x-a,x)}.$$

Кумулятивна функція покупки пенсії
$$M(x) = \sum_{t=a+1}^{x} m(t).$$

Актуарна сучасна вартість майбутньої пенсії

$$APV = (aA)(x) = v^{R-x}\frac{s(R)}{s(x)}b(R-a)\ddot{a}_R,$$

де

$$b(R-a) = b = 12000,$$

ануїтет пренумерандо, негайний, довічний з віку виходу на пенсію:

$$\ddot{a}_R = \frac{N_x}{D_x} = \frac{N_R}{D_R}.$$

З ТТЖ для чоловіків маємо

$$l_x = l_R = l_{60} = 65{,}130.$$

Отже, за означенням

$$D_x = l_x v^x,$$

$$N_x = \sum_{j=x}^{\omega} D_j = \sum_{j=x}^{\omega} l_j v^j.$$

Таким чином,

$$D_{60} = 65{,}130(1+0{,}03)^{-60} = 11{,}05,$$

$$N_{60} = 129{,}19,$$

$$\ddot{a}_R = 11{,}69.$$

Результати обчислень зведемо в таблицю.

Таблиця 1.

x	$s(x)$	ω	$m(x)'$	$m(x)$	$M(x)$	$(aA)(x)$	$P(x)$	$V(x)$
25		3600,00						
26	0,93	3780,00	3428,42	0,023	0,023	35799,04	825,60	825,60
27	0,93	3969,00	3484,74	0,023	0,047	36981,47	866,88	1719,76
28	0,93	4167,45	3541,35	0,024	0,070	38209,88	910,23	2687,11
29	0,93	4375,82	3598,06	0,024	0,095	39488,01	955,74	3732,73
30	0,92	4594,61	3654,85	0,025	0,119	40818,20	1003,53	4862,00
31	0,92	4824,34	3711,59	0,025	0,144	42203,84	1053,70	6080,75
32	0,91	5065,56	3768,34	0,025	0,169	43646,70	1106,39	7395,03
33	0,91	5318,84	3825,18	0,026	0,195	45148,06	1161,71	8811,11
34	0,91	5584,78	3882,08	0,026	0,221	46710,67	1219,79	10335,86
35	0,90	5864,02	3939,04	0,026	0,248	48336,89	1280,78	11976,48
36	0,90	6157,22	3995,96	0,027	0,275	50030,85	1344,82	13741,02
37	0,89	6465,08	4052,60	0,027	0,302	51798,16	1412,06	15638,47
38	0,89	6788,34	4108,55	0,028	0,330	53647,43	1482,67	17679,45
39	0,88	7127,75	4163,40	0,028	0,358	55587,70	1556,80	19875,67
40	0,88	7484,14	4216,71	0,028	0,386	57629,08	1634,64	22240,21
41	0,87	7858,35	4268,13	0,029	0,415	59781,57	1716,37	24787,27
42	0,86	8251,27	4317,51	0,029	0,444	62052,74	1802,19	27531,15
43	0,86	8663,83	4364,76	0,029	0,473	64450,13	1892,30	30487,11
44	0,85	9097,02	4409,98	0,030	0,503	66978,71	1986,91	33670,13
45	0,84	9551,87	4453,25	0,030	0,533	69644,33	2086,26	37096,39
46	0,83	10029,47	4494,43	0,030	0,563	72456,47	2190,57	40784,86
47	0,82	10530,94	4533,28	0,030	0,593	75427,28	2300,10	44757,20
48	0,82	11057,49	4569,26	0,031	0,624	78575,09	2415,11	49040,15
49	0,81	11610,36	4601,72	0,031	0,655	81921,78	2535,86	53664,75
50	0,80	12190,88	4629,94	0,031	0,686	85493,61	2662,65	58667,21
51	0,78	12800,42	4653,30	0,031	0,718	89317,56	2795,79	64087,05
52	0,77	13440,44	4671,47	0,031	0,749	93418,66	2935,58	69965,25
53	0,76	14112,46	4684,22	0,032	0,780	97822,77	3082,35	76346,03
54	0,75	14818,09	4691,42	0,032	0,812	102556,28	3236,47	83276,78
55	0,73	15558,99	4692,96	0,032	0,844	107648,61	3398,30	90810,11
56	0,72	16336,94	4688,55	0,032	0,875	113137,36	3568,21	99008,51
57	0,70	17153,79	4677,54	0,031	0,907	119073,93	3746,62	107950,33
58	0,69	18011,48	4659,03	0,031	0,938	125524,25	3933,95	117732,02
59	0,67	18912,05	4632,16	0,031	0,969	132565,07	4130,65	128466,42
60	0,65	19857,66	4596,28	0,031	1,000	140280,00	4337,18	140280,00
θ			$6,7\cdot 10^{-6}$					

Питання для самоконтролю до модуля 1

Дати розгорнуту відповідь на питання:

1. Комутативні функції.
2. Страхові ануїтети постнумерандо.
3. Страхові ануїтети пренумерандо.
4. Ощадна схема пенсійного страхування.
5. Страхова схема пенсійного страхування.
6. Загальна теорія пенсійного страхування.
7. Індивідуальні методи пенсійного страхування.
8. Колективні методи пенсійного страхування.

Дати означення (сформулювати) чи записати формули знаходження:

1. Страховий ануїтет постнумерандо, приклад.
2. Страховий ануїтет пренумерандо, приклад.
3. Функція D_x.
4. Функція N_x.
5. Ощадна схема: рівняння для одноразових внесків.
6. Ощадна схема: рівняння для декількох внесків.
7. Страхова схема: рівняння для одноразових внесків (приклад).
8. Страхова схема: рівняння для декількох внесків (приклад).
9. Актуарна сучасна вартість майбутньої пенсії APV.
10. Інтенсивність покупки пенсії $m(x)$.
11. Кумулятивна функція покупки пенсії $M(x)$.
12. Нормальна ціна в індивідуальних методах пенсійного страхування $P(x)$.
13. Накопичена відповідальність в індивідуальних методах пенсійного страхування $V(x)$.
14. Інтенсивність покупки пенсії в методі ILP $m(x)$.

Задачі до модуля 1

Основні задачі

1. Знайти величину внеску, який людина повинна вносити до пенсійного фонду, що працює за ощадною схемою, якщо вона вступила до фонду за 25 років до виходу на пенсію, за контрактом пенсія буде сплачуватися 20 років, відсоткова норма 4%, сума щорічної пенсії – 15000 грн.
2. Знайти величину майбутньої річної пенсії, якщо людина вносить в пенсійний фонд, що працює за ощадною схемою, 2000 грн. в кінці кожного року протягом 30 років до виходу на пенсію. За контрактом пенсія буде сплачуватися 25 років, відсоткова норма 3%.
3. Знайти величину внеску, який людина повинна вносити до пенсійного фонду, що працює за ощадною схемою, якщо вона вступила до фонду за 20 років до виходу на пенсію, перша виплата буде здійснена через 2 роки, за контрактом пенсія буде сплачуватися довічно, відсоткова норма 5%, сума щорічної пенсії – 20000 грн.
4. Знайти величину одноразового пенсійного внеску, який повинна сплатити жінка, якщо вона вступила в пенсійний фонд, що працює за страховою схемою, у віці 25 років. За контрактом пенсія буде сплачуватися довічно у розмірі 12000 грн. наприкінці року; відсоткова норма 5%.
5. Знайти величину щорічного пенсійного внеску, який повинен сплачувати чоловік на початку кожного року до виходу на пенсію, якщо він вступив в пенсійний фонд, що працює за страховою схемою, у віці 25 років. За контрактом пенсія буде сплачуватися

15 років у розмірі 13000 грн. на початку року; відсоткова норма 4%.

6. Знайти величину майбутньої річної пенсії, якщо чоловік вносить в пенсійний фонд, що працює за страховою схемою, 1500 грн. щорічно на початку року протягом 20 років за 25 років до виходу на пенсію. За контрактом пенсія буде сплачуватися 20 років; відсоткова норма 4%; пенсія буде сплачуватися наприкінці року.
7. Знайти величину щорічного пенсійного внеску, який повинен сплачувати чоловік наприкінці кожного року до виходу на пенсію, якщо він вступив в пенсійний фонд, що працює за страховою схемою, у віці 20 років. За контрактом пенсія буде сплачуватися 25 років у розмірі 15000 грн. на початку року; відсоткова норма 5%.
8. Знайти величину пенсійних внесків, які повинна сплачувати жінка, якщо вона вступила в пенсійний фонд, що працює за страховою схемою, у віці 25 років та буде сплачувати внески 15 років. За контрактом пенсія буде сплачуватися довічно у розмірі 17000 грн. наприкінці року; відсоткова норма 6%.
9. Знайти величину майбутньої річної пенсії, якщо жінка вносить в пенсійний фонд, що працює за страховою схемою, 2000 грн. щорічно наприкінці року протягом 25 років до виходу на пенсію. За контрактом пенсія буде сплачуватися довічно; відсоткова норма 3%; пенсія буде сплачуватися наприкінці року.
10. Знайти величину майбутньої річної пенсії, якщо чоловік вносить в пенсійний фонд, що працює за страховою схемою, 15000 грн. за 20 років до виходу на пенсію. За контрактом пенсія буде сплачуватися

довічно; відсоткова норма 6%; пенсія буде сплачуватися на початку року. Розв'язати задачу для випадку, коли чоловік вступив в фонд, зробив внесок і одразу починає отримувати пенсію.

11. Знайти величину внеску, який повинна вносити жінка в пенсійний фонд, що працює за страховою схемою, за 25 років до виходу на пенсію. За контрактом пенсія буде сплачуватися 20 років у розмірі 15000 на початку року; відсоткова норма 7%. Розв'язати задачу для випадку, коли жінка вступила в фонд, зробила внесок і одразу починає отримувати пенсію.
12. Знайти нормальну ціну та накопичену відповідальність для кожного року для чоловіка, що вступив у фонд у віці 30 років. Фонд працює за індивідуальним методом з рівномірними преміями *ILP*, де внески розподіляються рівномірно як постійна частка від ставки заробітної плати. Ставка заробітної плати чоловіка на момент вступу до фонду складає 2800 грн. на рік, при цьому в подальшому прогнозується індексація заробітної плати у розмірі 8% кожен рік. Відсоткова норма 4%. Пенсія буде сплачуватися на початку року у розмірі 15000 грн. довічно.
13. Знайти нормальну ціну та накопичену відповідальність для кожного року для жінки, що вступила у фонд у віці 25 років. Фонд працює за індивідуальним методом з рівномірними преміями *ILP*, де внески розподіляються рівномірно як постійна частка від ставки заробітної плати. Ставка заробітної плати жінки на момент вступу до фонду складає 4500 грн. на рік, при цьому в подальшому прогнозується індексація заробітної плати у розмірі 4% кожен рік.

Відсоткова норма 3%. Пенсія буде сплачуватися на початку року у розмірі 10000 грн. довічно.

14. Знайти нормальну ціну та накопичену відповідальність для кожного року для жінки, що вступила у фонд у віці 20 років. Фонд працює за індивідуальним методом «зароблених пенсій». Ставка заробітної плати жінки на момент вступу до фонду складає 4500 грн. на рік, при цьому в подальшому прогнозується індексація заробітної плати у розмірі 5% кожен рік. Відсоткова норма 6%. Пенсія буде сплачуватися наприкінці року у розмірі 12000 грн. протягом 20 років.
15. Знайти нормальну ціну та накопичену відповідальність для кожного року для чоловіка, що вступив у фонд у віці 35 років. Фонд працює за індивідуальним методом «зароблених пенсій». Ставка заробітної плати на момент вступу до фонду складає 6000 грн. на рік, при цьому в подальшому прогнозується індексація заробітної плати у розмірі 8% кожен рік. Відсоткова норма 5%. Пенсія буде сплачуватися на початку року у розмірі 15000 грн. довічно.

Додаткові задачі

1. Яким повинен бути внесок у пенсійний фонд, якщо пенсія буде виплачуватися протягом 10 років по 1000 грн. щорічно. Перша виплата через рік. Ефективна ставка 25% річних.
2. Яким повинен бути внесок у пенсійний фонд, якщо пенсія буде виплачуватися довічно по 2000 грн. щорічно. Перша виплата через 3 роки. Ефективна ставка 15% річних.
3. Внесок у пенсійний фонд 5000 грн. Перша виплата через 3 роки. Потім пенсія виплачується протягом

10 років. Ефективна ставка 15%. Визначте річну пенсію.

4. Знайти величину внеску, який людина повинна вносити до пенсійного фонду, що працює за ощадною схемою, якщо вона вступила до фонду за 25 років до виходу на пенсію, перший внесок буде зроблено через два роки, за контрактом пенсія буде сплачуватися 25 років, відсоткова норма 4%, сума щорічної пенсії – 12000 грн.
5. Знайти величину пенсійних внесків, які повинна сплачувати жінка, якщо вона вступила в пенсійний фонд, що працює за страховою схемою, у віці 20 років, виплати здійснюються на початку кожного місяця. За контрактом пенсія буде сплачуватися довічно у розмірі 600 грн. наприкінці кожного місяця; відсоткова норма 6%.
6. Знайти величину пенсійних внесків, які повинен сплачувати чоловік, якщо він вступив в пенсійний фонд, що працює за страховою схемою, у віці 25 років, виплати здійснюються наприкінці кожного кварталу, перший внесок буде зроблено через 2 роки після вступу до фонду. За контрактом пенсія буде сплачуватися 20 років у розмірі 700 грн. на початку кожного місяця; відсоткова норма 5%.

МОДУЛЬ 2. СТРАХОВІ КОМПАНІЇ

- *Поведінка страхових компаній.*
- *Перестрахування.*
- *Розорення страхових компаній.*

Тема 4. Поведінка страхових компаній
4.1. Модель страхової компанії

Означення Грошові суми або величини $p_1,...,p_n$, які сплачують застраховані страховій компанії, називаються *страховими внесками* (*преміями*).

Означення. Величини $b_1,...,b_m$, $m \le n$, які сплачує компанія в результаті настання m страхових випадків називаються *страховими виплатами*.

Ясно, що величини $b_j >> p_j$, інакше ніхто не буде страхуватися. Купивши за p страховий поліс, застрахований позбавив себе від ризику фінансових утрат, зв'язаних з невизначеністю страхового випадку. Цей ризик прийняла на себе страхова компанія, для якої ризик полягає у випадковості позову, що може бути їй пред'явлений.

У страховій математиці вирішуються наступні основні проблеми.

1. Знаходження «правильного» співвідношення між премією p і виплатою b, $p << b$. Сюди входять, наприклад, розрахунок нетто-премій, брутто-премій, розрахунок виплат, що може дозволити собі страхова компанія і т.д. Помітимо, що нетто-премія відповідає нульовому середньому прибутку компанії.
2. Розрахунок ймовірності розорення, яка є основою для прийняття найважливіших рішень.

Якщо позначити через U капітал компанії або її резерв, а через

$$S = b_1 + ... + b_m -$$

суму виплат, де b_j – позов j-го застрахованого до компанії, то грубо ймовірність нерозорення дорівнює $P(S \le U)$, а ймовірність розорення

$$P(S > U) + P(S \le U) = 1.$$

4.2. Ймовірність нерозорення страхової компанії

Вирішення зазначених проблем проілюструємо на прикладі найпростішої моделі роботи страхової компанії, побудованої з використанням лише центральної граничної теореми теорії ймовірностей.

Розглянемо наступну ідеалізовану схему. Нехай на початку року у фірмі застрахувалося n чоловіків віку $x = 26$ років. Будемо вважати, що кожен клієнт сплачує премію p, і, отже, фірма одержала сумарний прибуток $p \cdot n$, що і буде складати її резерв $U = pn$. Позначимо через $b_i = 1$ позови, пропоновані до фірми, якщо протягом року i-й клієнт помре.

Скориставшись таблицею смертності з Додатка А, для кожного $i = 1,...,n$ знаходимо

$$P(b_i = 1) = q_{26} = 0,00293,$$

$$P(b_i = 0) = p_{26} = 1 - 0,00293 = 0,99707.$$

Ймовірність того, що компанія не розориться, дорівнює

$$P\left\{\sum_{i=1}^{n} b_i \le U\right\} = P\left\{\frac{\sum_{i=1}^{n} b_i - M\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right)}{\sqrt{D\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right)}} \le \frac{U - M\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right)}{\sqrt{D\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right)}}\right\}.$$

З огляду на дискретність випадкових величин b_i, для будь-яких $i = 1,...,n$ маємо

$$M(b_i) = 1 \cdot q_{26} + 0 \cdot p_{26} = 0,00293,$$

$$D(b_i) = M(b_i^2) - (M(b_i))^2 = 0,00293 - (0,00293)^2 = 0,00292.$$

Позови b_i звичайно на практиці незалежні, тому маємо:

$$P\left\{\frac{\sum_{i=1}^{n} b_i - 0,00293n}{\sqrt{0,00292n}} \le \frac{U - 0,00293n}{\sqrt{0,00292n}}\right\}.$$

Для числа застрахованих $n = 3071$, одержуємо

$$nM(b_1) = 3071 \cdot 0,00293 = 9,$$

$$nD(b_1) = 3071 \cdot 0,00292 \approx 9,$$

тобто середнє та дисперсія випадкової величини S збігається, що вказує на пуассоновість розподілу S. Скористаємося центральною граничною теоремою, у силу якої

$$P\left\{\frac{\sum_{i=1}^{n} b_i - 9}{3} \le \frac{U - 9}{3}\right\} \approx 2\Phi\left(\frac{U - 9}{3}\right),$$

де

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{u^2}{2}} du \; -$$

інтеграл ймовірностей (функція розподілу стандартного нормального закону, див. Додаток В).

Нехай керівництво компанії влаштовує ймовірність нерозорення 0,95. Тоді, вирішуючи відносно $\frac{U-9}{3}$ рівняння

$$2\Phi\left(\frac{U-9}{3}\right) = 0{,}95,$$

маємо

$$\frac{U-9}{3} = x_{0{,}475},$$

де $x_{0{,}475} = 1{,}96$ – квантіль рівня 0,95 стандартного нормального закону.

Отже, страхова компанія в цьому випадку повинна мати резерв

$$U = 3 \cdot 1{,}96 + 9 \approx 14{,}88,$$

а плата за страховку (премія) повинна скласти 0,00485 частину від позову $b = 1$, тому що

$$p = \frac{U}{n} = \frac{14{,}88}{3071} = 0{,}00485.$$

Якщо $b = 100000$ грн., то премія

$$p = 100000 \cdot 0{,}00485 \approx 485 \text{ грн. у рік.}$$

Тема 5. Перестрахування
5.1. Термінологія перестрахування

Означення. *Перестрахування* – це така система економічних відносин, у процесі яких страховик, приймаючи на страхування ризики різної величини, частину відповідальності по них, у відповідності зі своїми фінансовими можливостями, передає на визначених погоджених умовах іншим страховикам з метою створення збалансованого портфеля власних активів і забезпечення тим самим фінансової стійкості і рентабельності страхових операцій.

Економічною сутністю перестрахування є перерозподіл між страховими організаціями створеного первинного страхового фонду.

Конкретний розмір відповідальності, переданий страховою компанією іншому страховику (перестраховику), обумовлюється її фінансовими можливостями. Діяльність перестраховиків будується на основі закону великих чисел: чим більшу кількість однорідних ризиків прийнято на страхування, тим стійкіший страховий портфель даного страховика, і тим самим у більшому ступені результати страхових операцій піддаються прогнозуванню. Важливо домогтися наповнення страхового портфеля як можна більшою кількістю майже ідентичних ризиків. Значимість перестраховика полягає не в тому, щоб знизити розміри збитків, а щоб зробити більш комфортною ліквідацію наслідків цих збитків.

Принцип відшкодування збитків, як і в страхуванні, є одним з основних у перестрахувальному договорі. На його основі будується сам договір, який припускає, що при настанні страхового випадку цедент (страховик, що прийняв на страхування ризик і передав його цілком або частково в перестрахування іншому страховикові) виплатив належне страхове відшкодування страховикові, зобов'язавши при цьому перестраховика (цесіонарія) виплатити цеденту часткове відшкодування, пропорційне його частці участі в цьому ризику. Тільки факт виплати цедентом компенсації страховикові або його обов'язок зробити таку виплату в залежності від умов договору дозволяє йому виставляти вимоги до цесіонарія, і тільки в цьому випадку настає відповідальність останнього.

Договір перестрахування укладається між цедентом і цесіонарієм щодо страхового інтересу, у той час як оригінальний договір, укладений із страховиком, є основою для договору перестрахування. Це вказує на те, що укладання договору перестрахування не встановлює ніяких юридичних прав між страховиком і перестраховиком.

На актуарії перестрахувальної компанії лежить відповідальність за проведення найбільш ефективної перестрахувальної політики. Складність цього завдання пояснюється певною суперечливістю самого процесу перестрахування. З одного боку, перестрахування забезпечує фінансову стійкість страхових операцій, а з іншого – супроводжується передачею перестраховикові частини внесків, які надійшли, що, у принципі, погіршує фінансово-економічні результати діяльності страхової компанії.

Нехай сукупність незалежних ризиків X_i, для яких P_i – відповідні чисті премії, тобто математичне очікування вартості страхових випадків, а σ_i – відповідне стандартне відхилення, тоді сукупність ризиків є випадковою величиною з математичним очікуванням

$$U = \sum P_i$$

і дисперсією

$$T^2 = \sum \sigma_i^2 .$$

Сума S_n, реально витрачена страховиком, за теоремою Чебишева така, що

$$P(|S_n - U| < \alpha T) \geq 1 - \frac{1}{\alpha^2} .$$

Якщо позначити через r відношення T/U, тобто середній відносний ризик, то r в деякому роді характеризує відносне відхилення

$$\frac{S_n - U}{U} .$$

Якщо для спрощення припускають, що всі ризики мають ту саму ставку чистої премії π, і якщо C_i – це страхова сума по i-му ризику, одержують

$$P_i = \pi \cdot C_i ,$$

$$U = \sum P_i = \pi \sum C_i .$$

Якщо t – коефіцієнт середньоквадратичного відхилення, для кожного ризику одержуємо

$$\sigma_i = tC_i$$

і

$$T^2 = t^2 \sum C_i^2 .$$

Якщо C – середня страхова сума, то

$$C = \frac{1}{n} \sum C_i .$$

Можна записати

$$C_i = C + \xi_i ,$$

де

$$\sum \xi_i = 0.$$

Тоді

$$\sum C_i^2 = nC^2 + \sum \xi_i^2$$

і

$$T^2 = t^2(nC^2 + \sum \xi_i^2).$$

Розкид значень у послідовності чисел

$$C_1, C_2, ..., C_i, ..., C_n$$

характеризується числом

$$\delta^2 = \frac{1}{n} \sum \xi_i^2,$$

а відносний розкид – відношенням

$$\lambda = \frac{\delta}{C}.$$

Звідси

$$\sum \xi_i^2 = nC^2 \lambda^2$$

і

$$T^2 = t^2(nC^2 + nC^2 \lambda^2).$$

У той же час:

$$U = \pi n C;$$

$$r = \frac{T}{U} = \frac{t \cdot C\sqrt{n + n\lambda^2}}{\pi \cdot n \cdot C} = \frac{t}{\pi}\sqrt{\frac{1+\lambda^2}{n}},$$

де r тим менше, чим:

- менше величина λ, тобто, чим менше «розкидані» значення страхових сум,
- більше n, тобто, чим на більше число одиничних незалежних ризиків поділяється загальний ризик.

Аналогічні викладення можуть бути зроблені і для випадку страхування цивільної відповідальності, де немає визначених сум.

Для забезпечення власної безпеки страховик, відповідно, зацікавлений у тому, шоб мати численні ризики, величини яких, наскільки це можливо, менш розсіяні.

Перестрахування дозволяє страховику не обмежувати число прийнятих на страхування ризиків n і вирівняти їх величини, завдяки однаковому для кожної категорії ризиків рівню власного утримання.

Були розроблені численні *форми перестрахування*, що складають основу договорів перестрахування, що зв'язують Страховика (цедент) з Перестраховиком (цесіонарій). У технічному плані договори перестрахування можна розділити на дві категорії:

- договори пропорційного перестрахування (*пропорційне перестрахування*);
- договори перестрахування ексцедента збитків (*ексцедентне перестрахування*).

5.2. Пропорційне перестрахування

При цьому способі перестрахування страховик передає перестраховикові однакову частку $(1-\alpha)$ від усіх ризиків, що він приймає в одній і тій же галузі.

Пропорційне перестрахування можна описати так: якщо пред'явлено вимогу про виплату X, то

$$\boxed{\begin{cases} Y = \alpha X \\ Z = (1-\alpha)X \end{cases}}.$$

Параметр α називається часткою утримання, $0 < \alpha < 1$; X – розмір вимоги; Y – сума, виплачувана страховиком; Z – сума, виплачувана перестраховиком.

Розподіл виплат страховика і перестраховика може бути знайдено простою заміною змінної.

Таким чином, перестраховик покриває ту саму частину $(1-\alpha)$ у всіх страхових випадках, оплачених страховиком. Відповідно, перестраховик одержить частку $(1-\alpha)\cdot P_i$ від отриманих премій.

5.3. Ексцедентне перестрахування

Найбільш розповсюдженою формою непропорційного перестрахування є *перестрахування ексцедента збитків (ексцедентне перестрахування)*.

У непропорційному перестрахуванні розмір виплат перестраховика визначається винятково величиною страхового випадку, а не часткою, установленою заздалегідь у залежності від страхової суми.

Страховик фіксує величину ліміту («пріоритету»), який він готовий оплатити при настанні страхового випадку. Частина збитку понад цей пріоритет, як правило, обмежена максимальною величиною, приймається на себе перестраховиком. Страховику залишається його пріоритет, плюс, можливо, та частина, що перевищує максимальну суму, встановлену в договорі.

Перевагами цього типу непропорційного перестрахування є, з одного боку, захист страховика на випадок настання великих страхових випадків, що можуть істотно позначитися на його результатах, і, з іншого боку, страховик не позбавляється премій, призначених для покриття дрібних страхових випадків. Крім того, адміністративне керування є дуже простим.

Якщо величина страхового випадку змінюється з часом, утримання страховика залишається попереднім, і перестраховик приймає це збільшення на себе.

Участь перестраховика не виражається фіксованим відсотком від величини збитку, а зростає при його збільшенні, тому не може йти мови про те, щоб сплачувати встановлений a priori відсоток від премій за договором.

Перестраховик установлює ціну ризику, що він бере на себе, а для того, щоб це зробити, йому необхідно одержати точні дані по портфелю і по «історії» страхових випадків.

Розрахунок вартості цього типу перестрахування дуже складний у випадку неоднорідного портфеля, тому перестраховик встановлює верхню межу своїх зобов'язань та іноді виключає ризики, що дуже відрізняються від середнього.

Ці ризики тоді підлягають покриттю на факультативній основі.

Треба так само нагадати, що дуже часто для того самого портфеля існує і пропорційне покриття, і покриття ексцедента збитків.

Непропорційне перестрахування, головним чином, використовується в галузях, де є досить гомогенні (однорідні) ризики, такі як автомобільна цивільна відповідальність і галузь страхування збитків простих ризиків.

У ситуації *ексцедентного перестрахування* компанія робить виплати в повному обсязі по усіх вимогах, розміри яких не перевершують деякої суми T, що називається *рівнем утримання*; якщо розмір вимоги перевищує T, різниця погашається перестраховиком. Погашення ексцедентного договору перестрахування можна описати так: якщо надходить вимога розміром X, то компанія сплачує суму Y, де

$$\boxed{Y = \begin{cases} X, & X \le T \\ T, & X > T \end{cases}}.$$

Перестраховик сплачує суму Z, де

$$\boxed{Z = \begin{cases} 0, & X \le T \\ X - T, & X > T \end{cases}}.$$

Очевидно, $X = Y + Z$.

Середнє значення страхової виплати при ексцедентному перестрахуванні

$$M(X) = \int_0^\infty xf(x)dx,$$

а після висновку ексцедентного перестрахування

$$M(Y) = \int_0^T xf(x)dx + T \cdot \Pr(X > T) = M(X) - \int_0^\infty yf(y+T)dy,$$

де

$$\Pr(X > T) = \frac{(\lambda x)^T}{T!} e^{-\lambda x} -$$

пуассонівський розподіл.

Величина, на яку зменшується (у середньому) страхова виплата, дорівнює

$$\int_0^\infty yf(y+T)dy.$$

Якщо під дією інфляції розміри вимоги про виплату обчислюються як kX, де k – деякий множник, то середнє значення суми, за якою відповідає страховик має вигляд

$$M(Y) = k(M(X) - \int_0^\infty yf\left(y + \frac{T}{k}\right)dy).$$

Типові дані про частини страхових виплат, що приходяться на частку страховика і зареєстровані їм, виглядають приблизно так

$$x_1, x_2, T, x_3, T, x_4, x_5, \ldots$$

Вибірки попереднього типу називаються *цензурованими*. Цензуровані вибірки утворюються, коли деякі величини реєструються точно, а про ті, що залишилися, відомо тільки, що вони перевищують визначену величину (наприклад, T).

Для оцінки параметрів розподілу, якому підкоряються страхові виплати (у цілому, з урахуванням частин страховика і перестраховика) використовується метод *максимальної правдоподібності* з функцією правдоподібності вигляду

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i, \theta) \cdot \prod_{i=1}^{m} (1 - F(T)),$$

де $F(X)$ – функція розподілу страхових виплат; n – число страхових виплат, розміри яких x_i точно відомі; m – число страхових виплат, зроблених разом з перестраховиком.

Розподіл страхових виплат перестраховика

Припустимо, що розподіл, якому підкоряються страхові виплати, має щільність $f(x)$ і функцію $F(x)$, перестраховик має інформацію лише про виплати, що перевершують T, тобто $Z = X - T$, $X \geq T$. Функція щільності $g(z)$ суми Z, виплачуваної перестраховиком має вигляд

$$g(z) = \frac{f(z+T)}{1 - F(T)}, \ z > 0.$$

Тема 6. Розорення страхових компаній

6.1. Задача про розорення

Розглянемо стан страхового портфеля в проміжні моменти часу, поза залежністю від того, чи пред'являються страховій компанії вимоги про виплату. Чи є в компанії достатні кошти для того, щоб оплатити потенційні вимоги про виплату?

Сума, що компанія має в момент часу t, називається *активами на момент* t. Ясно, що

[Активи на момент t]=[Вихідні активи]+
+[Внески на момент t]-[Виплати на момент t]

Нашою метою буде визначення *ймовірності розорення* та її залежностей від *початкових активів* і *надбавки безпеки*.

Щоб знайти взаємозв'язок припустимо, що

1) вимоги про виплату, запропоновані страховиками, оплачуються негайно;
2) процентна ставка дорівнює нулеві;
3) витрати страховика до уваги не приймаються.

Нехай далі

1. $N(t)$ – число вимог про виплату, що мали місце до моменту t; $t > 0$.
2. $\{N(t)\}_{t\ge 0}$ – випадковий процес, що описує число вимог про виплату.
3. X_i – розмір i-й страхової виплати.
4. $S(t)$ – загальний розмір страхових виплат, що мали місце до моменту t; $t > 0$.
5. $\{S(t)\}_{t\ge 0}$ – випадковий процес, що описує загальний розмір виплат. Для кожного $t > 0$ маємо:

$$S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i \ .$$

6. U – початкові активи.
7. $U(t)$ – активи страховика в момент t.

Припустимо, що страхові внески надходять неперервно та з фіксованою швидкістю c. Тоді маємо

$$U(t) = U + ct - S(t) .$$

Ясно, що $\{U(t)\}_{t \geq 0}$ – випадковий процес, що називається процесом зміни активів.

Коли активи падають до нуля, то говорять, що відбулося *розорення* страховика.

Означення. Функція $\Psi(U)$ називається *ймовірністю остаточного розорення* при даних початкових активах U, якщо

$$\Psi(U) = \Pr(u(t) < 0 \text{ при деякому } t,\ 0 < t < \infty).$$

6.2. Нерівність Лундбергу

Введемо додаткові припущення:

а) випадкові величини $\{\overline{X}_i\}_{i=1}^{\infty}$ незалежні й однаково розподілені (позначимо загальну для усіх X_i функцію розподілу через $F(x)$, щільність розподілу через $f(x)$);

б) випадкові величини $\{\overline{X}_i\}_{i=1}^{\infty}$ незалежні від $N(t)$ при усіх $t \geq 0$;

в) випадковий процес $\{N(t)\}_{t \geq 0}$ є пуассонівський з параметром λ, тобто

$$\Pr(N(t) = k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}, \ k = 0,1,2,...$$

Тоді процес $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ є пуассонівським процесом.

Позначимо

$$M(X_i) = p_1,\ M(X_i^2) = p_2 .$$

Припустимо, що страхові внески, зібрані страховиком за одиничний момент часу, перевищують очікувану величину страхових виплат за одиницю часу

$$C > \lambda p_1 .$$

C можна записати в термінах відносної надбавки

$$C = (1+\theta)\lambda p_1 .$$

Припустимо, що $M_x(t)$ – *функція моментів* для розподілу страхових виплат.

Звичайно неймовірно важко знайти точну ймовірність розорення $\Psi(U)$.

Нерівність Лундбергу дає деяку верхню границю для $\Psi(U)$:

$$\boxed{\Psi(U) \le e^{-RU}},$$

де R – поправочний коефіцієнт; U – початкові активи.

Ця нерівність має дві переваги над точним виразом для $\Psi(U)$:

1) її просто застосовувати;
2) якщо U не занадто малі, то апроксимація, що досягається, дуже гарна.

Нерівність Лундбергу говорить про те, що ймовірність розорення обмежена функцією, експоненціально спадною з ростом U. Ймовірність розорення спадає з ростом U, R.

Поправочний коефіцієнт

Поправочний коефіцієнт R є єдиним позитивним коренем рівняння

$$M_x(R) = 1 + (1+\theta)p_1 R .$$

Попереднє рівняння звичайно вирішується чисельно (наприклад, використовується метод Ньютона). Верхня границя для R може виявитися дуже корисною:

$$R < \frac{\theta p_1}{p_2} .$$

6.3. Визначення ймовірності остаточного розорення в експоненціальному випадку

В загальному випадку $\Psi(U)$ задовольняє рівнянню

$$\frac{d}{dU}\Psi(U) = \frac{1}{(1+\theta)p_1}(\Psi(U) - \int_0^U f(x)\Psi(U-x)dx - (1-F(U)) .$$

Це рівняння звичайне вирішується за допомогою чисельних методів. У випадку *експоненціального розподілу* розв'язком даного рівняння є функція

$$\Psi(U) = \frac{1}{1+\theta} e^{-\frac{\alpha\theta U}{1+\theta}} = \frac{1}{1+\theta} e^{-RU} .$$

Приведений розв'язок дозволяє провести дослідження нерівності Лундбергу в експоненціальному випадку (рис. 1).

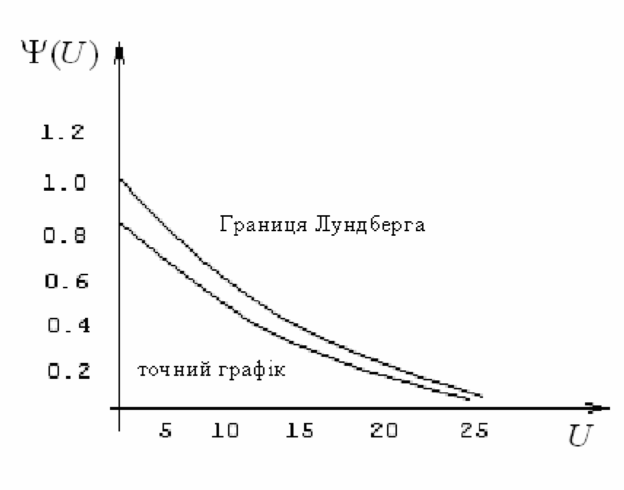

Рис. 1. Графіки $\Psi(U)$ та e^{-RU} у випадку експоненціальності страхових виплат із середнім 1 і надбавкою безпеки $\theta = 0,2$.

На рис. 2 показано, що ймовірність розорення різко падає зі збільшенням надбавки безпеки.

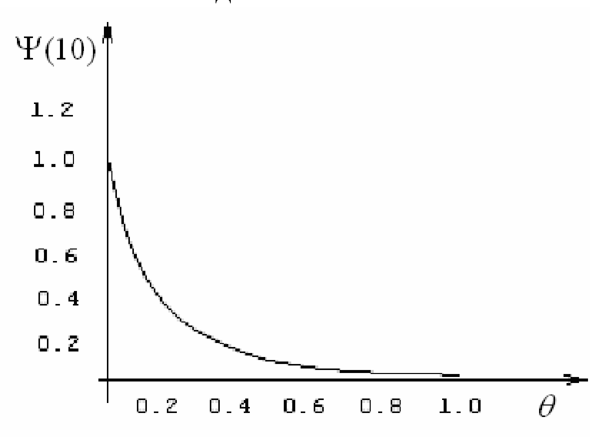

Рис. 2. Графік залежності $\Psi(10)$ від θ у випадку, коли виплати розподілені експоненціально із середнім 1.

Задача про розорення і перестрахування

Відповідно до нерівності Лундбергу, верхня границя для ймовірності остаточного розорення прийме мінімальне значення, якщо величина поправочного коефіцієнта максимальна. Вивчимо вплив ефекту перестрахування на поправочний коефіцієнт.

Розглянемо ексцедентне перестрахування. Якщо X – розмір страхової виплати, T рівень власного утримання, то

$$Y = \min\{X, T\} \ –$$

виплати страховика,

$$Z = \max\{0, X - T\} \ –$$

виплати перестраховика.

Позначимо через θ і ξ надбавки безпеки страховика і перестраховика відповідно.

З нерівності

$$\theta p_1 \geq \xi M(Z), \text{ при } \theta < \xi$$

можна знайти нижню границю T.

Умова встановлює межу, яка показує наскільки великою може бути частина ризику, передана перестраховикові. Але яке значення T повинен вибрати страховик? Оскільки $\theta < \xi$, перестрахування зменшує очікуваний прибуток страховика. Перестрахування – це завжди компроміс між очікуваними прибутками і безпекою. *Ціль перестрахування* – підвищити безпеку та безпека досягається за допомогою мінімізації ймовірності розорення, або максимізації поправочного коефіцієнта.

З появою перестрахування поправочний коефіцієнт задовольняє рівнянню

$$\int_0^T e^{Rx} f(x)dx + e^{RT}(1 + F(T)) = 1 + ((1+\theta)p_1 - (1+\xi)M(Z))R\ .$$

Варто вибирати T так, щоб R прийняв найбільше значення.

Існує деяке значення T таке, що якщо установити рівень утримання нижче цього значення, то ймовірність розорення занадто велика – страховик передає занадто багато ризику по занадто високій ціні. Якщо рівень утримання установлюється вище указаного значення, то можливо невелике зменшення безпеки бізнесу або відповідне збільшення очікуваного прибутку.

Приклади розв'язання задач до модуля 2

Приклад 1. Знайти внески, які повинні сплачувати жінки, що вступили в страхову фірму у віці 30 років. В початковий момент кількість жінок, що вступили в страхову фірму 2000, при цьому ймовірність розорення фонду складає 5%. За контрактом страхові позови складають 15000 грн.

Розв'язок. На початку року у фірмі застрахувалося $n = 2000$ жінок віку $x = 30$ років. Кожна жінка сплачує премію p. Страхові позови складають $b = 15000$ грн. Рівень значимості $\alpha = 5\% = 0,05$, тобто ймовірність нерозорення (довірча ймовірність)

$$\beta = 1 - \alpha = 1 - 0,05 = 0,95.$$

Фірма буде мати резерв (капітал)

$$U = pn.$$

Позначимо через $b_i = 1$ позови, подані до фірми, якщо протягом року i-й клієнт помре.

Скориставшись таблицею смертності з Додатка А (для жінок), для кожного $i = 1,...,n$ знаходимо

$$P(b_i = 1) = q_{30} = 0,00106,$$

$$P(b_i = 0) = p_{30} = 1 - 0,00106 = 0,99894.$$

Ймовірність того, що компанія не розориться, дорівнює

$$P\left\{\sum_{i=1}^{n} b_i \le U\right\} = P\left\{\frac{\sum_{i=1}^{n} b_i - M\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right)}{\sqrt{D\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right)}} \le \frac{U - M\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right)}{\sqrt{D\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right)}}\right\}.$$

З огляду на дискретність випадкових величин b_i, для будь-яких $i = 1,...,n$ маємо

$$M(b_i) = 1 \cdot q_{30} + 0 \cdot p_{30} = 0,00106,$$

$$D(b_i) = M(b_i^2) - (M(b_i))^2 = 0,00106 - (0,00106)^2 = 0,001059.$$

Позови b_i незалежні, тому

$$P\left\{ \frac{\sum_{i=1}^{n} b_i - 0,00106n}{\sqrt{0,001059n}} \le \frac{U - 0,00106n}{\sqrt{0,001059n}} \right\}.$$

Для числа застрахованих $n = 2000$ в силу центральної граничної теореми одержуємо

$$P\left\{ \frac{\sum_{i=1}^{n} b_i - 2,12}{1,4553} \le \frac{U - 2,12}{1,4553} \right\} \approx 2\Phi\left(\frac{U - 2,12}{1,4553} \right).$$

За умовою задачі ймовірність нерозорення

$$\beta = 1 - \alpha = 1 - 0,05 = 0,95.$$

Тоді

$$\Phi\left(\frac{U - 2,12}{1,4553} \right) = \frac{0,95}{2} = 0,475,$$

звідки маємо

$$\frac{U - 2,12}{1,4553} = 1,96.$$

Отже, страхова компанія в цьому випадку повинна мати резерв

$$U = 1,4553 \cdot 1,96 + 2,12 = 4,97,$$

а плата за страховку (премія) повинна скласти

$$p = \frac{U}{n} = \frac{4,97}{2000} = 0,00248\,.$$

Якщо $b = 15000$ грн., то премія

$p = 15000 \cdot 0,00248 = 37,293$ грн. на рік.

Приклад 2. Вимоги, пред'явлені до страхової компанії X, розподілені за показовим законом, при цьому середня вимога 10000 грн. Маємо пропорційне перестрахування, при цьому коефіцієнт утримання 90%. Знайти ймовірність, що сума, яку виплачує перестраховик, буде знаходитися в інтервалі (15000;20000).

<u>Розв'язок.</u> Вимоги, пред'явлені до страхової компанії X, розподілені за показовим законом, тобто щільність розподілу

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x \ge 0, \end{cases}$$

де

$$\lambda = \frac{1}{M(X)},$$

тобто

$$\lambda = \frac{1}{10000} = 10^{-4}\,.$$

Отже,

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 10^{-4} e^{-10^{-4} x}, & x \ge 0. \end{cases}$$

При пропорційному перестрахування маємо $X = Y + Z$:

$$\begin{cases} Y = \alpha X, \\ Z = (1-\alpha) X, \end{cases}$$

де параметр $\alpha = 0{,}9$ – частка утримання; X – розмір вимоги; Y – сума, виплачувана страховиком; Z – сума, виплачувана перестраховиком.

Для показового закону розподілу ймовірність випадкової величини X потрапити в інтервал:

$$P(a < X < b) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b},$$

тобто для суми, що виплачує перестраховик, маємо:

$$P(15000 < Z < 20000) = P(15000 < 0{,}1X < 20000) =$$

$$= P(150000 < X < 200000) = e^{-10^{-4}\cdot 150000} - e^{-10^{-4}\cdot 200000} = 3\cdot 10^{-7}.$$

Приклад 3. Вимоги, пред'явлені до страхової компанії X, розподілені за показовим законом, при цьому параметр закону $\lambda = 10^{-4}$. Знайдіть середню вимогу та середні суми, які виплачує страхова компанія та перестраховик при ексцедентному перестрахуванні. Рівень утримання $T = 15000$.

Розв'язок. Для ексцедентного перестрахування маємо:

$$X = Y + Z,$$

тобто компанія сплачує суму Y, де

$$Y = \begin{cases} X, & X \le T, \\ T, & X > T, \end{cases}$$

перестраховик сплачує суму Z, де

$$Z = \begin{cases} 0, & X \le T, \\ X - T, & X > T. \end{cases}$$

Вимоги, пред'явлені до страхової компанії X, розподілені за показовим законом, тобто щільність розподілу

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x \ge 0, \end{cases}$$

де $\lambda = 10^{-4}$. Отже,

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 10^{-4} e^{-10^{-4} x}, & x \ge 0, \end{cases}$$

При цьому середня вимога –

$$M(X) = \frac{1}{\lambda} = 10^{4} = 10000 \text{ грн.}$$

Середня виплата страховика:

$$M(Y) = \int_0^T x f(x) dx + T \cdot \mathrm{P}(X > T),$$

де ймовірність

$$P(X > T) = P(T < X < \infty) = e^{-\lambda T} - e^{-\lambda \infty} = e^{-\lambda T}.$$

Отже,

$$M(Y) = \int_0^{15000} x 10^{-4} e^{-10^{-4} x} dx + 15000 e^{-10^{-4} \cdot 15000} = 7768{,}7.$$

Приблизна середня виплата перестраховика:

$$M(Z) = M(X) - M(Y) = 10000 - 7768{,}7 = 2231{,}3.$$

Приклад 4. Вимоги, пред'явлені до страхової компанії, розподілені за рівномірним законом розподілу в інтервалі 1000-3000 грн. Знайдіть розподіли сум, що виплачуються страховиком та перестраховиком при пропорційному перестрахуванні, при цьому коефіцієнт утримання 80%. Знайти середні значення вимог, виплат страховика та перестраховика. Знайти ймовірність, що сума, яку виплачує страховик, буде знаходитися в інтервалі 1200-1500.

<u>Розв'язок.</u> Вимоги, пред'явлені до страхової компанії X, розподілені за рівномірним законом розподілу, тобто щільність розподілу

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & x\in(a;b),\\ 0, & x\notin(a;b),\end{cases}$$

отже,

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2000}, & x\in(1000;3000),\\ 0, & x\notin(1000;3000).\end{cases}$$

При пропорційному перестрахування маємо $X=Y+Z$:

$$\begin{cases}Y=\alpha X,\\ Z=(1-\alpha)X,\end{cases}$$

де параметр $\alpha=0{,}8$ – частка утримання; X – розмір вимоги; Y – сума, виплачувана страховиком; Z – сума, виплачувана перестраховиком.

Для рівномірного закону розподілу маємо:

$$f(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\alpha 2000}, & y\in(1000\alpha;3000\alpha),\\ 0, & y\notin(1000\alpha;3000\alpha),\end{cases}\Rightarrow$$

$$f(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{1600}, & y\in(800;2400),\\ 0, & y\notin(800;2400),\end{cases}$$

$$f(z)=\begin{cases}\dfrac{1}{(1-\alpha)2000}, & z\in(1000(1-\alpha);3000(1-\alpha)),\\ 0, & z\notin(1000(1-\alpha);3000(1-\alpha)),\end{cases}\Rightarrow$$

$$f(z)=\begin{cases}\dfrac{1}{400}, & z\in(200;600),\\ 0, & z\notin(200;600).\end{cases}$$

Середня страхова вимога:

$$M(X)=\int_a^b xf(x)dx=\int_{1000}^{3000} x\frac{1}{2000}dx=\frac{x^2}{4000}\bigg|_{1000}^{3000}=2000\,.$$

Середні виплати страховика та перестраховика:

$$M(Y)=\int_a^b yf(y)dy=\int_{800}^{2400} x\frac{1}{1600}dx=\frac{x^2}{3200}\bigg|_{800}^{2400}=1600\,,$$

$$M(Z)=\int_a^b zf(z)dz=\int_{200}^{600} x\frac{1}{400}dx=\frac{x^2}{800}\bigg|_{200}^{600}=400\,.$$

Для рівномірного закону розподілу ймовірність випадкової величини Y потрапити в інтервал:

$$P(a<Y<b)=F(b)-F(a)\,,$$

де $F(y)$ – функція розподілу випадкової величини Y :

$$F(y)=\int_a^y f(y)dy=\int_{800}^{y}\frac{1}{1600}dy=\frac{y-800}{1600}\,.$$

Отже,

$$P(1200<Y<1500)=F(1500)-F(1200)=$$

$$=\frac{1500-1200}{1600}=0{,}1875.$$

Питання для самоконтролю до модуля 2

Дати розгорнуту відповідь на питання:

1. Модель страхової компанії.
2. Термінологія перестрахування.
3. Пропорційне перестрахування.
4. Ексцедентне перестрахування.
5. Задача про розорення.
6. Складні пуассонівські процеси.
7. Нерівність Лундбергу.
8. Визначення ймовірності остаточного розорення в експоненціальному випадку.

Дати означення (сформулювати) чи записати формули знаходження:

1. Страхові внески.
2. Страхові виплати.
3. Ймовірність розорення страхової компанії.
4. Пропорційне перестрахування.
5. Ексцедентне перестрахування.
6. Цензуровані вибірки.
7. Функція правдоподібності.
8. Функція щільності перестраховика.
9. Ймовірність остаточного розорення.
10. Пуассонівський процес.
11. Нерівність Лундбергу.
12. Поправочний коефіцієнт.
13. Ймовірність остаточного розорення в експоненціальному випадку.

Задачі до модуля 2

Основні задачі

1. Знайти внески, які повинні сплачувати жінки, що вступили в страхову фірму у віці 35 років. В початковий момент кількість жінок, що вступили в страхову фірму 1000, при цьому ймовірність розорення фонду складає 10%. За контрактом страхові позови складають 8000 грн.
2. Знайти внески, які повинні сплачувати чоловіки, що вступили в страхову фірму у віці 27 років. В початковий момент кількість чоловіків, що вступили в страхову фірму 1500, при цьому ймовірність розорення фонду складає 1%. За контрактом страхові позови складають 12000 грн.
3. Знайти внески, які повинні сплачувати жінки, що вступили в страхову фірму у віці 40 років, якщо через 10 років до фірми ще вступить 1000 жінок. В початковий момент кількість жінок, що вступили в страхову фірму 1500, при цьому ймовірність розорення фонду складає 5%. За контрактом страхові позови складають 10000 грн.
4. Знайти внески, які повинні сплачувати чоловіки, що вступили в страхову фірму у віці 30 років. В початковий момент кількість чоловіків, що вступили в страхову фірму 2500 та через 5 років їх кількість складатиме 3000 чоловік, при цьому ймовірність розорення фонду складає 10%. За контрактом страхові позови складають 20000 грн.
5. Вимоги, пред’явлені до страхової компанії, розподілені за рівномірним законом розподілу в інтервалі 800-1500 грн. Знайдіть розподіли сум, що виплачуються страховиком та перестраховиком при

пропорційному перестрахуванні, при цьому коефіцієнт утримання 90%.

6. Вимоги, пред'явлені до страхової компанії, розподілені за рівномірним законом розподілу в інтервалі 10000-17000 грн. Знайти середні значення вимог, виплат страховика та перестраховика при пропорційному перестрахуванні, при цьому коефіцієнт утримання 80%. Знайти ймовірність, що сума, яку виплачує перестраховик, буде знаходитися в інтервалі 12000-13000 грн.
7. Вимоги, пред'явлені до страхової компанії, розподілені за рівномірним законом розподілу в інтервалі 1000-15000 грн. Знайти середні значення вимог, виплат страховика та перестраховика при ексцедентному перестрахуванні, при цьому рівень утримання 12000 грн.
8. Вимоги, пред'явлені до страхової компанії, розподілені за рівномірним законом розподілу в інтервалі 2000-5000 грн. Знайдіть розподіли сум, що виплачуються страховиком та перестраховиком при пропорційному перестрахуванні, при цьому коефіцієнт утримання 85%. Знайти середні значення вимог, виплат страховика та перестраховика. Знайти ймовірність, що сума, яку виплачує страховик, буде знаходитися в інтервалі 2500-3000 грн.
9. Вимоги, пред'явлені до страхової компанії, розподілені за рівномірним законом розподілу в інтервалі 10000-25000 грн. Знайти середні значення вимог, виплат страховика та перестраховика при ексцедентному перестрахуванні, при цьому рівень утримання 20000 грн.

10. Вимоги, пред’явлені до страхової компанії, розподілені за показовим законом, при цьому середня вимога 2000 грн. Маємо пропорційне перестрахування, при цьому коефіцієнт утримання 80%. Знайти ймовірність, що сума, яку виплачує страховик, буде знаходитися в інтервалі (1200;1600).
11. Вимоги, пред’явлені до страхової компанії, розподілені за нормальним законом розподілу, при цьому середня вимога 2500 грн., а середня помилка встановлює 50 грн. Маємо пропорційне перестрахування, при цьому коефіцієнт утримання 85%. Знайти ймовірність, що сума, яку виплачує страховик, буде знаходитися в інтервалі (1500;2000) грн.
12. Вимоги, пред’явлені до страхової компанії, розподілені за нормальним законом розподілу, при цьому середня вимога 5000 грн., а середня помилка встановлює 100 грн. Маємо пропорційне перестрахування, при цьому коефіцієнт утримання 95%. Знайти ймовірність, що сума, яку виплачує перестраховик, буде знаходитися в інтервалі (6000;8000) грн.
13. Вимоги, пред’явлені до страхової компанії, розподілені за показовим законом, при цьому параметр закону 1/100. Знайдіть середню вимогу та середні суми, які виплачує страхова компанія та перестраховик при ексцедентному перестрахуванні. Рівень утримання 800 грн.
14. Вимоги, пред’явлені до страхової компанії, розподілені за показовим законом, при цьому середня вимога 4000 грн. Маємо пропорційне перестрахування, при цьому коефіцієнт утримання 70%. Знайти ймовірність, що сума, яку виплачує

перестраховик, буде знаходитися в інтервалі (1000;2000) грн.

15. Вимоги, пред’явлені до страхової компанії, розподілені за показовим законом, при цьому параметр закону 1/2000. Знайдіть середню вимогу та середні суми, які виплачує страхова компанія та перестраховик при ексцедентному перестрахуванні. Рівень утримання 10000 грн.
16. Вимоги, пред’явлені до страхової компанії, розподілені за показовим законом, при цьому середня вимога 3000 грн. Знайдіть середні суми, які виплачує страхова компанія та перестраховик при ексцедентному перестрахуванні. Рівень утримання 5000 грн.

Додаткові задачі

1. Станом на січень 2008 р. страхова компанія має показники: сплачений статутний фонд – 8200 тис. грн.; технічні резерви 13300 тис. грн.; вільні резерви 120 тис. грн. Визначити величину відповідальності на один договір страхування (перестрахування), яку може нести страхова компанія.
2. Станом на березень 2008 р. страхова компанія має показники: сплачений статутний фонд – 900 тис. грн.; технічні резерви 15000 тис. грн.; вільні резерви 300 тис. грн. Визначити величину відповідальності на один договір страхування (перестрахування), яку може нести страхова компанія.
3. Страхова компанія уклала договір страхування об'єкта вартістю 2,4 млн. грн. при страховому тарифі 0,4%. Власне утриманні компанії 1,4 млн. грн., решта перестраховується у двох перестраховиків порівну.

Величина комісії за укладення і супровід договору 10%. Збитки внаслідок пожежі становлять 600 тис. грн. Визначити: 1) страхові платежі, які отримає страховик і перестраховик; 2) величину комісійної винагороди, яку отримає страховик; розмір страхового відшкодування, яке виплатять учасники процесу страхування та перестрахування.

4. Страхова компанія здійснює непропорційне перестрахування об'єкта вартістю 5 млн. грн. В страхуванні бере участь 5 учасників (страховик і чотири перестраховики). Вартість об'єкта розділена на 5 шарів вартістю 1 млн. грн. кожен. Ймовірність настання страхового випадку для шарів: перший (нижній) – 0,45; другий – 0,25; третій – 0,15; четвертий – 0,1; п'ятий – 0,05. Страховий тариф 0,8%. Перший збиток – 0,6 млн. грн., другий – 1,3 млн. грн., третій – 2,2 млн. грн. Визначити: 1) страхові платежі для кожного учасника; 2) величину відшкодування та учасників виплати при першому, другому та третьому збитках.
5. Страхова компанія здійснює ексцедентне перестрахування об'єкта вартістю 2 млн. грн. В страхуванні бере участь 4 учасника (страховик і три перестраховики). Вартість об'єкта розділена на 4 шари вартістю 0,5 млн. грн. кожен. Ймовірність настання страхового випадку для шарів: перший (нижній) – 0,35; другий – 0,25; третій – 0,3; четвертий – 0,1. Страховий тариф 0,5%. Перший збиток – 0,3 млн. грн., другий – 0,8 млн. грн., третій – 1,1 млн. грн. Визначити: 1) страхові платежі для кожного учасника; 2) величину відшкодування та учасників виплати при першому, другому та третьому збитках.

6. Сума власного утримання страховика становить 50 тис. ум. од. Сума ексцедента – 200 тис. ум. од. Визначити місткість ексцедентного договору:
   а) 250 тис. ум. од.;
   б) 150 тис. ум. од.;
   в) 200 тис. ум. од.
7. Власне утримання цеденту за договором ексцедента суми становить 20 тис. ум. од. Ексцедентний договір складається з чотирьох часток (ліній). Клієнт має намір укласти договір страхування на суму 200 тис. ум. од. Який розмір ризику може прийняти цедент:
   а) 80 тис. ум. од.;
   б) 100 тис. ум. од.;
   в) 40 тис. ум. од.?

МАТЕРІАЛ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО ОПРАЦЮВАННЯ

- ♦ *Фінансова стійкість страхових операцій та методи її забезпечення.*
- ♦ *Випадкова величина показника результатів.*
- ♦ *Промислові ризики.*

Тема 1. Фінансова стійкість страхових операцій та методи її забезпечення

Ставки платежів майнового страхування встановлені виходячи із середнього рівня виплат страхового відшкодування за кілька років. Якщо фактичні виплати перевищують середній рівень, то виникає небезпека дефіциту коштів. Тому необхідно заздалегідь виявити можливі відхилення виплат від середнього рівня і фактори, що обумовлюють їх.

1.1. Залежність відхилень результатів від кількості застрахованих об'єктів і середньої ймовірності збитку

Розрахунок можливих коливань виплат відшкодування на одиницю страхової суми ведеться за формулою:

$$\sigma = \sqrt{mp(1-p)} \ ,$$

де σ – середнє квадратичне відхилення;
m – число застрахованих об'єктів;
p – ймовірність настання збитку;
$1-p$ – ймовірність, що збитку не буде;
p і $1-p$ – дві альтернативні (взаємовиключаючі) ознаки.

Формула виражає залежність можливих відхилень результатів, від кількості застрахованих об'єктів і середньої ймовірності збитку. Під середньою ймовірністю збитку розуміється середній рівень виплат страхового відшкодування за кілька років, тобто тарифна нетто-ставка по страхуванню того чи іншого виду майна.

Розглянемо цю залежність на прикладах.

Приклад 1. Застраховано 200 об’єктів, страхова сума кожного – 1400 грн., а всіх об’єктів – 280 000 грн. Тарифна брутто–ставка дорівнює 1 грн., у тому числі нетто-ставка 90 %, або 0,9 грн. із 100 грн. страхової суми.

Отже, із загальної суми страхових платежів на виплату страхового відшкодування призначається 2520 грн. $(28000 \cdot 0{,}9 \div 100)$. Це і є найбільш ймовірна сума виплат.

Ступінь ймовірності збитку – 0,009 $(2520 \div 280000)$, що дорівнює нетто-ставці, тільки вона виражена не у відсотках.

Розраховуємо середнє квадратичне відхилення виплат на одиницю страхової суми:

$$\sigma = \sqrt{200 \cdot 0{,}009 \cdot (1 - 0{,}009)} = \sqrt{200 \cdot 0{,}009 \cdot 0{,}991} =$$

$$= \sqrt{1{,}78} = 1{,}33.$$

Відхилення загального розміру відшкодування, виходячи із середньої страхової суми об’єктів, становить 1862 грн. $(1400 \cdot 1{,}33)$. Це означає, що при заданій у прикладі кількості об’єктів і їх страховій сумі фактичні виплати страхового відшкодування будуть відхилятися від середнього розміру, обчисленого по нетто-ставці, у більшу чи меншу сторону на 1862 грн., або 0,74 $(1862 \div 2520)$. Цей показник у статистиці називається коефіцієнтом варіації і позначається V. Ймовірність виплати на 1862 грн. більше, ніж надійшло в страховий фонд, складає половину, тобто

0,37. Такий великий коефіцієнт варіації говорить про нестійкість страхових операцій.

Приклад 2. Збільшимо кількість застрахованих об'єктів до 1000, тобто в 5 разів, залишивши без зміни середню страхову суму (1400 грн.) і нетто-ставку (0,9 грн.). Загальна страхова сума – 1400000 грн. На виплату страхового відшкодування призначається 12600 грн. $(1400000 \cdot 0{,}9 \div 100)$. Середнє відхилення виплат за цих умов:

$$\sigma = 1400\sqrt{1000 \cdot 0{,}009 \cdot 0{,}991} = 1400\sqrt{8{,}92} =$$
$$= 1400 \cdot 2{,}98 = 4186.$$

Ймовірність виплати на цю суму більше чи менше коштів у порівнянні із середнім рівнем:

$$V = \frac{4186}{12600} = 0{,}33 \text{ або } 33\ \%.$$

Ймовірність перевищення виплат у цих межах становить 16,5 % $(33 \div 2)$.

Порівнюючи результати першого і другого прикладів, бачимо що із збільшенням кількості застрахованих об'єктів фінансова стійкість страхових операцій зростає.

Приклад 3. Кількість застрахованих об'єктів і їх страхова сума – як у першому прикладі. Нетто-ставка збільшується втроє. Тобто до 2,7 грн. із 100 грн. страхової суми. Отже, у страховий фонд повинно надійти 7560 грн. $(280000 \cdot 2{,}7 \div 100)$.

$$\sigma = 1400\sqrt{200 \cdot 0{,}027 \cdot 0{,}973} = 1400\sqrt{5{,}25} = 1400 \cdot 2{,}29 = 3206;$$

$$V = \frac{3206}{7560} = 0{,}42 \quad \text{або} \quad 42\ \%.$$

Ймовірність перевищення виплат над середнім рівнем дорівнює в цьому випадку 21% $(42 \div 2)$.

Отже, із збільшенням нетто-ставки фінансова стійкість операцій підвищується.

Приклад 4. Кількість об'єктів і їх страхова сума – як у другому прикладі. Нетто-ставка – 2,7 грн. із 100 грн. страхової суми. На виплату страхового відшкодування при цих умовах буде нараховано 37800 грн. $(1400000 \cdot 2,7 \div 100)$.

$$\sigma = 1400\sqrt{1000 \cdot 0,027 \cdot 0,973} = 1400\sqrt{26,27} =$$

$$= 1400 \cdot 5,13 = 7182,$$

$$V = \frac{7182}{37800} = 0,19, \quad \text{або } 19\ \%.$$

Ймовірність виплати більше (на 7182 грн.) дорівнює 9,5 % $(19 \div 2)$, тобто такі збитки можливі один раз за 10 років. Ці страхові операції є цілком стійкими.

Приклад 5. Кількість об'єктів (1000) і нетто-ставка (2,7) – як у четвертому прикладі. Середня страхова сума на один об'єкт – 2500 грн. У страховий фонд надійде 67500 грн. $(2500000 \cdot 2,7 \div 100)$.

$$\sigma = 2500\sqrt{1000 \cdot 0,027 \cdot 0,973} = 2500 \cdot 5,13 = 12825;$$

$$V = \frac{12825}{67500} = 0,19 \quad \text{або } 19\ \%.$$

Результат той же, що й у четвертому прикладі.

Таким чином, розмір відхилень не залежить від середньої страхової суми на один об'єкт. Із збільшенням страхової суми підвищується розмір виплат. Але ступінь коливання їх не міняється, тому що відповідно зростає і страховий фонд. Це випливає із самої формули розрахунку коефіцієнта варіації. Якщо страхову суму на один об'єкт позначити b, то загальна сума виплат буде $b \cdot m \cdot p$, а коефіцієнт варіації

$$V = \frac{b\sqrt{m \cdot p(1-p)}}{b \cdot m \cdot p}.$$

Скоротимо дріб на b і одержимо

$$V = \frac{\sqrt{m \cdot p(1-p)}}{m \cdot p}.$$

З наведених вище прикладів легко переконатися, що результат при виключенні показника середньої страхової суми буде той же. Візьмемо лише перший і четвертий приклади:

$$V = \frac{\sqrt{200 \cdot 0,009 \cdot 0,991}}{200 \cdot 0,009} = \frac{1,33}{1,8} = 0,74 \quad \text{або } 74\ \%.$$

$$V = \frac{\sqrt{1000 \cdot 0,027 \cdot 0,991}}{1000 \cdot 0,027} = \frac{5,17}{27} = 0,19 \quad \text{або } 19\ \%.$$

1.2. Міжгрупове відхилення

На практиці бувають застраховані об'єкти з різною страховою сумою. Для них знаходиться середнє міжгрупове відхилення на основі прийнятого в статистиці методу. Розглянемо розрахунок міжгрупового відхилення на прикладі, наведеному в таблиці 2.

Таблиця 2.

Розрахунок коефіцієнта фінансової стійкості, тис. грн.

Групи об'єк-тів	*Кіл-ть об'єктів, n*	*Страхо-ва сума, b*	*Загаль-на страхо-ва сума, $n \cdot b$*	*Річна нетто-премія, $b \cdot n \cdot q$ P*	*Середнє квадра-тичне відхилен-ня*	*K*	*Міжгрупове відхилення. O*	*Макси-мальна страхова сума S*
1 2 3	1400 2000 4000	10,0 8,0 5,0	14000 16000 20000	28,0 32,0 40.0	16,7 16,0 14,1	0,60 0,50 0,35	0,27	14,6
	7400		50000	100				

Визначимо показник максимальної страхової суми, що може бути прийнята на страхування при даному показнику K:

$$S = 2O^2 P = 2 \cdot 0,27^2 \cdot 100000 = 14580 \text{ грн.}$$

Міжгрупове відхилення розраховується за формулами:

$$\bar{K} = \frac{(K_1 + K_2 + K_3)}{3};$$

$$Відх. = \left|(K_1 - \bar{K}) + (K_2 - \bar{K}) + (K_3 - \bar{K})\right|,$$

де $\bar{K}$ – середній коефіцієнт фінансової стійкості;

K_1 – коефіцієнт по першій групі;

K_2 – коефіцієнт фінансової стійкості по другій групі;

K_3 – коефіцієнт фінансової стійкості по третій групі.

Підставивши значення одержимо:

$$\bar{K} = \frac{(0,60 + 0,50 + 0,35)}{3} = 0,48;$$

$$Відх. = \left|(0,60 - 0,48) + (0,50 - 0,48) + (0,35 - 0,48)\right| = 0,27.$$

У тих випадках, коли застраховані дорогі об’єкти, фінансова стійкість страхових операцій знижується, тому що в разі загибелі навіть одного з них необхідно виплачувати велику суму.

Такий метод розрахунку середнього квадратичного відхилення альтернативної ознаки є похідним від методу, викладеного у розділі розрахунків страхових тарифів за ризиковими видами страхування, і дозволяє простежити вплив на показник фінансової стійкості страхових операцій середньої нетто-ставки й величини страхового портфеля. Останнє дуже важливо саме з позицій господарського розрахунку, тому що показує, що госпрозрахунок страхової компанії може бути забезпечений лише при визначеній кількості застрахованих об’єктів.

Хоча зовні викладений метод не вловлює коливання рівня виплат страхового відшкодування за роками, воно відбивається на кінцевих результатах розрахунку. Доведено, що зростання кількості застрахованих об’єктів знижує щорічні коливання фінансових результатів страхових операцій. Однак ця залежність повною мірою виявляється при страхуванні приблизно однакових по величині ризиків.

З включенням у відповідальність страховика нових ризиків математична залежність може істотно змінитися. Дійсно, візьмемо страхування від пожеж, що бувають щорічно, і збиток від них за роками відхиляється незначно. І зовсім інше виникає, коли вводиться страхування від повеней і землетрусів. Сильна повінь, а тим більше землетрус, відбуваються набагато рідше, але зате при їх настанні виплати зростуть у порівнянні із середніми у кілька разів.

Фінансова стійкість страхових операцій залежить, таким чином, від кількості й однорідності застрахованих об'єктів, характеру ризиків, включених у відповідальність страховика, і розміру нетто-ставки. Тому точний вимір фінансової стійкості вимагає більш складних розрахунків.

Якою б високою не була фінансова стійкість страхових операцій, завжди існує ймовірність того, що страхове відшкодування в даному році перевищить середній рівень, закладений у тарифах. Тому у світовій практиці страхові компанії передбачають певні заходи на випадок таких збитків.

1.3. Фінансова стійкість операцій страхування життя

Дотепер мова йшла про вимір фінансової стійкості в основному операцій ризикового страхування.

Формулу середнього квадратичного відхилення можна використовувати для визначення можливих результатів такого виду особового страхування, як страхування від нещасних випадків.

При довгостроковому страхуванні життя показники дожиття всієї сукупності застрахованих до визначеного віку та ймовірності настання смерті є досить точними величинами. Тому виплати по страхуванню життя не схильні до будь-яких несподіваних коливань. Їх розмір практично передбачається заздалегідь. Для забезпечення майбутніх виплат створюється резерв внесків по страхуванню життя.

Фінансова стійкість операцій страхування життя залежить від співвідношення приросту внесків і збільшення виплат. Це співвідношення виражається у відсотках або в абсолютній сумі.

Стійкими вважаються операції, у яких зростання внесків перевищує зростання виплат. Наприклад, за рік надходження внесків збільшилося на 15 %, а виплата страхових сум на 10 %, або надходження зросло на

120 тис. грн. а виплати тільки на 90 тис. грн. Бажаним є позитивне співвідношення як темпів, так і абсолютних розмірів приросту внесків і виплат страхових сум, але вирішальним усе-таки є перевищення приросту розміру платежів над приростом виплат у грошовому (абсолютному) вираженні.

Тема 2. Випадкова величина показника результатів
2.1. Технічний аналіз випадкової величини показника результатів

Страховик намагається визначити елемент випадковості, пов'язаний зі страховими випадками, за допомогою визначення *показника результатів* a, який дорівнює відношенню результатів R звітного періоду до суми премій P, отриманих у цьому звітному періоді:

$$\boxed{a = \frac{R}{P}}.$$

Тут R – нетто-результат звітного періоду, тобто

$$R = Q - S,$$

де

Q = Отримані премії – Комісійні – Загальні витрати цього звітного періоду + Фінансовий прибуток, отриманий в цьому звітному періоді.

S – загальна сума збитків, що наступили в цьому звітному періоді.

Отже,

$$a = \frac{Q}{P} - \frac{S}{P}.$$

Показник результатів a є реалізацією, або значенням, що приймає в розглянутому звітному періоді випадкова величина A, оскільки Q і P – величини, що вважаються визначеними, а S – випадкова величина.

Математичне очікування A

$$E(A) = E\left(\frac{Q}{P}\right) - \frac{E(S)}{P} = \frac{Q}{P} - \frac{E(S)}{P}.$$

Дисперсія A

$$V(A) = V\left(\frac{S}{P}\right) = \frac{V(S)}{P^2}.$$

Кращою оцінкою для $E(S)$ є величина збитків, що спостерігається, отже кращою оцінкою для $E(S)$ є показник результатів, що спостерігається – a.

Для того, щоб розрахувати $V(S)$ необхідно знати суму збитків, що наступили, згрупувати їх за підкатегоріями гомогенних (однорідних) ризиків і знайти для кожної S_i підкатегорії закон настання і розподілу збитків.

Величини S_i збитків для кожної підкатегорії з погляду ймовірності незалежні, одержуємо:

$$V(S) = V(S_1) + V(S_2) + ... + V(S_i) + ... + V(S_k),$$

де S_i – випадкова величина суми збитків, що наступили, у під категорії i.

<u>Застосування при страхуванні на випадок смерті</u>

Це простий випадок, оскільки по одному ризику (застрахованій особі) можна одержати тільки один страховий випадок – смерть.

Якщо припустимо, що портфель містить тільки єдиного застрахованого на суму z з ймовірністю смерті q, розрахованої по таблицях смертності, то

$$E(S) = z \cdot q + 0 \cdot (1 - q) = z \cdot q.$$

Момент другого порядку

$$E(S^2) = z^2 \cdot q + 0 \cdot (1-q) = z^2 \cdot q.$$

Відомо, що

$$V(S) = E(S^2) - (E(S))^2 = z^2 q - z^2 q^2 = z^2 q(1-q).$$

Якщо ведуть справи N незалежних ризиків, що мають ту саму ймовірність смерті q (тобто той самий вік) і ту саму страхову суму, то

$$V(S) = Nz^2 q(1-q).$$

Нарешті, якщо ведуть справи

- N_{i1} – застрахованих ризиків зі страховою сумою z_1;
- N_{i2} – застрахованих ризиків зі страховою сумою z_2;
- N_i – застрахованих ризиків зі страховою сумою z_i з однаковою ймовірністю смерті q у всіх випадках.

Позначивши через

$$\frac{\sum N_i \cdot Z_i^2}{\sum N_i} = M_2(z)$$

момент другого порядку випадкової величини z – «величини страхової суми», а через $\sum N_i = N$ – загальне число ризиків, одержуємо:

$$V(S) = q(1-q)NM_2(z),$$

$$E(S) = M_1(S) = N_q M_1(z).$$

Якщо ризики в портфелі мають ймовірності $q_1, q_2, ..., q_n$, показники $V(S)$ і $E(S)$ одержуємо підсумовуванням.

Якщо при оцінці $V(S)$ вважають, що вираз $(1-q)$ дуже близький до одиниці, одержують завищену оцінку $V(S)$, що визначається формулою:

$$V(S) = qM_2(z).$$

Використовуючи спостереження про n, страхові випадки, що наступили в даному році, суми яких $s_1, s_2, ..., s_n$, їх сума $s_1 + s_2 + ... + s_n$ є реалізацією випадкової величини S.

Тим часом, $q = n$

$$V(S) = nM_2(z).$$

Кращою оцінкою для дисперсії величини S отже буде

$$\hat{V}(S) = n \cdot m_2,$$

де

$$m_2 = \frac{s_1^2 + s_2^2 + ... + s_n^2}{n}.$$

Дійсно, ця оцінка дисперсії є незміщеною, тобто математичне очікування випадкової величини , що їй відповідає, дорівнює nm_2. Сукупність $s_1, s_2, ..., s_n$ може розглядатися як вибірка розміру випадкових величин z («величини страхової суми»).

У той же час,

$$E(nm_2) = E(n)E(m_2), \text{ але } E(n) = a.$$

$$E(m_2) = E(M_2(z) \cdot (n-1)/n.$$

Однак n досить велике, тому можна замінити $(n-1)$ на n, отже

$$\hat{V}(S) = n \cdot \frac{s_1^2 + s_2^2 + ... + s_n^2}{n} = \quad s_1^2 + s_2^2 + ... + s_n^2$$

Оцінка для дисперсії показника результатів A

$$\hat{V}(A) = \frac{\hat{V}(S)}{P^2} = \frac{s_1^2 + s_2^2 + ... + s_n^2}{P^2}.$$

Оцінка дорівнює відношенню суми квадратів величин страхових випадків для даного року на квадрат суми премій.

Оцінка стандартного відхилення показника результатів A

$$\hat{\sigma}(A) = \frac{\sqrt{s_1^2 + s_2^2 + ... + s_n^2}}{P}.$$

Застосування для категорій страхування, відмінних від страхування на випадок смерті

Припустимо, протягом одного року є тільки один ризик (застрахований об'єкт). По цьому ризику може відбутися K страхових випадків з величинами $s_1, s_2, ..., s_k$ чи L страхових випадків з величинами $s_1, s_2, ..., s_l$.

Отже є дві, у принципі, незалежні випадкові величини: число страхових випадків K і величина страхового випадку Z.

Випадкова величина, що нас цікавить, S – це сума по страхових випадках, що підлягає врегулюванню, реалізацією якої може бути

$$s_1 + s_2 + ... + s_k \text{ або } s_1 + s_2 + ... + s_l.$$

Розрахунок дозволяє показати, що

$$E(S) = E(K) M_1(Z),$$

$$V(S) = E(K)V(Z) + V(K) M_1^2(Z).$$

Випадкова величина K підлегла, у загальному випадку, закону Пуассона.

Тоді

$$V(K) = E(K).$$

Отже,

$$V(S) = E(K)(V(Z) + M_1^2(Z)).$$

У той же час

$$V(Z) = E(Z^2) - (E(Z))^2 = E(Z^2) - (M_1(Z))^2.$$

Отже,

$$V(S)=E(K)M_2(Z).$$

Якщо ведуть справи N незалежних ризиків, кожен з них буде мати те саме середнє число страхових випадків $E(K)$ і однакову величину моменту другого порядку для розподілу величини страхових випадків.

Отже,

$$V(S)=NE(K)M_2(Z)$$

та

$$E(S)=NE(K)M_1(Z).$$

Якщо за цими N ризиками спостерігають протягом одного року і зафіксували n страхових випадків з величинами $s_1,s_2,...,s_n$, то

$$n=NE(K),$$

$$M_2(Z)=\frac{s_1^2+s_2^2+...+s_n^2}{n}.$$

Отже,

$$V(S)=s_1^2+s_2^2+...+s_n^2,$$

$$E(S)=E(S)=n\cdot\frac{s_1^2+s_2^2+...+s_n^2}{n}=s_1^2+s_2^2+...+s_n^2.$$

У цьому випадку також оцінка дисперсії показника результатів A буде:

$$\hat{V}(A)=\frac{\hat{V}(S)}{P^2}=\frac{s_1^2+s_2^2+...+s_n^2}{P^2},$$

і оцінка стандартного відхилення A показника результатів буде:

$$\hat{\sigma}(A)=\frac{\sqrt{s_1^2+s_2^2+...+s_n^2}}{P}.$$

<u>Випадок кумулятивних збитків</u>

Для деяких категорій подій, таких як град чи буря, ризики в портфелі не є незалежними a priori, тому що може бути задіяний не один ризик. Отже, більше неможливо складати дисперсії N ризиків.

У цьому випадку необхідно спостерігати протягом декількох років загальну величину збитків $S_1, S_2, ..., S_p$ і загальну величину щорічних премій $P_1, P_2, ..., P_p$.

Відношення

$$\frac{S_1}{P_1}, \frac{S_2}{P_2}, ..., \frac{S_p}{P_p}$$

є реалізаціями випадкової величини S / P.

Розраховують стандартне відхилення цієї величини, наприклад, 30%.

Щоб розрахувати $V(S)$ для розглянутого року, досить визначити суму премій, що належить до спеціальної категорії (наприклад, по страхуванню на випадок градобою), помножити на 30%, і потім, щоб одержати дисперсію для випадку градобою, звести в квадрат. Цей розрахунок, у якому використовуються послідовні значення щорічних премій $P_1, P_2, ..., P_p$, неявно включає вплив ринку та управління і дає завищене значення дисперсії.

<u>Теоретичний результат</u>

Дисперсія загальної величини збитків за визначений рік, де спостерігаються збитки $s_1, s_2, ..., s_k$, дорівнює сумі квадратів збитків, за винятком випадків кумулятивних збитків, для яких дисперсія дорівнює квадрату визначеного відсотка від премій.

Квадратний корінь з дисперсії, ділений на суму премій, дає оцінку для стандартного відхилення показника результатів.

2.2. Стандартне відхилення показника результатів

Вплив кількості ризиків на стандартне відхилення показника результатів

Якщо переходять від N ризиків до N' ризиків того ж виду, можна припустити, що якщо $N'/N = K$, то $\sum S_i^2$ буде дорівнювати $K\sum S_i^2$, а P дорівнюватиме KP. Нове стандартне відхилення

$$(\sigma'(A))^2 = \frac{K\sum S_i^2}{K^2 P^2} = \frac{(\sigma(A))^2}{K}$$

та

$$\sigma' = \frac{\sigma}{\sqrt{K}}.$$

Таким чином, якщо кількість застрахованих ризиків збільшується на 10% у рік, до кінця третього року одержуємо

$$K = 1{,}13 = 1{,}331$$

і

$$\sqrt{K = 1{,}153},$$

отже,

$$\sigma' = 0{,}87\sigma.$$

Таким чином, збільшення числа ризиків зменшує дисперсії

Вплив інфляції на стандартне відхилення показника результатів

Якщо I – це коефіцієнт інфляції, можна представити, що для постійного портфеля $s_i' = Is_i$ і $P' = IP$.

Отже,

$$(\sigma'(A))^2 = \frac{I\sum S_i^2}{I^2 P^2} = (\sigma(A))^2$$

і

$$\sigma' = \sigma.$$

Інфляція не впливає на стандартне відхилення показника результатів.

Вплив величини ліміту підписання на стандартне відхилення показника результатів

Припустимо, що страховик вирішив збільшити в 2 рази свій ліміт підписання по страхуванню пожежі – промислові ризики у порівнянні із ситуацією 4-го року, протягом якого було зібрано 25,7 млн. премій, з дисперсією, яка дорівнює

$$(25{,}7 \cdot 10^6 \cdot 8\%)^2 = 4{,}23 \cdot 10^{12},$$

(стандартне відхилення 8% від суми премій).

Після збільшення ліміту підписання, припустивши, що ефект від цього рішення був повний і негайний, страховик зараз одержить у 2 рази більше премій, тобто додатково ще $25{,}7 \cdot 10^6$ грн.

Що стосується збитків, можна припустити, що кожен збільшується в 2 рази, отже дисперсія збільшується на 4, отже, збільшення дисперсії дорівнюватиме

$$4{,}23 \cdot 10^{12} \cdot 3 = 12{,}69 \cdot 10^{12}.$$

До зміни ліміту, загальна дисперсія була:

$$(554,5\cdot10^6\cdot1\%)^2=30,7\cdot10^{12}.$$

Після зміни вона стала

$$\frac{30,7\cdot10^{12}+12,69\cdot10^{12}}{(554,5\cdot10^6+25,7\cdot10^6)^2}=\frac{43,44\cdot10^{12}}{580,2\cdot10^6}=\frac{43,44}{(580,2)^2}.$$

Нове стандартне відхилення показника результатів

$$\sigma'(A)=\frac{6,5909}{580,2}=1,14\%$$

замість 1%, як було до цього.

Відзначають слабку чутливість σ загального стандартного відхилення до великих змін ліміту підписання в одній підкатегорії, відносна «вага» якої невелика (5% від загальної суми премій).

2.3. Формування портфеля

При створенні компанії спираються на результати, отримані іншими компаніями.

Наприклад, страхуючи автомобілі та прості ризики, хочемо зібрати 6 млн. грн., по автомобілях і 4 млн. грн. по простих ризиках. По автомобілях будемо мати $\frac{6}{335,5}\approx\frac{1}{50}$ від числа ризиків у портфелі компанії, прийнятої за еталон (одиничні премії по ризиках передбачається однаковими), стандартне відхилення результату буде помножене на $\sqrt{K}$ у порівнянні зі стандартними відхиленнями компанії, прийнятої за еталон, тобто

$$1\%\cdot\sqrt{50}=1\cdot7,07\approx7\%.$$

Дисперсія по страхуванню автомобілів

$$(0,07\cdot6\cdot10^6)^2=0,18\cdot10^{12}\text{ грн.}$$

Для простих ризиків одержимо:

$4/51{,}4 = 0{,}08$ від числа ризиків еталонної компанії.

Стандартне відхилення буде помножене на $\sqrt{\dfrac{100}{8}}$, тобто

$$3{,}9 \cdot \sqrt{\frac{100}{8}} = 3{,}90 \cdot 3{,}53 = 13{,}8\% .$$

Дисперсія у випадку простих ризиків буде:

$$(0{,}138 \cdot 4 \cdot 10^6)^2 = 0{,}3 \cdot 10^{12} \text{ грн.}$$

У підсумку

$$V = 0{,}18 \cdot 10^{12} + 0{,}3 \cdot 10^{12} = 0{,}48 \cdot 10^{12} \text{ грн.}$$

Стандартне відхилення показника результатів по портфелю

$$\sigma = \frac{0{,}7 \cdot 10^6}{(6+4) \cdot 10^6} = 7\%.$$

2.4. Коефіцієнт безпеки ймовірності розорення

Коефіцієнт безпеки страховика

$$\boxed{\beta = \frac{K + E(G)}{T}},$$

де K – капітал, призначений для покриття ризиків.

$E(G)$ – математичне очікування доходу страховика, або $a \cdot P$, де a – математичне очікування показника результатів; T – стандартне відхилення суми збитків, або

$$\sqrt{s_1^2 + s_2^2 + ... + s_n^2},$$

яке можна змінити на P, де σ – стандартне відхилення показника результатів страховика.

Тоді

$$\beta = \frac{K + aP}{\sigma P}.$$

Позначимо через R результат звітного періоду, математичне очікування якого aP. Тоді страховик хоче побачити свій капітал K, витрачений на покриття негативних результатів, тобто ймовірність розорення, була б менше деякої величини, наприклад, 1%, що можна виразити нерівністю

$$P_r((K + R) < 0) < 1\%.$$

Якщо припустити

$$\frac{R + aP}{\sigma P} = \zeta,$$

одержуємо

$$P_r((K + aP + \zeta\sigma P) < 0) < 1\%$$

або

$$P_r(\zeta < -\frac{K + aP}{\sigma P}) < 1\%.$$

Нерівність Чебишева

$$P_r(|\zeta| > 10) < \frac{1}{10^2} = 1\%,$$

що відповідає

$$P_r(\zeta < -10) < 1\%$$

і

$$P_r(\zeta > 10) < 1\%.$$

Це означає, що коефіцієнт безпеки β повинен принаймні дорівнювати 10, тому що

$$-\beta = -\frac{K + aP}{\sigma P}.$$

Найчастіше можна припустити, що ζ підпорядковане нормальному закону розподілу. Тоді значення ζ, що відповідає 1% складає усього 2,4, отже $\beta \geq 2{,}4$

Зазвичай приймають $\beta \geq 4$.

Практичне використання при формуванні портфеля

Ми тільки що розглянули приклад, де планований збір премій складав 10 млн. грн. із стандартним відхиленням результату 7%.

Якщо представити, що показник результату по подібному до портфеля 3%, одержимо:

$$\beta = \frac{\frac{K}{10} + 3}{7} \geq 4,$$

що дає

$$K/10 \ = \ 25\%,$$

тобто $K \ = \ 2{,}5$ млн. грн.

Якщо прийняти $\beta = 10$, то $K = 6{,}7$ млн. грн.

Утім відзначають: стандартне відхилення бухгалтерського результату, що включає вплив усіх факторів, здатних впливати на результат, крім фактора «аварійності», значно вище стандартного відхилення тільки по збитках. Здається обґрунтованим вимога, щоб величина капіталу K, призначеного для покриття ризиків, стосовно величини статутного капіталу була б у такому ж співвідношенні, у якому стандартне відхилення по збитках належить до стандартного відхилення бухгалтерського результату.

Компанія тоді повинна була б мати у своєму розпорядженні статутний капітал, який дорівнює 3-, навіть 4-кратному значенню, розрахованому для K.

Якщо це неможливо, то тільки перестрахування дозволяє вирішити цю проблему.

Рівень власного утримання при перестрахуванні ексцедента збитків

Коефіцієнт безпеки β може бути записаний як

$$\beta = \frac{K + aP}{\sqrt{s_1^2 + s_2^2 + \ldots + s_n^2}} = \frac{K + aP}{\sqrt{\sum s_i^2}}.$$

При перестрахуванні ексцедента збитків страховик залишає в себе тільки одну частину кожного збитку.

Нехай $\theta_i s_i$ – частка страховика в збитку s_i, де $0 < \theta_i < 1$.

Винагорода перестраховика представлена ставкою r_i, що припускають застосувати до суми, що він узяв на себе. Таким чином, при збитку s_i винагорода перестраховика

$$r_i(1 - \theta_i) \cdot s_i .$$

Значення r_i залежить від стану ринку перестрахування, вона може змінюватися від 5 до 20%.

Після перестрахування нове значення коефіцієнта безпеки

$$\beta = \frac{K + aP - \sum r_i(1 - \theta_i)s_i}{\sqrt{\sum \theta_i^2 s_i^2}},$$

а прагнуть до того, щоб $\beta \geq 4$.

Існує нескінченна кількість рішень $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_i$, які дозволяють одержати встановлене значення β.

Те рішення, що обере страховик, буде відповідати мінімуму суми внесків перестраховикові, тобто мінімуму

$$\sum r_i(1 - \theta_i)s_{i.},$$

щоб залишити в себе максимум премій.

Розв’язок має вигляд

$$\theta_i = p\lambda_i ,$$

де

$$\lambda_i = \frac{r_i}{s_i} .$$

Значення p визначається з виразу

$$p = \frac{K + aP - \sum r_i s_i}{4\sqrt{A} - A},$$

де

$$A = \sum r_i^2 .$$

Шуканий оптимум ні в якому разі не включає $\theta_i = 0$, тобто ніякий збиток не повинний бути переданий перестраховикові повністю.

Якщо

$$r_1 = r_2 = r_i = r,$$

то

$$\theta_i = p\frac{r}{s_i} ,$$

що дає $\theta_i s_i = const.$

Рівень власного утримання однаковий для всіх ризиків.

Значення p визначається по відношенню

$$p = \frac{K + aP - r\sum s_i}{4\sqrt{nr^2} - nr^2}.$$

Для того, щоб визначити цю однакову величину утримання priori установлюють величину D, потім збитки ранжують по спаданню їх величин і розраховують суму

$$D^2 + ... + D^2 + s_k^2 + ... + s_n^2 = \delta^2 .$$

Потім обчислюють суму внесків перестраховикові:

$$r(s_1 - D) + r(s_2 - D) + ... + r(s_{k-1} - D) = R.$$

Далі розраховують

$$\beta = \frac{K + aP - R}{\sqrt{\delta^2}}.$$

Якщо β істотно перевищує 4, розрахунок повторюють при більш високому значенні D.

На практиці відзначають, що рівень власного утримання знаходиться в межах від 1 до 2% від величини власних фондів страховика, чи від 1 до 3% від суми зібраних премій по страхуванню на випадок пожежі й аварій до 5% у галузі страхування перевезень.

Тема 3. Промислові ризики

Передумовою виникнення страхових відносин є *ризик*, без якого не існує страхування, бо без ризику немає страхового інтересу. Поняття ризику пов'язується з усвідомленням небезпеки, загрози, ненадійності, невизначеності, непевності, випадковості, збитку. На думку дослідників, термін «ризик» походить від латинського слова «resecum» – скеля або небезпека зіткнення з нею. Протягом тривалого часу поняття ризику не лише асоціювалося з багатозначними негативними проявами життєвих ситуацій, а й часто вживалося як їх синонім. В економічній літературі відомі численні спроби сформулювати теоретичні визначення поняття ризику. Найбільш послідовним серед них є твердження, згідно з яким ризик у своїй першооснові є *невизначеністю*. Невизначеність породжується непередбачуваністю кінцевого результату, який може або збігатися з очікуваним, або бути ліпшим чи гіршим за нього. В умовах невизначеності кінцевий результат можна передбачити лише наближено, узявши одне з потенційно можливих значень. Така невизначеність зумовлюється, як правило, суб'єктивним сприйняттям реальних явищ. Поняття ризику, на противагу поняттю невизначеності, має практичне застосування, а тому його зміст потребує об'єктивного визначення. Отже, потрібний перехід від суб'єктивно сприйманої непевності, випадковості до об'єктивного поняття ризику, що на ній базується. Єдиний спосіб такого переходу – оцінити непевність (випадковість) кількісними методами, надавши їй реальних числових значень. Звідси випливає: ризиком буде визнано лише таку невизначеність, яку можна оцінити кількісно.

3.1. Характеристики ризику в сфері актуарних розрахунків

Чиста премія є добутком частоти страхових випадків на їх середню вартість, або, якщо можна, на страхову суму; ставка чистої премії є добутком частоти настання страхових випадків на середню збитковість («відсоток збитку») страхових випадків.

Нагадаємо також, що якщо портфель містить N ризиків і може розглядатися як вибірка об'єму N, узята із сукупності застрахованих об'єктів, дисперсія частоти f зареєстрованих страхових випадків

$$V(F) = \frac{f(1-f)}{N},$$

яка, при рівні безпеки 5% змушує враховувати, що частота знаходиться в межах

$$f \pm 1,96\sqrt{\frac{f(1-f)}{N}}.$$

Зрозуміло, що за промисловими ризиками сукупність застрахованих об'єктів обмежена кількісно. Об'єм N портфеля обмежений ще більше. Стандартне відхилення зростає, приводячи до неприйнятної невизначеності величини ставки чистої премії.

Якщо додати, що фактор «середньої вартості» має також великий розкид значень від декількох тисяч гривень до декількох сотень мільйонів гривень, то стають зрозумілими масштаби невизначеності, з якими страховику доводиться мати справу.

До *промислових ризиків* відносять ризики, що не пов'язані з особистим страхуванням, страхуванням по інвалідності, опіці тощо.

Наведемо приблизну таблицю перерозподілу промислових ризиків.

Таблиця 3.

Галузі страхування, відмінні від страхування життя, та перерозподіл страхування

Галузь страхування	*Розподіл перестрахування, %*
Автомобілі	27,5
Тілесні пошкодження – хвороба	17,5
Пожежа	19,3
Перевезення	3,9
Загальна цивільна відповідальність	9,4
Інше	22,4

Якщо обмежитися розглядом випадків пожежі, то в той час як відзначається швидкий розвиток за іншими застрахованими подіями, таких як виробничі втрати чи різні види цивільної відповідальності (за вироблену продукцію, забруднення навколишнього середовища тощо), наведені нижче цифри дають представлення про структуру ризику (табл. 4), а також про середні ставки, що спостерігаються на ринку чистої премії (табл. 5).

Таблиця 4.

Промислові і комерційні ризики

Рік	*Кількість договорів*	*Страхові суми, млрд. грн.*	*Отримані премії, млн. грн.*	*Сума збитків, млн. грн.*
1-й	97400	3832	4431	3527
2-й	95500	3975	4500	3310
3-й	91700	4054	4274	3669

Таблиця 5.

Середні ставки, що спостерігаються
на ринку чистої премії

Рік	*Середня ставка, в промілях (%)*
1-й	0.92
2-й	0.83
3-й	0.90

Неоднорідність ринку може бути охарактеризована наступними цифрами.

Кількість застрахованих ризиків вартістю понад 100 млн. грн. – 5,8% від загального числа, тоді як відповідні їм страхові суми становлять 66,8% від загальної суми.

Розподіл страхових випадків пожежі в промислових ризиках у 2003 р. показаний у табл. 5.

Необхідно для страховика мати для таких ризиків як можна більш тривалий період спостереження за їх поводженням.

Існує нагальна потреба організувати колективну систему спостережень за ризиками та за допомогою неї нормалізувати структуру.

3.2. Метод тарифікації

Було створено кілька підходів для того щоб знайти ймовірну розумну вартість ризику. Розглянемо декілька з них.

Підхід «Усікання»

Дуже великі страхові випадки серйозно порушують технічну рівновагу, а також уявлення про середню величину ризику, використовувану при тарифікації, можна придумати, щоб для цих виняткових ризиків створювався б резерв, який формується за рахунок надбавки на безпеку, що покривав би «зрізану» частину цих збитків.

Таблиця 6.

Розподіл страхових випадків пожежі
в промислових ризиках

Вартість страхового випадку у тис. грн.	*Кількість страхових випадків*		*Врегульовані суми*	
	Кількість	*% від загальною числа*	*Млн. грн.*	*% від загальної суми*
від 10 до 100	2190	59,90	75	2,1
від 100 до 500	766	20,90	163	4,5
від 500 до 1000	201	5,50	138	3,8
від 1000 до 5000	343	9,40	770	21,0
від 5000 до 10000	83	2,20	574	15,7
від 10000 до 50000	66	1,80	1284	35,1
від 50000 до 100000	7	0,20	509	13,9
більше 100000	1	0,03	145	3,9
Всього	3657	100,00	3658	100,00

Тоді треба визначити *рівень «зрізу»*. Для того, щоб зробити це, необхідно проаналізувати розподіл страхових випадків за як можна більш довгий період і визначити по ньому середню величину m і стандартне відхилення цієї величини.

Установивши конкретний рівень безпеки, по нерівності Чебишева визначають величину, що мас менш K% шансів бути перевищеною:

$$P_r(|x-m|>1\sigma)<\frac{1}{t^2},$$

де

$$\mathrm{K} = \frac{1}{t^2}.$$

Якщо, наприклад, установити $K = 1\%$, одержують

$$\frac{1}{t^2} = 0{,}01, \qquad t = 0{,}1,$$

звідки

$$x = m + 0{,}1\sigma.$$

Усі збитки, що перевищують дану величину, будуть «зрізані», починаючи з цієї величини.

Наступний приклад (табл. 6) спирається на 10-річні спостереження.

Для ризику *A* «усікання» буде проводитися, починаючи з величини

$$2 + 3{,}6 \cdot 1/\sqrt{0{,}01} = 2 + 3{,}6/0{,}1 = 38 \text{ млн. грн.}$$

Для ризику *B* «усікання» буде проводитися починаючи з величини

$$2{,}7 + 3{,}9 \cdot 1/\sqrt{0{,}01} = 2{,}7 + 3{,}9/0{,}1 = 41{,}7 \text{ млн. грн.}$$

Виходячи з цих значень, можна на основі «історії» розрахувати загальні витрати, представлені «зрізаними» частинами, і співвіднести їх із сумою премій для того, щоб визначити середній відсоток надбавки на безпеку.

Підхід через аналіз частот

Можна також вивчити кількісний розподіл великих страхових випадків. Наприклад, за шість звітних періодів (табл. 7).

Таблиця 7.

Розрахунок «зрізаних» збитків

Інтервали сум тис. грн.	*Ризик А*		*Ризик В*	
	Кількість страхових випадків	*Частота страхових випадків*	*Кількість страхових випадків*	*Частота страхових випадків*
від 100 до 300	29	27,0	13	15.5
від 300 до 500	19	44,5	11	28,5
віл 500 до 1000	25	67,5	19	51,0
від 1000 до 1500	11	77,8	4	56,0
від 1500 до 2500	9	86,0	14	72,5
від 2500 до 5000	8	93,5	13	88,0
від 5000 до 10000	4	97,2	7	96,5
більше 10000	3	100,0	3	100,0
Всього	108		84	
Середня величина, млн. грн.	2.0		2,7	
Стандартне відхилення	3,6		3,9	

Таблиця 8.

Кількісний розподіл великих страхових випадків

Величина збитків млн. гри.	*Кількість страхових випадків за звітні періоди*						*Середнє число*	*Дисперсія*
	рік 1	*рік 2*	*рік 3*	*рік 4*	*рік 5*	*рік 6*		
Більше 10	52	53	50	63	47	60	54,5	32,0
До 20	24	17	13	19	20	21	19,0	14,0
До 30	13	5	10	8	11	12	9,8	8,6
Більше 50	2	0	6	5	3	4	3,3	4,6

Якщо допустити, що кількість збитків, що перевищують 50 млн. грн., розподілено за законом Пуассона із середнім, яке дорівнює 3, то ймовірність одержати, наприклад, 6 таких страхових випадків – 3,4 %. Якщо такий рівень безпеки вважається достатнім, одержують 6 збитків величиною понад 50 млн. грн. замість 3. Отже, треба відкласти в резерв 150 млн. грн., тобто 150 млн. грн. – величина, що при розподілі на суму премій, зібраних за 6-й рік, дасть відсоток надбавки на безпеку.

Якщо задовольнятися рівнем безпеки 8%, то буде вважатися, що зможуть відбутися 5 страхових випадків по 50 млн. грн. замість 3, тобто треба створити резерв у 100 млн. грн.

Підхід через аналіз сум дуже великих збитків

Можна також представити, що кількість збитків, які перевищують по величині 50 млн. грн., дорівнює середньому значенню, що спостерігається, тобто 3, їх індивідуальна вартість більше 50 млн. грн.

Статистичні дані показують, що з трьох страхових випадків, які перевищують по величині 50 млн. грн., один обходиться дорожче 100 млн. грн. Можна вважати, що їх кількість відповідає біноміальному закону $p = 1/3$. Таблиці показують, що при рівні безпеки 96% можна одержати 3 збитки понад 100 млн. грн. замість одного, що відповідає резерву, який необхідно сформувати, у розмірі 200 млн. грн.

Відсоток надбавки на безпеку, як правило, встановлюється в розмірі 5% від суми виписаних премій.

Підхід через аналіз тенденції

Аналіз тенденції «аварійності» за методом лінійної регресії, застосовуваної до щорічних витрат за страховими випадками, погано підходить до промислових ризиків. Коефіцієнт кореляції

$$R^2 = \frac{\sum (y_i' - y)^2}{\sum (y_i - y)^2},$$

що дуже часто виявляється нижче 0,7, незадовільний і не дозволяє здійснити бажану екстраполяцію.

Отже, намагаються використовувати інші параметри:

- накопичену суму збитків,
- накопичену ставку чистої премії.

Метод залишається той самий: визначити тенденцію, якщо вона існує і екстраполювати її на майбутні звітні періоди для того, щоб визначити тариф.

Спроби лінійного вирівнювання накопиченої суми збитків у деяких випадках можуть виявитися успішніші, ніж вирівнювання накопиченої ставки чистої премії.

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

Актуарна сучасна вартість майбутньої пенсії, 16
Ануїтет постнумерандо,7
Ануїтет пренумерандо, 7

Ексцедент збитків, 54
Ексцедентне перестрахування, 53

Інтенсивність покупки пенсії, 19

Ймовірність розорення страхової компанії, 46, 55

Коефіцієнт безпеки ймовірності розорення, 97
Комутаційні функції, 8
Кумулятивна функція покупки пенсії, 19
Кумулятивні збитки, 93

Метод максимальної правдоподібності, 57
Міжгрупове відхилення, 83

Накопичена відповідальність, 17
Накопичувальне пенсійне страхування, 11, 20
Нерівність Лундбергу, 60
Нефондоване пенсійне страхування, 11
Нормальна ціна, 17, 20

Ощадна схема, 11

Пенсія, 11
Перестрахування, 49
Показник результатів, 87
Поправочний коефіцієнт, 61
Промислові ризики, 102, 104
Пропорційне перестрахування, 53

Рівень утримання, 55
Рівняння рівноваги фонду, 17

Страхова схема, 11
Страховий ануїтет, 7
Страхові виплати, 45
Страхові внески, 45

Фінансова стійкість страхових операцій, 79

Цензуровані вибірки, 57

Частка утримання, 53

ДОДАТОК А

Таблиця тривалості життя (СРСР, 1984-1985 р.)

Вік	*Чоловіки*			*Жінки*		
x	l_x	q_x	d_x	l_x	q_x	d_x
14	95,438	0,00068	65	96,407	0,00037	36
15	95,373	0,00082	78	96,371	0,00041	40
16	95,295	0,00101	97	96,331	0,00047	45
17	95,198	0,00124	118	96,286	0,00053	51
18	95,08	0,00149	142	96,235	0,00059	57
19	94,938	0,00173	164	96,178	0,00065	62
20	94,774	0,00196	186	96,116	0,00069	66
21	94,588	0,00216	205	96,05	0,00072	69
22	94,383	0,00234	221	95,981	0,00074	71
23	94,162	0,00249	235	95,91	0,00076	73
24	93,927	0,00263	247	95,837	0,00078	75
25	93,68	0,00277	260	95,762	0,00081	77
26	93,42	0,00293	274	95,685	0,00084	80
27	93,146	0,00312	290	95,605	0,00088	84
28	92,856	0,00333	310	95,521	0,00093	89
29	92,546	0,00356	330	95,432	0,00099	95
30	92,216	0,00381	352	95,337	0,00106	101
31	91,864	0,00405	372	95,236	0,00113	108
32	91,492	0,00425	389	95,128	0,00121	116
33	91,103	0,00445	406	95,012	0,00131	125
34	90,697	0,00465	422	94,887	0,00142	135
35	90,275	0,00487	440	94,752	0,00155	147
36	89,835	0,00514	462	94,605	0,00168	159
37	89,373	0,0055	492	94,446	0,00182	172
38	88,881	0,00595	529	94,274	0,00196	185
39	88,352	0,00649	573	94,089	0,00212	199
40	87,779	0,00708	622	93,89	0,00228	214
41	87,157	0,0077	671	93,676	0,00247	231
42	86,486	0,00831	719	93,445	0,00267	249
43	85,767	0,00888	762	93,196	0,00289	270
44	85,005	0,00943	801	92,926	0,00314	292

Продовження додатку А

Вік	*Чоловіки*			*Жінки*		
x	l_x	q_x	d_x	l_x	q_x	d_x
45	84,204	0,00997	840	92,634	0,00341	316
46	83,364	0,01057	881	92,318	0,00369	341
47	82,483	0,01126	929	91,977	0,00399	367
48	81,554	0,01208	985	91,61	0,0043	394
49	80,569	0,01303	1,05	91,216	0,00465	424
50	79,519	0,01409	1,121	90,792	0,00506	459
51	78,398	0,01522	1,193	90,333	0,00554	500
52	77,205	0,01637	1,264	89,833	0,0061	548
53	75,941	0,01754	1,332	89,285	0,00673	601
54	74,609	0,01872	1,397	88,684	0,0074	656
55	73,212	0,01997	1,462	88,028	0,00806	709
56	71,75	0,02136	1,532	87,319	0,00866	756
57	70,218	0,02293	1,61	86,563	0,00919	795
58	68,608	0,0247	1,695	85,768	0,00969	831
59	66,913	0,02665	1,783	84,937	0,01023	869
60	65,13	0,02871	1,87	84,068	0,01094	919
61	63,26	0,0308	1,949	83,149	0,01193	992
62	61,311	0,03296	2,021	82,157	0,01318	1,083
63	59,29	0,03523	2,089	81,074	0,01467	1,189
64	57,201	0,03765	2,153	79,885	0,01634	1,305
65	55,048	0,04027	2,217	78,58	0,01819	1,43
66	52,831	0,0431	2,277	77,15	0,02024	1,561
67	50,554	0,04616	2,333	75,589	0,02249	1,7
68	48,221	0,04947	2,385	73,889	0,02497	1,845
69	45,836	0,05304	2,431	72,044	0,02771	1,997
70	43,405	0,05691	2,47	70,043	0,03073	2,153
71	40,935	0,06108	2,5	67,894	0,03406	2,212
72	38,435	0,06558	2,521	65,582	0,03772	2,474
73	35,914	0,07044	2,53	63,108	0,04176	2,635
74	33,384	0,07568	2,527	60,473	0,0462	2,794
75	30,857	0,08129	2,508	57,679	0,05106	2,945
76	28,349	0,08738	2,477	54,736	0,05642	3,088
77	25,872	0,09393	2,43	51,646	0,06232	3,218

Продовження додатку А

Вік	*Чоловіки*			*Жінки*		
x	l_x	q_x	d_x	l_x	q_x	d_x
78	23,442	0,10098	2,367	48,428	0,06879	3,331
79	21,075	0,10857	2,288	45,097	0,07589	3,423
80	18,787	0,11672	2,193	41,674	0,08368	3,487
81	16,594	0,12548	2,082	38,187	0,09221	3,521
82	14,512	0,13489	1,957	34,666	0,10155	3,52
83	12,555	0,14497	1,82	31,146	0,11176	3,481
84	10,735	0,15577	1,672	27,665	0,12291	3,4
85	9,063	0,16733	1,517	24,265	0,13507	3,277
86	7,546	0,2	1,509	20,988	0,2	4,197
87	6,037	0,4	2,414	16,791	0,4	6,716
88	3,623	0,6	2,174	10,075	0,6	6,045
89	1,449	0,8	1,159	4,03	0,8	3,224
90	0,29	1	0,29	0,806	1	0,806
78	23,442	0,10098	2,367	48,428	0,06879	3,331
79	21,075	0,10857	2,288	45,097	0,07589	3,423
80	18,787	0,11672	2,193	41,674	0,08368	3,487
81	16,594	0,12548	2,082	38,187	0,09221	3,521
82	14,512	0,13489	1,957	34,666	0,10155	3,52
83	12,555	0,14497	1,82	31,146	0,11176	3,481
84	10,735	0,15577	1,672	27,665	0,12291	3,4
85	9,063	0,16733	1,517	24,265	0,13507	3,277
86	7,546	0,2	1,509	20,988	0,2	4,197
87	6,037	0,4	2,414	16,791	0,4	6,716
88	3,623	0,6	2,174	10,075	0,6	6,045
89	1,449	0,8	1,159	4,03	0,8	3,224
90	0,29	1	0,29	0,806	1	0,806

ДОДАТОК В

Таблиця значень функції $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-z^2/2} dz$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,0000	0,23	0,0910	0,46	0,1772	0,69	0,2549
0,01	0,0040	0,24	0,0948	0,47	0,1808	0,70	0,2580
0,02	0,0080	0,25	0,0987	0,48	0,1844	0,71	0,2611
0,03	0,0120	0,26	0,1026	0,49	0,1879	0,72	0,2642
0,04	0,0160	0,27	0,1064	0,50	0,1915	0,73	0,2673
0,05	0,0199	0,28	0,1103	0,51	0,1950	0,74	0,2703
0,06	0,0239	0,29	0,1141	0,52	0,1985	0,75	0,2734
0,07	0,0279	0,30	0,1179	0,53	0,2019	0,76	0,2764
0,08	0,0319	0,31	0,1217	0,54	0,2054	0,77	0,2794
0,09	0,0359	0,32	0,1255	0,55	0,2088	0,78	0,2823
0,10	0,0398	0,33	0,1293	0,56	0,2123	0,79	0,2852
0,11	0,0438	0,34	0,1331	0,57	0,2157	0,80	0,2881
0,12	0,0478	0,35	0,1368	0.58	0,2190	0,81	0,2910
0,13	0,0517	0,36	0,1406	0,59	0,2224	0,82	0,2939
0,14	0,0557	0,37	0,1443	0,60	0,2257	0,83	0,2967
0,15	0,0596	0,38	0,1480	0,61	0,2291	0,84	0,2995
0,16	0.0636	0,39	0,1517	0,62	0,2324	0,85	0,3023
0,17	0,0675	0,40	0,1554	0,63	0,2357	0,86	0,3051
0,18	0,0714	0,41	0,1591	0,64	0,2389	0,87	0,3078
0,19	0,0753	0,42	0,1628	0,65	0,2422	0,88	0,3106
0,20	0,0793	0,43	0,1664	0,66	0,2454	0,89	0,3133
0,21	0,0832	0,44	0,1700	0,67	0,2486	0,90	0,3159
0,22	0,0871	0,45	0,1736	0,68	0,2517	0,91	0,3186

Продовження додатку В

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,92	0,3212	1,18	0,3810	1,44	0,4251	1,70	0,4554
0,93	0,3238	1,19	0,3830	1,45	0,4265	1,71	0,4564
0,94	0,3264	1,20	0,3849	1,46	0,4279	1,72	0,4573
0,95	0,3289	1,21	0,3869	1,47	0,4292	1,73	0,4582
0,96	0,3315	1,22	0,3883	1,48	0,4306	1,74	0,4591
0,97	0,3340	1,23	0,3907	1,49	0,4319	1,75	0,4599
0,98	0,3365	1,24	0,3925	1,50	0,4332	1,76	0,4608
0,99	0,3389	1,25	0,3944	1,51	0,4345	1,77	0,4616
1,00	0,3413	1,26	0,3962	1,52	0,4357	1,78	0,4625
1,01	0,3438	1,27	0,3980	1,53	0,4370	1,79	0,4633
1,02	0,3461	1,28	0,3997	1,54	0,4382	1,80	0,4641
1,03	0,3485	1,29	0,4015	1,55	0,4394	1,81	0,4649
1,04	0,3508	1,30	0,4032	1,56	0,4406	1,82	0,4656
1,05	0,3531	1,31	0,4049	1,57	0,4418	1,83	0,4664
1,06	0,3554	1,32	0,4066	1,58	0,4429	1,84	0,4671
1,07	0,3577	1,33	0,4082	1,59	0,4441	1,85	0,4678
1,08	0,3599	1,34	0,4099	1,60	0,4452	1,86	0,4686
1,09	0,3621	1,35	0,4115	1,61	0,4463	1,87	0,4693
1,10	0,3643	1,36	0,4131	1,62	0,4474	1,88	0,4699
1,11	0,3665	1,37	0,4147	1,63	0,4484	1,89	0,4706
1,12	0,3686	1,38	0,4162	1,64	0,4495	1,90	0,4713
1,13	0,3708	1,39	0,4177	1,65	0,4505	1,91	0,4719
1,14	0,3729	1,40	0,4192	1,66	0,4515	1,92	0,4726
1,15	0,3749	1,41	0,4207	1,67	0,4525	1,93	0,4732
1,16	0,3770	1,42	0,4222	1,68	0,4535	1,94	0,4738
1,17	0,3790	1,43	0,4236	1,69	0,4545	1,95	0,4744

Продовження додатку В

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
1,96	0,4750	2,24	0,4875	2,56	0,4948	2,90	0,4981
1,97	0,4756	2,26	0,4881	2,58	0,4951	2,92	0,4982
1,98	0,4761	2,28	0,4887	2,60	0,4953	2,94	0,4984
1,99	0,4767	2,30	0,4893	2,62	0,4956	2,96	0,4985
2,00	0,4772	2,32	0,4898	2,64	0,4959	2,98	0,4986
2,02	0,4783	2,34	0,4904	2,66	0,4961	3,00	0,49865
2,04	0,4793	2,36	0,4909	2,70	0,4965	3,20	0,49931
2,06	0,4803	2,38	0,4913	2,72	0,4967	3,40	0,49966
2,08	0,4812	2,40	0,4918	2,74	0,4969	3,60	0,499841
2,10	0,4821	2,42	0,4922	2,76	0,4971	3,80	0,499928
2,12	0,4830	2,44	0,4927	2,78	0,4973	4,00	0,499968
2,14	0,4838	2,46	0,4931	2,80	0,4974	4,50	0,499997
2,16	0,4846	2,48	0,4934	2,82	0,4976	5,00	0,499999
2,18	0,4854	2,50	0,4938	2,84	0,4977		
2,20	0,4861	2,52	0,4941	2,86	0,4979		
2,22	0,4868	2,54	0,4945	2,88	0,4980		

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ТА РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

Основна

1. Базилевич В. Д. Страхова справа / В. Д. Базилевич, К. С. Базилевич. – К. : Т-во «Знання», КОО, 2003. – 250 с.
2. Ковтун І. О. Основи актуарних розрахунків: навчальний посібник / І. О. Ковтун, М. П. Денисенко, В. Г. Кабанов. – К. : «ВД «Професіонал», 2008. – 480 с.
3. Кутуков В. Б. Основы финансовой и страховой математики / В. Б. Кутуков. – Москва: Дело, 1998. – 200 с.
4. Малыхин В. И. Финансовая математика: учеб. пособ. для вузов / В. И. Малыхин. – Москва: ЮНИТ-ДАНА, 2003. – 237 с.
5. Пономаренко О. І. Вступ до актуарної математики / О. І. Пономаренко. – К. : ЕМЦ, 2003. – 450 с.
6. Штрауб Э. Актуарная математика имущественного страхования / Э. Штрауб. – Москва: Дело, 1995. – 320 с.

Додаткова

1. Ашманов С. А. Введение в математическую экономику / С. А. Ашманов. – Москва: Наука, 1984. – 350 с.
2. Капитоненко В. В. Финансовая математика и ее приложения / В. В. Капитоненко. – Москва: Приор, 1998. – 210 с.
3. Пономаренко О. І. Основи математики фінансів і страхування. У 2 ч. / О. І. Пономаренко. – К. : ІВЦ Держкомстату України, 2004. – 256 с.
4. Фалин Г. И. Введение в актуарную математику / Г. И. Фалин, А. И. Фалин. – Москва: изд-во Моск. ун-та, 1994. – 305 с.

Навчальне видання

ІЄ Ольга Миколаївна
СОТНИКОВА Софія Анатоліївна

АКТУАРНА МАТЕМАТИКА

ЧАСТИНА 2

Навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів

Редактор	– Іє О. М.
Комп'ютерний макет	– Сотникова С. А.
Коректор	– Кубатіна Ю. А.
Макет обкладинки	– Сотникова С. А.

Здано до складання 20.05.2009 р. Підписано до друку 20.06.2009 р.
Формат $60 \times 84/16$. Папір офсетний. Гарнітура Times New Roman.
Друк офсетний. Ум. друк. арк. 6,98. Наклад 30 прим.

Видавництво Державного закладу
«Луганський національний університет імені Тараса Шевченка»
вул. Оборонна 2, м. Луганськ, 91011. Тел./факс: (0642)58-03-20