Л. В. ЖОВТАН,
В. В. ПРОШКІН,
С. В. ТЕМНІКОВА

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК

ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ, ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

Міністерство освіти і науки України
Державний заклад
«Луганський національний університет
імені Тараса Шевченка»

Л. В. ЖОВТАН,
В. В. ПРОШКІН,
С. В. ТЕМНІКОВА

ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ, ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

Навчальний посібник
для студентів технічних спеціальностей
вищих навчальних закладів

Луганськ
ДЗ «ЛНУ імені Тараса Шевченка»
2010

УДК 517(075.8)
ББК 22.161я73
Ж78

Р е ц е н з е н т и:

Михайлова І. О. – кандидат фізико-математичних наук, доцент, директор Інституту інформаційних технологій Луганського національного університету імені Тараса Шевченка.

Жучок Ю. В. – кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри математичного аналізу та алгебри Луганського національного університету імені Тараса Шевченка.

Жовтан Л. В., Прошкін В. В., Темнікова С. В.
Ж78 Інтегральне числення функції однієї змінної. Диференціальне, інтегральне числення функції багатьох змінних : навч. посіб. для студ. техніч. спец. вищ. навч. закл. / Л. В. Жовтан, В. В. Прошкін, С. В. Темнікова ; Держ. закл. «Луган. нац. ун-т імені Тараса Шевченка». – Луганськ : Вид-во ДЗ “ЛНУ імені Тараса Шевченка”, 2010. – 130 с.

Навчальний посібник призначений для підготовки до занять з “Вищої математики” й містить основні теоретичні відомості про розділи “Інтегральне числення функції однієї змінної”, “Диференціальне числення функції багатьох змінних”, “Інтегральне числення функції багатьох змінних” із прикладами розв’язання типових і нестандартних задач. Указівки з розв’язання задач подаються в максимально простій і доступній формі. У кінці кожного розділу пропонуються питання для самоперевірки й завдання для самостійної роботи.

Навчальний посібник може бути корисним студентам технічних спеціальностей у процесі підготовки до занять з “Вищої математики”, а також усім тим, хто цікавиться питаннями можливості використання елементів диференціального, інтегрального числення на практиці.

УДК 517 (075.8)
ББК 22. 161я73

Рекомендовано до друку науково-методичною радою Луганського національного університету імені Тараса Шевченка (протокол № 5 від 6 січня 2010 року)

ЗМІСТ

ВСТУП…………………………………………………………………………….. 6

РОЗДІЛ 1. ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

1. НЕВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

1.1. Поняття первісної та невизначеного інтеграла……………………………... 8

1.2. Властивості невизначеного інтеграла…………………………................. 10

1.3. Таблиця основних інтегралів……………………………........................... 11

1.4 Основні методи інтегрування ……………………………........................... 12

1.5 Інтегрування дробово-раціональних функцій ……………………………... 16

1.6 Інтегрування виразів, що містять тригонометричні функції…………………….. 22

1.7 Інтегрування деяких ірраціональних функцій…………………………..... 24

1.8. Теорема Коші. Поняття про інтеграли, які “не беруться”………………………. 27

Завдання для самостійного розв'язання……………………………...................... 27

2. ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

2.1. Задачі, що приводять до поняття визначеного інтеграла…………………….. 29

2.2. Означення визначеного інтеграла. Умови існування визначеного інтеграла….. 31

2.3. Властивості визначеного інтеграла………………………………………… 33

2.4. Оцінка визначеного інтеграла. Теореми про оцінку…………………………….. 35

2.5. Теорема про середнє значення функції……………………………………….. 36

2.6. Визначений інтеграл із змінною верхньою межею………………………… 37

2.7. Формула Ньютона-Лейбніца………………………………………………….. 38

2.8. Методи обчислення визначених інтегралів…………………………………... 40

3. ЗАСТОСУВАННЯ ВИЗНАЧЕНОГО ІНТЕГРАЛА

3.1. Обчислення площі плоскої фігури……………………………………………….. 43

3.2. Обчислення довжини дуги гладкої кривої………………………………………. 47

3.3. Обчислення об’єму тіла…………………………………………………………….. 50

3.4. Обчислення площі поверхні обертання……………………………………….. 51

3.5. Обчислення роботи змінної сили………………………………………………… 52

Завдання для самостійного розв'язання…………………………………………. 53

4. НЕВЛАСТИВІ ІНТЕГРАЛИ

4.1. Невластиві інтеграли з нескінченними межами інтегрування……………….… 55

4.2. Ознаки збіжності невластивих інтегралів першого роду……………………… 57

4.3. Невластиві інтеграли від необмежених функцій……………………………….. 60

4.4. Ознаки збіжності невластивих інтегралів другого роду………………………... 62

Завдання для самостійного розв'язання…………………………………………. 63

Питання для самоконтролю………………………………………………………… 64

РОЗДІЛ 2. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ДЕКІЛЬКОХ ЗМІННИХ

1. ФУНКЦІЯ ДЕКІЛЬКОХ ЗМІННИХ, ЇЇ ГРАНИЦЯ Й НЕПЕРЕРВНІСТЬ

1.1. Поняття функції декількох змінних.
Область визначення функції декількох змінних………………………………………….... 65
1.2. Границя функції двох змінних………………………………………………………… 67
1.3. Неперервність функції двох змінних…………………………………………………. 68
1.4. Неперервні функції в замкненій і обмеженій області та їх властивості……….. 69

2. ПОХІДНІ ТА ДИФЕРЕНЦІАЛИ ФУНКЦІЇ ДЕКІЛЬКОХ ЗМІННИХ

2.1. Частинні похідні функції декількох змінних…………………………………….… 71
2.2. Диференційовність функції декількох змінних……………………………….…. 73
2.3. Повний диференціал та його застосування………………………………………… 74
2.4. Диференціювання складеної функції. Повна похідна. Інваріантність форми повного диференціала функції декількох змінних……………………………………… 76
2.5. Диференціювання неявно заданої функції декількох змінних……….………… 78
2.6. Частинні похідні й диференціали вищих порядків……………………………... 79
Завдання для самостійного розв'язання………………………………………………….. 82

3. ДЕЯКІ ЗАСТОСУВАННЯ ЧАСТИННИХ ПОХІДНИХ

3.1. Локальні екстремуми функції двох змінних………………………………………….. 82
3.2. Знаходження найбільшого і найменшого значень функції, неперервної в обмеженій замкненій області…………………………………………………………… 85
3.3. Умовний екстремум функції двох змінних…………………………………………….. 86
3.4. Дотична площина та нормаль до поверхні……………………………………… 88
3.5. Похідна за напрямом. Градієнт………………………………………………………. 89
Завдання для самостійного розв'язання………………………………………………….. 91
Питання для самоконтролю……………………………………………………………… 91

РОЗДІЛ 3. ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

1. КРАТНІ ІНТЕГРАЛИ

1.1. Задачі, що приводять до поняття подвійного інтеграла……………………….... 93
1.2. Означення подвійного інтеграла. Умови існування подвійного інтеграла…….. 94
1.3. Означення потрійного інтеграла. Умови існування потрійного інтеграла…….. 95
1.4. Властивості кратних інтегралів………………………………………………………… 96
1.5. Обчислення подвійного інтеграла повторним інтегруванням…………………. 97
1.6. Обчислення потрійного інтеграла повторним інтегруванням…………………. 100

2. ЗАМІНА ЗМІННИХ У КРАТНИХ ІНТЕГРАЛАХ

2.1. Заміна змінних у подвійному інтегралі…………….…….…………….………. 102

2.2. Обчислення подвійного інтеграла у полярній системі координат…………….. 103

2.3. Заміна змінних у потрійному інтегралі…………….…….…………….………. 105

2.4. Обчислення потрійного інтеграла у циліндричній і сферичній системах координат…………….…….……………..…….……………..…….…………….…...… 105

3. ЗАСТОСУВАННЯ КРАТНИХ ІНТЕГРАЛІВ

3.1. Застосування кратних інтегралів до задач геометрії…………….…….……… 108

3.2. Застосування кратних інтегралів до задач фізики………….…….………….. 110

Завдання для самостійного розв'язання………….…….…………….…….……… 113

4. КРИВОЛІНІЙНІ ІНТЕГРАЛИ

4.1. Задачі, що приводять до поняття криволінійного інтеграла I роду…………..… 114

4.2. Означення криволінійного інтеграла 1-го роду………….…….…………….... 115

4.3. Обчислення криволінійного інтеграла першого роду………….…….………… 117

4.4. Застосування криволінійного інтеграла першого роду………….…….……….... 118

4.5. Задачі, що приводять до поняття криволінійного інтеграла 2-го роду………… 118

4.6. Означення криволінійного інтеграла другого роду………….…….…………… 119

4.7. Обчислення криволінійного інтеграла другого роду………….…….……….. 120

4.8. Обчислення криволінійного інтеграла другого роду………….…….……….. 121

4.9. Формула Гріна………….…….…………….…….…………….……. 121

4.10. Умови незалежності криволінійного інтеграла другого роду від шляху інтегрування………….…….…………….…….…………….…….……….. 122

4.11. Інтегрування повних диференціалів………….…….…………….…….… 126

Завдання для самостійного розв'язання………….…….…………….…….……… 128

Питання для самоконтролю………….…….…………….…….…………….... 128

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА………….…….…………….…….……….. 129

ВСТУП

Математика – наука про кількісні відносини та просторові форми реального світу. Самостійною наукою математика стала ще в Стародавній Греції приблизно в VI ст. до н.е. Це було початком періоду елементарної математики. Тоді математичні дослідження виникали у зв'язку з простими запитами господарського життя.

У XVII ст. математика почала бурхливого розвиватись. Проблеми природознавства й техніки призвели до створення методів, що дозволяють математично вивчати рух, процеси зміни величин, перетворення геометричних фігур. Подальше становлення математики спричинило на початку XIX ст. постановки завдання вивчення можливих типів кількісних відносин і просторових форм. Нові теорії виникали не лише в результаті запитів практики, але й унаслідок внутрішньої потреби самої математики. Прикладом такої теорії є геометрія М. Лобачевського. Розвиток подібного роду досліджень у математиці XIX-XX ст. дозволив віднести її до періоду сучасної математики.

У наші дні математика відіграє важливу роль у природничих, економічних, інженерно-технічних, гуманітарних дослідженнях. Вона стала для багатьох галузей знань засобом кількісного розрахунку, методом точного дослідження й способом чіткого формулювання понять і проблем.

Основи вищої математики були розроблені в працях таких видатних учених: математика й механіка Стародавньої Греції Архімеда; французького філософа й математика Р. Декарта; англійського фізика й математика І. Ньютона; німецького філософа, математика й фізика Р. Лейбніца; математика, механіка й фізика Л. Ейлера; французького математика й механіка Ж. Лагранжа; німецького математика К. Гауса; французького математика О. Коші та ін. Вагомий внесок у розвиток математики внесли такі видатні математики – М. Лобачевський, М. Остроградський, П. Чебишев, А. Марков, А. Ляпунов, О. Колмогоров, О. Александров та ін.

Вивчення математики дозволить майбутньому фахівцю набути необхідних базових навичок, розширити кругозір, підвищити рівень мислення та загальну культуру. Усе це знадобиться для орієнтації в професійній діяльності й успішній роботі.

У навчальному посібнику використано матеріали, що пройшли практичну перевірку при викладанні вищої математики в педагогічних, економічних і класичних вищих навчальних закладах для різних форм навчання.

Метою викладання навчальної дисципліни є:

- навчити студентів володінню математичним апаратом математичного аналізу, достатнім для опрацьовування математичних моделей, пов'язаних з подальшою практичною діяльністю фахівців;
- дати необхідні теоретичні знання й основні напрями їх застосування в системі дисциплін за спеціальністю;
- сформувати первинні навички математичного дослідження прикладних задач;
- виробити вміння самостійно використовувати при розв'язуванні задач необхідні методи лінійної і векторної алгебри, аналітичної геометрії та опрацьовувати спеціальну літературу;
- сформувати початкове уміння в побудові й використанні математичних моделей та ін.

Завданням навчальної дисципліни є формування вміння виконувати математичні перетворення й розрахунки, пов'язані з розробкою та використанням технічного й програмного об'єктів із застосуванням основних понять, законів і методів математичного аналізу, у тому числі елементами диференціального числення.

У результаті вивчення дисципліни студент повинен показати практичні навички:

- виконання дій над матрицями;
- обчислювання визначників;
- розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь методом Крамера, матричним методом і методом Гауса;
- виконання дії з векторами;
- розв'язання основних і найпростіших задачі аналітичної геометрії;
- виконання стандартних операцій з множинами;
- знаходження границь послідовностей і функцій, дослідження функцій на неперервність, з'ясування характеру розривів функцій;
- порівняння нескінченно малих, знаходження границь з заміною функцій їм еквівалентними нескінченно малими;
- знаходження похідної за її означенням для явно заданих функцій, за таблицею похідних та їх властивостями у випадку явно, неявно, параметричне заданих функцій, знаходження похідних вищих порядків явно, неявно, параметричне заданих функцій;
- розв'язування прикладних задач з застосуванням похідної в простих випадках, подання елементарних функцій за Тейлоровою формулою;
- знаходження диференціала (у тому числі й за означенням) та його застосування до наближених обчислень та оцінок похибок;
- дослідження функцій на монотонність, екстремум, опуклість, проведення повного дослідження функцій з зображенням їх графіків, розв'язування практичних задач на найбільше та найменше значення, знаходження кривини функцій;
- знаходження невизначеного інтегралу за допомогою таблиці, теорем, методів;
- обчислювання визначених інтегралів; застосування визначеного інтегралу для розв'язання прикладних задач;
- застосування елементів диференціального, інтегрального числення функцій декількох змінних для розв'язання технічних і фізичних задач.

Для збереження єдиної структури викладу матеріалу автори запропонованого навчального посібника дотримувалися максимально можливого ступеня математичної строгості. Форма подання матеріалу робить посібник зручним у користуванні й корисним для узагальнення знань з розділів "Інтегральне числення функції однієї змінної", "Диференціальне числення функції багатьох змінних", "Інтегральне числення функції багатьох змінних".

Посібник написано у відповідності з типовою навчальною програмою Міністерства освіти і науки України для студентів технічних спеціальностей вищих навчальних закладів.

Прийняті в посібнику позначення відповідають позначенням, які наводяться в більшості підручників і посібників з вищої математики. З метою полегшення роботи основні поняття, положення й формулювання виділено за текстом, проілюстровано, викладено у вигляді таблиць.

З повагою, автори.

РОЗДІЛ 1. ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

1. НЕВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

1.1. Поняття первісної та невизначеного інтеграла

Поняття інтеграла разом із поняттям похідної і диференціала є фундаментальним поняттям вищої математики.

Необхідність у інтегральному численні викликають задачі практичної напрямленості, а саме: необхідність обчислення маси неоднорідного тіла, площ фігур досить складного характеру, роботи змінних сил, об'ємів тіл, центрів тяжіння тощо, а також необхідність визначення функції, якщо відома її похідна. Усі ці задачі призвели до розвитку інтегрального числення.

Основні поняття й початки інтегрального числення було розроблено наприкінці 17 ст. Ісааком Ньютоном (1643–1727) і Готфридом Лейбніцем (1646–1716). Термін "інтеграл" ввів Якоб Бернуллі (1654–1705) у 1690 р.

У диференційному численні однією з основних задач є обчислення похідної або диференціала заданої функції. Інтегральне числення вирішує обернену задачу – відновлення функції по заданим її похідній або диференціалу.

Раніше було з'ясовано, що, якщо відомий закон $s = s(t)$ прямолінійного руху матеріальної точки, який виражає залежність шляху s від часу руху t, то швидкість точки виражається похідною шляху за часом:

$$v = s'(t).$$

Обернена задача: відома швидкість прямолінійного руху точки $v = v(t)$ як функція часу. Знайти закон руху. Зрозуміло, що шуканою функцією $s = s(t)$ буде така, для якої

$$s'(t) = v(t).$$

О з н а ч е н н я 1. Функція $F(x)$ називається *первісною функцією* для заданої функції $f(x)$ (або, коротше, *первісною* заданої функції $f(x)$) на проміжку $\langle a,b \rangle$, якщо $F(x)$ диференційовна на $\langle a,b \rangle$ та

$$\forall x \in \langle a,b \rangle \quad (F'(x) = f(x)).$$

<u>Приклад:</u> Первісною функції $f(x) = x^2$ на R є функція $F(x) = \dfrac{x^3}{3}$, бо

$$\forall x \in R \ \left(F'(x) = \left(\frac{x^3}{3} \right)' = \frac{3x^2}{3} = x^2 = f(x) \right).$$

Очевидно, що первісними для $f(x) = x^2$ будуть також функції $F(x) = \dfrac{x^3}{3} + 1$, $F(x) = \dfrac{x^3}{3} + 2$ і, взагалі, $F(x) = \dfrac{x^3}{3} + C$, де C – довільна стала, тому що

$$\forall x \in R \ \left(F'(x) = \left(\frac{x^3}{3} + C \right)' = x^2 \right).$$

<u>Зауваження:</u> Приклад показує, що, якщо для функції існує первісна, то вона не єдина.

Т е о р е м а 1: Якщо $F(x)$ – первісна функції $f(x)$ на проміжку $\langle a,b \rangle$, то всяка інша первісна функції $f(x)$ на цьому ж проміжку відрізняється від $F(x)$ на сталу величину, тобто має вигляд $F(x) + C$.

<u>Доведення.</u> Нехай $F(x)$ і $F_1(x)$ – первісні функції $f(x)$ на $\langle a,b \rangle$.

За означенням первісної

$$\forall x \in \langle a,b \rangle \ (F'(x) = f(x), \ F_1'(x) = f(x)).$$

Розглянемо функцію $\varphi(x) = F_1(x) - F(x)$. Тоді

$$\forall x \in \langle\, a,b \,\rangle \ (\varphi'(x) = (F_1(x) - F(x))' = F_1'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0).$$

За необхідною й достатньою умовою сталості функції на проміжку маємо:

$$\varphi(x) = C.$$

Отже,

$$F_1(x) = F(x) + C.\Diamond$$

Зауваження 1: Із теореми 1 випливає, що всі первісні даної функції $f(x)$ є елементами множини $\{\, F(x) + C \,\}$, де $F(x)$ – одна з первісних функцій $f(x)$, а C – довільна стала.

Зауваження 2: Якщо похідна для функції – одна, тобто операція диференціювання однозначна, то знаходження первісної для функції можливе лише з точністю до деякого постійного доданка.

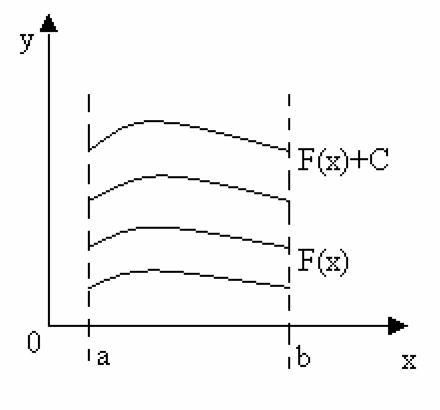
О з н а ч е н н я 2. Вираз $F(x) + C$, де $F(x)$ – первісна функції $f(x)$ на проміжку $\langle\, a,b \,\rangle$, а C – довільна стала, називається *невизначеним інтегралом* від функції $f(x)$ на $\langle\, a,b \,\rangle$.

Позначається: $\int f(x)dx$.

Знак $\int$ називається *знаком невизначеного інтеграла*, $f(x)dx$ – *підінтегральним виразом*, $f(x)$ – *підінтегральною функцією*, x – *змінною інтегрування*.

Отже, знайшовши будь-яку первісну функцію $F(x)$, можна написати:

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$



Із означення випливає, що невизначений інтеграл є сукупністю первісних функцій $F(x) + C$.

Геометрично невизначений інтеграл є множиною кривих, кожна з яких називається *інтегральною кривою*. Ця множина утворюється зсувом однієї з інтегральних кривих паралельно самій собі вздовж осі Oy.

Для того, щоб цілком визначити положення шуканої інтегральної кривої, тобто вираз шуканої первісної функції, необхідно задати ще будь-яку точку, через яку інтегральна крива має пройти. Таке значення рівносильне завданню початкового значення y_0 шуканої функції $y = F(x)$, яке вона повинна мати при заданому значенні $x = x_0$.

Т е о р е м а 2 (т е о р е м а К о ш і): Якщо функція $f(x)$ неперервна на проміжку $\langle\, a,b \,\rangle$, то вона має на цьому проміжку первісну (невизначений інтеграл).

Надалі ми вестимемо мову про первісні лише для неперервних функцій. Тому інтеграли, що розглядатимуться нами надалі, існують.

О з н а ч е н н я 3. Задача знаходження невизначеного інтеграла від функції називається її *інтегруванням.*

Для того, щоб перевірити, чи правильно виконане дане інтегрування, треба здиференціювати результат та отримати при цьому підінтегральну функцію.

Приклад: Перевіримо, чи правильно виконано інтегрування:

$$\int 4x^7 dx = \frac{x^8}{2} + C.$$

Для цього здиференцюємо отриманий результат:

$$\left(\frac{x^8}{2}\right)' = \frac{1}{2}\left(x^8\right)' = \frac{1}{2}\cdot 8x^7 = 4x^7,$$

тобто маємо вираз, який співпадає з підінтегральною функцією. Отже, інтегрування виконано правильно.

1.2. Властивості невизначеного інтеграла

1. Похідна від невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральній функції, тобто

$$(\int f(x)dx)' = f(x).$$

Доведення. $(\int f(x)dx)' = (F(x)+C)'dx = F'(x) + C' = f(x)$.

Зауваження: Операції диференціювання й інтегрування є взаємно оберненими, тому правильність виконання операції інтегрування перевірюється диференціюванням.

2. Диференціал від невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральному виразу:

$$d(\int f(x)dx) = f(x)dx.$$

Доведення. $d(\int f(x)dx) = (\int f(x)dx)'dx = f(x)dx$.

3. Невизначений інтеграл від диференціала деякої функції дорівнює сумі цієї функції і довільної сталої:

$$\int dF(x) = F(x) + C.$$

Доведення. $\int dF(x) = \int F'(x)dx = \int f(x)dx = F(x) + C$.

Зауваження: У властивостях 2 і 3 знаки d і $\int$, що слідують одна за одною в тому або іншому порядку, взаємно знищують один одного (якщо не враховувати постійного доданка). У цьому сенсі диференціювання й інтегрування і є взаємно оберненими математичними операціями.

4. Сталий множник можна виносити за знак інтеграла:

$$\int Cf(x)dx = C\int f(x)dx.$$

Зауваження: При $C = 0$ остання формула невірна, оскільки ліва частина її є довільною сталою, а права частина тотожньо дорівнює нулю.

5. Невизначений інтеграл від алгебраїчної суми двох функцій дорівнює алгебраїчній сумі інтегралів від цих функцій:

$$\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx.$$

Зауваження 1: Властивості 4 і 5 називаються лінійними властивостями інтеграла.

Зауваження 2: Властивість 5 поширюється на випадок алгебраїчної суми будь-якої скінченої кількості функцій.

6. (Інваріантність формули інтегрування): Якщо

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

та $u = \varphi(x)$ – довільна функція, що має неперервну похідну, то

$$\int f(u)du = F(u) + C.$$

Доведення. Нехай x – незалежна змінна. Тоді

$$dF(x) = F'(x)dx = f(x)dx.$$

Зінтегруємо обидві частини:

$$\int dF(x) = \int f(x)dx = F(x) + C.$$

Нехай тепер $u = \varphi(x)$ – функція незалежної змінної x. Тоді, згідно з властивістю інваріантності форми першого диференціала,

$$dF(u) = F'(u)du = f(u)du.$$

Зінтегруємо обидві частини:

$$\int dF(u) = \int f(u)du = F(u) + C.$$

Таким чином, будь-яка формула інтегрування зберігає свій вигляд незалежно від того, чи змінна інтегрування є незалежною змінною, чи довільною функцією від незалежної змінної, яка має неперервну похідну.◊

Зауваження: Із властивості 6 випливає, що загальний вигляд формули інтегрування є таким:

$$\int f(\circ)d(\circ) = F(\circ) + C.$$

Так, якщо $\int \sin x dx = -\cos x + C$, то

$$\int \sin(x^3 - 1)d(x^3 - 1) = -\cos(x^3 - 1) + C.$$

Приклад 1: $\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C$

Приклад 2: $\int \sin^2 x d\sin x = \frac{\sin^3 x}{3} + C$

7. $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$.

Доведення. $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}\int f(ax+b)adx = \frac{1}{a}\int f(ax+b)d(ax+b) = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$.

1.3. Таблиця основних інтегралів

Користуючись тим, що інтегрування є операцією, оберненою диференціюванню, неважко отримати таблицю найпростіших інтегралів. Для цього будемо виходити з формули

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

яку перефразуємо тепер таким чином:

якщо $dF(x) = f(x)dx$, то $\int f(x)dx = F(x) + C$.

Отже, якщо $u = u(x)$ – довільна функція, що має на деякому проміжку $\langle\, a, b \,\rangle$ неперервну похідну $u'(x)$, то на цьому проміжку мають місце такі формули:

1. $\int 0du = C$;
2. $\int du = u + C$;
3. $\int u^\alpha du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}$, $\alpha \neq -1$; $\Rightarrow$ $\int \sqrt{u}du = \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} + C$;
4. $\int \frac{du}{u^n} = -\frac{1}{n-1} \cdot \frac{1}{u^{n-1}} + C$; $\Rightarrow$ $\int \frac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + C$;
   $\Rightarrow$ $\int \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{u} + C$;
5. $\int \frac{du}{u} = \ln|\, u \,| + C$;
6. $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C(a > 0, a \neq 1$; $\Rightarrow$ $\int e^u du = e^u + C$;
7. $\int \sin u du = -\cos u + C$;
8. $\int \cos u du = \sin u + C$;
9. $\int \frac{du}{\sin^2 u} = -ctgu + C$;
10. $\int \frac{du}{\cos^2 u} = tgu + C$;
11. $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left| tg(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}) \right| + C$;
12. $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left| tg\frac{x}{2} \right| + C$;

13. $\int tgudu = -\ln|\ \cos u\ | + C$;

14. $\int ctgudu = \ln|\ \sin u\ | + C$;

15. $\int shudu = chu + C$;

16. $\int chudu = shu + C$;

17. $\int \frac{du}{sh^2 u} = -cthu + C$;

18. $\int \frac{du}{ch^2 u} = thu + C$;

19. $\int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{u}{a} + C = -\frac{1}{a} arcctg \frac{u}{a} + C$; $\Rightarrow \int \frac{du}{1+u^2} = arctgu + C$;

20. $\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left| \frac{u-a}{u+a} \right| + C$;

21. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin \frac{u}{a} + C = -\arccos \frac{u}{a} + C$;

22. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln\left|\ u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\ \right| + C$;

23. $\int \sqrt{a^2 - u^2} du = \frac{u}{2} \sqrt{a^2 - u^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{u}{a} + C$;

24. $\int \sqrt{u^2 \pm a^2} du = \frac{u}{2} \sqrt{u^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2} \ln\left|\ u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\ \right| + C$

Інтеграли, що містяться в наведеній вище таблиці, називатимемо *табличними*.

Зауваження: Усі формули мають місце на будь-якому проміжку, на якому права частина формули визначена й має похідну.

Перевірити таблицю інтегралів можна за означенням первісної шляхом диференціювання правих частин. Для цього необхідно з'ясувати, що похідна правої частини рівності є тотожна з підінтегральною функцією лівої частини.

Перевіримо, наприклад, рівність 20 ($\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left| \frac{u-a}{u+a} \right| + C$).

Для цього знайдемо похідну правої частини:

$$\left(\frac{1}{2a} \ln\left| \frac{u-a}{u+a} \right| + C \right)' = \frac{1}{2a} \left(\ln|\ u - a\ | - \ln|\ u + a\ | \right)' = \frac{1}{2a} \left(\frac{1}{u-a} - \frac{1}{u+a} \right) = \frac{1}{2a} \cdot \frac{2a}{u^2 - a^2} =$$
$$= \frac{1}{u^2 - a^2}.$$

Зауваження: Таблиця й властивості інтеграла дозволяють знайти інтеграли інших функцій.

1.4. Основні методи інтегрування

Взагалі, знаючи ту функцію, від якої задана функція є похідною, ми тим самим отримуємо її невизначений інтеграл. Проте, навіть у найпростіших випадках, задані функції не містяться в таблиці похідних, що й робить задачу інтегрального числення більш важкою, ніж задачу диференціального числення. Уся робота зводиться до перетворення заданого інтеграла до таких, які містяться в таблиці найпростіших інтегралів. Перетворення це вимагає навичок і практики та полегшується застосуванням основних правил інтегрального числення.

Ми розглянемо лише деякі, що зустрічаються найчастіше, прийоми інтегрування та укажемо їх застосування.

Найважливішими методами інтегрування є:

1) метод безпосереднього інтегрування;

2) метод заміни змінної інтегрування;
3) метод інтегрування частинами.

1. Метод безпосереднього інтегрування

Цей метод полягає в обчисленні інтегралів за допомогою основних властивостей невизначеного інтеграла, таблиці інтегралів і тотожних перетворень підінтегральної функції. При цьому часто використовується розкладання підінтегральної функції в суму декількох функцій, інтеграли від яких є табличними.

Приклад : Обчислити інтеграли:

1) $\int(\frac{\sqrt{x}}{2}+\frac{3}{\sqrt[3]{x}})dx$;   2) $\int\sin^2 xdx$;   3) $\int e^{3x-4}dx$;   4) $\int x(x^2-4)^6 dx$.

Розв'язання.

1) $\int(\frac{\sqrt{x}}{2}+\frac{3}{\sqrt[3]{x}})dx=\frac{1}{2}\int\sqrt{x}dx+3\int\frac{dx}{\sqrt[3]{x}}=\frac{1}{2}\int x^{\frac{1}{2}}dx+3\int x^{-\frac{1}{3}}dx=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+3\cdot\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}+C=\frac{1}{3}\sqrt{x^3}+\frac{9}{2}\sqrt[3]{x^2}+C.$

Відповідь: $\int(\frac{\sqrt{x}}{2}+\frac{3}{\sqrt[3]{x}})dx=\frac{1}{3}\sqrt{x^3}+\frac{9}{2}\sqrt[3]{x^2}+C.$

2) $\int\sin^2 xdx=\frac{1}{2}\int(1-\cos 2x)dx=\frac{1}{2}\int dx-\frac{1}{2}\int\cos 2xdx=\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\int\cos 2xd2x=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\sin 2x+C$.

Відповідь: $\int\sin^2 xdx=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\sin 2x+C$.

3) $\int e^{3x-4}dx=\frac{1}{3}\int e^{3x-4}\cdot 3dx=\frac{1}{3}\int e^{3x-4}d(3x-4)=\frac{1}{3}e^{3x-4}+C$.

Відповідь: $\int e^{3x-4}dx=\frac{1}{3}e^{3x-4}+C$.

4) $\int x(x^2-4)^6 dx=\frac{1}{2}\int(x^2-4)^6\cdot 2x=\frac{1}{2}\int(x^2-4)^6 d(x^2-4)=\frac{1}{2}\cdot\frac{(x^2-4)^7}{7}+C=\frac{1}{14}(x^2-4)^7+C$.

Відповідь: $\int x(x^2-4)^6 dx=\frac{1}{14}(x^2-4)^7+C$.

Зауваження: При кожному інтегруванні утворюються проміжні довільні сталі, але у відповідь записують лише одну загальну сталу, яка є сумою всіх проміжних сталих.

2. Метод заміни змінної інтегрування (підстановки).

Цей метод інтегрування буває корисним у разі, коли інтеграл $\int f(x)dx$ не може бути безпосередньо перетворений до табличного вигляду, та полягає у введенні нової змінної інтегрування. У випадку „вдалої” підстановки даний інтеграл перетворюється на новий, який або є табличним, або легко до нього приводиться.

Означений метод ґрунтується на теоремі 3.

Теорема 3 (про заміну змінної у невизначеному інтегралі): Якщо функція $y=f(x)$ неперервна на проміжку $\langle a,b\rangle$, а функція $x=\varphi(t)$ визначена, набуває значень, диференційовна на проміжку $\langle \alpha,\beta\rangle$ та має на $\langle a,b\rangle$ обернену функцію $t=\varphi^{-1}(x)$, то справедлива формула:

$$\int f(x)dx=\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt. \qquad (1)$$

Формула (1) називається формулою інтегрування заміною змінної у невизначеному інтегралі.

Доведення. Здиференціюємо обидві частини даної рівності по x:

$(\int f(x)dx)'=(\int f(x)dx)'_x=f(x)$ – за властивістю 1.

$(\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt)'=(\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt)'_x=(\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt)'_t\cdot t'_x=f(\varphi(t))\varphi'(t)\cdot\frac{1}{\varphi'(t)}=f(\varphi(t))=f(x).$

Таким чином, ліва частина рівності дорівнює правій.◊

Зауваження: Доведена теорема застосовується в два способи.

1-й спосіб: введення функції під знак диференціала.

1) Інтеграл $\int f(x)dx$ записують у вигляді

$$\int f(x)dx = \int \psi(\varphi(x))\varphi'(x)dx,$$

де для функції ψ відома первісна Ψ.

2) За формулою (1)

$$\int f(x)dx = \int \psi(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \Psi(\varphi(x)) + C. \qquad (2)$$

На практиці розв'язування цим способом оформлюють так:

$$\int f(x)dx = \int \psi(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int \psi(\varphi(x))d\varphi(x) = \left[\begin{array}{c} \varphi(x) = u; \\ \dfrac{du}{dx} = d\varphi(x) \Rightarrow \\ \Rightarrow \varphi'(x)dx = du \end{array}\right] = \int \psi(u)du = \Psi(u) + C =$$

$$= \Psi(\varphi(x)) + C.$$

Приклад : Обчислити інтеграли:

1) $\int \sqrt{2x+1}dx$; 2) $\int \dfrac{xdx}{x^2+1}$.

Розв'язання.

1) $\int \sqrt{2x+1}dx = \dfrac{1}{2}\int \sqrt{2x+1}d(2x+1) = \left[\begin{array}{c} 2x+1 = u \\ dx = \dfrac{1}{2}du \end{array}\right] = \dfrac{1}{2}\int \sqrt{u}du = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} + C = \dfrac{1}{3}\sqrt{(2x+1)^3} + C.$

Відповідь: $\int \sqrt{2x+1}dx = \dfrac{1}{3}\sqrt{(2x+1)^3} + C.$

2) $\int \dfrac{xdx}{x^2+1} = \dfrac{1}{2}\int \dfrac{2xdx}{x^2+1} = \left[\begin{array}{c} x^2+1 = u \\ 2xdx = du \end{array}\right] = \dfrac{1}{2}\int \dfrac{du}{u} = \dfrac{1}{2}\ln|u| + C = \dfrac{1}{2}\ln|x^2+1| + C.$

Відповідь: $\int \dfrac{xdx}{x^2+1} = \dfrac{1}{2}\ln|x^2+1| + C.$

2-й спосіб: виведення функції з-під знаку диференціала.

1) Інтеграл $\int f(x)dx$ записують у вигляді

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt,$$

де функція $x = \varphi(t)$ має обернену функцію $t = \varphi^{-1}(x)$ та для функції $f(\varphi)\varphi'$ відома первісна.

2) За формулою (1)

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(t) + C = F\left(\varphi^{-1}(x)\right) + C. \qquad (3)$$

На практиці розв'язування цим способом оформлюють у такому вигляді:

$$\int f(x)dx = \left\{\begin{array}{l} x = \varphi(t) \\ dx = \varphi'(t)dt \end{array}\right\} = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(t) + C = F(\varphi^{-1}(x)) + C$$

Приклад: Обчислити інтеграли:

1) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}$; 2) $\int \sin^2 x \cdot \cos x dx$.

Розв'язання.

1) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x}(1+x)} = \left\{\begin{array}{l} t = \sqrt{x} \\ t^2 = x \\ 2tdt = dx \end{array}\right\} = \int \dfrac{2tdt}{t(1+t^2)} = 2\int \dfrac{dt}{1+t^2} = 2arctgt + C = 2arctg\sqrt{x} + C.$

Відповідь: $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x}(1+x)} = 2arctg\sqrt{x} + C.$

2) $\int \sin^2 x \cdot \cos x dx = \left[\begin{array}{c} t = \sin x \\ dt = d\sin x = \cos x dx \end{array}\right] = \int t^2 dt = \dfrac{t^3}{3} + C = \dfrac{\sin^3 3}{3} + C.$

Відповідь: $\int \sin^2 x \cdot \cos x dx = \frac{\sin^3 3}{3} + C$.

Зауваження: Таким чином, при інтегруванні заміною змінної виконуються підстановки двох видів: $u = \varphi(x)$ і $x = \varphi(t)$. Ці підстановки підбираються так, щоб одержані нові інтеграли у формулах (2) і (3) були табличними. Загальних методів підбору підстановок не існує, уміння правильно визначати підстановку набувається практикою.

3. Метод інтегрування частинами.

Теорема 4: Якщо дві функції $u(x)$ і $v(x)$ неперервні та диференційовні на проміжку $\langle a, b \rangle$, то на цьому проміжку має місце формула:

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx.$$

Доведення. Здиференціюємо обидві частини формули по x:

$\left(\int u(x)v'(x)dx \right)' = u(x)v'(x)$ – за властивістю 1;

$\left(u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx \right)' = (u(x)v(x))' - \left(\int u'(x)v(x)dx \right)' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) - u'(x)v(x) =$
$= u(x)v'(x)$.

Ліва частина відрізняється від правої на довільну сталу, тому

$$\int u(x)v'(x)dx + C = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx;$$

отже,

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx. \Diamond$$

Зауваження 1: Доведена формула називається формулою інтегрування частинами та застосовується на практиці в стислому вигляді

$$\int udv = uv - \int vdu \qquad (4)$$

Зауваження 2: У формулі (4) довільну сталу інтегрування C включено в доданок $\int vdu$.

Під час інтегрування частинами треба подати підінтегральну функцію у вигляді udv так, щоб інтеграл у правій частині формули був у обчислювальному відношенні простішим, ніж інтеграл у лівій частині.

У цьому допоможуть наступні правила.

1. Інтеграли виду $\int P_n(x)\sin\alpha x dx$, $\int P_n(x)\cos\alpha x dx$, $\int P_n(x)e^{\alpha x}dx$ обчислюються частинами, причому за u береться многочлен $P_n(x)$, за dv – вираз, що лишився. Це приводить до зниження степеня многочлена $P_n(x)$. Якщо степінь многочлена більша за 1, то інтегрування частинами застосовується багаторазово.

2. Інтеграли виду $\int P_n(x)\ln x dx$, $\int P_n(x)\arcsin x dx$, $\int P_n(x)\arccos x dx$, $\int P_n(x) arctgx dx$, $\int P_n(x) arcctgx dx$ обчислюються частинами, причому за dv береться $P_n(x)dx$, за u – вираз, що лишився.

3. При обчисленні інтегралів виду $I = \int e^{\alpha x}\sin\beta x dx$, $I = \int e^{\alpha x}\cos\beta x dx$, де $\alpha, \beta \in R$, після двократного застосування формули інтегрування частинами утворюється лінійне рівняння відносно шуканого інтеграла I, який знаходять, розв'язуючи це рівняння.

Приклад: Обчислити інтеграли:

1) $\int (2x+1)\cos x dx$; 2) $\int \arccos x dx$; 3) $\int e^{2x}\sin 3x dx$.

Розв'язання.

1) $\int (2x+1)\cos x dx = \left\{ \begin{array}{l} u = 2x+1; du = 2dx \\ dv = \cos x dx; v = \int \cos x dx = \sin x \end{array} \right\} = (2x+1)\sin x - 2\int \sin x dx = = (2x+1)\sin x -$

$-2(-\cos x + C) = (2x+1)\sin x + 2\cos x + C$.

Відповідь: $\int (2x+1)\cos x dx = (2x+1)\sin x + 2\cos x + C$.

2) $\int \arccos x dx = \left\{ \begin{array}{l} u = \arccos x; du = -\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ dv = dx; v = x \end{array} \right\} = x\arccos x + \int \dfrac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} = \left\{ xdx = \dfrac{dx^2}{2} = -\dfrac{1}{2} d(1-x^2) \right\} =$

$= x\arccos x - \dfrac{1}{2}\int \dfrac{d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} = x\arccos x - \sqrt{1-x^2} + C$.

Відповідь: $\int \arccos x dx = x\arccos x - \sqrt{1-x^2} + C$.

3) Позначимо шуканий інтеграл: $I = \int e^{2x}\sin 3x dx$. Тоді

$$I = \left[\begin{array}{ll} u = e^{2x}, & dv = \sin 3x dx \\ du = 2e^{2x}, & v = -\dfrac{1}{3}\cos 3x \end{array} \right] = -\frac{1}{3}e^{2x}\cos 3x + \frac{2}{3}\int e^{2x}\cos 3x dx = \left[\begin{array}{ll} u = e^{2x}, & dv = \cos 3x dx \\ du = 2e^{2x}, & v = \dfrac{1}{3}\sin 3x \end{array} \right] = -\frac{1}{3}e^{2x}\cos 3x +$$

$$+\frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}e^{2x}\sin 3x + \frac{2}{3}\int e^{2x}\sin 3x dx \right) = \frac{2\sin 3x - 3\cos x}{9}e^{2x} - \frac{4}{9}I.$$

Таким чином, відносно інтеграла I одержимо лінійне рівняння

$$I = \frac{2\sin 3x - 3\cos x}{9}e^{2x} - \frac{4}{9}I,$$

звідки

$$I = \frac{2\sin 3x - 3\cos x}{13}e^{2x} + C.$$

Відповідь: $\int e^{2x}\sin 3x dx = \dfrac{2\sin 3x - 3\cos x}{13}e^{2x} + C$.

1.5. Інтегрування дробово-раціональних функцій

Означення 4. *Дробово-раціональною функцією* (*раціональним дробом*) називається відношення двох многочленів $\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ ($P_m(x) \neq 0, \quad Q_n(x) \neq 0$).

Означення 5. Раціональний дріб називається *правильним*, якщо степінь многочлена, що стоїть у чисельнику, менший степеня многочлена, що стоїть у знаменнику ($m < n$), та *неправильним*, якщо $m \geq n$.

Приклад: $x^2 - 2x + 3$ – неправильний дріб; $\dfrac{2}{x^3 - 1}$ – правильний дріб ; $\dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ – неправильний дріб.

Зауваження: Кожний неправильний раціональний дріб завжди можна подати у вигляді суми многочлена (цілої частини дробу) й правильного раціонального дробу:

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = S_k(x) + \frac{T_r(x)}{Q_n(x)}, \ r < n.$$

Для цього достатньо поділити многочлен чисельника на многочлен знаменника "у стовпчик" та виділити з дробу цілу частину, тобто многочлен.

Приклад 1: Подати неправильний раціональний дріб $\dfrac{x^4 + 2x^3 - x + 3}{x^3 - x}$ у вигляді суми многочлена й правильного раціонального дробу.

Розв'язання. Поділимо чисельник на знаменник:

$$
\begin{array}{l|l}
x^4 \quad +2x^3 \quad -x \quad +3 & x^3 - x \\
\underline{x^4 \quad -x^2} & x+2 \\
\qquad 2x^3 \quad +x^2 & \\
\qquad \underline{2x^3 \quad -2x} & \\
\qquad\qquad x^2 + 2x - x + 3 &
\end{array}
$$

Отже,

$$\frac{x^4 + 2x^3 - x + 3}{x^3 - x} = x + 2 + \frac{x^2 + x + 3}{x^3 - x}.$$

<u>Відповідь:</u> $\dfrac{x^4 + 2x^3 - x + 3}{x^3 - x} = x + 2 + \dfrac{x^2 + x + 3}{x^3 - x}$.

<u>Приклад 2:</u> 1. $\dfrac{x^3 - 1}{x^2 + 1} = x + \dfrac{-x - 1}{x^2 + 1}$.

<u>Приклад 3:</u> $\dfrac{x^4 - 3}{x^2 + 2x + 1} = x^2 - 2x + 3 + \dfrac{-4x - 6}{x^2 + 2x + 1}$.

Отже, розглядатимемо задачу інтегрування правильного раціонального дробу, оскільки інтегрування многочлена не викличе певних труднощів.

<u>Зауваження:</u> Серед правильних раціональних дробів виділяють так звані найпростіші, або елементарні.

Означення 6. *Елементарними раціональними дробами* називаються правильні раціональні дроби виду:

1) $\dfrac{A}{x - a}$;

2) $\dfrac{A}{(x - a)^k}$, ($k \in N, k > 1$);

3) $\dfrac{Ax + B}{x^2 + px + q}$, ($p^2 - 4q < 0$);

4) $\dfrac{Ax + B}{(x^2 + px + q)^k}$, ($k \in N, n > 1$, $p^2 - 4q < 0$), A, B, a, p, q – дійсні числа.

Будь-який правильний раціональний дріб можна представити у вигляді суми скінченого числа найпростіших дробів означених типів.

Нехай маємо правильний раціональний дріб $\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$. Вважатимемо, що коефіцієнт у старшого члена многочлена $Q_n(x)$ дорівнює одиниці, оскільки в разі, коли він дорівнює якому-небудь іншому числу (відмінному нулю), можна поділити чисельник і знаменник дробу $\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ на це число, після чого у отриманого в знаменнику многочлена коефіцієнт у старшого члена дорівнюватиме одиниці.

Припускатимемо, що коефіцієнти многочленів дробу – дійсні числа. Тоді матиме місце теорема 5.

Теорема 5 (про розкладання правильного раціонального дробу на елементарні): Нехай знаменник правильного раціонального дробу $\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ розкладено на множники:

$$Q_n(x) = a(x - a_1)^{k_1}(x - a_2)^{k_2} \ldots .(x - a_s)^{k_l} \times (x^2 + p_1 x + q_1)^{m_1}(x^2 + p_2 x + q_2)^{m_2} \ldots .(x^2 + p_r x + q_r)^{m_s},$$

тоді цей дріб можна подати у вигляді:

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{A_1}{x-a_1} + \frac{A_2}{(x-a_1)^2} + \ldots + \frac{A_{k_1}}{(x-a_1)^{k_1}} + \frac{B_1}{x-a_2} + \frac{B_2}{(x-a_2)^2} + \ldots + \frac{B_{k_2}}{(x-a_2)^{k_2}} + \ldots$$

$$+ \frac{Z_1}{x-a_s} + \frac{Z_2}{(x-a_s)^2} + \ldots + \frac{Z_{k_s}}{(x-a_s)^{k_l}} + \frac{\alpha_1 + \beta_1 x}{x^2 + p_1 x + q_1} + \frac{\alpha_2 + \beta_2 x}{(x^2 + p_1 x + q_1)^2} + \ldots + \frac{\alpha_{m_1} + \beta_{m_1} x}{(x^2 + p_1 x + q_1)^{m_1}} + \ldots$$

$$+ \frac{\alpha_{m_1} + \beta_{m_1} x}{(x^2 + p_1 x + q_1)^{m_1}} + \ldots + \frac{\psi_1 + \omega_1 x}{x^2 + p_r x + q_r} + \frac{\psi_2 + \omega_2 x}{(x^2 + p_r x + q_r)^2} + \ldots\ldots + \frac{\psi_{m_s} + \omega_{m_s} x}{(x^2 + p_s x + q_s)^{m_s}}, \qquad (5)$$

де $A_1, A_2, \ldots., A_{k_1}, B_1, B_2, \ldots., B_{k_2}, \ldots.Z_1, Z_2, \ldots., Z_{k_{ls}}, \ldots.\alpha_1, \beta_1, \ldots., \omega_{m_s}$ – деякі дійсні числа.

Розкладання (5) називається розкладанням правильного раціонального дробу на елементарні дроби.

Із формули (5) видно, що лінійному множнику $x-a$ знаменника $Q_n(x)$ відповідають у розкладанні (5) найпростіші дроби 1-го й 2-го типів, а квадратичному множнику x^2+px+q – найпростіші дроби 3-го й 4-го типів. При цьому число найпростіших дробів, що відповідають у розкладанні (5) множнику (лінійному або квадратичному), дорівнює показникові степеня, з яким цей множник входить у розкладання знаменника дробу на множники.

Наприклад,

1) $\dfrac{3x^2-2}{(x-2)(x+1)^3} = \dfrac{A_1}{x-2} + \dfrac{A_2}{x+1} + \dfrac{A_3}{(x+1)^2} + \dfrac{A_4}{(x+1)^3}$;

2) $\dfrac{x-3}{x^3(x^2+4)^2} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x^2} + \dfrac{C}{x^3} + \dfrac{Dx+E}{x^2+4} + \dfrac{Kx+M}{(x^2+4)^2}$;

3) $\dfrac{3x^2-2x+2}{(x+3)(x-4)\left(x^2+x+1\right)^2} = \dfrac{A}{x+3} + \dfrac{B}{x-4} + \dfrac{C_1x+D_1}{x^2+x+1} + \dfrac{C_2x+D_2}{(x^2+x+1)^2}$.

Для знаходження чисел $A_1, A_2, \ldots., A_{k_1}, B_1, B_2, \ldots., B_{k_2}, \ldots.Z_1, Z_2, \ldots., Z_{k_{ls}}, \ldots.\alpha_1, \beta_1, \ldots., \omega_{m_s}$ найчастіше користуються методом невизначених коефіцієнтів. Щоб знайти коефіцієнти у розкладанні (5), треба обидві частини рівності (5) помножити на многочлен $Q_n(x)$. Унаслідок цього отримаємо два тотожно рівних многочлени: многочлен $P_m(x)$ і многочлен з невідомими коефіцієнтами. Прирівнюючи коефіцієнти цих многочленів при однакових степенях x, дістанемо систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих $A_1, A_2, \ldots., A_{k_1}$, $B_1, B_2, \ldots., B_{k_2}, \ldots.,\ Z_1, Z_2, \ldots., Z_{kl_s}, \ldots.\alpha_1, \beta_1, \ldots.$, з якої і визначимо невідомі коефіцієнти.

Приклад: Розкласти на елементарні дроби раціональний дріб $\dfrac{2x-1}{x^3+x^2-2x}$.

Розв'язання. Матимемо:

$$\frac{2x-1}{x^3+x^2-2x} = \frac{2x-1}{x(x^2+x-2)} = \frac{2x-1}{x(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+2}.$$

Прирівняємо многочлени, які стоять у чисельниках лівої та правої частин:

$$2x-1 \equiv A(x^2+x-2) + B(x^2+2x) + C(x^2-x).$$

Прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях x:

$$\begin{array}{c|l} x^2 \\ x^1 \\ x^0 \end{array}\left\{\begin{array}{l} A+B+C=0; \\ A+2B-C=2; \\ -2A=-1; \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{l} A=\dfrac{1}{2} \\ 2A+3B=2 \\ B=\dfrac{1}{3} \\ C=-A-B=-\dfrac{5}{6} \end{array}\right) \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} A=\dfrac{1}{2}; \\ B=\dfrac{1}{3}; \\ C=-\dfrac{5}{6}. \end{array}\right.$$

Отже,

$$\frac{2x-1}{x^3+x^2-2x}=\frac{1}{2x}+\frac{1}{3(x-1)}-\frac{5}{6(x+2)}.$$

Відповідь: $\dfrac{2x-1}{x^3+x^2-2x}=\dfrac{1}{2x}+\dfrac{1}{3(x-1)}-\dfrac{5}{6(x+2)}$.

Нехай треба знайти інтеграл $\int\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}dx$ ($m \geq n$). Його можна подати як суму інтегралів:

$$\int\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}dx=\int S_k(x)dx+\int\frac{T_r(x)}{Q_n(x)}dx,\ r<n$$

Інтеграл від многочлена $S_k(x)$ обчислюється безпосередньо, а інтеграл від правильного раціонального дробу $\dfrac{T_r(x)}{Q_n(x)}$ зводиться за теоремою 5 до суми інтегралів від елементарних раціональних функцій.

Розглянемо інтеграли від елементарних раціональних дробів.

1) Інтегрування елементарних раціональних дробів виду 1:

$$\int\frac{A}{x-a}dx=A\int\frac{dx}{x-a}=A\int\frac{d(x-a)}{x-a}=\{\ x-a=u\ \}=A\int\frac{du}{u}=A\ln|\ u\ |+C=A\ln|\ x-a\ |+C.$$

Приклад: Обчислити інтеграл $\int\dfrac{3}{x-2}dx.$

Розв'язання. $\int\dfrac{3}{x-2}dx=3\int\dfrac{dx}{x-2}=3\int\dfrac{d(x-2)}{x-2}=\{\ x-2=u\ \}=3\int\dfrac{du}{u}=3\ln|\ u\ |+C=3\ln|\ x-2a\ |+C.$

Відповідь: $\int\dfrac{3}{x-2}dx=3\ln|\ x-2a\ |+C.$

2) Інтегрування елементарних раціональних дробів виду 2:

$$\int\frac{A}{(x-a)^k}dx=A\int\frac{dx}{(x-a)k}=A\int\frac{d(x-a)}{(x-a)^k}=\{\ x-a=u\ \}=A\int\frac{du}{u^k}=A\frac{u^{-k+1}}{-k+1}+C==-\frac{A}{(n-1)u^{n-1}}+C=$$
$$=-\frac{A}{(n-1)(x-a)^{n-1}}+C.$$

Приклад: Обчислити інтеграл $\int\dfrac{4}{(x-1)^3}dx$.

Розв'язання. $\int\dfrac{4}{(x-1)^3}dx=4\int(x-1)^{-3}dx=4\int(x-1)^{-3}d(x-1)=\{\ x-1=u\ \}=4\int u^{-3}du=4\dfrac{u^{-2}}{-2}+C=$

$=-\dfrac{2}{u^2}+C=-\dfrac{2}{(x-1)^2}+C$.

Відповідь: $\int\dfrac{4}{(x-1)^3}dx=-\dfrac{2}{(x-1)^2}+C$.

3) Інтегрування елементарних раціональних дробів виду 3:

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx = \left\{ \begin{array}{l} x+\frac{p}{2}=t \\ x=t-\frac{p}{2} \\ dx=dt \end{array} \right\} = \int \frac{A(t-\frac{p}{2})+B}{(t-\frac{p}{2})^2+p(t-\frac{p}{2})+q}dt = \int \frac{At+B-A\frac{p}{2}}{t^2-tp+\frac{p^2}{4}+pt-\frac{p^2}{2}+q}dt =$$

$$\int \frac{(At+D)dt}{t^2+\underbrace{(q-\frac{p^2}{4})}_{a^2}} = \int \frac{(At+D)dt}{t^2+a^2} = A\int \frac{tdt}{t^2+a^2} + D\int \frac{dt}{t^2+a^2} = \left\{ tdt = \frac{1}{2}d(t^2+a^2) \right\} = \frac{A}{2}\int \frac{d(t^2+a^2)}{t^2+a^2} +$$

$$+D\int \frac{dt}{t^2+a^2} = \frac{A}{2}\ln\left| t^2+a^2 \right| + \frac{D}{a}arctg\frac{t}{a} + C = \frac{A}{2}\ln\left| t^2+q-\frac{t^2}{4} \right| + \frac{D}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}arctg\frac{t}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}} + C =$$

$$= \frac{A}{2}\ln\left| x^2+px+q \right| + \frac{B-A\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}arctg\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}} + C = \frac{A}{2}\ln\left| \left(x+\frac{p}{2} \right)^2 + a^2 \right| + \frac{D}{a}arctg\frac{x+\frac{p}{2}}{a} + C.$$

Приклад: Обчислити інтеграли:

1) $\int \frac{dx}{x^2-2x+8}$; 2) $\int \frac{2x+3}{x^2-2x+8}dx$.

Розв'язання.

1) $\int \frac{dx}{x^2-2x+8} = \int \frac{dx}{(x-1)^2+7} = \begin{bmatrix} x-1=u; & dx=du \\ a^2=7; & a=\sqrt{7} \end{bmatrix} = \int \frac{du}{u^2+\left(\sqrt{7}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{7}}arctg\frac{u}{\sqrt{7}} + C = \frac{1}{\sqrt{7}}arctg\frac{x-1}{\sqrt{7}} + C$.

Відповідь: $\int \frac{dx}{x^2-2x+8} = \frac{1}{\sqrt{7}}arctg\frac{x-1}{\sqrt{7}} + C$.

2) $\int \frac{2x+3}{x^2-2x+8}dx = \left[d(x^2-2x+8) = (2x-2)dx \right] = \int \frac{(2x-2)+5}{x^2-2x+8}dx = \int \frac{2x-2}{x^2-2x+8}dx + \int \frac{5}{x^2-2x+8}dx =$

$= \int \frac{2x-2}{x^2-2x+8}dx + 5\int \frac{dx}{x^2-2x+8}$.

Перший інтеграл обчислюється за формулою $\int \frac{du}{u} = \ln\left| u \right| + C$:

$$\int \frac{2x-2}{x^2-2x+8} = \int \frac{d(x^2-2x+8)}{x^2-2x+8} = \ln\left|x^2-2x+8\right| + C_1,$$

а другий розглянуто в попередньому прикладі. Отже,

$$\int \frac{2x+3}{x^2-2x+8}dx = \ln\left|x^2-2x+8\right| + \frac{5}{\sqrt{7}}arctg\frac{x-1}{\sqrt{7}} + C.$$

Відповідь: $\int \frac{2x+3}{x^2-2x+8}dx = \ln\left|x^2-2x+8\right| + \frac{5}{\sqrt{7}}arctg\frac{x-1}{\sqrt{7}} + C$.

4) Інтегрування елементарних раціональних дробів виду 4:

$$\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}dx = \left\{ \begin{array}{l} x+\dfrac{p}{2}=t \\ x=t-\dfrac{p}{2} \\ dx=dt \\ q-\dfrac{p^2}{4}=a^2 \\ B-A\dfrac{p}{2}=D \end{array} \right\} = \frac{A}{2}\underbrace{\int \frac{d(t^2+a^2)}{(t^2+a^2)^n}}_{I_1} + D\underbrace{\int \frac{du}{(u^2+a^2)^n}}_{I_2}.$$

Інтеграл I_1 обчислюється безпосередньо:

$$I_1 = \int \frac{d(t^2+a^2)}{(t^2+a^2)^n} = \left\{ t^2+a^2=u \right\} = \int \frac{du}{u^n} = -\frac{1}{(n-1)u^{n-1}} + C = -\frac{1}{(n-1)(t^2+a^2)^{n-1}} + C.$$

Інтеграл I_2 обчислюється за допомогою рекурентної формули, тобто формули, що зводить обчислення інтеграла I_{n+1} до обчислення інтеграла I_n:

$$I_n = \int \frac{du}{(u^2+a^2)^n},$$

$$I_{n+1} = \frac{1}{2na^2}\left(\frac{u}{(u^2+a^2)^n} + (2n-1)I_n \right),$$

яка приводить до відомого інтеграла

$$I = \int \frac{dt}{t^2+m^2} = \frac{1}{m} arctg \frac{t}{m} + C.$$

<u>Зауваження:</u> З вище викладеного випливає, що інтеграл від будь-якого раціонального дробу може бути виражений через елементарні функції, а саме:

1) через логарифми – у випадку елементарних дробів виду 1;
2) через раціональні функції – у випадку елементарних дробів виду 2;
3) через логарифми й арктангенси – у випадку елементарних дробів виду 3;
4) через раціональні функції та арктангенси – у випадку елементарних дробів виду 4.

<u>Приклад:</u> Знайти інтеграл $\int \frac{x-2}{x^2\left(x^2+4\right)}dx$.

Розв'язання. Під знаком інтеграла – правильний раціональний дріб. Розкладемо його на елементарні раціональні дроби:

$$\frac{x-2}{x^2\left(x^2+4\right)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx+D}{x^2+4} = \frac{Ax\left(x^2+4\right)+B\left(x^2+4\right)+\left(Cx+D\right)x^2}{x^2\left(x^2+4\right)}.$$

Прирівняємо многочлени, які стоять у чисельниках лівої і правої частин:

$$x-2 = Ax\left(x^2+4\right)+B\left(x^2+4\right)+\left(Cx+D\right)x^2.$$

Прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях x:

$$\begin{array}{l|l} x^3 & A+C=0; \\ x^2 & B+D=0; \\ x^1 & 4A=1; \\ x^0 & 4B=-2; \end{array} \left.\vphantom{\begin{array}{l} 1\\1\\1\\1 \end{array}}\right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} C=-\dfrac{1}{4}; \\ D=\dfrac{1}{2}; \\ A=\dfrac{1}{4}; \\ B=\dfrac{-1}{2}. \end{array} \right.$$

Отже,

$$\frac{x-2}{x^2\left(x^2+4\right)}=\frac{1}{4x}-\frac{1}{2x^2}+\frac{-\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}}{x^2+4}=\frac{1}{4x}-\frac{1}{2x^2}-\frac{1}{4}\frac{x-2}{x^2+4}.$$

Тоді

$$\int\frac{x-2}{x^2\left(x^2+4\right)}dx=\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x}-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2}-\frac{1}{4}\int\frac{x-2}{x^2+4}dx.$$

Обчислимо кожний інтеграл:

$$\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x}=\frac{1}{4}\ln|x|+C;$$

$$\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2}=-\frac{1}{2x}+C;$$

$$\frac{1}{4}\int\frac{x-2}{x^2+4}dx=\frac{1}{8}\int\frac{2x-4}{x^2+4}dx=\frac{1}{8}\int\frac{2xdx}{x^2+4}-\frac{4}{8}\int\frac{dx}{x^2+4}=\frac{1}{8}\int\frac{d\left(x^2+4\right)}{x^2+4}-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+2^2}=\frac{1}{8}\ln\left(x^2+4\right)-\frac{1}{4}arctg\frac{x}{2}+C.$$

Остаточно маємо:

$$\int\frac{x-2}{x^2\left(x^2+4\right)}dx=\ln|x|-\frac{1}{2x}+\frac{1}{8}\ln\left(x^2+4\right)-\frac{1}{4}arctg\frac{x}{2}+C.$$

<u>Відповідь:</u> $\int\frac{x-2}{x^2\left(x^2+4\right)}dx=\ln|x|-\frac{1}{2x}+\frac{1}{8}\ln\left(x^2+4\right)-\frac{1}{4}arctg\frac{x}{2}+C.$

1.6. Інтегрування виразів, що містять тригонометричні функції

1) Інтеграл виду $\int\sin^m x\cos^n xdx$ обчислюється:

- підстановками:
  $\sin x=t$, якщо n – ціле додатне непарне число;
  $\cos x=t$, якщо m – ціле додатне непарне число;
  $tgx=t$ або $ctgx=t$, якщо m,n – цілі парні числа й хоча б одне з них від'ємне;
  $tgx=t$, якщо m,n – цілі, непарні, від'ємні числа;
- за допомогою формул зниження степеня

$$\sin^2 x=\frac{1}{2}(1-\cos 2x);\qquad \cos^2 x=\frac{1}{2}(1+\cos 2x),$$

якщо m,n – цілі додатні парні числа.

<u>Приклад:</u> Знайти інтеграли:

1) $\int\sin^4 xdx$; 2) $\int\cos^5 xdx$.

Розв'язання.

1) $\int\sin^4 xdx=\frac{1}{2^2}\int\left(1-\cos 2x\right)^2dx=\frac{1}{4}\int\left(1-2\cos 2x+\cos^2 2x\right)dx=\frac{1}{4}\int\left(1-2\cos 2x+\frac{1}{2}\left(1+\cos 4x\right)\right)dx=$

$=\frac{1}{4}\left(x-\sin 2x+\frac{1}{2}x+\frac{1}{8}\sin 4x\right)+C=\frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}x-\sin 2x+\frac{1}{8}\sin 4x\right)+C.$

<u>Відповідь:</u> $\int\sin^4 xdx=\frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}x-\sin 2x+\frac{1}{8}\sin 4x\right)+C.$

2) $\int\cos^5 xdx=\int\cos^4 x\cos xdx=\int\left(\cos^2 x\right)^2\cos xdx=\int\left(1-\sin^2 x\right)^2\cos xdx=\left[\begin{matrix}\sin x=t,\\ \cos xdx=dt\end{matrix}\right]=\int\left(1-t^2\right)^2dt=$

$=\int\left(1-2t^2+t^4\right)dt=t-\frac{2t^3}{3}+\frac{t^5}{5}+C=\sin x-\frac{2\sin^3 x}{3}+\frac{\sin^5 x}{5}+C.$

<u>Відповідь:</u> $\int\cos^5 xdx=\sin x-\frac{2\sin^3 x}{3}+\frac{\sin^5 x}{5}+C.$

2) Інтеграл $\int R(\sin x)\cos xdx$ раціоналізується підстановкою $\sin x=t$.

3) Інтеграл $\int R(\cos x)\sin xdx$ раціоналізується підстановкою $\cos x=t$.

Приклад: Знайти інтеграл $\int \frac{\sin^3 x}{2+\cos x}dx$.

Розв'язання. $\int \frac{\sin^3 x}{2+\cos x}dx = \int \frac{\sin^2 x \sin x}{2+\cos x}dx = \int \frac{1-\cos^2 x}{2+\cos x}\sin x dx = \left[\begin{array}{l} \cos x = t; \\ \sin x dx = -dt \end{array}\right] = \int \frac{1-t^2}{2+t}(-dt) =$

$= \int \frac{t^2-1}{t+2}dt = \int \left(t-2+\frac{3}{t+2} \right)dt = \frac{t^2}{2} - 2t + 3\ln|t+2| + C = \frac{t^2}{2} - 2\cos x + 3\ln|\cos x + 2| + C$.

Відповідь: $\int \frac{\sin^3 x}{2+\cos x}dx = \frac{t^2}{2} - 2\cos x + 3\ln|\cos x + 2| + C$.

4) Інтеграл $\int R(tgx)dx$ раціоналізується підстановкою $tgx = t$.

5) Інтеграл $\int R(ctgx)dx$ раціоналізується підстановкою $ctgx = t$.

6) Інтеграл $\int R(\sin x, \cos x)dx$ раціоналізується підстановками:

- $\cos x = t$, якщо $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$;
- $\sin x = t$, якщо $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$;
- $tgx = t$ або $ctgx = t$, якщо $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$;
- $tg\frac{x}{2} = t$ $(-\pi < x < \pi)$ для будь-якого інтегралу даного типу. Дана підстановка називається універсальною.

Дійсно:

$$\int R(\sin x, \cos x)dx = \left\{ \begin{array}{l} tg\frac{x}{2} = t; \quad \sin x = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}; \\ x = 2arctgt; \quad \cos x = \frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}; \\ dx = \frac{2dt}{1+t^2} \end{array} \right\} = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}; \frac{1-t^2}{1+t^2} \right)\frac{2dt}{1+t^2} =$$

$$= \int R_1(t)dt,$$

де $R_1(t)dt$ – раціональна функція від t.

Приклад: Знайти інтеграл $\int \frac{dx}{\sin x}$.

Розв'язання. $\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln\left| tg\frac{x}{2} \right| + C$.

Відповідь: $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left| tg\frac{x}{2} \right| + C$.

Зауваження 1: Перелічені випадки не є взаємовиключними. Наприклад, до інтеграла $\int \frac{\sin x}{\cos x}dx$ можна застосовувати всі чотири підстановки.

Зауваження : Як правило, універсальна підстановка приводить до громіздких інтегралів, тому, якщо є інші можливості інтегрування тригонометричних функцій, то використовують їх.

Приклад: Знайти інтеграл $\int \frac{\cos^3 x}{4+\sin x}dx$.

Розв'язання. Підінтегральна функція непарна відносно $\cos x$, оскільки

$$R(\sin x, -\cos x) = \frac{-\cos^3 x}{4+\sin x} = -R(\sin x, \cos x).$$

Отже, використовується підстановка $t = \sin x$:

$$\int \frac{\cos^3 x}{4+\sin x}dx = \int \frac{\cos^2 x \cdot \cos x}{4+\sin x}dx = \int \frac{\left(1-\sin^2 x\right)\cos x}{4+\sin x}dx = \begin{bmatrix} \sin x = t, \\ \cos x dx = dt \end{bmatrix} = \int \frac{\left(1-t^2\right)dt}{4+t} = \int\left(-t+4-\frac{15}{4+t}\right)dt = = -\frac{t^2}{2}+4t-$$

$$-15\ln\left|t+4\right|+C = -\frac{1}{2}\sin^2 x + 4\sin x - 15\ln\left|4+\sin x\right| + C.$$

Відповідь: $\int \frac{\cos^3 x}{4+\sin x}dx = -\frac{1}{2}\sin^2 x + 4\sin x - 15\ln\left|4+\sin x\right| + C$.

7) Інтеграли $\int \sin\alpha x \cos\beta x dx$, $\int \sin\alpha x \sin\beta x dx$, $\int \cos\alpha x \cos\beta x dx$ обчислюються за допомогою відомих тригонометричних формул:

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta));$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta));$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)).$$

Приклад: Знайти інтеграл $\int \sin 5x \sin 3x dx$.

Розв'язання. $\int \sin 5x \sin 3x dx = \frac{1}{2}\int(\cos 2x - \cos 8x)dx = \frac{\sin 2x}{4} - \frac{\sin 8x}{16} + C$.

Відповідь: $\int \sin 5x \sin 3x dx = \frac{\sin 2x}{4} - \frac{\sin 8x}{16} + C$.

1.7. Інтегрування деяких ірраціональних функцій

1. Інтеграли типу $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ обчислюються шляхом виділення повного квадрата з квадратного тричлена ax^2+bx+c та залежно від знака a зводяться до одного з двох табличних інтегралів:

$$\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \arcsin\frac{u}{a} + C = -\arccos\frac{u}{a} + C,$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln\left| u + \sqrt{u^2 \pm a^2} \right| + C.$$

Приклад: Обчислити інтеграли:

1) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2x+8}}$; 2) $\int \frac{2x+3}{\sqrt{x^2+3x+4}}dx$.

Розв'язання.

$$1)\ \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2x+8}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x-1)^2+7}} = \begin{bmatrix} x-1=u; & dx=du \\ a^2=7; & a=\sqrt{7} \end{bmatrix} = \int \frac{du}{\sqrt{u^2+\left(\sqrt{7}\right)^2}} = \ln\left|u+\sqrt{u^2+(\sqrt{7})^2}\right| + C =$$

$$= \ln\left|x-1+\sqrt{x^2-2x+8}\right| + C$$

Відповідь: $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2x+8}} = \ln\left|x-1+\sqrt{x^2-2x+8}\right| + C$.

2) $\int \frac{2x+3}{\sqrt{x^2-2x+8}}dx = \left[d(x^2-2x+8)=(2x-2)dx\right] = \int \frac{(2x-2)+5}{\sqrt{x^2-2x+8}}dx = \int \frac{2x-2}{\sqrt{x^2-2x+8}}dx + \int \frac{5}{\sqrt{x^2-2x+8}}dx =$
$= \int \frac{2x-2}{\sqrt{x^2-2x+8}}dx + 5\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2x+8}}$.

Перший інтеграл обчислюється за такою схемою:

$$\int \frac{du}{\sqrt{u}} = \int u^{-1/2}du = \frac{u^{1/2}}{1/2} + C = 2\sqrt{u} + C,$$

тобто

$$\int \frac{2x-2}{\sqrt{x^2-2x+8}} = \int \frac{d(x^2-2x+8)}{\sqrt{x^2-2x+8}} = 2\sqrt{x^2-2x+8} + C_1.$$

Другий інтеграл розглянуто в попередньому прикладі. Отже,

$$\int \frac{2x+3}{\sqrt{x^2-2x+8}}dx = 2\sqrt{x^2-2x+8} + 5\ln\left|x-1+\sqrt{x^2-2x+8}\right| + C.$$

<u>Відповідь:</u> $\int \frac{2x+3}{\sqrt{x^2-2x+8}}dx = 2\sqrt{x^2-2x+8} + 5\ln\left|x-1+\sqrt{x^2-2x+8}\right| + C$.

2. Інтеграли типу $\int R\left(x, \sqrt[s_1]{\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{p_1}}, \ldots, \sqrt[s_n]{\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{p_n}}\right)dx$ раціоналізуються підстановкою

$$\sqrt[s]{\frac{ax+b}{cx+d}} = u,$$

де s – найменше спільне кратне степенів радикалів $s_1, s_2, \ldots s_n$. При цьому повинна виконуватись умова $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$.

Дійсно,

$$\int R\left(x, \sqrt[S_1]{\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{p_1}}, \ldots\ldots\ldots \sqrt[S_n]{\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{p_n}}\right)dx = \left\{\begin{array}{l} \sqrt[S]{\frac{ax+b}{cx+d}} = u \\ \frac{ax+b}{cx+d} = u^s; x = \frac{du^s-b}{a-cu^s} \\ dx = \frac{su^{s-1}(ad-bc)}{(a-cu^s)^2}du \end{array}\right\} =$$

$$= \int R\left(\frac{du^s-b}{a-cu^s}, u^{\frac{sp_1}{s_1}}, u^{\frac{sp_2}{s_2}}, \ldots\ldots, u^{\frac{sp_n}{s_n}}\right)\frac{su^{s-1}(ad-bc)}{(a-cu^s)^2}du,$$

де $\frac{sp_i}{s_i}$ – натуральні числа. Таким чином, підінтегральна функція стала раціональною.

<u>Окремі випадки:</u>

а) $a=1,\ b=0,\ c=0,\ d=1$

Інтеграл $\int R\left(x, \sqrt[s_1]{x^{p_1}}, \sqrt[s_2]{x^{p_2}}, \ldots, \sqrt[S_n]{x^{p_n}}\right)dx$ раціоналізується підстановкою

$$\sqrt[s]{x} = u,$$

де s – найменше спільне кратне степенів радикалів $s_1, s_2, \ldots, s_n$;

б) $c=0$, $d=1$

Інтеграл $\int R\left(x, \sqrt[s_1]{(ax+b)^{p_1}}, \sqrt[s_2]{(ax+b)^{p_2}},..., \sqrt[s_n]{(ax+b)^{p_n}} \right)dx$ раціоналізується підстановкою

$$\sqrt[s]{ax+b}=u,$$

де s – найменше спільне кратне степенів радикалів $s_1, s_2, ..., s_n$.

3. Інтеграли типу $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx$ за допомогою підстановки

$$x=t-\frac{b}{2a}$$

зводяться до одного з інтегралів:

а) $\int R(t; \sqrt{m^2t^2+n^2})dt$; **б)** $\int R(t; \sqrt{m^2t^2-n^2})dt$; **в)** $\int R(t; \sqrt{n^2-m^2t^2})dt$.

Усі ці інтеграли зводяться до інтегралу виду $\int R(\sin z, \cos z)dz$ такими підстановками:

Інтеграл а) підстановками $t=\frac{n}{m}tgz$ або $t=\frac{n}{m}ctgz$,

інтеграл б) підстановками $t=\frac{n}{m\sin z}$ або $t=\frac{n}{m\cos z}$,

інтеграл в) підстановками $t=\frac{n}{m}\sin z$ або $t=\frac{n}{m}\cos z$

Інтеграли цього типу раціоналізуються також за допомогою так званих підстановок Ейлера:

1) якщо $a>0$, то $\sqrt{ax^2+bx+c}=\pm\sqrt{a}x+t$;

2) якщо $c>0$, то $\sqrt{ax^2+bx+c}=xt\pm\sqrt{c}$;

3) якщо α_1, α_2 – корені тричлена ax^2+bx+c, тобто $ax^2+bx+c=a(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)$, то

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=(x-\alpha_i)t,\ i=\overline{1,2}.$$

4. Означення 7. Інтеграли виду $\int x^m(a+bx^n)^p dx$, де $m,n,p\in Q$, $a,b\in R$ називаються *інтегралами від диференціальних біномів*.

Вони раціоналізуються за допомогою підстановок Чебишова у таких випадках:

а) $x=t^s$, де s – найменший спільний знаменник дробів m і n, – для $p\in Z$;

б) $a+bx^n=t^r$, де r – знаменник дробу p, – для $\frac{m+1}{n}\in Z$;

в) $ax^{-n}+b=t^r$ ($a+bx^n=t^r x^n$), де r – знаменник дробу p, – для $\frac{m+1}{n}+p\in Z$.

Зауваження: Якщо інтеграл цього типу не підходить під жодний з трьох описаних випадків, то його не можна виразити через інтеграл від раціональної функції (він "не береться"). Першим це встановив П.Л. Чебишов (1821–1894 рр.)

Приклад: Знайти інтеграли:

1) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})^2}$; 2) $\int \sqrt[3]{x}\sqrt[3]{1+3\sqrt[3]{x^2}}\,dx$.

Розв'язання.

$$1)\ \int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})^2}=\int x^{-\frac{1}{2}}\left(1+x^{\frac{1}{3}}\right)^{-2}dx=\left\{\begin{array}{l} m=-\frac{1}{2};\ p\in Z \\ n=\frac{1}{3};\quad x=t^6;\ t=\sqrt[6]{x} \\ p=-2;\quad dx=6t^5dt \end{array}\right\}==6\left(\int\frac{dt}{1+t^2}-\int\frac{dt}{\left(1+t^2\right)^2}\right)=$$

$$=6\left(arctgt-\frac{t}{2\left(1+t^2\right)}-\frac{1}{2}\cdot arctgt\right)=6\left(-\frac{t}{2\left(1+t^2\right)}+\frac{1}{2}arctgt\right)+C=6\left(-\frac{\sqrt[6]{x}}{2\left(1+\sqrt[3]{x}\right)}+\frac{1}{2}arctg\sqrt[6]{x}\right)+C.$$

Відповідь: $\int\frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})^2}=6\left(-\frac{\sqrt[6]{x}}{2\left(1+\sqrt[3]{x}\right)}+\frac{1}{2}arctg\sqrt[6]{x}\right)+C.$

$$2)\ \int\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{1+3\sqrt[3]{x^2}}\,dx=\int x^{\frac{1}{3}}(1+3x^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{3}}dx=\left\{\begin{array}{l} m=\frac{1}{3};\frac{m+1}{n}=\frac{4}{3}\cdot\frac{3}{2}=2\in Z \\ n=\frac{2}{3};\sqrt[3]{1+3x^{\frac{2}{3}}}=t; \\ x=\left(\frac{t^3-1}{3}\right)^{\frac{3}{2}} \\ dx=\frac{3}{2}\left(\frac{t^3-1}{3}\right)^{\frac{1}{2}}t^2dt \end{array}\right\}=$$

$$=\int\left(\frac{t^3-1}{3}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1+3\frac{t^3-1}{3}\right)^{\frac{1}{3}}\frac{3}{2}\left(\frac{t^3-1}{3}\right)^{\frac{1}{2}}t^2dt=\frac{3}{2}\int\frac{t^3-1}{3}t^3dt=\frac{1}{2}\int(t^6-t^3)dt=\frac{1}{14}t^7-\frac{1}{8}t^4+C=\frac{1}{14}(1+3x^{\frac{2}{3}})^{\frac{7}{3}}-$$
$$-\frac{1}{8}(1+3x^{\frac{2}{3}})^{\frac{4}{3}}+C.$$

Відповідь: $\int\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{1+3\sqrt[3]{x^2}}\,dx=\frac{1}{14}(1+3x^{\frac{2}{3}})^{\frac{7}{3}}-\frac{1}{8}(1+3x^{\frac{2}{3}})^{\frac{4}{3}}+C.$

1.8. Теорема Коші. Поняття про інтеграли, які "не беруться".

Дотепер ми вельми вдало для деяких неперервних функцій $f(x)$ знаходили їх невизначені інтеграли $\int f(x)dx$. Виникає питання, чи завжди це буде так само, тобто: 1) чи будь-яка неперервна функція $f(x)$ має невизначений інтеграл та 2) у який спосіб можна знайти цей інтеграл, якщо він існує.

Відповіддю на першу частину цього запитання служить теорема Коші, яка є основною теоремою інтегрального числення. Нагадаємо її в скороченому вигляді: усяка неперервна функція має первісну. Отже, існує й невизначений інтеграл.

Цим не розв'язується друга частина нашого запитання: якщо маємо неперервну функцію $f(x)$, то як знайти її невизначений інтеграл. Теорема Коші зовсім не стверджує, що первісну заданої функції можна фактично відшукати за допомогою скінченого числа відомих операцій та виразити відповідь у елементарних функціях. Більш того, мають місце неперервні елементарні функції, інтеграли від яких не є елементарними функціями. Такі інтеграли часто називаються *такими, що "не беруться"*, розуміючи під цим, що такого роду інтеграли не можуть бути виражені за допомогою скінченого числа елементарних функцій.

Наприклад, можна довести, що інтеграли $\int e^{-x^2}dx$, $\int\frac{\sin x}{x}dx$, $\frac{dx}{\ln x}$ і низка інших не зводяться до скінченої комбінації елементарних функцій і, отже, є такими, що "не беруться" в нашому розумінні слова.

Завдання для самостійного розв'язання

Завдання № 1. Обчислити невизначені інтеграли. Результати перевірити диференціюванням.

1) $\int(x^2-2x+1)^2(3x^2-3)dx$; 2) $\int\frac{x^2dx}{x^3+1}$; 3) $\int\frac{\sqrt[3]{ctgx}}{\sin^2 x}dx$;

4) $\int\sqrt{\sin 2x-1}\cos 2xdx$; 5) $\int\frac{\sin 2xdx}{\sqrt{1+\cos^2 x}}$; 6) $\int(1+2^x)^2 2^x dx$;

7) $\int \frac{\sqrt{\ln x - 2}}{x} dx$; 8) $\int \frac{\arccos x + 4}{\sqrt{1 - x^2}} dx$

Завдання № 2. Обчислити інтеграл методом заміни:

1) $\int \sqrt[3]{arctgx}\,\frac{dx}{1 + x^2}$; 2) $\int \frac{(6x - 5)dx}{2\sqrt{3x^2 - 5x + 6}}$; 3) $\int \frac{\ln^2 xdx}{x}$,

4) $\int e^{\sin x} \cos xdx$; 5) $\int \frac{(1 + tgx)^3}{\cos^2 x} dx$; 6) $\int \frac{(e^{-x} + 2)^3}{e^x} dx$;

7) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(2x + 1)^2} + \sqrt{2x + 1}}$; 8) $\int \frac{\sqrt{x + 1} + 1}{\sqrt{x + 1} - 1} dx$; 9) $\int \frac{(\ln x - 1)dx}{x\sqrt{\ln x}}$;

10) $\int \frac{\arcsin \sqrt{x} dx}{\sqrt{x}}$; 11) $\int \frac{\sqrt{x}}{x(x + 1)} dx$; 12) $\int x^2 \sqrt{4 - x^2} dx$

Завдання № 3. Обчислити інтеграл частинами:

1) $\int x \sin 2xdx$; 2) $\int x^2 \cos^2 xdx$; 3) $\int \frac{\arccos xdx}{x^2}$;

4) $\int x^3 \ln xdx$; 5) $\int \arcsin xdx$; 6) $\int xarcctg^2 xdx$;

7) $\int (x + 1)e^{3x} dx$; 8) $\int xarctgxdx$; 9) $\int e^x \cos xdx$

Завдання № 4. Розкласти на найпростіші дроби, обчислити інтеграл:

1) $\int \frac{dx}{x^3 - x^2}$; 2) $\int \frac{dx}{x^3 + x^2 + 4x + 4}$; 3) $\int \frac{dx}{x^3 + 1}$;

4) $\int \frac{x^2}{x^4 - 16} dx$; 5) $\int \frac{x^2}{x^4 + x^2 - 2} dx$; 6) $\int \frac{(x^2 - 2x)dx}{x^4 + 2x^2 + 1}$;

7) $\int \frac{x^3 - 3}{x^2 - 1} dx$; 8) $\int \frac{x^5 dx}{x^3 - 1}$; 9) $\int \frac{(x^4 + x^2 + 6)dx}{x^3 + x^2 - 2x}$

Завдання № 5. Обчислити інтеграл від ірраціональної функції:

1) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 4x - 4}}$; 2) $\int \frac{(2 - 5x)dx}{\sqrt{4x^2 + 9x + 1}}$; 3) $\int \frac{(x - 3)dx}{\sqrt{3 - 2x - x^2}}$;

4) $\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}$; 5) $\int \frac{(\sqrt[6]{x} + 1)dx}{\sqrt[6]{x^7} + \sqrt[6]{x^5}}$; 6) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + 4x - 4}}$;

7) $\int \sqrt{3x^2 - 3x + 1} dx$; 8) $\int \frac{\sqrt{1 - x^4} dx}{x^5}$; 9) $\int \frac{\sqrt[3]{1 + x^3} dx}{x^2}$

Завдання № 6. Обчислити інтеграл від тригонометричної функції:

1) $\int \sin^6 xdx$; 2) $\int \cos^3 x \sin 2xdx$; 3) $\int tg^4 xdx$;

4) $\int ctg^5 xdx$; 5) $\int \frac{dx}{tgx + 1}$; 6) $\int \frac{\sin^4 x}{\cos^2 x} dx$;

7) $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x} dx$; 8) $\int \frac{dx}{3\sin x + 4\cos x}$; 9) $\int \frac{\cos x dx}{\sin^3 x - \cos^3 x}$;

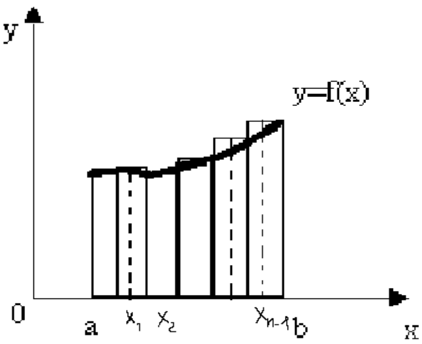
10) $\int \frac{\sin x}{(1-\cos x)^2} dx$; 11) $\int \sin 2x \cos 3x dx$; 12) $\int \cos x \cos 2x \cos 3x dx$

2. ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

2.1. Задачі, що приводять до поняття визначеного інтеграла

1. Задача про площу криволінійної трапеції. Нехай функція $y = f(x)$ неперервна й невід'ємна на відрізку $[a,b]$.

Означення 1. Фігура, обмежена графіком функції $y = f(x)$, віссю Ox та відрізками прямих $x = a$, $x = b$, $y = 0$, називається *криволінійною трапецією*.



Задача полягає в обчисленні площі S цієї трапеції.

Розв'язання. Розіб'ємо відрізок $[a,b]$ довільним чином на n часткових відрізків за допомогою точок $x_0, x_1, ..., x_n$ так, щоб

$$a = x_0 < x_1 < .... < x_n = b.$$

Означення 2. Множина точок $\{x_0, x_1, ..., x_n\}$, що задовольняє умову $a = x_0 < x_1 < .... < x_n = b$, називається *розбиттям відрізку* $[a,b]$.

Означення 3. Максимальне з чисел $\Delta x_n = x_k - x_{k-1}$, де $k = 1,...,n$, називається *діаметром розбиття.*

Позначається $diam\{x_0....x_n\}$.

Через кожну точку x_i, $i = 1,...,n-1$ проведемо пряму, паралельну Oy. Ці прямі розіб'ють трапецію на n смужок – елементарних трапецій. Очевидно, що площа S усієї трапеції дорівнює сумі всіх площ S_i цих смужок.

У кожному з часткових відрізків $[x_{i-1}, x_i]$ виберемо довільну точку ξ_i та обчислимо значення функції f у цій точці $f(\xi_i)$.

Побудуємо на відрізку $[x_{i-1}, x_i]$ прямокутник з висотою $f(\xi_i)$ і основою $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Площа елементарної трапеції наближено дорівнює площі прямокутника:

$$S_i \approx f(\xi_i)\Delta x_i.$$

Тоді площа всієї трапеції:

$$S = \sum_{i=1}^{n} S_i \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

Точність цієї формули збільшується із збільшенням кількості часткових відрізків та із зменшенням максимальної довжини цих відрізків.

Точне значення площі криволінійної трапеції одержимо, коли перейдемо до границі при $\max \Delta x_i \to 0$:

$$S = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \qquad (1)$$

2. Задача про пройдений шлях. Нехай матеріальна точка рухається прямолінійно із швидкістю, яка є неперервною функцією часу: $v = v(t)$. Задача полягає у визначенні шляху S, який пройде матеріальна точка за проміжок часу $[a, b]$ від моменту $t = a$ до моменту $t = b$.

Розв'язання. Розіб'ємо відрізок часу $[a, b]$ довільним чином моментами часу (точками) $a = t_0 < t_1 < .... < t_n = b$ на n відрізків часу (часткових відрізків).

У кожному відрізку $[t_{i-1}, t_i]$ виберемо проміжний момент ξ_i та обчислимо в ньому значення функції $v(\xi_i)$. Якщо проміжок $[t_{i-1}, t_i]$ достатньо малий, то можна вважати швидкість v на ньому сталою та рівною $v(\xi_i)$.

Тоді шлях, пройдений матеріальною точкою за час $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$, дорівнює

$$S_i \approx v(\xi_i)\Delta t_i .$$

Шлях S, пройдений за час $[a, b]$:

$$S = \sum_{i=1}^{n} S_i \approx \sum_{i=1}^{n} v(\xi_i)\Delta t_i .$$

Ця формула тим точніша, чим менші величини Δt_i.

Точне значення пройденого часу одержимо, якщо перейдемо до границі при $\max \Delta t_i \to 0$:

$$S = \lim_{\max \Delta t_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} v(\xi_i)\Delta t_i \qquad (2)$$

3. Задача про масу неоднорідного стержня. Нехай прямолінійний матеріальний стержень займає на осі Ox відрізок $[a, b]$ та його речовина розподілена з густиною $\rho = \rho(x)$ (лінійна густина – маса одиниці довжини стержня). Задача полягає у визначенні маси m стержня.

Розв'язання. Розіб'ємо стержень довільним чином на n частин точками $a = x_0 < x_1 < .... < x_n = b$.

У кожній з елементарних ділянок $[x_{i-1}, x_i]$ виберемо довільну точку ξ_i та обчислимо значення густини в цій точці $\rho(\xi_i)$. Якщо відрізок $[x_{i-1}, x_i]$ достатньо малий, то можна вважати густину на ньому сталою та рівною $\rho(\xi_i)$.

Тоді маса частини стержня $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ дорівнює

$$m_i \approx \rho(\xi_i)\Delta x_i .$$

Маса всього стержня

$$m = \sum_{i=1}^{n} m_i \approx \sum_{i=1}^{n} \rho(\xi_i)\Delta x_i .$$

Точне значення маси стержня одержимо, якщо перейдемо до границі при $\max \Delta x_i \to 0$:

$$m = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \rho(\xi_i)\Delta x_i \qquad (3)$$

4. Задача про роботу змінної сили. Нехай матеріальна точка під дією постійної сили F переміщається в напрямку цієї сили. Якщо пройдений шлях дорівнює s, то, як відомо з курсу фізики, робота A цієї сили обчислюється за формулою

$$A = Fs .$$

Нехай тепер матеріальна точка рухається по осі Ox від точки $A(a)$ до точки $B(b)$ ($b > a$) під дією змінної сили $F = f(x)$, що направлена по осі Ox і є функцією від x. Задача полягає у визначенні роботи A цієї сили $F = f(x)$.

Розв'язання. Розіб'ємо відрізок $[a,b]$ точками $a = x_0 < x_1 < .... < x_n = b$ довільним чином на n часткових відрізків.

Нехай $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. У кожній з елементарних ділянок $[x_{i-1}, x_i]$ виберемо довільну точку ξ_i та обчислимо значення сили в цій точці $F(\xi_i)$. Якщо відрізок $[x_{i-1}, x_i]$ достатньо малий, то можна вважати силу на ньому сталою та рівною $F(\xi_i)$.

Тоді робота сили на відрізку Δx_i дорівнює

$$A_i \approx F(\xi_i)\Delta x_i .$$

Робота сили на відрізку $[a,b]$:

$$A = \sum_{i=1}^{n} A_i \approx \sum_{i=1}^{n} F(\xi_i)\Delta x_i .$$

Точне значення роботи одержимо, якщо перейдемо до границі при $\max \Delta x_i \to 0$:

$$A = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} F(\xi_i)\Delta x_i \qquad (4)$$

Зауваження: До границь виду (1) – (4) приводять багато інших задач. Тому виникає потреба навчитися обчислювати такі границі незалежно від конкретного змісту задачі.

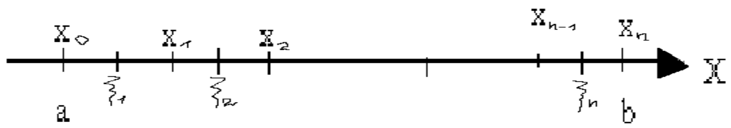
2.2. Означення визначеного інтеграла. Умови існування визначеного інтеграла

Нехай функція $f(x)$ визначена на відрізку $[a,b]$.

Означення 4. *Розбиттям відрізку* $[a,b]$ називається довільна скінчена сукупність точок, серед яких обов'язково повинні бути кінці відрізка: $a = x_0 < x_1 < .... < x_n = b$.

Позначають: $\tau = \{ x_0, x_1, ..., x_n \}$.

У кожному частковому відрізку $[x_{i-1}, x_i]$, що утворилися в результаті розбиття τ,



виберемо довільну точку ξ_i та обчислимо значення функції у цій точці $f(\xi_i)$.

Побудуємо суму $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$, де $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Ця сума називається *інтегральною сумою Рімана* функції $f(x)$, яка відповідає даному розбиттю відрізка $[a,b]$ і даному вибору проміжних точок ξ_i (Б. Ріман (1826–1866) – німецький математик).

Означення 5. *Діаметром розбиття* τ називається найбільша довжина часткового відрізка.

Позначається: $\lambda_n = \lambda_n(\tau) = \max_{i=1,...,n} \Delta x_i$.

Означення 6. Скінчена границя інтегральної суми при $\lambda_n \to 0$, якщо вона існує й не залежить ні від розбиття відрізка $[a,b]$ на часткові відрізки, ні від вибору проміжних точок у часткових відрізках, називається *визначеним інтегралом Рімана* функції $f(x)$ на відрізку $[a,b]$.

Позначається: $\int\limits_a^b f(x)dx$.

Функція $f(x)$ у цьому разі називається *інтегрованою* на відрізку $\left[\, a,b \,\right]$. Числа a і b називаються відповідно *нижньою й верхньою межами інтегрування* відповідно, $f(x)$ – *підінтегральною функцією*; вираз $f(x)dx$ – *підінтегральним виразом*, змінна x – *змінною інтегрування*, відрізок $\left[\, a,b \,\right]$ – *проміжком інтегрування*.

Зауваження: Надалі скорочено замість "інтегральна сума Рімана" будемо говорити "інтегральна сума", а замість "визначений інтеграл Рімана" – "визначений інтеграл".

Знак $\int$ є стилізованою буквою S та має нагадувати про ту суму, яка при граничному переході дала величину визначеного інтеграла.

Отже, за означенням:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda_n \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \,.$$

Зауваження 1: Очевидно, якщо функція $f(x)$ інтегрована на відрізку $\left[\, a,b \,\right]$, то вона на ньому обмежена.

Зауваження 2: Як і будь-яка границя, визначений інтеграл – це число, на відміну від невизначеного інтеграла, який є функцією.

Повертаючись до задач, розглянутих у пункті 2.1, можна сказати, що:

1. Площа криволінійної трапеції, обмеженої графіком функції $f(x) \geq 0$ і прямими $x = a$, $x = b$, $y = 0$, дорівнює визначеному інтегралу від функції $f(x)$:

$$S = \int\limits_a^b f(x)dx$$

У цьому полягає геометричний зміст визначеного інтеграла: визначений інтеграл від невід'ємної функції чисельно дорівнює площі відповідної криволінійної трапеції.

2. Шлях, пройдений матеріальною точкою за проміжок часу від $t = a$ до $t = b$, дорівнює визначеному інтегралу від швидкості:

$$S = \int\limits_a^b v(t)dt.$$

У цьому полягає фізичний зміст визначеного інтеграла.

Зауваження: Визначеному інтегралу можна надати різний геометричний (площа криволінійної трапеції, довжина дуги кривої, об'єм тіла обертання тощо) і різний фізичний (шлях, пройдений матеріальною точкою; маса неоднорідного стержня, робота змінної сили тощо) зміст.

3. Маса прямолінійного матеріального стержня, який займає на осі Ox відрізок $\left[\, a,b \,\right]$ та речовина якого розподілена з густиною $\rho = \rho(x)$, дорівнює визначеному інтегралу від густини:

$$m = \int\limits_a^b \rho(x)dx\,.$$

4. Робота змінної сили $F = f(x)$, направленої по осі Ox, на відрізку $\left[\, a,b \,\right]$ дорівнює визначеному інтегралу від цієї сили:

$$A = \int\limits_a^b f(x)dx\,.$$

Теорема 1: Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $\left[\, a,b \,\right]$, то вона інтегрована на цьому відрізку.

Теорема 2 (умови інтегрованості функції на відрізку): Для того, щоб функція $f(x)$ була інтегрованою на відрізку $[\,a,b\,]$, має бути виконана одна з умов:

1) необхідно, щоб вона була обмеженою на $[\,a,b\,]$;

2) достатньо, щоб вона була неперервною на $[\,a,b\,]$;

3) достатньо, щоб вона була обмеженою на $[\,a,b\,]$ і кусково-неперервною на ньому (тобто мала лише скінчену кількість точок розриву 1-го роду);

4) достатньо, щоб вона була обмеженою й монотонною на $[\,a,b\,]$.

Зауваження: Кожна із зазначених умов розширює клас інтегрованих функцій. Так, функція, монотонна на відрізку, може мати нескінченну кількість точок розриву, й це ще не означає, що вона не інтегрована на цьому відрізку.

Далі розглядатимемо лише неперервні функції.

2.3. Властивості визначеного інтеграла

Нехай усі розглядувані функції інтегровані на відповідних відрізках.

1. Величина визначеного інтеграла не залежить від позначення змінної інтегрування:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(z)dz\,.$$

Зауваження: Введене означення визначеного інтеграла припускає, що нижня межа інтегрування менша верхньої: $a < b$.

Узагальнимо поняття інтеграла на випадки, коли $a = b$ і $a > b$.

2. Визначений інтеграл з однаковими межами інтегрування дорівнює нулю:

$$\int_a^a f(x)dx = 0\,.$$

3. При переставленні місцями меж інтегрування інтеграл, зберігаючи абсолютне значення, змінює знак на протилежний:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx\,.$$

4 (адитивність інтеграла)**.** При будь-якому розташуванні точок a,b,c на множині R справедлива рівність:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx\,.$$

Зауваження: Ця рівність виражає властивість адитивності визначеного інтеграла відносно відрізка інтегрування: визначений інтеграл по всьому відрізку дорівнює сумі інтегралів по всім його частинам.

5. Сталий множник можна виносити за знак визначеного інтеграла:

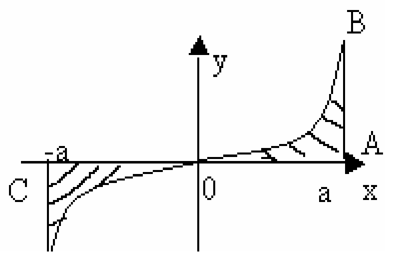
$$\int_a^b Cf(x)dx = C\int_a^b f(x)dx\,.$$

6. Визначений інтеграл від суми функцій дорівнює сумі визначених інтегралів від цих функцій:

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx\,.$$

Зауваження: Ця властивість поширюється на випадок алгебраїчної суми будь-якого скінченого числа функцій.

7. Визначений інтеграл від непарної функції у симетричних



межах $[\,-a;a\,]$ дорівнює нулю:

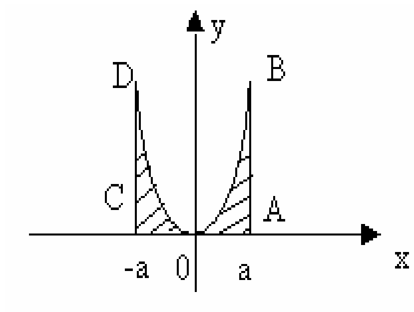
$$\int_{a}^{-a} f(x)dx = 0\text{, якщо } f(-x) = -f(x)\,.$$

Доведення. Виходячи з геометричного змісту інтеграла,

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx = -S_{OCD} + S_{OAB} = 0\,,$$

оскільки $S_{OCD} = S_{OAB}$.◊

8. Визначений інтеграл від парної функції у симетричних межах $[\,-a;a\,]$ дорівнює подвоєному інтегралу в межах від 0 до a:



$$\int_{a}^{-a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(\;x\;)dx\text{, якщо } f(-x) = -f(x)\,.$$

Доведення. Виходячи з геометричного змісту інтеграла,

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx =$$

$$S_{OCD} + S_{OAB} = 2S_{OAB} = 2\int_{0}^{a} f(x)dx\,,$$

оскільки $S_{OCD} = S_{OAB}$.◊

9 (збереження знака підінтегральної функції визначеним інтегралом). Якщо всюди на відрізку $[\,a,b\,]$ $f(x) \geq 0$, то

$$\int_{a}^{b} f(x)dx \geq 0\,.$$

Доведення. Оскільки $f(\xi_i) \geq 0$, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1} > 0$, $i = 1,...,n$, то будь-яка інтегральна сума та її границя при $\lambda_n \to 0$ теж невід'ємні. ◊

10 (монотонність визначеного інтеграла). Якщо всюди на відрізку $[\,a,b\,]$ виконується нерівність

$$f(x) \leq g(x)\,,$$

то виконується й нерівність

$$\int_{a}^{b} f(x)dx \leq \int_{a}^{b} g(x)dx\,.$$

Коротше кажучи, нерівності можна інтегрувати.

Доведення. Оскільки $f(x) \leq g(x)$, то

$$g(x) - f(x) \geq 0$$

і за властивістю 9

$$\int_{a}^{b} (g(x) - f(x)) \geq 0\,,$$

звідки за властивістю адитивності

$$\int_{a}^{b} g(x)dx - \int_{a}^{b} f(x)dx \geq 0\,,$$

або

$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx . \Diamond$$

2.4. Оцінка визначеного інтеграла. Теореми про оцінку

Теорема 3 (про оцінку модуля інтеграла): Якщо функція $f(x)$ інтегрована на відрізку $[\ a,b\ ]$, де $a \le b$, то виконується нерівність

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \le \int_a^b \left| \ f(x) \ \right| dx .$$

<u>Доведення.</u> Для функції $f(x)$ справедлива нерівність

$$-\left| \ f(x) \ \right| \le f(x) \le \left| \ f(x) \ \right| .$$

Проінтегруємо її в межах від a до b:

$$-\int_a^b \left| \ f(x) \ \right| dx \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b \left| \ f(x) \ \right| dx ,$$

звідки випливає:

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \le \int_a^b \left| \ f(x) \ \right| dx . \Diamond$$

Теорема 4 (про оцінку модуля інтеграла): Якщо

$$\forall x \in [\ a,b\ ] \ \ f(x) \le C ,$$

то

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \le C(b-a) .$$

<u>Доведення.</u> З теореми 3, умови й властивості 5 отримаємо:

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \le \int_a^b \left| \ f(x) \ \right| dx \le C\int_a^b dx .$$

Отриманий інтеграл можна записати так:

$$\int_a^b dx = \lim_{\lambda_n \to 0} \sum_{i=1}^{n} 1 \cdot \Delta x_i = b-a ,$$

тому

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \le C(b-a)$$

$\Diamond$

Теорема 5 (про оцінку інтеграла по області): Якщо функція $f(x)$ набуває на відрізку $[\ a,b\ ]$ найбільшого M і найменшого m значень, то

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a) .$$

<u>Доведення.</u> Оскільки функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[\ a,b\ ]$, то, згідно з теоремою Вейєрштрасса, вона набуває на $[\ a,b\ ]$ найбільшого M і найменшого m значень, тобто

$$\forall x \in [\ a,b\ ] \ \ m \le f(x) \le M .$$

Проінтегруємо отриману нерівність в межах від a до b:

$$\int_a^b m dx \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b M dx .$$

Тоді за властивістю 5 матимемо:

$$m\int_a^b dx \le \int_a^b f(x)dx \le M\int_a^b dx ,$$

звідки

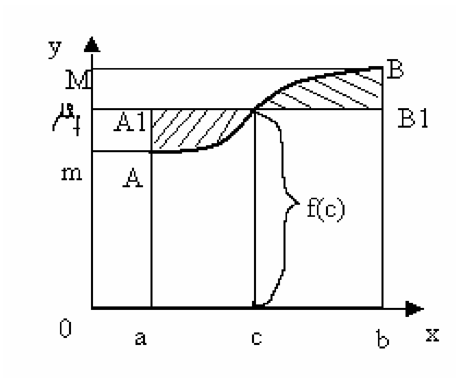
$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$$

$\Diamond$

2.5. Теорема про середнє значення функції

О з н а ч е н н я 7. *Середнім значенням* функції $f(x)$, інтегрованої на відрізку $[\,a,b\,]$, називається число

$$\mu_f = \frac{1}{a-b}\int_a^b f(x)dx .$$



Т е о р е м а 6 (п р о с е р е д н є): Якщо функція $f(x)$ інтегрована на відрізку $[\,a,b\,]$ та виконується нерівність

$$m \le f(x) \le M ,$$

то

$$m \le \mu_f \le M .$$

Якщо функція $f(x)$ неперервна на $[\,a,b\,]$, то існує така точка $c \in [\,a,b\,]$, що

$$f(c) = \mu_f .$$

<u>Доведення.</u> Нерівність $m \le \mu_f \le M$ випливає з теореми про оцінку інтеграла по області:

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a) ,$$

звідки за означенням середнього

$$m \le \mu_f \le M .$$

Оскільки функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[\,a,b\,]$, то вона набуває всі проміжні значення відрізка $[\,m,M\,]$. Отже, існує точка $c \in [\,a,b\,]$ така, що

$$f(c) = \mu_f .\Diamond$$

З теореми про середнє маємо:

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(c) .$$

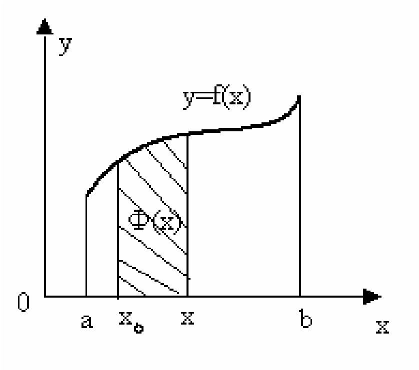
Остання формула геометрично означає, що можна завжди підібрати на дузі *AB* таку точку *C* з абсцисою *c*, яка міститься між *a* і *b*, що площа відповідного прямокутника aA_1B_1b з висотою cC в точності дорівнюватиме площі криволінійної трапеції $aABb$.

Отже, г е о м е т р и ч н и й з м і с т т е о р е м и п р о с е р е д н є: значення визначеного інтеграла дорівнює площі прямокутника з висотою $f(c)$ і основою $b-a$.

2.6. Визначений інтеграл із змінною верхньою межею

Нехай функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a,b]$.

Зафіксуємо точку $x_0 \in [a,b]$ та розглянемо змінну точку $x \in [a,b]$. Тоді $f(x)$ буде неперервною й інтегрованою на відрізку $[x_0, x]$, тобто існує інтеграл $\int_{x_0}^{x} f(t)dt$ (змінну інтегрування позначимо через t, щоб відрізняти від верхньої межі). Цей інтеграл є, очевидно, функцією від x.



Позначимо цю функцію через $\Phi(x)$:

$$\Phi(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)dt.$$

та назвемо її *інтегралом із змінною верхньою межею.*

Зауваження: Геометрично інтеграл із змінною верхньою межею є площею частини криволінійної трапеції, обмеженої лініями $y = f(x)$, $y = 0$, $x = a$, $x = b$.

Теорема 7 (про похідну визначеного інтеграла із змінною верхньою межею): Похідна визначеного інтеграла із змінною верхньою межею по цій межі дорівнює значенню підінтегральної функції для цієї межі:

$$\Phi'(x) = \left(\int_{x_0}^{x} f(t)dt \right)'_x = f(x).$$

Доведення. Треба довести, що

$$\forall x \in [a,b] \ \Phi'(x) = f(x).$$

Надамо аргументу x функції $\Phi(x)$ приріст, що не виводить x за межі (a,b).

Обчислимо приріст функції:

$\Phi(x+\Delta x) - \Phi(x) = \int_{x_0}^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_{x_0}^{x} f(t)dt =$ (за властивістю адитивності визначеного інтеграла) $= \int_{x_0}^{x} f(t)dt + \int_{x}^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_{x_0}^{x} f(t)dt = \int_{x}^{x+\Delta x} f(t)dt$.

Застосуємо до останнього інтеграла теорему про середнє:

$$\int_{x}^{x+\Delta x} f(t)dt = \big((x+\Delta x) - x \big) f(c) = \Delta x f(c),$$

де $c \in [x, x+\Delta x]$.

Знайдемо відношення приросту функції до приросту аргументу:

$$\frac{\Phi(x+\Delta x) - \Phi(x)}{\Delta x} = \frac{\Delta x f(c)}{\Delta x} = f(x)$$

Якщо $\Delta x \to 0$, то точка $x + \Delta x$ необмежено наближуватиметься до точки x, отже, й точка c, що лежить між ними, теж наближуватиметься до x.

Якщо $c \to x$, то

$$f(c) \to f(x),$$

оскільки функція f неперервна на (a,b). Таким чином,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)}{\Delta x} = f(x).$$

Це й означає, що функція $\Phi(x)$ має в точці x похідну

$$\Phi'(x) = f(x).$$

Оскільки ця рівність справедлива $\forall x \in (a,b)$, то теорему доведено.◊

Наслідок (про існування первісної неперервної функції): Якщо функція неперервна на відрізку $[a,b]$, то вона має на цьому відрізку первісну.

Доведення. Дійсно, зафіксуємо довільну точку $x_0 \in [a,b]$ та розглянемо інтеграл $\int\limits_{x_0}^{x} f(t)dt$.

За теоремою про похідну визначеного інтеграла із змінною верхньою межею

$$\left(\int\limits_{x_0}^{x} f(t)dt \right)'_x = f(x).$$

За означенням первісної це означає, що інтеграл із змінною верхньою межею є первісною для функції $f(x)$ на відрізку $[a,b]$.◊

Зауваження: Так само можна розглядати інтеграл із змінною нижньою межею $\int\limits_{x}^{x_0} f(t)dt$, де x_0 – фіксована точка з відрізка $[a,b]$.

Його похідна:

$$\left(\int\limits_{x}^{x_0} f(t)dt \right)'_x = -f(x).$$

2.7. Формула Ньютона-Лейбніца

Обчислення визначеного інтеграла як границі інтегральних сум з практичної точки зору непридатне як метод. Теорема про похідну визначеного інтеграла із змінною верхньою межею, розкриваючи глибокий зв'язок між невизначеним і визначеним інтегралами, встановлює простий і найважливіший метод обчислення визначених інтегралів.

Цей метод ґрунтується на теоремі 7.

Теорема 8: Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a,b]$ і $F(x)$ – будь-яка первісна для функції $f(x)$ на $[a,b]$, то справедлива формула:

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)dx = F(b) - F(a),$$

тобто величина визначеного інтеграла дорівнює різниці значень первісної функції для підінтегральної функції при верхній і нижній межах інтегрування.

Ця формула називається формулою Ньютона-Лейбніца.

Доведення. Розглянемо визначений інтеграл із змінною верхньою межею, у якому нижня межа дорівнює $x_0 = a$, тобто $\int\limits_{a}^{x} f(t)dt$.

За наслідком з теореми про похідну інтеграла із змінною верхньою межею цей інтеграл є первісною для функції $f(x)$ на відрізку $[a,b]$.

$F(x)$ – теж первісна для функції $f(x)$ на $[a,b]$ за умовою.

Але дві первісні однієї і тієї ж самої функції відрізняються на сталу. Отже, існує стала C така, що

$$\forall x \in [a,b] \quad \int_a^x f(t)dt = F(x) + C \qquad (1)$$

Зокрема, при $x = a$:

$$\int_a^a f(t)dt = 0,$$

отже

$$0 = F(a) + C,$$

звідки

$$C = -F(a).$$

Підставимо це значення C в (1):

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a).$$

При $x = b$ ця рівність теж виконується:

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a).$$

Отримана рівність співпадає з потрібною, оскільки інтеграл не змінюється від позначення змінної.◊

Формула Ньютона-Лейбніца установлює зв'язок між визначеним і невизначеним інтегралами. Крім того, вона дає зручне правило обчислення визначеного інтеграла, оскільки звільняє нас при обчисленні визначеного інтеграла від складних операцій утворення інтегральної суми й переходу до границі.

<u>Зауваження 1:</u> Різницю $F(b) - F(a)$ умовно позначають як $F(x)\Big|_a^b$, тому формулу Ньютона-Лейбніца записують у вигляді

$$\int_a^b F(x)dx = F(x)\Big|_b^a.$$

Тобто, щоб обчислити визначений інтеграл від неперервної функції $f(x)$ на відрізку $[a,b]$, треба знайти її первісну $F(x)$ та взяти різницю $F(b) - F(a)$ значень цієї первісної на кінцях $[a,b]$.

<u>Зауваження 2:</u> Якщо позначити $\Phi(x) = \int_{x_0}^x f(t)dt$, то за формулою Ньютона-Лейбніца матимемо:

$$\Phi(x) = F(x) - F(x_0),$$

отже,

$$\Phi(x_0) = 0,$$

тобто $\Phi(x)$ є та первісна для функції $f(x)$, яка звертається в нуль при $x = x_0$.

2.8. Методи обчислення визначених інтегралів

1. Безпосереднє обчислення з використанням формули Ньютона-Лейбніца.

Приклад: Знайти інтеграли:

1) $\int\limits_1^2 x^3 dx$;   2) $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$.

Розв'язання.

1) $\int\limits_1^2 x^3 dx = \left.\frac{x^4}{4}\right|_1^2 = \frac{16}{4} - \frac{1}{4} = \frac{15}{4}$.

Відповідь: $\int\limits_1^2 x^3 dx = \frac{15}{4}$.

2) $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \sin x \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 1 - (-1) = 2$.

Відповідь: $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = 2$.

Зауваження: Якщо функція $f(x)$ має на відрізку інтегрування розриви 2-го роду, то формулу Ньютона-Лейбніца застосовувати не можна.

Розглянемо, наприклад, інтеграл $\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{x^4}$. Застосовуючи формулу Ньютона-Лейбніца, ми б отримали:

$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{x^4} = -\frac{4}{x^3}\Big|_{-1}^{1} = -4 - 4 = -8 ,$$

що невірно, оскільки визначений інтеграл від функції, додатної на всьому відрізку інтегрування, не може бути від'ємним. Застосовувати до цього інтеграла формулу Ньютона-Лейбніца не можна, оскільки підінтегральна функція $f(x) = \frac{1}{x^4}$ має в точці $0 \in [-1,1]$ розрив 2-го роду. Дослідження інтегралів такого типу ми розглянемо пізніше.

2. Заміна змінної (підстановка) у визначеному інтегралі.

Теорема 9: Якщо виконано умови:

1) функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a,b]$;

2) функція $x = \varphi(t)$ і її похідна $x' = \varphi'(t)$ неперервні на відрізку $[\alpha,\beta]$;

3) $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$ і $\forall t \in (\alpha,\beta)$ $a < \varphi(t) < b$, тобто всі значення функції $\varphi(t)$ належать $[a,b]$, то справедлива формула

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

– формула заміни змінної (підстановки) у визначеному інтегралі.

Доведення. Оскільки функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a,b]$, то вона має на $[a,b]$ первісну $F(x)$.

Згідно з теоремою про заміну змінної у невизначеному інтегралі функція $F(\varphi(t))$ буде первісною функції $f(\varphi(t))\varphi'(t)$, $t\in[\alpha,\beta]$.

За формулою Ньютона-Лейбніца

$$\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a),$$

або після відповідних замін

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = F(b)-F(a).$$

З рівності правих частин випливає рівність лівих частин. ◊

<u>Зауваження:</u> При обчисленні визначеного інтеграла методом заміни змінної не треба повертатися від змінної t до змінної x. Замість цього треба змінити межі інтегрування.

<u>Приклад:</u> Знайти інтеграли:

1) $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx$;   2) $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt[3]{x}+1}dx$.

Розв'язання.

1) $$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx = \left\{\begin{array}{ll} x=\sin t & \\ dx=\cos t dt & \begin{array}{c|ccc} & x & 0 & 1 \\ & t & 0 & \frac{\pi}{2}\end{array} \\ \sqrt{1-x^2}=\sqrt{1-\sin^2 t}=\cos t & \end{array}\right\} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t\cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2t)dt =$$

$$= \frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\sin\pi\right) - \frac{1}{2}\left(0+\frac{1}{2}\sin 0\right) = \frac{\pi}{4}.$$

<u>Відповідь:</u> $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx = \frac{\pi}{4}$.

2) $$\int_0^1 \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt[3]{x}+1}dx = \left\{\begin{array}{ll} x=t^6 & \begin{array}{c|ccc} & x & 0 & 1 \\ & t & 0 & 1\end{array} \\ dx=6t^5dt & \end{array}\right\} = \int_0^1 \frac{t^3+1}{t^2+1}6t^5dt = 6\int_0^1 \frac{t^8+t^5}{t^2+1}dt = 6\int_0^1\left(t^6+t^4+t^3+t^2-t-1+\frac{t+1}{t^2+1}\right)dt =$$

$$=6\left(\frac{t^7}{7}-\frac{t^5}{5}+\frac{t^4}{4}+\frac{t^3}{3}-\frac{t^2}{2}-t\right)\Bigg|_0^1 + 6\int_0^1\frac{tdt}{t^2+1} + 6\int_0^1\frac{dt}{t^2+1} = = 6\left(\frac{t^7}{7}-\frac{t^5}{5}+\frac{t^4}{4}+\frac{t^3}{3}-\frac{t^2}{2}-t\right)\Bigg|_0^1 + 3\ln\left(t^2+1\right)\Bigg|_0^1 +$$

$$+6arctgt\Bigg|_0^1 = 6\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{5}+\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}-1\right)+3\ln 2+6\frac{\pi}{4} = 3\ln 2+\frac{3\pi}{2}-\frac{409}{70}.$$

<u>Відповідь:</u> $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt[3]{x}+1}dx = 3\ln 2+\frac{3\pi}{2}-\frac{409}{70}$.

3. Інтегрування частинами для визначеного інтеграла.

Теорема 10: Нехай функції $u=u(x)$, $v=v(x)$ і їх похідні $u'(x)$, $v'(x)$ неперервні на відрізку $[a,b]$, тоді справедлива формула

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)dx. \qquad (1)$$

<u>Доведення.</u> Інтеграли в лівій і правій частинах формули (1) існують як визначені інтеграли неперервних функцій.

Скористаємося формулою для похідної добутку двох функцій. З цієї формули випливає, що функція $u(x)v(x)$ є первісною для функції $u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$. Тоді за формулою Ньютона-Лейбніца

$$\int_a^b (u'(x)v(x)+u(x)v'(x))dx = u(x)v(x)\Big|_a^b .$$

За властивістю лінійності визначеного інтеграла інтеграл у лівій частині дорівнює сумі інтегралів:

$$\int_a^b u'(x)v(x)dx + \int_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)\Big|_a^b ,$$

звідки

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)dx .$$

– формула інтегрування частинами для визначеного інтеграла.

Зауваження: З урахуванням того, що

$$v'(x)dx = dv ,$$
$$u'(x)dx = du ,$$

формулу (1) можна записати скорочено

$$\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu \qquad (2)$$

При цьому слід мати на увазі, що межі інтегрування в формулі (2) стосуються незалежної змінної x.

Приклад. Знайти інтеграли:

1) $\int_0^1 xarctgxdx$;   2) $\int_0^6 (x+2)\cos 3xdx$;   3) $\int_e^{e^2} \ln^2 xdx$.

Розв'язання.

1) $$\int_0^1 xarctgxdx = \left\{ \begin{array}{l} u = arctgx; du = \dfrac{dx}{1+x^2} \\ dv = xdx; v = \dfrac{x^2}{2} \end{array} \right\} = \frac{x^2}{2} arctgx\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{2}\cdot\frac{dx}{1+x^2} = \frac{1}{2}arctg1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2+1-1}{1+x^2}dx = \frac{1}{2}arctg1 -$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2+1-1}{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\int_0^1\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)dx = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\left(x - arctgx\right)\Big|_0^1 = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\left(1-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{8}-\frac{1}{2} = \frac{\pi-2}{4}.$$

Відповідь: $\int_0^1 xarctgxdx = \frac{\pi-2}{4}$.

2) $$\int_0^{\frac{\pi}{6}} (x+3)\cos 3xdx = \left[\begin{array}{ll} u = x+3; & du = dx \\ dv = \cos 3xdx; & v = \dfrac{1}{3}\sin 3x \end{array} \right] = \frac{1}{3}(x+3)\sin 3x\Big|_0^{\frac{\pi}{6}} - \frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin 3xdx = = \left(\frac{x}{3}+1\right)\sin 3x\Big|_0^{\frac{\pi}{6}} +$$

$$+\frac{1}{9}\cos 3x\Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = \left(\frac{\pi}{18}+1\right)\sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 + \frac{1}{9}\cos\frac{\pi}{2} - \frac{1}{9}\cos 0 = \frac{\pi}{18}+1-\frac{1}{9} = \frac{\pi+18-2}{18} = \frac{\pi-16}{18}.$$

Відповідь: $\int_0^{\frac{\pi}{6}} (x+3)\cos 3xdx = \frac{\pi+18-2}{18} = \frac{\pi-16}{18}$.

3) $$\int_e^{e^2} \ln^2 xdx = \left\{ \begin{array}{ll} u = \ln^2 x; & du = 2\dfrac{\ln x}{x}dx \\ dv = dx; & v = x \end{array} \right\} = x\ln^2 x\Big|_e^{e^2} - \int_e^{e^2} x\cdot 2\ln x\frac{dx}{x} = x\ln^2 x\Big|_e^{e^2} - 2\int_e^{e^2} \ln xdx =$$

$$=\left\{\begin{array}{ll} u=\ln x; & du=\frac{1}{x}dx \\ dv=dx; & v=x \end{array}\right\}= x\ln^2 x\Bigg|_e^{e^2}-2\left(x\ln x\Bigg|_e^{e^2}-\int_e^{e^2} x\cdot\frac{1}{x}dx\right)= x\ln^2 x\Bigg|_e^{e^2}-2\left(x\ln x\Bigg|_e^{e^2}-x\Bigg|_e^{e^2}\right)=$$

$$=e^2\left(\ln e^2\right)^2-e\ln^2 e-2\left(e^2\ln e^2-e\ln e-e^2+e\right)=4e^2-e-2\left(2e^2-e-e^2+e\right)=4e^2-e-2e^2=2e^2-e.$$

Відповідь: $\int_e^{e^2}\ln^2 xdx=2e^2-e$.

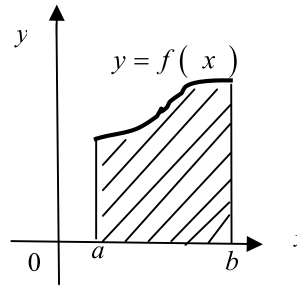
3. ЗАСТОСУВАННЯ ВИЗНАЧЕНОГО ІНТЕГРАЛА

3.1. Обчислення площі плоскої фігури

Часто обчислення визначеного інтеграла називають *квадратурою*. Це пов'язано з тим, що визначення площі зводиться до обчислення визначеного інтеграла.

1) Площа плоскої фігури в декартовій системі координат

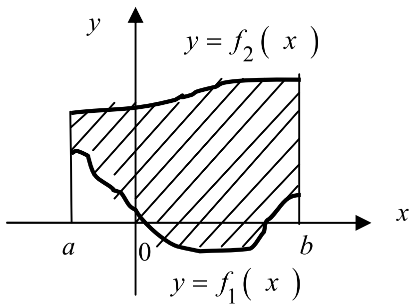
Обчислення площ у декартовій системі координат базується на відомій формулі площі криволінійної трапеції, обмеженої двома вертикальними прямими $x=a$ і $x=b$, віссю Ox та графіком невід'ємної і неперервної на відрізку $[a,b]$ функції $y=f(x)$:

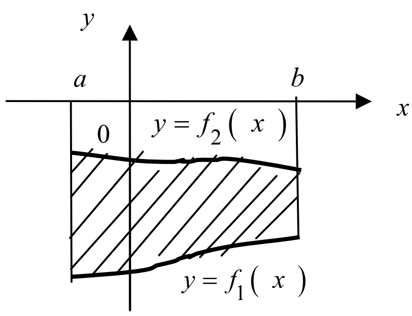


$$S=\int_a^b f(x)d\ x \qquad (1)$$

У більш загальному випадку, якщо криволінійна трапеція обмежена двома вертикальними прямими $x=a$ і $x=b$, віссю Ox та графіками двох неперервних на відрізку $[a,b]$ функцій $y=f_1(x)$ і $y=f_2(x)$ таких, що

$$f_2(x)\geq f_1(x),$$

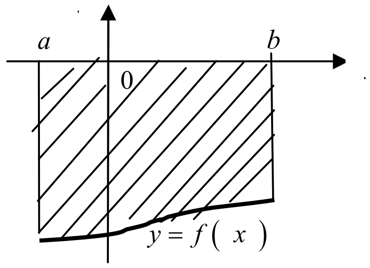




то її площа обчислюється за формулою:

$$S=\int_a^b\left(f_2(x)-f_1(x)\right)d\ x \qquad (2)$$

Ця формула має місце й у тому випадку, коли плоска фігура лежить під віссю Ox. Покажемо це.



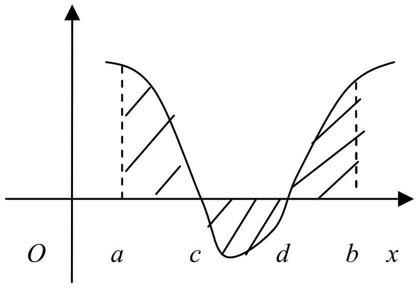
За формулою (2)

$$S=\int_a^b\left(0-f(x)\right)d\ x,$$

звідки

$$S=-\int_a^b f(x)d\ x$$

Якщо підінтегральна функція $y = f(x)$ перетинає вісь Ox, тобто у межах інтегрування приймає як додатні, так і від'ємні значення, то треба при обчисленні площі розбити проміжок інтегрування на частини, в межах яких $f(x)$ не змінює знак, та до кожної частини застосувати ту з формул, яка їй відповідає.

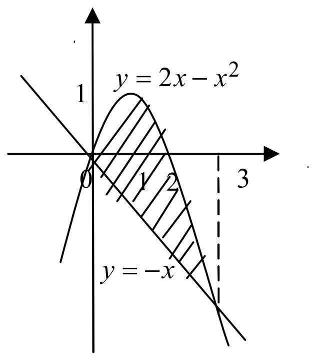


Приклад: Обчислити площу фігури, обмеженої лініями:

1) $y = 2x - x^2$ і $y = -x$; 2) $y = x^2 + 2$, $y = -2x + 10$, $y = 0$, $x = 0$.

Розв'язання.

1) Для розв'язування задач такого роду необхідно накреслити фігуру, площу якої треба знайти.



Перша лінія являє собою параболу. Щоб побудувати параболу, виконаємо деякі перетворення її рівняння:

$$y = 2x - x^2 = -(x^2 - 2x + 1) + 1 = -(x - 1)^2 + 1.$$

Отже, вершина параболи розташована в точці $(1,1)$, її гілки напрямлені донизу.

Друга лінія являє собою пряму – бісектрису другого й четвертого координатних кутів.

Для знаходження меж інтегрування треба знайти абсциси точок перетину означених ліній. Для цього необхідно розв'язати спільно систему рівнянь параболи й прямої:

$$\begin{cases} y = 2x - x^2; \\ y = -x; \end{cases} \Rightarrow 2x - x^2 = -x,$$

$$3x - x^2 = 0, \qquad x(3 - x) = 0,$$

звідки матимемо абсциси точок перетину:

$$x_1 = 0, \qquad x_2 = 3.$$

За формулою (2), вважаючи, що $f_2(x) = 2x - x^2$, $f_1(x) = -x$, отримаємо:

$$S = \int_0^3 (2x - x^2 + x)\,dx = \int_0^3 (3x - x^2)\,dx = \left(\frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^3 = \frac{27}{2} - \frac{27}{3} = \frac{27}{6} = \frac{9}{2}$$

Відповідь: $S = \frac{9}{2}$ кв.од.

2) Розіб'ємо шукану площу на частини, тобто

$$S_{OABC} = S_{OABD} + S_{DBC}.$$

Абсциси точок A, B, C задають межі інтегрування.

Зрозуміло, що абсциса точки A дорівнює нулю.

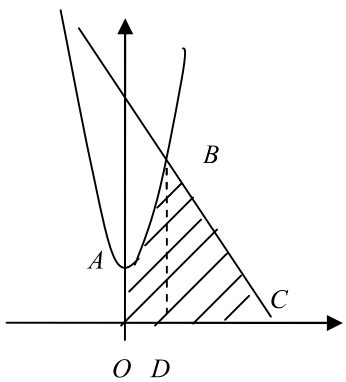
Щоб знайти абсцису точки B, розв'яжемо систему рівнянь

$$\begin{cases} y = x^2 + 2; \\ y = -2x + 10, \end{cases}$$

звідки

$$x_1 = -4, \qquad x_2 = 2.$$

Нас задовольняє $x_2 = 2$.



Знайдемо абсцису точки C. Для цього прирівняємо до нуля y у рівнянні прямої $y = -2x + 10$, звідки матимемо:

$$x = 5.$$

Отже,

$$S_{OABD} = \int_0^2 \left(x^2 + 2\right) dx = \left(\frac{x^3}{3} + 2x\right)\Bigg|_0^2 = \frac{8}{3} + 4 = 6\frac{2}{3} \text{ (кв.од.)};$$

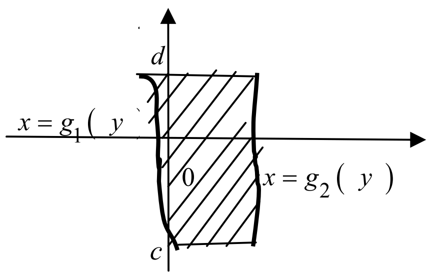
$$S_{BCD} = \int_2^5 (-2x + 10)\,dx = \left(-x^2 + 10x\right)\Big|_2^5 = -25 + 50 - (-4 + 20) = 9 \text{ (кв.од.)}.$$

Тоді шукана площа:

$$S_{OABC}=6\frac{2}{3}+9=15\frac{2}{3}\text{ (кв.од.).}$$

Відповідь: $S_{OABC}=15\frac{2}{3}$ кв.од.

Зауваження: У деяких випадках зручно змінні x і y міняти місцями та обчислювати площу криволінійної трапеції за формулою:



$$S=\int_c^d\left(g_2(y)-g_1(y)\right)dy.$$

2) Площа плоскої фігури при параметричному заданні межі області

Нехай задана криволінійна трапеція, обмежена двома вертикальними прямими $x=a$ і $x=b$, віссю Ox та графіком кривої, заданої параметрично:

$$\begin{cases} x=x(t); \\ y=y(t); \end{cases}\quad t\in[\alpha,\beta],$$

де $x(t)$, $y(t)$ – неперервні функції, які мають на відрізку $[\alpha,\beta]$ неперервні похідні $x'(t)$ і $y'(t)$.

Тоді, якщо $x(t)$ на $[\alpha,\beta]$ є монотонною, то для обчислення площі криволінійної трапеції достатньо зробити заміну змінної

$$x=x(t)\Rightarrow dx=x'(t)dt.$$

Тоді

$$S=\int_\alpha^\beta y(t)x'(t)dt \qquad (3)$$

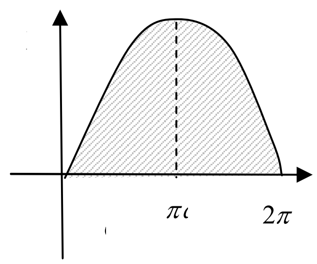
Приклад: Обчислити площу області, обмеженої:

1) першою аркою циклоїди $\begin{cases} x=a(t-\sin t), \\ y=a(1-\cos t) \end{cases}$ та віссю OX; 2) еліпсом $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

Розв'язання.

1) За формулою (3) матимемо:

$$S=\int_0^{2\pi a} ydx.$$



Виконаємо в цьому інтегралі заміну змінних, прийнявши за незалежну змінну параметр *t*.

З параметричних рівнянь циклоїди отримаємо:

$$dx=a(1-\cos t)dt,$$

причому маємо

$$t=0 \text{ при } x=0$$
$$t=2\pi \text{ при } x=2\pi a.$$

Отже,

$$S=\int_0^{2\pi} a(1-\cos t)\cdot a(1-\cos t)dt=a^2\int_0^{2\pi}(1-2\cos t+\cos^2 t)dt=a^2\left[\left.2\pi+\frac{1}{2}(t+\frac{1}{2}\sin 2t)\right|_0^{2\pi}\right]=a^2(2\pi+\pi)=3\pi a^2.$$

Відповідь: $S=3\pi a^2$ кв. од.

2) Якщо ми будемо знаходити цю площу в декартовій системі координат, то прийдеться обчислювати відносно складні інтеграли. Для спрощення обчислень запишемо рівняння еліпса в параметричному вигляді:

$$\begin{cases} x = a\cos t; \\ y = b\sin t. \end{cases}$$

Для того, щоб ми змогли застосувати формулу (3), розглянемо одну чверть області, а саме, ту де $x \ge 0$, $y \ge 0$. При $x = 0$ $t = \frac{\pi}{4}$, а при $x = a$ $t = 0$. Тоді

$$S = 4\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{0} b\sin t\left(a\cos t \right)' dt = 4ab\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t dt = 2ab\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \cos 2t \right) dt = 2ab\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \cos 2t \right) dt = 2ab\left(t - \frac{1}{2}\sin 2t \right)\Bigg|_{0}^{\frac{\pi}{2}} =$$

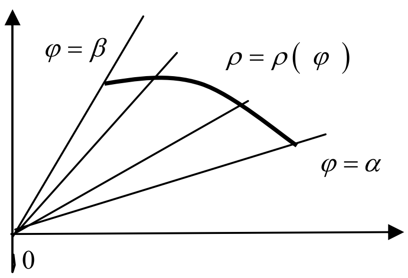
$$= 2ab \cdot \frac{\pi}{2} = \pi ab \text{ (кв. од.)}$$

Відповідь: $S = \pi ab$ кв. од.

Зауваження: Розв'язуючи приклад 2, ми отримали теорему Галілея: площа, обмежена аркою циклоїди та її хордою, дорівнює потроєній площі вихідного круга.

3) Площа плоскої фігури в полярній системі координат

Розглянемо плоску фігуру, обмежену кривою, заданою в полярній системі координат неперервною функцією $\rho = \rho\left(\varphi \right)$ та променями $\varphi = \alpha$ і $\varphi = \beta$. Таку фігуру називають *криволінійним сектором.*



Обчислимо площу S криволінійного сектора.

Розіб'ємо відрізок $\left[\alpha, \beta \right]$ на n частин точками $\alpha = \varphi_0 < \varphi_1 < ... < \varphi_n = \beta$. Через кожну точку φ_i, $i = 1,...,n-1$ проведемо промінь. Ці промені розіб'ють сектор на n елементарних секторів. Очевидно, що площа S усього сектора дорівнює сумі всіх площ S_i елементарних секторів.

У кожному відрізку $\left[\varphi_{i-1}, \varphi_i \right]$ виберемо довільну точку $\xi_i \in \left[\varphi_{i-1}, \varphi_i \right]$.

Площа S_i елементарного сектора, обмеженого кривою $\rho = \rho\left(\varphi \right)$ та променями $\varphi = \varphi_{i-1}$ і $\varphi = \varphi_i$, наближено дорівнює площі кругового сектора, обмеженого тими самими променями та дугою кола радіуса $\rho\left(\xi_i \right)$:

$$S_i \approx \frac{1}{2}\rho^2\left(\xi_i \right)\Delta\varphi_i,$$

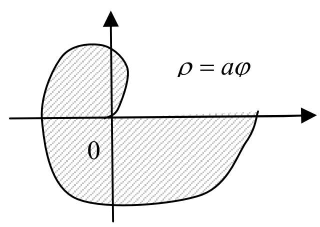
де $\Delta\varphi_i = \varphi_i - \varphi_{i-1}$.

Побудуємо суму $\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{2}\rho^2\left(\xi_i \right)\Delta\varphi_i$. Ця сума буде інтегральною сумою функції $\frac{1}{2}\rho^2\left(\varphi \right)$, яка відповідає даному розбиттю $\left[\alpha, \beta \right]$ та даному вибору проміжних точок ξ_i. Тоді

$$S = \lim_{\max \Delta\varphi_i \to 0} \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \rho^2(\xi_i)\Delta\varphi_i = \frac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi)d\varphi.$$

Отже, площа криволінійного сектора обчислюється за формулою:

$$S = \frac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi)d\varphi \qquad (4)$$



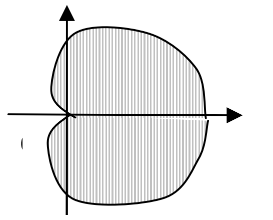
Приклад: Обчислити площу фігури, обмеженої заданими лініями:
1) першим витком спіралі Архімеда $\rho = a\varphi$ та полярною віссю;
2) кардіоїдою $\rho = a\left(1 + \cos\varphi \right)$.

Розв'язання.
1) За формулою (4)

$$S=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}a^2\varphi^2d\varphi=\frac{a^2}{2}\cdot\frac{\varphi^3}{3}\Bigg|_0^{2\pi}=\frac{a^2}{2}\cdot\frac{8\pi^3}{3}=\frac{4a^2\pi^3}{3}\ \text{(кв. од.)}$$

Відповідь: $S=\dfrac{4a^2\pi^3}{3}$ (кв. од.)

2) Оскільки кардіоїда симетрична відносно полярної осі, то досить визначити верхню половину площі, а потім її подвоїти.



$\rho=a(1+\cos\varphi)$

Позначимо площу верхньої частини через S_1. Тоді за формулою (4):

$$S_1=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\rho^2d\varphi .$$

Тоді вся площа:

$$S=\int_0^{\pi}\rho^2d\varphi=a^2\int_0^{\pi}(1+\cos\varphi)^2d\varphi=a^2\left[\int_0^{\pi}d\varphi+2\int_0^{\pi}\cos\varphi d\varphi+\int_0^{\pi}\cos^2\varphi d\varphi\right].$$

Обчислимо окремо кожний із трьох отриманих інтегралів:

$$\int_0^{\pi}d\varphi=\varphi\,\Big|_0^{\pi}=\pi\ ;$$

$$\int_0^{\pi}\cos\varphi d\varphi=\sin\varphi\,\Big|_0^{\pi}=\sin\pi-\sin 0=0\ ;$$

$$\int_0^{\pi}\cos^2\varphi d\varphi=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}(1+\cos2\varphi)d\varphi=\frac{1}{2}(\varphi+\frac{1}{2}\sin2\varphi)\Bigg|_0^{\pi}=\frac{\pi}{2}\ .$$

Тоді площа всієї кардіоїди:

$$S=\frac{3\pi}{2}a^2\ \text{(кв.од.)}$$

Відповідь: $S=\dfrac{3\pi}{2}a^2$ (кв. од.)

3.2. Обчислення довжини дуги гладкої кривої

1) Довжина дуги в декартовій системі координат

Означення 6. Крива називається *гладкою*, якщо вона неперервна та в кожній точці має дотичну, що неперервно змінює своє положення від точки до точки.

Очевидно, що крива буде гладкою, якщо рівняння її може бути записане у вигляді

$$y=f(x)\ (a\le x\le b),$$

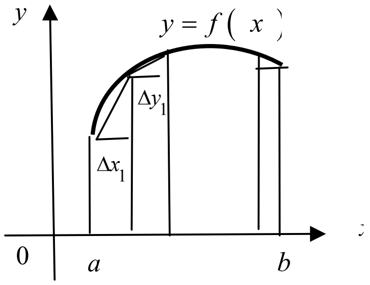
де функція $f(x)$ неперервна та має неперервну похідну $f'(x)$ на відрізку $[a,b]$.

Означення 7. *Довжиною дуги кривої* L називається границя, до якої прямує довжина вписаної в неї ламаної, коли число ланок ламаної зростає необмежено, а довжина найбільшої з її ланок прямує до 0.

Теорема 11: Будь-яка гладка крива має певну скінчену довжину дуги.

Нехай L – дуга кривої, заданої рівнянням $y=f(x)$, де $f(x)$ – функція, яка має на відрізку $[a,b]$ неперервну похідну.

Обчислимо довжину ламаної:



$$L_n=\sqrt{\Delta x_1^2+\Delta y_1^2}+\sqrt{\Delta x_2^2+\Delta y_2^2}+...+\sqrt{\Delta x_n^2+\Delta y_n^2}=\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\Delta x_i^2+\Delta y_i^2}$$

або $$L_n=\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+\frac{\Delta y_i^2}{\Delta x_i^2}}\Delta x_i\ .$$

За формулою Лагранжа

$$\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}=\frac{f(x_i)-f(x_{i-1})}{x_i-x_{i-1}}=f'(\xi),$$

де $\xi\in[x_{i-1},x_i]$.

Отже, сума

$$L_n=\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+f'^2(\xi_i)}\Delta x_i$$

буде інтегральною сумою функції $\sqrt{1+f'^2(x)}$.

Таким чином, довжина дуги кривої L обчислюється за формулою:

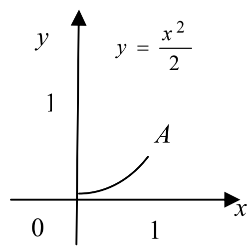
$$L=\int_a^b\sqrt{1+f'^2(x)}dx \qquad (5)$$

Приклад: Знайти довжину дуги параболи $y=\frac{x^2}{2}$ від точки $O(0,0)$ до точки $A\left(1,\frac{1}{2}\right)$.

Розв'язання. Оскільки $y'=x$, $0\le x\le 1$, то за формулою (5)

$$L=\int_0^1\sqrt{1+x^2}dx=\left(\frac{x}{2}\sqrt{1+x^2}+\frac{1}{2}\ln\left|x+\sqrt{1+x^2}\right|\right)\Bigg|_0^1=\frac{1}{2}\left(\sqrt{2}+\ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right)$$

Відповідь: $L=\frac{1}{2}\left(\sqrt{2}+\ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right)$.



2) Довжина дуги кривої, заданої параметрично

Якщо крива задана параметрично

$$\begin{cases} x=x(t); \\ y=y(t); \end{cases} \quad t\in[\alpha,\beta],$$

де функції $x(t)$ і $y(t)$ мають неперервні похідні у відрізку $[\alpha;\beta]$, то

$$L=\int_\alpha^\beta\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}dt \qquad (6)$$

Довжину дуги гладкої просторової кривої, заданої рівняннями

$$\begin{cases} x=x(t); \\ y=y(t); \\ z=z(t); \end{cases} \quad t\in[\alpha,\beta]$$

обчислюють за аналогічною формулою:

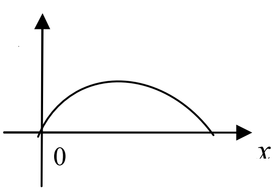
$$L=\int_\alpha^\beta\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2}dt$$

Приклад: Знайти довжину дуги:

1) однієї арки циклоїди $\begin{cases} x=a(t-\sin t); \\ y=a(1-\cos t); \end{cases}$ $t\in[0,2\pi]$; 2) астроїди $\begin{cases} x=a\cos^3 t; \\ y=a\sin^3 t. \end{cases}$

Розв'язання.

1) Оскільки



$$x'(t)=a(1-\cos t),$$

$$y'(t)=a\sin t,$$

$$(x'(t))^2+(y'(t))^2=a^2\left(1-2\cos t+\cos^2 t+\sin^2 t\right)=$$

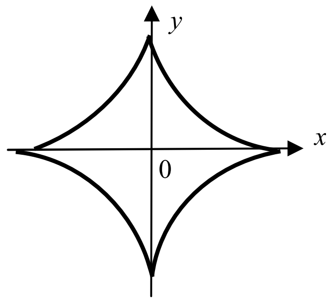
$$= 2a^2\left(1-\cos t\right) = 4a^2\sin^2\frac{t}{2},$$

то за формулою (6)

$$L = 2a\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}dt = 2a2\cos\frac{t}{2}\Big|_{2\pi}^{0} = 4a\left(1+1\right) = 8a.$$

<u>Відповідь:</u> $L = 8a$.

2) Оскільки крива симетрична, то досить знайти ¼ довжину дуги l_1, що відповідає зміні параметра t від 0 до $\pi/2$. Матимемо:



$$x_t' = 3a\cos^2 t\left(-\sin t\right)dt;$$

$$y_t' = 3a\sin^2 t\cos t dt,$$

$$\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2 = 9a^2\left(\cos^4 t\sin^2 t + \sin^4 t\cos^2 t\right) = 9a^2\cos^2 t\sin^2 t,$$

Тоді за формулою (6)

$$l_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3a\sin t\cos t dt = 3a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}\sin 2t dt = \frac{3a}{4}(-\cos 2t)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{3a}{4}(1+1) = \frac{3}{2}a.$$

Отже, вся дуга астроїди дорівнює

$$L = 4l_1 = 4\cdot\frac{3a}{2} = 6a.$$

<u>Відповідь:</u> $L = 6a$.

3) Довжина дуги в полярній системі координат

Нехай крива в полярній системі координат задана рівнянням

$$\rho = \rho\left(\varphi\right)\ (\alpha \le \varphi \le \beta),$$

де $\rho\left(\varphi\right)$ – неперервна на відрізку $\left[\alpha,\beta\right]$ функція.

Якщо в рівностях

$$x = \rho\cos\varphi,$$

$$y = \rho\sin\varphi$$

параметром вважати кут φ, то

$$x_\varphi' = \rho'\cos\varphi - \rho\sin\varphi,$$

$$y_\varphi' = \rho'\sin\varphi + \rho\cos\varphi,$$

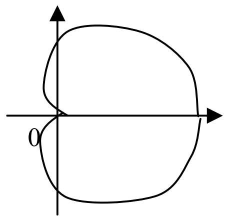
$$\sqrt{\left(x_\varphi'\right)^2 + \left(y_\varphi'\right)^2} = \sqrt{\rho^2 + \rho'^2},$$

тому за формулою (6)

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}d\varphi \qquad (7)$$

<u>Приклад:</u> Знайти довжину дуги кардіоїди $\rho = a\left(1+\cos\varphi\right)$.

Розв'язання. Оскільки



$$\rho' = -a\sin\varphi,$$

$$\rho^2 + \rho'^2 = a^2\left(1 + 2\cos\varphi + \cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right) = 2a^2\left(1+\cos\varphi\right) = 4a^2\cos^2\frac{\varphi}{2},$$

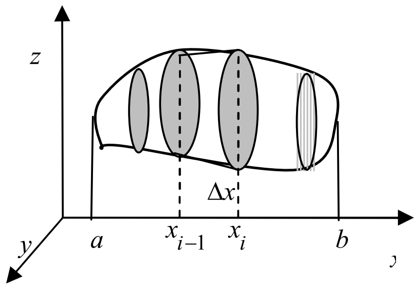
то за формулою (7)

$$L = 4a\int_0^{\pi}\cos\frac{\varphi}{2}d\varphi = 4a2\sin\frac{\varphi}{2}\Big|_0^{\pi} = 8a\left(1-0\right) = 8a.$$

<u>Відповідь:</u> $L = 8a$.

3.3. Обчислення об'єму тіла.

Нехай у нас є деяке тіло та нехай відомі площі S_i перерізів цього тіла площинами,



перпендикулярними до, наприклад, осі Ox. Тоді утворені між перерізами тіла можна вважати циліндрами з основами S_i і висотами Δx_i.

Очевидно, що об'єм V усього тіла дорівнює сумі всіх об'ємів елементарних циліндрів.

Побудуємо суму $\sum_{i=1}^{n} S_i(x)\Delta x_i$. Ця сума буде інтегральною сумою функції $S(x)$. Тоді

$$V = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} S_i(x)\Delta x_i = \int_a^b S(x)dx.$$

Отже, об'єм тіла обчислюється за формулою:

$$V = \int_a^b S(x)dx, \qquad (8)$$

яка називається формулою об'єму тіла за площами паралельних перерізів.

Приклад: Знайти об'єм піраміди з площею основи S і висотою H.

Розв'язання. За вісь OX приймемо пряму, що проходить через вершину піраміди, перпендикулярно основі її та напрямлену від вершини до основи.

Нехай S_0 – площа перерізу піраміди площиною, що відстоїть на відстані x від вершини.

Оскільки площі паралельних перерізів піраміди відносяться як квадрати відстаней їх від вершини, тобто

$$\frac{S_0}{S} = \frac{x^2}{H^2},$$

то

$$S_0 = \frac{S}{H^2}x^2.$$

За формулою (8)

$$V = \int_0^H S_0 dx = \frac{S}{H^2}\int_0^H x^2 dx = \frac{S}{H^2}\cdot\frac{x^3}{3}\Bigg|_0^H = \frac{S}{H^2}\cdot\frac{H^3}{3} = \frac{1}{3}SH \text{ (куб. од.)},$$

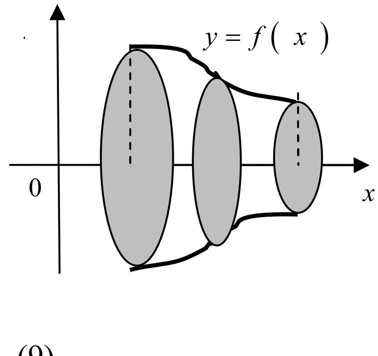
що погоджується з відомою формулою геометрії.

Відповідь: $V = \frac{1}{3}SH$ куб. од.

Обчислення об'єму тіла обертання

Розглянемо, зокрема, об'єм тіла обертання.

Нехай у нас є криволінійна трапеція, обмежена двома вертикальними прямими $x = a$ і $x = b$, віссю Ox та графіком невід'ємної і неперервної на відрізку $[a,b]$ функції $y = f(x)$. Якщо цю трапецію обертати навколо Ox, то утвориться просторова фігура, яка називається *тілом обертання*.



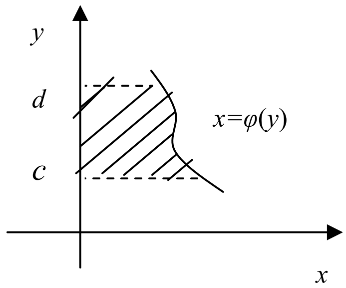
Оскільки площі паралельних перерізів

$$S = \pi y^2 = \pi f^2(x),$$

то за формулою (8) об'єм тіла, утвореного обертанням даної криволінійної трапеції навколо осі Ox дорівнює

$$V = \pi\int_a^b f^2(x)dx. \qquad (9)$$

Якщо криволінійна трапеція обмежена двома вертикальними прямими $y=c$ і $y=d$, віссю Oy та графіком невід'ємної і неперервної відрізку на $[c,d]$ функції $x=g(y)$, то об'єм тіла, утвореного обертанням даної криволінійної трапеції навколо Oy, обчислюється за формулою

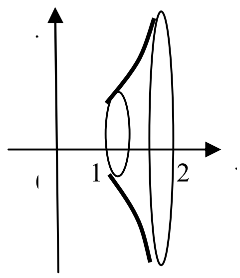


$$V=\pi\int_c^d g^2(y)\,dy \qquad (10)$$

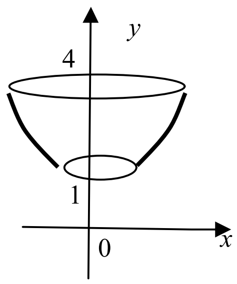
Приклад: Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням параболи $y=x^2$ на відрізку $[1,2]$ навколо:

а) осі Ox; б) осі Oy.

Розв'язання. а) За формулою (9)



$$V=\pi\int_1^2 x^4dx=\pi\frac{x^5}{5}\bigg|_1^2=\frac{\pi}{5}(32-1)=\frac{31\pi}{5} \text{ (куб. од.)}$$



Відповідь: $V=\dfrac{31\pi}{5}$ куб. од.

б) За формулою (10)

$$V=\pi\int_1^4 y\,dy=\pi\frac{y^2}{2}\bigg|_1^4=\frac{\pi}{2}(16-1)=\frac{15\pi}{2} \text{ (куб. од.)}$$

Відповідь: $V=\dfrac{15\pi}{2}$ куб. од.

3.4. Обчислення площі поверхні обертання

Нехай маємо поверхню, утворену обертанням навколо осі Ox кривої, заданої функцією $y=f(x)$, яка неперервна на відрізку $[a,b]$ та має на ньому неперервні похідні.

Перетнемо поверхню площинами, перпендикулярними до осі Ox. Тоді утворені між перерізами фігури будуть зрізаними конусами з твірними Δl_i і радіусами основ y_{i-1} і y_i.

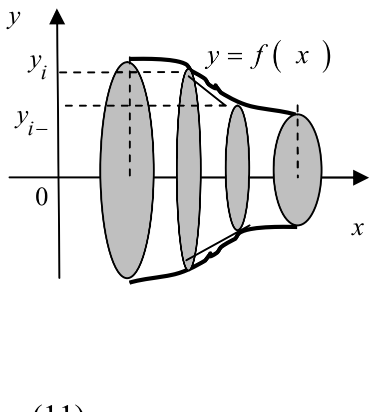
Очевидно, що площа всієї поверхні обертання дорівнює сумі всіх площ бічних поверхонь елементарних конусів.

Побудуємо суму

$$\sum_{i=1}^{n}S_i(x)\Delta l_i=\sum_{i=1}^{n}2\pi\frac{y_{i-1}+y_i}{2}\sqrt{\Delta x_i^2+\Delta y_i^2}=\pi\sum_{i=1}^{n}(y_{i-1}+y_i)\sqrt{1+\frac{\Delta y_i^2}{\Delta x_i^2}}\Delta x_i\ .$$

За формулою Лагранжа

$$\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}=\frac{f(x_i)-f(x_{i-1})}{x_i-x_{i-1}}=f'(\xi),$$



де $\xi\in[x_{i-1},x_i]$. Отже, сума $\sum_{i=1}^{n}f(x)\sqrt{1+f'^2(\xi_i)}\Delta x_i$ буде інтегральною сумою функції $f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}$.

Таким чином, площа всієї поверхні обертання обчислюється за формулою:

$$S_{пов.}=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx \qquad (11)$$

Якщо крива задана параметрично

$$\begin{cases} x = x(t); \\ y = y(t); \end{cases} \quad t \in [\alpha, \beta],$$

то площа всієї поверхні обчислюється за формулою:

$$S_{пов.} = 2\pi \int_a^b y(t)\sqrt{x_t'^2 + y_t'^2}\,dt \qquad (12)$$

Якщо крива задана рівняннями в полярних координатах

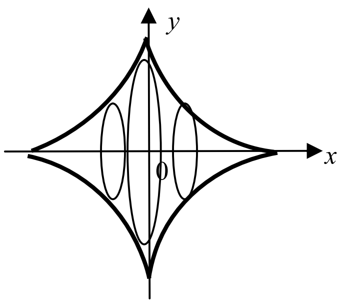
$$\rho = \rho(\varphi) \ (\alpha \le \varphi \le \beta),$$

то площа всієї поверхні обчислюється за формулою:

$$S_{пов.} = 2\pi \int_\alpha^\beta r\sin\varphi\sqrt{r^2 + (r')^2}\,d\varphi \qquad (13)$$

Приклад 1: Знайти площу поверхні шарового пояса, утвореного обертанням навколо осі Ox дуги кола $x^2 + y^2 = R^2$, яка відповідає зміні x від a від b ($-R \le a < 0$, $0 < b \le R$).

Розв'язання. Виразимо з рівняння кола y, ураховуючи межі для a і b:



$$y = \sqrt{R^2 - x^2}.$$

$$y' = -\frac{x}{y};$$

$$1 + (y')^2 = \frac{R^2}{y^2},$$

Тоді за формулою (11)

$$S_{пов.} = 2\pi\int_a^b y \cdot \sqrt{\frac{R^2}{y^2}}dx = 2\pi\int_a^b y \cdot \frac{R}{y}dx = 2\pi R\int_a^b dx = 2\pi R(b-a).$$

Відповідь: $S_{пов.} = 2\pi R(b-a)$ (кв. од.)

Приклад 2: Знайти площу поверхні, утвореної обертанням навколо осі Ox астроїди $\begin{cases} x = a\cos^3 t; \\ y = a\sin^3 t. \end{cases}$

Розв'язання. Оскільки

$$x_t' = 3a\cos^2 t(-\sin t)dt;$$

$$y_t' = 3a\sin^2 t\cos t dt,$$

$$(x'(t))^2 + (y'(t))^2 = 9a^2(\cos^4 t\sin^2 t + \sin^4 t\cos^2 t) = 9a^2\cos^2 t\sin^2 t,$$

то за формулою (12)

$$S_{пов.} = 2 \cdot 2\pi 3a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t\cos t dt = 12\pi a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t d\sin t = 6\pi a^2 \left.\frac{\sin^5 t}{5}\right|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{6\pi a^2}{5}.$$

Відповідь: $S_{пов.} = \dfrac{6\pi a^2}{5}$ (кв. од.)

3.5. Обчислення роботи змінної сили

Нехай під дією сили $F = F(x)$ рухається вздовж прямої лінії.

Якщо напрям руху збігається з напрямом сили, то робота A, виконана цією силою при переміщенні точки на відрізок $[a,b]$, обчислюється за формулою

$$A = \int_a^b F(x)dx. \qquad (13)$$

Приклад 1: Яку роботу необхідно затратити, щоб розтягнути пружину на 5 см, якщо сила 100 Н розтягує пружину на 1 см?

Р о з в ' я з а н н я. За законом Гука пружна сила F, що діє на пружину, зростає пропорційно розтягу x пружини, тобто

$$F = kx,$$

де переміщення x виражено в метрах, а сила F – у ньютонах.

Для визначення коефіцієнта пропорційності k за умовою задачі вважатимемо $F = 100H$ при $x = 0,01м$. Звідси

$$100 = k \cdot 0,01,$$

тобто

$$k = 10000,$$

звідки

$$F = 10000x.$$

За формулою (13) шукана робота дорівнює

$$A = \int_0^{0,05} 10000x dx = 5000x^2 \Big|_0^{0,05} = 12,5 \text{ (Дж).}$$

Відповідь: $A = 12,5$ Дж.

Приклад 2: Обчислити роботу, яку треба затратити, щоб тіло маси m підняти з поверхні Землі вертикально вверх на висоту h, якщо радіус Землі дорівнює R.

Р о з в ' я з а н н я. За законом Ньютона сила F притягання тіла Землею дорівнює

$$F = \gamma \frac{mM}{x^2},$$

де M – маса Землі, γ – гравітаційна стала, x – відстань від центра тіла до центра Землі.

Покладемо $\gamma mM = k$, тоді

$$F(x) = kx^{-2},$$

де $R \le x \le R + h$.

При $x = R$ сила $F(R)$ дорівнює вазі тіла

$$P = mg,$$

тобто

$$\frac{k}{R^2} = P,$$

звідки

$$k = PR^2,$$
$$F(x) = PR^2 x^{-2}.$$

За формулою (13)

$$A = PR^2 \int_R^{R+h} x^{-2} dx = PR^2 \frac{1}{x} \Big|_{R+h}^{R} = PR^2 \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+h} \right) = \frac{PRh}{R+h}.$$

Відповідь: $A = \dfrac{PRh}{R+h}$.

Завдання для самостійного розв'язання

Завдання № 1. Обчислити визначені інтеграли.

1) $\int_0^1 \frac{xdx}{(x^2+1)^2}$; 2) $\int_2^{-13} \frac{dx}{\sqrt[5]{(3-x)^4}}$; 3) $\int_0^1 \frac{x^2dx}{(1+x^2)^3}$;

4) $\int_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$; 5) $\int_0^2 \frac{x^3 \cdot dx}{\sqrt{4+x^2}}$; 6) $\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2} \cdot dx$;

7) $\int_0^1 \sqrt{(1-x^2)^3} dx$; 8) $\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{(3+x^2)^5}}$; 9) $\int_{\sqrt{2}/2}^{1} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^6} dx$;

10) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{dx}{1+\cos x}$; 11) $\int_0^{\pi/3} \frac{dx}{1+2\cos^2 x}$ 12) $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{2+\sin x}$

Завдання № 2. Обчислити інтеграл методом заміни:

1) $\int_{1}^{e^3} \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$; 2) $\int_{0}^{1} \frac{dx}{x^2+4x+5}$; 3) $\int_{0}^{1} \frac{\sqrt{e^x}dx}{\sqrt{e^x+e^{-x}}}$

4) $\int_{0}^{1} \frac{xdx}{1+\sqrt{x}}$;

Завдання № 3. Обчислити інтеграл частинами:

1) $\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos 2x dx$; 2) $\int_{1}^{2} x^2 \ln^2 x dx$; 3) $\int_{0}^{1} \arcsin x dx$;

4) $\int_{0}^{\pi/2} e^{2x} \sin x dx$; 5) $\int_{1}^{e} \ln^3 x dx$;

Завдання № 4. Обчислити площу області, обмеженої лініями:

1) $y = x$, $y = 2 - x^2$;

2) $y = x^2$, $y = 2 - x$;

3) $y = 3x^2 - 1$; $y = 3x + 5$;

4) $y = -x^2$, $x + y + 2 = 0$;

5) $y = 4 - x^2$, $y = x^2 - 2x$;

6) $y = 2x - x^2 - 3$, $y = x^2 - 4x + 3$;

7) $y = (x-2)^3$, $y = 4x - 8$;

8) $y = e^x$, $y = e^{-x}$, $x = 1$;

9) $y = \ln x$, $x = e$, $y = -1$;

10) $y^2 = 4 - x$, $x = y^2 - 2y$;

11) $y^2 = 3x$, $x^2 = 3y$;

12) $x = 6\cos t$, $y = 2\sin t$;

13) $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$;

14) $x = 3t^2$, $y = 3t - t^3$;

15) $x = t^2 - 1$, $y = t^3 - t$;

16) $\rho = a\sin 2\varphi$;

17) $\rho = atg\varphi$ $(a > 0)$, $\varphi = \pi/4$;

18) $\rho = 3 + \cos 4\varphi$, $\rho = 2 - \cos 4\varphi$;

Завдання № 5. Обчислити довжину лінії:

1) $y = \sqrt{(x-2)^3}$, $2 \le x \le 6$;

2) $y = \ln x$, $\sqrt{3} \le x \le \sqrt{15}$;

3) $y = -\ln\cos x$, $0 \le x \le \pi/6$;

4) $y = \sqrt{x - x^2} + arc\sin\sqrt{x}$;

5) $\begin{cases} x = 3(\,t - \sin t\,) \\ y = 3(\,1 - \cos t\,) \end{cases}$, $\pi \le t \le 2\pi$;

6) $\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$, $0 \le t \le 2\pi$;

7) $\begin{cases} x = a\cos^5 t, \\ y = a\sin^5 t \end{cases}$;

8) $\begin{cases} x = t^2, \\ y = t - \frac{t^3}{3} \end{cases}$;

9) $\rho = a\varphi$ від початку до кінця першого завитку

4. НЕВЛАСТИВІ ІНТЕГРАЛИ

4.1. Невластиві інтеграли з нескінченними межами інтегрування

При введенні поняття визначеного інтеграла ми виходили з умов обмеженості підінтегральної функції та скінченності меж інтегрування. Такий інтеграл називається *властивим* (слово "властивий" звичайно опускається).

Якщо хоча б одна з цих двох умов не виконується, то інтеграл називається *невластивим*.

Означення 1. Нехай функція $f(x)$ визначена на нескінченному проміжку $[a;+\infty)$ та інтегрована на відрізку $[a,b]$, де $-\infty < a < b < +\infty$. Границя $\lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_a^b f(x)dx$ називається *невластивим інтегралом першого роду*.

Позначається: $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$.

Отже,
$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int\limits_a^b f(x)dx.$$

Якщо ця границя існує й скінчена, то інтеграл називається *збіжним*, якщо границя не існує або нескінченна, то – *розбіжним*. Такому інтегралу не приписують жодного числового значення.

Геометричний зміст інтеграла $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ полягає в тому, що, коли функція $f(x)$ неперервна й невід'ємна на нескінченному проміжку $[a;+\infty)$ та інтеграл збігається, то $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ дорівнює площі фігури, обмеженої зверху графіком функції $y=f(x)$, зліва відрізком прямої $x=a$, знизу віссю Ox.

Нехай $F(x)$ – первісна функція для підінтегральної функції $f(x)$.

На підставі означення невластивого інтегралу першого роду матимемо:
$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\left[F(b)-F(a)\right].$$

Якщо ввести умовне позначення
$$F(+\infty) = \lim_{b\to+\infty} F(b)$$
то отримаємо для збіжного невластивого інтеграла з нескінченною верхньою межею інтегрування узагальнену формулу Ньютона-Лейбніца:
$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = F(+\infty) - F(a),$$
де $F'(x) = f(x)$.

Приклад: Обчислити невластивий інтеграл $\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}$.

Розв'язання. $\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2} = arctgx\,\Big|_0^{+\infty} = arctg(+\infty) - arctg0 = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}$.

Відповідь: $\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}$.

Аналогічно визначається поняття невластивого інтеграла першого роду вигляду $\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx$:

$$\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int\limits_{a}^{b} f(x)dx .$$

Зауваження: Від інтеграла $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx$ легко перейти до інтеграла $\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx$ за допомогою підстановки $x=-y$.

Означення 2. Нехай функція $f(x)$ визначена на всій числовій прямій $R\ (-\infty;+\infty)$ та інтегрована на кожному скінченому відрізку $[\,a,b\,]$. Границя $\lim\limits_{\substack{b\to+\infty\\ a\to-\infty}}\int\limits_{a}^{b} f(x)dx$ називається *невластивим інтегралом першого роду по числовій прямій*.

Позначається: $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$.

Отже,

$$\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{\substack{b\to+\infty\\ a\to-\infty}}\int\limits_{a}^{b} f(x)dx .$$

Якщо ця границя існує та скінчена, то інтеграл називається *збіжним*, якщо не існує або нескінченна – *розбіжним*.

Останній інтеграл зводиться до перших двох:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int\limits_{c}^{+\infty} f(x)dx .$$

Зауваження: У останньому означенні межі інтегрування повинні прямувати до ∞ незалежно одна від одної.

Із наведених означень випливає, що невластивий інтеграл не є границею інтегральних сум, а є інтегралом визначеного інтеграла із змінною межею інтегрування.

Приклад: Обчислити невластиві інтеграли або встановити їх розбіжність:

1) $\int\limits_{3}^{+\infty}\dfrac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$; 2) $\int\limits_{1}^{+\infty}\ln x dx$; 3) $\int\limits_{-\infty}^{0}\cos 2x dx$; 4) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}x^3 dx$.

Розв'язання.

1) $$\int\limits_{3}^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \lim_{\substack{b\to+\infty\\ b>3}}\int\limits_{3}^{b}\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \left\{\begin{array}{l|ccc} x=\dfrac{1}{t}; & x & 3 & b \\ & t & \dfrac{1}{3} & \dfrac{1}{b} \\ dx=-\dfrac{dt}{t^2}; & & & \end{array}\right\} = -\lim_{\substack{b\to+\infty\\ b>3}}\int\limits_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{b}}\frac{dt}{t^2\cdot\frac{1}{t}\sqrt{\frac{1}{t^2}-1}} = -\int\limits_{\frac{1}{3}}^{0}\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} =$$

$$= -\arcsin t\Big|_{\frac{1}{3}}^{0} = 0+\arcsin\frac{1}{3} = \arcsin\frac{1}{3},$$

тобто інтеграл збігається.

Відповідь: інтеграл $\int\limits_{3}^{+\infty}\dfrac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$ збігається.

2) $\int\limits_{1}^{+\infty}\ln x dx=\lim\limits_{\substack{b\to+\infty\\ b>1}}\int\limits_{1}^{b}\ln x dx=\left\{\begin{matrix} u=\ln x; du=\dfrac{dx}{x}\\ dv=dx; v=x\end{matrix}\right\}=\lim\limits_{\substack{b\to+\infty\\ b>1}}\left(x\ln x\,\Big|_1^b-\int\limits_1^b x\frac{dx}{x}\right)=\lim\limits_{\substack{b\to+\infty\\ b>1}}\left(b\ln b-b+1\right)=$

$=\lim\limits_{\substack{b\to+\infty\\ b>1}}\left(b\left(\ln b-1\right)+1\right)=+\infty,$

тобто інтеграл розбігається.

Відповідь: інтеграл $\int\limits_{1}^{+\infty}\ln x dx$ розбігається.

3) $\int\limits_{-\infty}^{0}\cos 2x dx=\lim\limits_{a\to-\infty}\int\limits_{a}^{0}\cos 2x dx=\lim\limits_{a\to-\infty}\frac{\sin 2x}{2}\Big|_a^0=\frac{1}{2}\lim\limits_{a\to-\infty}(\sin 0-\sin 2a)=-\frac{1}{2}\lim\limits_{a\to-\infty}\sin 2a$

– не існує, отже, інтеграл розбігається.

Відповідь: інтеграл $\int\limits_{-\infty}^{0}\cos 2x dx$ розбігається.

4) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}x^3dx=\lim\limits_{\substack{a\to-\infty\\ b\to+\infty}}\int\limits_{a}^{b}x^3dx=\lim\limits_{\substack{a\to-\infty\\ b\to+\infty}}\frac{x^4}{4}\Big|_a^b=\frac{1}{4}\lim\limits_{\substack{a\to-\infty\\ b\to+\infty}}\left(b^4-a^4\right)$

– не існує, отже, інтеграл розбігається.

Відповідь: інтеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}x^3dx$ розбігається.

4.2. Ознаки збіжності невластивих інтегралів першого роду

У тих випадках, коли потрібно встановити збіжність чи розбіжність невластивого інтеграла, не обчислюючи його значення, зручно користуватися ознаками збіжності, які містяться в наступних теоремах.

Усе, про що мова піде в п. 3.2, безпосередньо переноситься на інтеграли виду $\int\limits_{-\infty}^{b}f(x)dx$.

Теорема 1 (ознака порівняння): Нехай для будь-яких $x\in[a;+\infty)$ функції $f(x)$ і $g(x)$ неперервні та задовольняють нерівність

$$0\le f\left(x\right)\le g\left(x\right),$$

тоді:

1) якщо інтеграл $\int\limits_{a}^{+\infty}g(x)dx$ збігається, то збігається й інтеграл $\int\limits_{a}^{+\infty}f(x)dx$;

2) якщо інтеграл $\int\limits_{a}^{+\infty}f(x)dx$ розбігається, то розбігається й інтеграл $\int\limits_{a}^{+\infty}g(x)dx$.

Ця ознака безпосередньо витікає із геометричного змісту інтеграла $\int\limits_{a}^{+\infty}f(x)dx$.

Теорема 2 (гранична ознака порівняння): Нехай функції $f(x)$ і $g(x)$ неперервні й додатні на проміжку $\left[a;+\infty \right)$. Тоді, якщо існує скінчена границя

$$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=a\ne 0,$$

то інтеграли $\int\limits_{a}^{+\infty}f(x)dx$ і $\int\limits_{a}^{+\infty}g(x)dx$ або водночас збігаються, або водночас розбігаються.

Зауваження: У теоремах 1 і 2 функція $g(x)$ називається *функцією порівняння*. За таку функцію береться функція, відносно якої нам відома поведінка невластивих інтегралів від неї.

Наприклад, такою функцією може бути:

1) функція виду $\dfrac{A}{x^p}$, де $A = const$:

Якщо $p \neq 1$, то $\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{dx}{x^p} = \lim\limits_{b\to+\infty} \int\limits_1^b \dfrac{dx}{x^p} = \lim\limits_{b\to+\infty} \dfrac{x^{1-p}}{1-p} \Bigg|_1^b = \dfrac{1}{1-p} \lim\limits_{b\to+\infty} \left(b^{1-p} - 1 \right) =$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{1-p}, & \text{якщо} \quad p > 1 - \text{інтеграл} \quad \text{збігається;} \\ +\infty, & \text{якщо} \quad p < 1 - \text{інтеграл} \quad \text{розбігається.} \end{cases}$$

2) функція виду $y = Ae^{-kx}$, де $A = const$:

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-kx} dx = \begin{cases} \text{якщо} \quad k > 0 - \text{інтеграл} \quad \text{збігається;} \\ \text{якщо} \quad k \leq 0 - \text{інтеграл} \quad \text{розбігається.} \end{cases}$$

3) функція виду $y = \dfrac{A}{1+x^2}$, де $A = const$:

$\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{dx}{1+x^2}$ – збігається.

<u>Приклад:</u> Дослідити на збіжність інтеграли:

1) $\int\limits_3^{+\infty} \dfrac{dx}{\sqrt[4]{x^4 - 1}}$; б) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$ (інтеграл Пуассона); в) $\int\limits_1^{+\infty} \ln \dfrac{x^2+2}{x^2+1} dx$.

Розв'язання.

1) Оцінимо підінтегральну функцію знизу:

$$\frac{dx}{\sqrt[4]{x^4 - 1}} > \frac{1}{x}.$$

Нехай $g(x) = \dfrac{1}{x}$. Тоді

$$\int\limits_3^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{b\to+\infty} \int\limits_3^b \frac{dx}{x} = \lim_{b\to+\infty} \left(\ln b \right) - \ln 3 = +\infty,$$

тобто інтеграл $\int\limits_3^{+\infty} \dfrac{dx}{x}$ розбігається.

Отже, в силу п. 2 теореми 1 даний інтеграл також розбігається.

<u>Відповідь:</u> інтеграл $\int\limits_3^{+\infty} \dfrac{dx}{\sqrt[4]{x^4 - 1}}$ розбігається.

2) Оцінимо підінтегральну функцію зверху:

$$e^{-x^2} \leq e^{-x}, \ x > 1.$$

Нехай $g(x) = e^{-x}$.

$$\int\limits_1^{+\infty} e^{-x} dx = \lim_{b\to+\infty} \int\limits_1^b e^{-x} dx = \lim_{b\to+\infty} \left(-e^{-b} \right) + e^{-1} = e^{-1},$$

тобто інтеграл $\int\limits_1^{+\infty} e^{-x} dx$ збігається.

Отже, в силу п. 1 теореми 2 даний інтеграл також збігається.

<u>Відповідь:</u> інтеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$ збігається.

3) Нехай $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$.

Інтеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ збігається.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\frac{x^2+2}{x^2+1}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x^2+1}\right)}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x^2+1}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2+1}\cdot\frac{x^2}{1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} = 1$$

Отже, інтеграл $\int\limits_1^{+\infty} \ln\frac{x^2+2}{x^2+1}dx$ збігається за теоремою 2.

Відповідь: інтеграл $\int\limits_1^{+\infty} \ln\frac{x^2+2}{x^2+1}dx$ збігається.

Зауваження: У теоремах 1 і 2 розглядалися невластиві інтеграли від функцій, які зберігали свій знак на проміжку інтегрування.

У разі ж, якщо підінтегральна функція є знакозмінною, то має місце наступна теорема.

Теорема 3 (про абсолютну збіжність): Якщо інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|dx$ збігається, то збігається й інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$.

Означення 3. Невластивий інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ називається *абсолютно збіжним*, якщо збігається інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|dx$, і *умовно збіжним*, якщо інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|dx$ розбігається, а інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ збігається.

Теорема 4 (про порівняння): Нехай функції $f(x)$ і $g(x)$ неперервні на проміжку $[a;+\infty)$. Тоді:

1. якщо, принаймні для достатньо великих значень x, виконується нерівність
$$|f(x)| \ge g(x),$$
то із збіжності інтеграла $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ випливає абсолютна збіжність інтеграла $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$;

2. якщо, принаймні для достатньо великих значень x, виконується нерівність
$$f(x) \ge |g(x)|,$$
то із розбіжності інтеграла $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ випливає розбіжність інтеграла $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$.

Приклад: Дослідити на збіжність інтеграл $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos x}{1+x^2}dx$.

Розв'язання. Розглянемо інтеграл $\int\limits_0^{+\infty} \frac{|\cos x|}{1+x^2}dx$.

Оцінимо підінтегральну функцію зверху:

$$\frac{|\cos x|}{1+x^2} \le \frac{1}{1+x^2}.$$

Нехай $g(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

Інтеграл $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ – збігається. Тоді, в силу п. 1 теореми 2 інтеграл $\int\limits_0^{+\infty} \frac{|\cos x|}{1+x^2} dx$ також збігається. Звідси випливає, що даний інтеграл збігається, причому абсолютно.

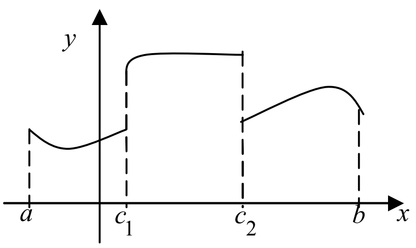
Відповідь: інтеграл $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos x}{1+x^2} dx$ абсолютно збігається.

Зауваження: Для дослідження збіжності інтеграла

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int\limits_{c}^{+\infty} f(x)dx$$

треба дослідити збіжність кожного з інтегралів $\int\limits_{-\infty}^{c} f(x)dx$ і $\int\limits_{c}^{+\infty} f(x)dx$. Якщо обидва інтеграли збігаються, то й вихідний інтеграл буде збіжним; якщо ж хоча б один з них розбігається, то й вихідний інтеграл буде розбіжним.

4.3. Невластиві інтеграли від необмежених функцій



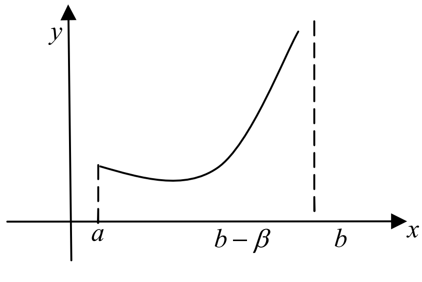
Нехай функція $y = f(x)$ має розриви в точках c_1, $c_2 \in [\,a,b\,]$.

Якщо це розриви першого роду, то

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^{c_1} f(x)dx + \int\limits_{c_1}^{c_2} f(x)dx + \int\limits_{c_2}^{b} f(x)dx$$

Нехай функція $f(x)$ неперервна на проміжку $[\,a,b\,]$ і необмежена поблизу b.

Означення 4. Нехай функція $f(x)$ інтегрована на відрізку $[\,a;b-\beta\,]$, де $\beta > 0$ таке, що $b-\beta > a$. Тоді границя $\lim\limits_{\beta\to 0} \int\limits_a^{b-\beta} f(x)dx$ називається *невластивим інтегралом другого роду* по відрізку $[\,a,b\,]$.



Позначається $\int\limits_a^b f(x)dx$.

Отже, за означенням

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\beta\to 0} \int\limits_a^{b-\beta} f(x)dx.$$

Якщо границя існує й скінчена, то інтеграл називається *збіжним,* якщо ж ця границя не існує або нескінчена, то інтеграл називається *розбіжним*.

Якщо існує функція $F(x)$, неперервна на відрізку $[a;b]$ й така, що

$$\forall x \in [a;b) \; F'(x) = f(x),$$

то для невластивого інтеграла другого роду справедлива узагальнена формула Ньютона-Лейбніца:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b .$$

Дійсно,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\beta\to 0}\int_a^{b-\beta} f(x)dx = \lim_{\beta\to 0}\left[\, F(b-\beta) - F(a)\,\right] = F(b) - F(a)\,.$$

<u>Приклад:</u> Обчислити невластивий інтеграл $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$.

Розв'язання. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}\,\Big|_0^1 = 2 - 0 = 2$.

<u>Відповідь:</u> $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2$.

Аналогічно визначається інтеграл по відрізку $[\,a,b\,]$ від функції, неперервної на $[\,a,b\,]$ та необмеженої поблизу a:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\alpha\to 0}\int_{a-\alpha}^{b} f(x)dx$$

Якщо функція $f(x)$ необмежена в околі деякої точки $c \in [\,a,b\,]$, то, за умови існування обох невластивих інтегралів $\int_a^c f(x)dx$ і $\int_c^b f(x)dx$, за означенням покладають:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx\,.$$

<u>Приклад:</u> Обчислити інтеграли:

1) $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$; 2) $\int_a^b \frac{dx}{(\,b-x\,)^p}$, $p > 0$.

Розв'язання.

1) $$\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \lim_{\beta\to 0}\int_0^{2-\beta} \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \lim_{\beta\to 0}\arcsin\frac{x}{2}\Big|_0^{2-\beta} = \lim_{\beta\to 0}\arcsin\frac{2-\beta}{2} - \arcsin 0 = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}\,.$$

<u>Відповідь:</u> $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{\pi}{2}$.

2) а) для $p = 1$:

$$\int_a^b \frac{dx}{b-x} = \lim_{\beta\to +0}\int_a^{b-\beta} \frac{dx}{b-x} = \lim_{\beta\to +0}\left[\,-\ln|\,b-x\,|\,\right]\Big|_a^{b-\beta} = -\lim_{\beta\to +0}\left[\,\ln\beta - \ln(\,b-a\,)\,\right] = \infty\,,$$

отже, інтеграл розбігається;

б) для $p \neq 1$:

$$\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^p} = \lim_{\beta\to +0}\int_a^{b-\beta} \frac{dx}{(b-x)^p} = -\lim_{\beta\to +0}\frac{(b-x)^{-p+1}}{-p+1}\Bigg|_a^{b-\beta} = -\lim_{\beta\to +0}\left(\frac{\beta^{-p+1}}{-p+1} - \frac{(\,b-a\,)^{-p+1}}{-p+1}\right) =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{(\,b-a\,)^{-p+1}}{1-p}, & \text{p} < 1 - \text{збігається;} \\ +\infty, & \text{p} > 1 - \text{розбігається.} \end{cases}$$

Відповідь: якщо $p \ge 1$, то інтеграл $\int\limits_a^b \frac{dx}{(\ b - x\ )^p}$ розбігається; якщо $p < 1$, то $\int\limits_a^b \frac{dx}{(\ b - x\ )^p} = \frac{(b-a)^{-p+1}}{1-p}$.

4.4. Ознаки збіжності невластивих інтегралів другого роду

Теорема 5 (ознака порівняння): Нехай для будь-якого x виконується нерівність

$$0 \le f(x) \le g(x)$$

і функції $f(\ x\ )$ і $g(\ x\ )$ прямують до ∞ при $x \to 0$. Тоді:

1) якщо інтеграл $\int\limits_a^b g(x)dx$ збігається, то збігається й інтеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$;

2) Якщо інтеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ розбігається, то розбігається й інтеграл $\int\limits_a^b g(x)dx$.

Приклад: Дослідити на збіжність інтеграл $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x} + 5x^4}$.

Розв'язання. Оцінимо підінтегральну функцію знизу:

$$\frac{dx}{\sqrt{x} + 5x^4} < \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Нехай $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$.

Інтеграл $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ збігається.

В силу п. 1 теореми 5 даний інтеграл також збігається.

Відповідь: інтеграл $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x} + 5x^4}$ збігається.

Теорема 6 (гранична ознака порівняння): Нехай функції $f(\ x\ )$ і $g(\ x\ )$ неперервні й додатні на проміжку $[\ a,b\ ]$ та необмежені поблизу b. Тоді, якщо існує скінчена границя

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = a \ne 0,$$

то інтеграли $\int\limits_a^b f(x)dx$ і $\int\limits_a^b g(x)dx$ або водночас збігаються, або водночас розбігаються.

Приклад: Дослідити на збіжність інтеграл $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sin x}$.

Розв'язання. Нехай $g(x) = \frac{1}{x}$.

Інтеграл $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x}$ розбігається і

$$\lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{\sin x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{\sin x} = 1.$$

Отже, за теоремою 6 вихідний інтеграл також розбігається.

Відповідь: інтеграл $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sin x}$ розбігається.

Теорема 7 (про абсолютну збіжність): Якщо інтеграл $\int_a^b |\, f(x) \,| dx$ збігається, то збігається й інтеграл $\int_a^b f(x)dx$.

У цьому випадку 2-й інтеграл називається *абсолютно збіжним*.

Якщо ж 1-й інтеграл збігається, а 2-й розбігається, то 2-й інтеграл називається *умовно збіжним.*

Теорема 8 (про порівняння): Нехай функції $f(x)$ і $g(x)$ неперервні на проміжку $[a,b]$ та необмежені поблизу b. Тоді:

1) якщо, принаймні для значень x, достатньо близьких до b, виконується нерівність

$$|\, f(x) \,| \le g(x),$$

то із збіжності інтеграла $\int_a^b g(x)dx$ випливає абсолютна збіжність інтеграла $\int_a^b f(x)dx$;

2) якщо, принаймні для значень x, достатньо близьких до b, виконується нерівність

$$f(x) \ge |\, g(x) \,|,$$

то із розбіжності інтеграла $\int_a^b |\, g(x) \,| dx$ випливає розбіжність інтеграла $\int_a^b f(x)dx$.

Приклад: Дослідити на збіжність інтеграл $\int_1^2 \frac{\cos x}{\sqrt[3]{x-1}}dx$.

Розв'язання. Розглянемо інтеграл $\int_1^2 \frac{|\cos x|}{\sqrt[3]{x-1}}dx$.

Оцінимо підінтегральну функцію зверху:

$$\frac{|\cos x|}{\sqrt[3]{x-1}} \le \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}.$$

Нехай $g(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}$.

Оскільки

$$\int_1^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}} = \int_1^2 (x-1)^{-\frac{1}{3}} d(x-1) = \frac{(x-1)^{\frac{2}{3}}}{2/3} = \frac{3}{2}(1-0) = \frac{3}{2},$$

то інтеграл $\int_1^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}}$ збігається.

В силу п. 2 теореми 8 інтеграл $\int_1^2 \frac{|\cos x|}{\sqrt[3]{x-1}}dx$ також збігається. Звідси випливає, що вихідний інтеграл збігається, причому абсолютно.

Відповідь: інтеграл $\int_1^2 \frac{\cos x}{\sqrt[3]{x-1}}dx$ збігається абсолютно.

Завдання для самостійного розв'язання

Завдання № 1. Обчислити невластиві інтеграли та довести їх розбіжність:

1) $\int_0^3 \frac{dx}{(x-3)^2}$; 2) $\int_0^\infty \frac{dx}{4x^2+4x+5}$; 3) $\int_0^2 \frac{xdx}{4-x^2}$;

4) $\int\limits_{1}^{\infty}\frac{xdx}{(x^2+3)^2}$; 5) $\int\limits_{0}^{e}\frac{\sqrt[3]{\ln x}}{x}dx$; 6) $\int\limits_{2}^{\infty}\frac{\ln x}{x^2}dx$;

7) $\int\limits_{0}^{1}\frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^3}}$; 8) $\int\limits_{0}^{\infty}\frac{arctgx}{1+x^2}dx$; 9) $\int\limits_{1}^{\infty}x^{-3}\sin(x^{-2})dx$;

10) $\int\limits_{0}^{4}\frac{dx}{\sqrt[3]{(x-3)^2}}$.

Питання для самоконтролю

1. Скільки первісних має функція?
2. Який геометричний зміст загального вигляду первісної?
3. Чим відрізняються графіки первісних для однієї й тієї самої функції?
4. Які властивості випливають з означення невизначеного інтеграла?
5. Що означає знайти невизначений інтеграл?
6. У чому полягає інваріантність формули інтегрування?
7. Які методи інтегрування Ви знаєте? Коли доцільно застосовувати кожний з них?
8. Які існують способи застосування теореми про заміну змінної у невизначеному інтегралі?
9. Якими правилами користуються при інтегруванні частинами в невизначеному інтегралі?
10. Назвіть приклади найпростіших дробів.
11. Як у неправильному раціональному дробі виділити цілу частину?
12. На прикладі правильного раціонального дробу, знаменник якого розкладений на множники, проілюструйте, як його можна представити у вигляді суми.
13. У чому полягає метод невизначених коефіцієнтів при інтегруванні дробово-раціональних виразів?
14. Які підстановки використовуються при інтегруванні ірраціональних виразів? тригонометричних виразів?
15. Які задачі фізичного й геометричного змісту приводять до поняття визначеного інтеграла?
16. Яка сума називається інтегральною сумою для заданої функції на заданому відрізку? Яка структура цієї суми?
17. Яка функція називається інтегрованою на заданому відрізку? Наведіть приклади інтегрованих функцій.
18. Чи може визначений інтеграл бути додатним, від'ємним або дорівнювати нулю? Що це означає з точки зору геометрії?
19. У чому полягає адитивність визначеного інтеграла? монотонність?
20. Яку фігуру називають криволінійною трапецією? Намалюйте фігури, які є криволінійними трапеціями та які не є ними.
21. У чому полягає геометричний зміст теореми про середнє?
22. Запишіть формулу Ньютона-Лейбніца та прокоментуйте її. Для яких функцій вона має місце?
23. Як геометрично можна зобразити інтеграл із змінною верхньою межею?
24. Яка різниця в застосуванні формули заміни змінної для невизначеного й визначеного інтегралів?
25. Назвіть геометричні й фізичні застосування визначеного інтеграла. Назвіть відповідні формули.
26. Що таке функція порівняння в невластивому інтегралі?
27. Який вид має формула Ньютона-Лейбніца для невластивого інтеграла другого роду?

РОЗДІЛ 2. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ДЕКІЛЬКОХ ЗМІННИХ

1. ФУНКЦІЯ ДЕКІЛЬКОХ ЗМІННИХ, ЇЇ ГРАНИЦЯ Й НЕПЕРЕРВНІСТЬ

1.1. Поняття функції декількох змінних. Область визначення функції декількох змінних

Поняття функції однієї змінної не охоплює всі залежності, що існують у природі. Навіть у найпростіших задачах зустрічаються величини, значення яких визначаються сукупністю значень декількох величин.

Приклад 1: Площа S прямокутника із сторонами, довжини яких дорівнюють x і y, виражається формулою $S = xy$, тобто значення S визначаються сукупністю значень x і y.

Приклад 2: Напруга U на ділянці електричного ланцюга за законом Ома виражається формулою $U = IR$, тобто значення U визначаються сукупністю значень I (сила струму) і R (опір).

Приклад 3: Об'єм V прямокутного паралелепіпеда з ребрами, довжини яких дорівнюють x, y і z, виражається формулою $V = xyz$, тобто значення V визначаються сукупністю значень x, y і z.

Для вивчення подібних залежностей вводиться поняття функції декількох змінних.

Щоб задати функцію двох (трьох) змінних, необхідно вказати спосіб, у який для кожної пари (трійки) значень аргументів можна знайти відповідне значення функції. Найпоширенішим (як і у випадку функції однієї змінної) є аналітичний спосіб завдання функції – за допомогою формули $z = f(x,y)$, де $f(x,y)$ – деякий вираз із змінними x і y.

Означення 1. Якщо кожній парі значень (x, y) змінних x і y у деякій області їх зміни поставлено у відповідність одне значення z, то кажуть, що z є *функцією від* x *і* y .

Змінні x і y називаються *аргументами функції* z.

Записують: $z = f(x,y)$ або $z = z(x,y)$.

Функція може бути визначена на всій площині або лише в деякій її частині, у деякій області.

Означення 2. Множина пар (x, y) значень x і y, для яких функція $z = f(x,y)$ визначена, називається *областю визначення* (*областю існування*) цієї функції.

Позначається: $D = D(f)$.

Отже,

$$D = D(f) = \{ (x,y) \mid z = f(x,y) \}.$$

Означення 3. Множина всіх значень, що приймаються z у області визначення, називається *областю значень функції* z.

У системі координат Oxy пара чисел (x, y) визначає точку $M(x, y)$ площини та, навпаки, кожній точці $M(x, y)$ відповідає єдина пара чисел (x, y). Тому функцію $z = f(x,y)$ можна розглядати як функцію точки $M(x, y)$ та писати: $z = f(M)$. Областю визначення D у цьому випадку є деяка множина точок площини Oxy: $D \subset Oxy$.

Зауваження: Функцію двох змінних можна визначити ще так:

Означення 4. Змінна величина z називається *функцією двох незалежних змінних* x *і* y , визначених на деякій множині D точок $M(x, y)$ площини, якщо кожній точці $M \in D$ відповідає певне значення величини z.

Позначається: $z = f(x,y)$ (або $z = f(M)$).

Узагальнимо це означення на випадок більшої кількості змінних.

Означення 5. Змінна величина u називається *функцією n незалежних змінних* $x_1, x_2, ..., x_n$, визначених на деякій множині D точок $M(x_1, x_2, ...x_n)$ n-вимірного простору, якщо кожній точці $M \in D$ відповідає певне значення величини u.

Позначається: $u = f\left(x_1, x_2, ... x_n \right)$ (або $u = f\left(M \right)$).

Множина D називається *областю визначення* функції u.

Зауваження: Ми розглядатимемо детально лише функції двох змінних. Усі отримані результати легко узагальнити на випадок більшої кількості змінних.

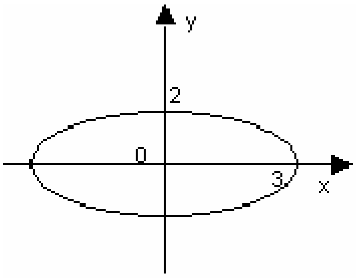
При аналітичному способі завдання, коли функція задається за допомогою формули, областю визначення функції вважається множина всіх точок площини, для яких ця формула має місце.

Приклад: Знайти область визначення функції $z = \sqrt{36 - 4x^2 - 9y^2}$.

Розв'язання. Вираз у правій частині має зміст для тих пар (x, y), для яких

$$36 - 4x^2 - 9y^2 \geq 0 \Leftrightarrow 4x^2 + 9y^2 \leq 36 \Leftrightarrow \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \leq 1 ,$$

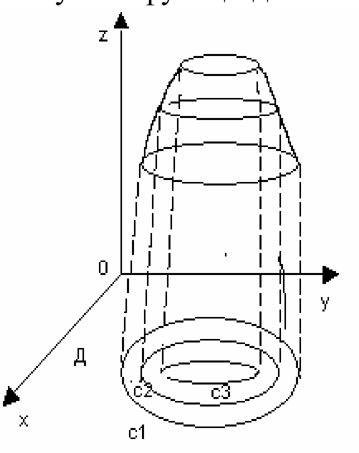
отже $D = \left\{ \left(x, y \right) : \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \leq 1 \right\}$ – внутрішня частина еліпса разом із межею.



Подібно тому, як для множини всіх пар дійсних чисел геометричною моделлю є координатна площина, так і для множини всіх трійок дійсних чисел існує геометрична модель – координатний простір $Oxyz$. Отже, для функцій двох змінних легко дати геометричні ілюстрації. Так, рівняння $z = f\left(x, y \right)$ визначає в просторі деяку поверхню, при цьому точка $M(x, y, O) \in D \subset Oxy$, а $z = f\left(x, y \right)$ – це апліката відповідної точки $M(x, y, z)$ поверхні.

Означення 6. *Графіком функції* $z = f\left(x, y \right)$ у системі координат $Oxyz$ називається геометричне місце точок $M(x, y, z = f\left(x, y \right))$, проекції яких $M(x, y) \in D$.

У найпростіших випадках такий графік являє собою деяку поверхню. Проте побудова графіків функцій двох змінних викликає певні труднощі, оскільки мова йде про зображення на плоскому кресленні просторової фігури. У зв'язку з цим виявляється зручним геометрично описувати функції двох змінних, не виходячи в тривимірний простір. Зазначений метод з'ясування форми поверхні $z = f\left(x, y \right)$ називають методом перетинів. Поверхню перетинають площинами, перпендикулярними осі Oz. На перетинах утворюються криві $\begin{cases} z = f\left(x, y \right); \\ z = c. \end{cases}$



Означення 7. *Лінією рівня функції* $z = f\left(x, y \right)$ називається проекція на Oxy кривої $z = f\left(x, y \right)$, яка утворюється при перетині поверхні площиною $z = c$.

Отже, лінія рівня – це множина точок, координати x, y яких задовольняють рівняння

$$f(x, y) = c .$$

Придаючи c різні значення та щоразу будуючи лінію з рівнянням $z = c$, отримаємо *сім'ю ліній рівня*. Ця сім'я наочно опише функцію $f\left(x, y \right)$.

Зазвичай поряд з лінією рівня ставлять те значення c, якому вона відповідає.

Приклад: Побудувати лінії рівня та з'ясувати характер поверхні, що зображується функцією $z = x^2 - y^2$.

Розв'язання.

1) Знайдемо область визначення функції:

$$D_z = \left\{ (x; y) : x \in R, y \in R \right\} .$$

2) Поверхню перетинають площинами, перпендикулярними осі Oz. На перетинах утворюються криві $\begin{cases} z = x^2 - y^2 \\ z = c. \end{cases}$

$x^2 - y^2 = c$

$c=0$ $\quad x^2-y^2=0 \Leftrightarrow x^2=y^2 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y=x \\ y=-x \end{array}\right.$

$c=1$ $\quad x^2-y^2=1$

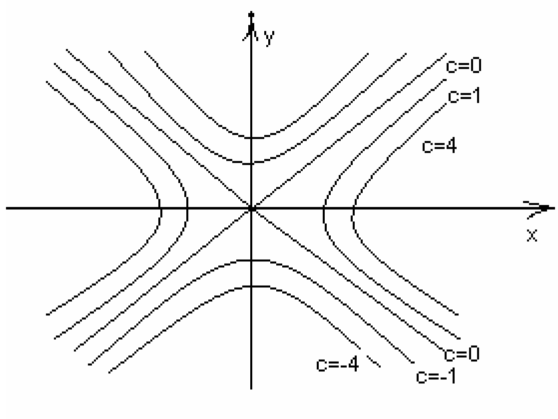
$c=-1$ $\quad x^2-y^2=-1 \Leftrightarrow -x^2+y^2=1$

$c=4$ $\quad x^2-y^2=4 \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{4}=1$

$c=-4$ $\quad x^2-y^2=-4 \Leftrightarrow -\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{4}=1$

Побудуємо знайдені крив (див. рис.).

Отже, поверхня є гіперболічним параболоїдом.



Лініями рівня позначають глибину морів і висоту гір на географічних картах. Аналогічні лінії описують розподілення певних речовин у ґрунті, розподілення середньодобової температури тощо.

1.2. Границя функції двох змінних

О з н а ч е н н я 8. *δ-околом точки* $M_0(x_0,y_0)$ називається множина всіх точок $M(x,y)$, координати яких задовольняють нерівність

$$d(M,M_0)=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta,$$

де $d(M,M_0)$ – відстань від точки M до точки M_0.

Геометрично δ-окіл точки M_0 – це всі внутрішні точки круга з центром M_0 і радіусом δ.

О з н а ч е н н я 9. Число A називається *границею функції* $z=f(x,y)=f(M)$ у точці M_0, якщо для будь-якого числа $\varepsilon>0$ існує число $\delta>0$ таке, що для всіх точок $M(x,y)\in D$, які задовольняють умову $0<d(M,M_0)<\delta$, виконується нерівність

$$|f(M)-A|<\varepsilon.$$

Позначають: $\lim\limits_{M\to M_0} f(M)=A$ або $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A$.

Символічно записують:

$$\lim_{M\to M_0} f(M)=A \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta>0 \quad \forall M\in D \ (0<d(M,M_0)<\delta \Rightarrow |f(M)-A|<\varepsilon).$$

Геометрично означення границі означає, що при довільному прямуванні точки M до точки M_0 нерівність $|f(M)-A|<\varepsilon$ виконується для всіх точок M, що належать δ-околу точки M_0.

Зауваження: За допомогою означення границі функції двох змінних усі основні теореми про границі для функції однієї змінної переносяться на функцію двох змінних.

О з н а ч е н н я 10. Функція $z=f(M)$ називається *нескінченно малою в точці* M_0, якщо

$$\lim_{M\to M_0} f(M)=0.$$

Якщо

$$\lim_{M\to M_0} f(M)=A,$$

то функція $f(M)-A$ є нескінченно малою в точці M_0, тому що

$$\lim_{M\to M_0}(f(M)-A)=0.$$

Звідси випливає, що в околі точки M_0 функція $f(M)$ відрізняється від границі A на нескінченно малу функцію.

Усі основні властивості про нескінченно малих та про границі, що мають для функції однієї змінної, узагальнюються й на випадок функцій двох і більшої кількості змінних.

Приклад: Знайти границі функцій:

1) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$; 2) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}} \frac{\sin xy}{x}$.

Розв'язання.

1) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{(x^2+y^2)(\sqrt{x^2+y^2+1}+1)}{x^2+y^2+1-1} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} (\sqrt{x^2+y^2+1}+1) = 2$.

Відповідь: $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1} = 2.$

2) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}} \frac{\sin xy}{x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}} \frac{\sin xy}{\frac{xy}{y}} = \lim\limits_{y\to 2} y = 2$.

Відповідь: $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}} \frac{\sin xy}{x} = 2.$

Між поняттями границі в точці для функції однієї змінної та функції декількох змінних існує, як було зазначено вище, багато спільного, проте між ними є й принципова відмінність, яка робить поняття границі функції декількох змінних істотно більш обмежувальним, ніж поняття границі функції однієї змінної. Пояснимо це.

Якщо

$$\lim_{x\to a} f(x) = b,$$

то це означає, що й лівостороння, й правостороння границі дорівнюють b:

$$\lim_{x\to a-0} f(x) = b, \qquad \lim_{x\to a+0} f(x) = b.$$

Вірним є й обернене твердження: із існування й збігу двох односторонніх границь слідує й існування границі функції у точці.

Для функції ж двох змінних $z = f(x, y)$ наближатись до точки (x_0, y_0) можна у нескінчену множину способів: і зліва, й справа, й під кутом до осі X тощо. Більш того, до точки (x_0, y_0) можна наближатись не лише по прямій, але й по складнішим траєкторіям. Зрозуміло, що рівність

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x, y) = b$$

є вірною лише тоді, коли границя дорівнює b при наближенні до точки (x_0, y_0) за будь-яким напрямом і навіть за будь-якою траєкторією. Це істотно більш обмежувальна вимога, ніж збіг односторонніх границь у випадку функції однієї змінної.

1.3. Неперервність функції двох змінних

Означення 11. Функція $u = f(M)$ називається *неперервною в точці* M_0, якщо:

1) вона визначена в точці M_0 й у деякому її околі;
2) існує границя $\lim\limits_{M\to M_0} f(M)$;
3) ця границя дорівнює значенню функції $f(M)$ у точці M_0:

$$\lim_{M\to M_0} f(M) = f(M_0).$$

Точки, в яких функція неперервна, називаються *точками неперервності*; точки, в яких функція не є неперервною, називаються *точками розриву*.

Використовуючи означення границі функції $f(M)$ в точці M_0, можна дати таке означення неперервності:

Означення 12. Функція $u = f(M)$ називається *неперервною в точці* M_0, якщо вона визначена в точці M_0 й у деякому її околі та для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує δ, що залежить від ε і M_0 таке, що для всіх точок *M*, що задовольняють умову $d(M, M_0) < \delta$, виконується нерівність

$$\left| f(M) - f(M_0) \right| < \varepsilon .$$

Розглянемо границю

$$\lim_{M \to M_0} f(M) = f(M_0) .$$

Це означає, що

$$\lim_{d(M, M_0) \to 0} (f(M) - f(M_0)) = 0 .$$

Введемо позначення:

$$\Delta u(M_0) = f(M) - f(M_0)$$

– *повний приріст функції* $u = f(M)$ *при переході з точки M до точки* M_0.

Тоді

$$\lim_{d(M, M_0) \to 0} \Delta u(M_0) = 0 ,$$

тобто при $M \to M_0$ величина $\Delta u(M_0)$ є нескінченно малою. Звідси випливає ще одне означення неперервності:

Означення 13. Функція $u = f(M)$ називається *неперервною в точці* M_0, якщо вона визначена в точці M_0 та в деякому її околі й нескінченно малій відстані точки *M* від точки M_0 відповідає нескінченно малий повний приріст функції в точці M_0.

Означення 14. Функція $u = f(M)$ називається *неперервною в заданій області*, якщо вона неперервна в кожній точці цієї області.

Зауваження: Неперервні функції двох змінних мають такі ж властивості, як і неперервні в точці функції однієї змінної, а саме:

1) якщо функції $f(M)$ і $g(M)$ неперервні в точці M_0, то в цій точці неперервні й функції $f(M) \pm g(M)$, $f(M) \cdot g(M)$, $\dfrac{f(M)}{g(M)}$ (за умови $g(M) \neq 0$);

2) якщо функція $u = f(M)$ неперервна в точці M_0, а функція $v = g(u)$ неперервна в точці $u_0 = f(M_0)$, то складена функція $v = g(f(M))$ неперервна в точці M_0.

Зауваження: Функції двох змінних можуть мати розриви як у окремих точках, так і на множинах точок, які об'єднуються в лінії або поверхні розриву.

Приклад: Знайти точки розриву функцій:

1) $z = \dfrac{1}{x^2 + y^2}$; 2) $z = \dfrac{1}{x^2 + y^2 - 1}$.

Розв'язання.

1) $x^2 + y^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ − точка розриву.

2) $x^2 + y^2 = 1$ − лінія розриву.

1.4. Неперервні функції в замкненій і обмеженій області та їх властивості

У тривимірному просторі $Oxyz$ нерівність

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2 \le R$$

визначає кулю з центром в точці $M_0(x_0;y_0;z_0)$ і радіусом R.

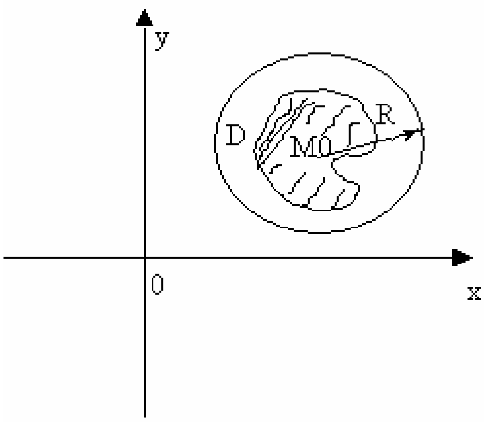
Так само в n-вимірному просторі нерівність

$$(x_1-x_{1_0})^2+(x_2-x_{2_0})^2+\ldots+(x_n-x_{n_0})^2 \le R$$

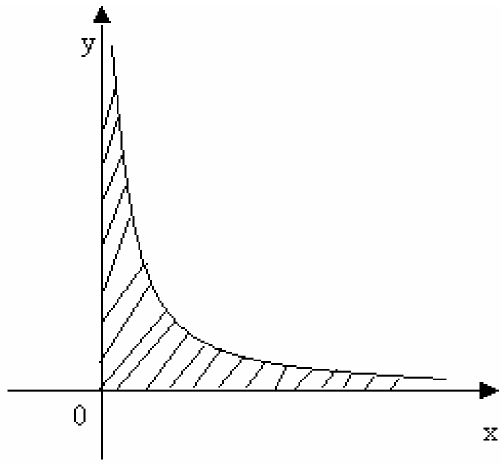
визначає так звану гіперкулю з центром в точці $M_0\left(x_{1_0},\ldots,x_{n_0}\right)$ і радіусом R.

Означення 15. Область D n-вимірного простору називається *обмеженою,* якщо існує гіперкуля скінченого радіусу, яка цілком містить область.

<u>Приклад:</u>



Обмежена область



Необмежена область

Означення 16. Точка M називається межовою точкою множини D, якщо будь-який її окіл містить як точки, що належать D, так і точки, що не належать D.

Множина всіх межових точок називається *межею* множини D.

Означення 17. Відкрита область разом з її межею називається *замкненою*.

<u>Зауваження:</u> Замкнена область є аналогом відрізка в R.

Властивості неперервних функцій (двох, декількох) змінних
у замкненій обмеженій області.

Теорема 1 (Теорема Вєйерштрасса): Якщо функція $u=f(M)$ неперервна в замкненій обмеженій області, то в цій області існують точки, в яких функція набуває найбільшого й найменшого значень, тобто

$$\exists M_1,M_2 \in D : \forall M \in D \ (f(M_1) \le f(M) \le f(M_2))$$

Теорема 2 (Теорема Больцано-Коші): Якщо функція $u=f(M)$ неперервна в обмеженій області D, то вона в цій області набуває всіх значень, що містяться між її найменшим $f(M_1)$ і найбільшим $f(M_2)$ значеннями ($M_1,M_2 \in D$), тобто для будь-якого M, що задовольняє нерівність $f(M_1) \le f(M) \le f(M_2)$, в області D знайдеться принаймні одна точка N така, що

$$f(N)=M.$$

Наслідок: Якщо функція $u = f(M)$ неперервна в замкненій обмеженій області *D* та набуває в цій області як додатні, так і від'ємні значення, то в області *D* існує принаймні одна точка M_0, в якій

$$f(M_0) = 0.$$

2. ПОХІДНІ ТА ДИФЕРЕНЦІАЛИ ФУНКЦІЇ ДЕКІЛЬКОХ ЗМІННИХ

2.1. Частинні похідні функції декількох змінних

Нехай функція $z = f(x,y)$ визначена в деякій області $D \subset Oxy$. Візьмемо точку $M(x,y) \in D$ та перейдемо в іншу точку $M_1(x+\Delta x, y) \in D$. Ми змінювали *x*, надаючи їй приросту Δx, а змінну *y* не змінювали. При цьому функція $z = f(x,y)$ набуває приросту

$$\Delta_x z = f(x+\Delta x, y) - f(x,y),$$

який називається *частинним приростом* функції $f(x,y)$ *по змінній x.*.

Знову візьмемо точку $M(x,y) \in D$ та перейдемо в іншу точку $M_2(x, y+\Delta y) \in D$. Ми змінювали *y*, надаючи їй приросту Δy, а змінну *x* залишали незмінною. При цьому функція $z = f(x,y)$ набуває приросту

$$\Delta_y z = f(x, y+\Delta y) - f(x,y),$$

який називається *частинним приростом* функції $f(x,y)$ *по змінній y*.

Може статись, що обидві змінні *x* і *y* отримали відповідно прирости Δx і Δy. Тоді відповідний приріст функції

$$\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)$$

називається *повним приростом функції* $f(x,y)$ (або просто *приростом функції* $f(x,y)$).

Зауваження: Повний приріст, взагалі кажучи, не дорівнює сумі частинних приростів цієї функції.

Приклад: Знайти приріст функції $f(x,y) = x^2 + xy - 2y^2$ при зміні *x* від 2 до 2,2 та *y* від 1 до 0,9.

Розв'язання. $\Delta x = 2,2 - 2 = 0,2$; $\Delta y = 0,9 - 1 = -0,1$.

Маємо:

$$f(2;1) = 2^2 + 2\cdot 1 - 2\cdot 1^2 = 4;$$

$$f(2,2;0,9) = 2,2^2 + 2,2\cdot 0,9 - 2\cdot 0,9^2 = 5,2$$

Отже,

$$\Delta z = 5,2 - 4 = 1,2.$$

Відповідь: $\Delta z = 1,2$.

Означення 1. Границя

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x},$$

якщо вона існує, називається *частинною похідною функції* $z = f(x,y)$ *в точці* $M(x,y)$ *по змінній*.

Позначається одним із символів: z'_x, $f'_x(x,y)$, $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial x}$.

Отже,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x}.$$

Означення 2. Границя

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y},$$

якщо вона існує, називається *частинною похідною функції* $z = f(x, y)$ *в точці* $M(x, y)$ *по змінній* y.

Позначається одним із символів: z'_y, $f'_y(x, y)$, $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$.

Отже,

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}.$$

Зауваження: З означень 1–2 випливає, що при знаходженні частинної похідної $\frac{\partial z}{\partial x}$ обчислюють звичайну похідну функції однієї змінної x, вважаючи змінну y сталою. Так само при знаходженні частинної похідної $\frac{\partial z}{\partial y}$ обчислюють похідну функції однієї змінної y, вважаючи змінну x сталою. Тому при обчисленні частинних похідних діють усі правила й формули обчислення похідних функції однієї змінної.

Приклад: Знайти частинні похідні функції:

1) $z = x^3 y^2 + 4x + y$; 2) $z = x^3 y + \sin(x^2 + \sqrt{y}) + tgx + \ln y$.

Розв'язання.

1) $\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 y^2 + 4$; $\frac{\partial z}{\partial y} = 2x^3 y + 1$;

2) $\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 y + \cos(x^2 + \sqrt{y}) \cdot 2x + \frac{1}{\cos^2 x}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = x^3 + \cos(x^2 + \sqrt{y}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}} + \frac{1}{y}$.

Зауваження: $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ не можна трактувати як дріб, проте лише як символ для позначення певної частинної похідної.

Якщо, наприклад, $z = x^2 + y^2$, то

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 2y.$$

Розглянемо рівняння Клапейрона

$$pv = RT.$$

За допомогою цього рівняння одна з величин p, v, T може бути визначена залежно від двох інших, причому ці останні повинні вже вважатись незалежними змінними. Отримаємо таку таблицю:

Незалежні змінні	T, p	T, v	p, v
Функції	$v = \frac{RT}{p}$	$p = \frac{RT}{v}$	$T = \frac{pv}{R}$
Частинні похідні	$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{R}{p}$; $\frac{\partial v}{\partial p} = -\frac{RT}{p^2}$	$\frac{\partial p}{\partial T} = \frac{R}{v}$; $\frac{\partial p}{\partial v} = -\frac{RT}{v^2}$	$\frac{\partial T}{\partial p} = \frac{v}{R}$; $\frac{\partial T}{\partial v} = \frac{p}{R}$

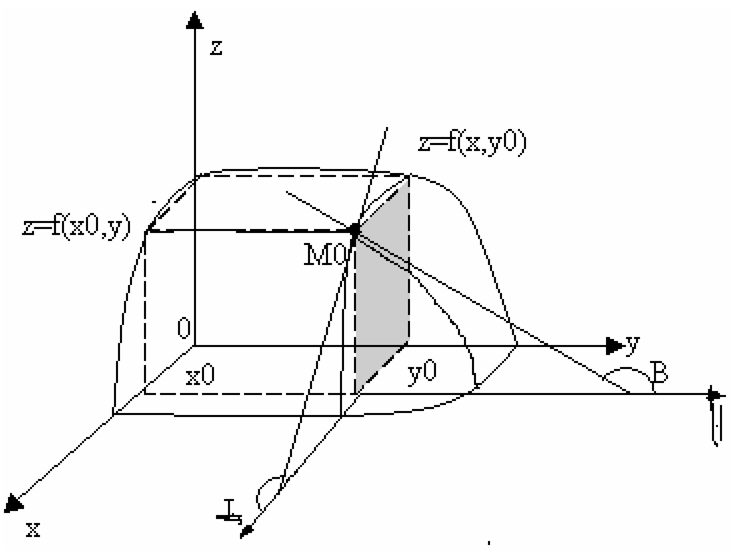
Звідси отримаємо таке співвідношення:

$$\frac{\partial v}{\partial T} \cdot \frac{\partial T}{\partial p} \cdot \frac{\partial p}{\partial v} = -1.$$

Якщо б у лівій частині рівності ми виконали скорочення, то отримали б не (–1), а (+1). Але в цій рівності частинні похідні обчислено за різних припущень: $\frac{\partial v}{\partial T}$ – у припущенні, що p – стала; $\frac{\partial T}{\partial p}$ – при сталій v; $\frac{\partial p}{\partial v}$ – при T сталій, а тому згадане скорочення є неприпустимим.

Фіксуючи y, ми перетинаємо поверхню, що визначається рівнянням $z = f(x, y)$, площиною $y = c$. В результаті отримуємо криву

$$\begin{cases} z = f(x, y) \\ y = const \end{cases}.$$



Нехай ця крива проходить через точку $M_0(x_0, y_0)$ поверхні. Виходячи з геометричного змісту похідної для функції однієї змінної, дістанемо, що

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{M_0(x_0, y_0)} = tg\alpha,$$

де α – кут між дотичною до кривої $z = f(x, y)$, проведеною в точці $M_0(x_0, y_0)$, та віссю Ox.

Аналогічно,

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{M_0(x_0, y_0)} = tg\beta.$$

Отже, геометричний зміст частинної похідної функції двох змінних: частинна похідна функції двох змінних $f'_x(x_0, y_0)$ $(f'_y(x_0, y_0))$ – це кутовий коефіцієнт дотичної до лінії перетину поверхні $z = f(x, y)$ і площини $y = y_0$ $(x = x_0)$ у відповідній точці.

Зауваження: Якщо функція $u = f(M)$ є функцією n змінних, то для неї також можна знайти n частинних похідних $\frac{\partial u}{\partial x_1}; \frac{\partial u}{\partial x_2} ...... \frac{\partial u}{\partial x_n}$, де

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{\Delta_{xi} z}{\Delta xi} = \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{f(x_1, ... x_i + \Delta x_i, x_{i+1}, ... x_n) - f(x_1, ... x_n)}{\Delta x_i}.$$

Кожну частинну похідну обчислюють як звичайну по змінній x_i, а решту змінних вважають сталими.

2.2. Диференційовність функції декількох змінних

Нехай функція $z = f(x, y)$ визначена в області $D \subset Oxy$. Візьмемо точку $M(x, y) \in D$ та перейдемо в точку $N(x + \Delta x, y + \Delta y) \in D$. При цьому переході функція z набуває *повного приросту*

$$\Delta z = \Delta f(x, y) = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y).$$

Означення 3. Функція $M(x, y) \in D$ називається *диференційовною в точці* $M(x, y) \in D$, якщо її повний приріст в цій точці можна подати у вигляді

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \alpha(\Delta x, \Delta y)\Delta x + \beta(\Delta x, \Delta y)\Delta y \qquad (1),$$

де $A, B \in R$ та не залежать від Δx і Δy, а α і β – нескінченно малі функції при $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$.

Зауваження: Згадаємо, що, коли функція однієї змінної диференційовна в деякій точці, то вона в цій точці неперервна й має похідну. Ця властивість має місце й для функції двох змінних.

Теорема 1 (про неперервність диференційовної функції): Якщо функція $z = f(x, y)$ диференційовна в точці $M(x, y)$, то вона неперервна в цій точці.

Доведення. Якщо функція диференційовна в точці M, то з (1) випливає, що

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \Delta z = 0,$$

а за означенням неперервності це означає, що функція неперервна в точці *M*.◊

Теорема 2 (про існування частинних похідних диференційовної функції): Якщо функція $z = f(x, y)$ диференційовна в точці $M(x, y)$, то вона має в цій точці обидві частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial ó}$ та

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y .$$

<u>Доведення.</u> Оскільки $f(x, y)$ диференційована в $M(x, y)$, то має місце (1). Нехай в (1) $\Delta x \neq 0,\ \Delta y = 0$, тоді

$$\Delta_x z = A\Delta x + \alpha(\Delta x, 0)\Delta x .$$

Поділимо обидві частини на Δx та перейдемо до границі при $\Delta x \to 0$:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}(A + \alpha(\Delta x, 0)) = A + 0 = A .$$

Отже, в точці $M(x, y)$ існує частинна похідна

$$\frac{\partial z}{\partial x} = A .$$

Аналогічно можна довести, що в точці $M(x, y)$ існує частинна похідна

$$\frac{\partial z}{\partial y} = B . \lozenge$$

Теорема 2 задає необхідну умову диференційовності.

<u>Зауваження:</u> Твердження, обернені до теорем 1 і 2, – невірні, тобто з неперервності або з існування частинних похідних функції ще не випливає її диференційовність. Наприклад, функція $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ неперервна в точці $(0,0)$, але не диференційовна в ній.

Теорема 3 (достатня умова диференційовності): Якщо функція $f(x, y)$ має частинні похідні в деякому околі точки *M* та ці похідні неперервні в точці *M*, то функція $f(x, y)$ диференційовна в точці *M*.

<u>Зауваження:</u> З теореми про існування частинних похідних диференційовної функції і з достатніх умов диференційовності випливає наслідок.

<u>Наслідок:</u> Для того, щоб функція $f(x, y)$ була диференційовною в точці *M*, необхідно, щоб вона мала в цій точці частинні похідні, та достатньо, щоб вона мала в цій точці неперервні частинні похідні.

<u>Зауваження:</u> Для функції однієї змінної $f(x)$ існування похідної $f'(x)$ в точці x є необхідною й достатньою умовою диференційовності в цій точці.

2.3. Повний диференціал та його застосування

Якщо функція $z = f(x, y)$ диференційовна в точці *M*, то її повний приріст у цій точці дорівнює

$$z = A\Delta x + B\Delta y + \alpha(\Delta x, \Delta y)\Delta x + \beta(\Delta x, \Delta y)\Delta y ,$$

де α і β – нескінченно малі функції при $\Delta x,\ \Delta y \to 0$.

Означення 4. *Повним диференціалом dz* диференційовної в точці *M* функції $z = f(x, y)$ називається головна лінійна відносно Δx і Δy частина повного приросту цієї функції в точці *M*, тобто

$$dz = A\Delta x + B\Delta y .$$

Оскільки диференціали незалежних змінних збігаються з їх приростами:

$$dx = \Delta x, \quad dy = \Delta y ,$$

то, з урахуванням теореми про існування частинних похідних диференційовної функції, можна записати повний диференціал функції $z = f(x, y)$:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy \qquad (2)$$

Отже, при малих значеннях Δx і Δy повний диференціал dz дає наближену величину повного приросту цієї функції Δz.

<u>Приклад:</u> Знайти повний диференціал функції $z = x^3y^2 + x + y$.

Розв'язання. Частинні похідні

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2y^2 + 1; \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 2x^3y + 1$$

неперервні на всій площині. Тому за формулою (2) повний диференціал на всій площині дорівнює:

$$dz = \left(3x^2y^2 + 1\right)dx + \left(2x^3y + 1\right)dy.$$

<u>Відповідь:</u> $dz = \left(3x^2y^2 + 1\right)dx + \left(2x^3y + 1\right)dy$.

<u>Зауваження:</u> Аналогічна формула має місце для диференційовної функції трьох змінних $u = f(x, y, z)$:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz.$$

Отже, повний диференціал функції декількох змінних дорівнює сумі її часткових диференціалів.

<u>Приклад:</u> Знайти повний диференціал функції $u = \frac{x}{y}e^z$.

Розв'язання. Частинні похідні

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{y}e^z; \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = xe^z \cdot \left(-\frac{1}{y^2}\right) = -\frac{x}{y^2}e^z; \qquad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{x}{y}e^z.$$

Отже, повний диференціал дорівнює:

$$du = e^z\left(\frac{1}{y}dx - \frac{x}{y^2}dy + \frac{x}{y}dz\right).$$

<u>Відповідь:</u> $du = e^z\left(\frac{1}{y}dx - \frac{x}{y^2}dy + \frac{x}{y}dz\right)$.

При достатньо малих Δx і Δy різниця $\Delta z - dz$ є нескінченно малою величиною порядку вищого, ніж $\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$, тобто

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{\Delta z - dz}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = 0.$$

При цьому має місце наближена рівність

$$\Delta z \approx dz,$$

або

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) \approx f(x, y) + \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\Delta y \qquad (3)$$

Формула (3) − формула для наближених обчислень значень функції двох змінних.

<u>Приклад 1:</u> Обчислити наближено за допомогою повного диференціала $arctg\left(\frac{1{,}97}{1{,}02} - 1\right)$.

Розв'язання. Розглянемо функцію $z = arctg\left(\frac{x}{y} - 1\right)$. Застосуємо формулу (3):

$$z = arctg\left(\frac{x+\Delta x}{y+\Delta y} - 1 \right) \approx arctg\left(\frac{x}{y} - 1 \right) + \frac{y}{y^2 + (\ x-y\ )^2}\Delta x - \frac{x}{y^2 + (\ x-y\ )^2}\Delta y\ .$$

Покладемо $x = 2$, $\Delta x = -0,03$, $y = 1$, $\Delta y = -0,02$, матимемо:

$$arctg\left(\frac{1,97}{1,02} - 1 \right) = arctg\left(\frac{2-0,03}{1+0,02} - 1 \right) \approx arctg\left(\frac{2}{1} - 1 \right) + \frac{1}{1+(\ 2-1\ )^2}(\ -0,03\ ) - \frac{2}{1+(\ 2-1\ )^2}0,02 =$$

$$= \frac{\pi}{4} - 0,015 - 0,02 = 0,75\ .$$

Відповідь: $arctg\left(\frac{1,97}{1,02} - 1 \right) \approx 0,75$.

Приклад 2: Обчислити наближено за допомогою повного диференціала $\sqrt{1,03^2 + 1,98^3}$.

Розв'язання. Розглянемо функцію $z = \sqrt{x^2 + y^3}$. Застосуємо формулу (3):

$$z = \sqrt{(x+\Delta x)^2 + (y+\Delta y)^3} \approx \sqrt{x^2+y^3} + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^3}}\Delta x + \frac{3y^2}{2\sqrt{x^2+y^3}}\Delta y\ .$$

Покладемо $x = 1$, $\Delta x = 0,03$, $y = 2$, $\Delta y = -0,02$, матимемо:

$$z = \sqrt{(1+0,03)^2 + (2-0,02)^3} \approx \sqrt{1^2+2^3} + \frac{1}{\sqrt{1^2+2^3}} \cdot 0,03 + \frac{3\cdot 2^2}{2\sqrt{1^2+2^3}} \cdot (-0,02) = 2,97\ .$$

Відповідь: $\sqrt{1,03^2 + 1,98^3} \approx 2,97$.

Приклад 3: Маємо прямокутник із сторонами $x = 6$ м і $y = 8$ м. На скільки зміниться діагональ цього прямокутника, якщо сторона *x* збільшиться на 4 см, а сторона *y* зменшиться на 9 см?

Розв'язання. Позначимо діагональ прямокутника через *u*, тоді за теоремою Піфагора матимемо:

$$u = \sqrt{x^2+y^2}\ .$$

Звідси, замінюючи приріст Δx діагоналі диференціалом du цієї діагоналі, наближено знайдемо:

$$\Delta u \approx du = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\Delta x + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\Delta y = \frac{x\Delta x + y\Delta y}{\sqrt{x^2+y^2}}\ .$$

Покладемо $x = 6$, $\Delta x = -0,04$, $y = 8$, $\Delta y = -0,09$, отримаємо:

$$\Delta u \approx \frac{6\cdot 0,04 + 8\cdot(-0,09)}{\sqrt{6^2+8^2}} = -0,048\ \text{(м)}.$$

Отже, діагональ прямокутника зменшиться приблизно на 4,8 см.

Відповідь: діагональ прямокутника зменшиться приблизно на 4,8 см.

2.4. Диференціювання складеної функції. Повна похідна. Інваріантність форми повного диференціала функції декількох змінних

Нехай $z = f(\ x,y\ )$ – функція двох змінних *x* і *y*, які самі є функціями незалежної змінної *t*:

$$x = x(t)\,, \qquad\qquad y = y(t)\,.$$

Тоді функція $z = f(\ x(t), y(t)\ )$ є складеною функцією однієї змінної *t*.

Теорема 4: Якщо функції $x = x(t)$ і $y = y(t)$ диференційовні в точці *t*, а функція $z = f(\ x,y\ )$ диференційовна в точці $M(\ x,y\ )$, то складена функція $z = f(\ x(t), y(t)\ )$ також диференційовна в точці *t*, та має місце формула :

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt} \qquad (4)$$

(4) – формула похідної складеної функції.

Доведення. Оскільки за умовою функція $z = f(\ x,y\ )$ диференційовна в точці $M(\ x,y\ )$, то

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y + \alpha(\Delta x,\Delta y)\Delta x + \beta(\Delta x,\Delta y)\Delta y\,,$$

де $\alpha,\beta \to 0$ при $\Delta x,\Delta y \to 0$. Поділимо Δz на Δt та перейдемо до границі при $\Delta t \to 0$:

$$\frac{dz}{dt} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{\partial z}{\partial x}\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\partial z}{\partial y}\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta t} + \lim_{\Delta t\to 0}\alpha(\Delta x,\Delta y)\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t} + \lim_{\Delta t\to 0}\beta(\Delta x,\Delta y)\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta t} =$$

$$=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}+0\frac{dx}{dt}+0\frac{dy}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}.\Diamond$$

Наслідок. Якщо $y=y(x)$ диференційовна в точці *x*, а функція $z=f(x,y)$ диференційовна в точці $M(x,y)$, то функція $z(x,y(x))$ диференційовна в точці *x*, та має місце формула:

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx} \qquad (5)$$

(5) – формула для обчислення повної похідної по *x*.

Узагальненням розглянутого є випадок, коли $z=f(x,y)$, а $x=x(u,v)$, $y=y(u,v)$. Тоді функція $z=f(x(u,v),y(u,v))$ є складеною функцією незалежних змінних *u* і *v*. Має місце теорема 5.

Теорема 5: Якщо функції $x=x(u,v)$, $y=y(u,v)$ диференційовні в точці $M_1(u,v)$, а функція $z=f(x,y)$ диференційовна в точці $M_2(x(u,v),y(u,v))$, то складена функція $f(x(u,v),y(u,v))$ диференційовна в точці $M_1(u,v)$, та її частинні похідні знаходяться за формулами:

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}; \qquad \frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}.$$

Приклад 1: Знайти похідну функції $z=e^{3x+2y}$, де $x=\cos t$, $y=t^2$.

Розв'язання. За формулою (4)

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}=e^{3x+2y}3(-\sin t)+e^{3x+2y}\cdot 2\cdot 2t=e^{3x+2y}(4t-3\sin t)=e^{3\cos t+2t^2}(4t-3\sin t).$$

Відповідь: $\frac{dz}{dt}=e^{3\cos t+2t^2}(4t-3\sin t).$

Приклад 2: Знайти повну похідну по *x* функції $z=x^3y^2+x+y$, де $y=\ln 2x$.

Розв'язання. За формулою (5)

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}=\left(3x^2y^2+1\right)+\left(2x^3y+1\right)\frac{1}{x}.$$

Відповідь: $\frac{dz}{dx}=\left(3x^2y^2+1\right)+\left(2x^3y+1\right)\frac{1}{x}.$

Зауваження: Формули, аналогічні (1) і (2), мають місце й для функцій від числа змінних більшого двох.

Наприклад, якщо $u=f(x,y,z)$, де $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$, то

$$\frac{du}{dt}=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}+\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dt}.$$

– формула похідної складеної функції.

Знайдемо повний диференціал складеної функції $z=f(u,v)$, де $u=u(x,y)$, $v=v(x,y)$ – функції, диференційовні в області $G\subset Ouv$, а *z* диференційовна в $D\subset Oxy$, причому, якщо точка $(x,y)\in D$, то відповідна точка $(u,v)\in G$. При цьому скористаємось теоремою про частинні похідні складеної функції:

$$dz=\left(\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}\right)dx+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}\right)dy=\frac{\partial z}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy\right)+\frac{\partial z}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial x}dx+\frac{\partial v}{\partial y}dy\right)=$$

$$=\frac{\partial z}{\partial u}du+\frac{\partial z}{\partial v}dv.$$

Отже,

$$dz=\frac{\partial z}{\partial u}du+\frac{\partial z}{\partial v}dv \qquad \textbf{(6)}$$

Зауваження: Порівнявши формули (2) і (6), бачимо, що вони мають одну й ту саму форму. Отже, має місце теорема 6.

Теорема 6 (про інваріантність форми повного диференціала): Форма диференціала функції декількох змінних не залежить від того, чи є її аргументи незалежними змінними, чи диференційовними функціями деяких інших незалежних змінних.

2.5. Диференціювання неявно заданої функції декількох змінних

Нехай функція двох змінних $z = f(x, y)$ неявно задана рівнянням $F(x, y) = 0$.

Теорема 7 (про існування неявної функції однієї незалежної змінної): Нехай функція $F(x, y)$ та її похідні F'_x, F'_y визначені й неперервні в деякому околі точки $M_0(x_0, y_0)$ та

$$F(x_0, y_0) = 0, \qquad F'_y(x_0, y_0) \neq 0.$$

Тоді існує окіл точки M_0, у якому рівняння $F(x, y) = 0$ неявно визначає єдину функцію $y = \varphi(x)$, яка неперервна й диференційовна в околі точки x_0 та для якої

$$\varphi(x_0) = y_0.$$

Теорема 8 (про похідну неявної функції однієї змінної): В умовах попередньої теореми похідна функції $y = \varphi(x)$, неявно заданої рівнянням $F(x, y) = 0$, існує й знаходиться за формулою:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial y}}$$

Доведення. Рівняння $F(x, y) = 0$ задає неявну функцію $y = \varphi(x)$, для якої на деякій множині точок *x* має місце тотожність

$$F(x, \varphi(x)) \equiv 0.$$

Звідси випливає, що повна похідна

$$\frac{dF}{dx} = 0.$$

За формулою повної похідної

$$\frac{dF}{dx} = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx},$$

або

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0,$$

звідси

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial y}} \quad \Diamond$$

Зауваження: У отриманий таким чином вираз для $\dfrac{dy}{dx}$ може ввійти як *x*, так і *x* і *y*, і якщо потрібно отримати вираз $\dfrac{dy}{dx}$ лише через незалежну змінну *x*, то все-таки доведеться розв'язати рівняння $F(x, y) = 0$ відносно *y*.

Приклад: Знайти $\frac{dy}{dx}$ з рівняння $x^2y + xy^2 - y^3 - 1 = 0$.

Розв'язання.

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2xy + y^2; \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = x^2 + 2xy - 3y^2$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} = -\frac{2xy + y^2}{x^2 + 2xy - 3y^2} = \frac{2xy + y^2}{3y^2 - x^2 - 2xy}.$$

Відповідь: $\frac{dy}{dx} = \frac{2xy + y^2}{3y^2 - x^2 - 2xy}$.

Зауваження: Якщо рівняння $F(x, y, z) = 0$ неявно визначає функцію $z = \varphi(x, y)$ в області D так, що $F(x, y, \varphi(x, y)) \equiv 0$,тоді можна знайти частинні похідні неявної функції $z = \varphi(x, y)$ за формулами:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}; \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}.$$

Приклад: Знайти частинні похідні неявної функції *z*, що задається рівнянням $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$.

Розв'язання.

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x; \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = 2y; \qquad \frac{\partial F}{\partial z} = 2z$$

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{2x}{2z} = -\frac{x}{z}; \qquad \frac{dz}{dy} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{2y}{2z} = -\frac{y}{z}$$

Відповідь: $\frac{dz}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{2x}{2z} = -\frac{x}{z}$; $\frac{dz}{dy} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{2y}{2z} = -\frac{y}{z}$

2.6. Частинні похідні й диференціали вищих порядків

Нехай функція $z = f(x, y)$ в області D має частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ у всіх точках $M(x, y) \in D$. Ці похідні можна знову розглядати як функції в області *D*, й ми можемо визначити їх частинні похідні.

Означення 5. Якщо існує частинна похідна по *x* від функції $\frac{\partial z}{\partial x}$, то вона називається *частинною похідною другого порядку від функції* $z = f(x, y)$ *по змінній x*.

Позначається: $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ або z''_{xx}.

Отже, за означенням

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right).$$

Означення 6. Якщо існує частинна похідна по *y* від функції $\frac{\partial z}{\partial x}$, то вона називається *мішаною частинною похідною другого порядку* від функції $z = f(x, y)$.

Позначається: $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ або z''_{yx}.

Отже, за означенням

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x} \right).$$

Означення 7. Якщо існує частинна похідна по y від функції $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, то вона називається *частинною похідною другого порядку від функції* $z = f\left(x, y \right)$ *по змінній y*.

Позначається: $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ або z''_{yy}.

Отже, за означенням

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y} \right).$$

Означення 8. Якщо існує частинна похідна по x від функції $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, то вона називається *мішаною частинною похідною другого порядку від функції* $z = f\left(x, y \right)$.

Позначається: $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ або z''_{xy}.

Отже, за означенням

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y} \right).$$

Мішані похідні z''_{xy} і z''_{yx} відрізняються лише порядком диференціювання. У першому випадку диференціювання відбувається спочатку по y і потім по x, а в другому випадку – у зворотному порядку.

Приклад: Знайти частинні похідні другого порядку неявної функції $z = e^{x-3y}$.

Розв'язання.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^{x-3y}; \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -3e^{x-3y};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}(e^{x-3y}) = e^{x-3y};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-3e^{x-3y} \right) = -3e^{x-3y};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(e^{x-3y} \right) = e^{x-3y} \cdot (-3) = -3e^{x-3y};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(-3e^{x-3y} \right) = -3e^{x-3y} \cdot (-3) = 9e^{x-3y}$$

Відповідь: $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -3e^{x-3y}$; $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -3e^{x-3y}$; $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = -3e^{x-3y}$; $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 9e^{x-3y}$.

З розглянутого прикладу видно, що $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$. З'ясовується, що має місце наступна теорема.

Теорема 9 (про мішані похідні): Якщо функція $z = f(x, y)$ визначена разом із своїми похідними $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ у деякому околі точки $M_0(x_0, y_0)$, при цьому мішані похідні неперервні в точці M_0, тоді в цій точці

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}.$$

Тобто результат диференціювання не залежить від порядку, в якому відбувається диференціювання.

Зауваження: Аналогічна теорема має місце для функції довільної кількості змінних:

Теорема 10 (про мішані похідні у випадку будь-якої кількості змінних): Мішані частинні похідні вищих порядків рівні між собою, якщо вони неперервні й узяті по одним змінним однакову кількість разів, але в різній послідовності.

Наприклад, для функції від трьох незалежних змінних $u = u(x, y, z)$:

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial z \partial y} = \frac{\partial^3 u}{\partial z \partial y \partial x} = \frac{\partial^3 u}{\partial y \partial x \partial z} = \frac{\partial^3 u}{\partial y \partial z \partial x} = \frac{\partial^3 u}{\partial z \partial x \partial y}.$$

Нехай $z = f(x, y)$ – функція двох незалежних змінних. Припустимо, що ця функція має неперервні частинні похідні до *n*-го порядку включно. У точці $M(x, y)$ можна знайти повний диференціал

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy,$$

який називають ще *диференціалом* 1-*го порядку* (*першим диференціалом*).

Означення 9. *Диференціалом другого порядку* називають повний диференціал від диференціала першого порядку:

$$d^2 z = d(dz).$$

Знайдемо вираз для диференціала другого порядку:

$$d^2 z = d(dz) = d\left(\frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy \right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy \right) dx + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy \right) dy =$$

$$= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dy dx + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2,$$

звідси

$$d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2.$$

Скорочено останню формулу можна записати так:

$$d^2 z = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^2 z$$

Так само можна дістати формулу для диференціала третього порядку:

$$d^3 z = d(d^2 z) = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^3 z,$$

і для диференціала будь-якого порядку:

$$d^n(z) = d(d^{n-1} z) = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^n z,$$

причому формулу цю необхідно розуміти так: суму, що стоїть в дужках, необхідно піднести до n-го степеня, після чого показники степенів у $\frac{\partial}{\partial x}$ і $\frac{\partial}{\partial y}$ необхідно вважати показниками порядку похідних по x і y від функції z.

Зауваження: Розглянута формула легко узагальнюється й на випадок функції будь-якої кількості незалежних змінних.

Завдання для самостійного розв'язання

Завдання № 1. Знайти частинні похідні функції.

1) $z = x\ln\frac{y}{x}$; 2) $z = (x^2 + y^2)tg\frac{x}{y}$; 3) $z = \ln(x^2 + y^2 + 2x + 1)$;

4) $z = \ln\frac{x}{y} + x^3 - y^3$; 5) $z = \frac{2x + 3y}{x^2 + y^2}$; 6) $z = \arcsin\frac{x - y}{x + y}$;

7) $z = \sin x + \sin y + \sin(2x - y)$; 8) $z = \frac{y^2}{3x} + \arcsin(xy)$.

Завдання № 2. Знайти повний диференціал функції.

1) $z = \ln(x^2 - \sqrt{x^3 - y^3})$; 2) $z = \arccos\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 - y^2}}$; 3) $z = \frac{arcctg^2 x}{1 + y^2}$.

Завдання № 3. Знайти $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$, якщо:

1) $z = u^2 v - vu$, $u = x \cdot \cos y$, $v = x \cdot \sin y$; 2) $z = u^v$, $u = \sqrt{x^2 + y^2}$, $v = \frac{y}{tgx}$;

3) $z = \frac{u^2}{V}$, $u = x - 2y$, $v = y + 2x$.

Завдання № 4. Перевірити задане співвідношення для функції $z = f(x, y)$.

1) $x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$; $z = e^{xy}$; 2) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$; $z = \ln\left(x^2 + y^2 + 2y + 1 \right)$;

3) $x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$; $z = \frac{y}{x}$; 4) $x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$; $z = y\sqrt{\frac{y}{x}}$;

5) $\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2\frac{\partial z}{\partial x} \right) - x^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$; $z = \frac{\sin\left(x - y \right)}{x}$; 6) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$; $z = arctg\frac{x}{y}$;

7) $x^2\frac{\partial z}{\partial x} - xy\frac{\partial z}{\partial y} + y^2 = 0$; $z = \frac{y^2}{3x} + \arcsin\left(xy \right)$; 8) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{1}{z}$; $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Завдання № 5. Знайти y', якщо функція $y(x)$ задана неявно рівнянням.

1) $2x^2 + 4xy^2 - 3y^2 + 5x - y + 1 = 0$; 2) $y^2 \cos x + \sin(x - y^2) = 0$;

3) $\sin^2 x \ln y - \cos^2 y \ln x = 0$.

3. ДЕЯКІ ЗАСТОСУВАННЯ ЧАСТИННИХ ПОХІДНИХ

3.1. Локальні екстремуми функції двох змінних

Поняття максимуму й мінімуму можна поширити й на функції декількох змінних (зокрема, на функцію двох змінних).

Нагадаємо, що під *околом точки площини* розуміють внутрішність будь-якого прямокутника, що оточує цю точку, виключаючи саму точку (проколений окіл).

Аналогічно, під *околом точки простору* розуміють внутрішність довільного паралелепіпеда, що містить цю точку, за винятком самої точки.

Означення 1. Кажуть, що функція $z = f(x,y)$, визначена в області *D*, має в точці $M_0 \in D$ *локальний максимум max* (*локальний мінімум min*), якщо існує окіл точки M_0, який належить області *D*, такий що для всіх відмінних від M_0 точок *M* цього околу виконується нерівність

$$f(M) < f(M_0) \quad (f(M) > f(M_0)).$$

Max і min функції називаються її *локальними екстремумами*.

Точка M_0, де функція набуває max (min), називається *точкою локального максимуму* (*мінімуму*), або *точкою локального екстремуму*.

Аналогічно визначається локальний екстремум функції $f(x,y,z)$ тощо.

Поняття екстремуму носить локальний характер.

Теорема 1 (необхідна умова екстремуму): Якщо функція $z = f(x,y)$ має в точці $M_0(x_0,y_0)$ екстремум, то в цій точці обидві її частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$ дорівнюють нулю або не існують.

Доведення. Нехай $M_0(x_0,y_0)$ – точка екстремуму. Тоді з означення 1 слідує, що функція $f(x_0,y_0)$, яка розглядається як функція однієї змінної *x*, при $x = x_0$ також має екстремум, тому її похідна $\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y} = 0$ або не існує.◊

Означення 2. Точки, в яких частинні похідні дорівнюють нулю, називаються *стаціонарними точками функції* $f(x,y)$.

Стаціонарні точки й точки, в яких частинні похідні не існують, називаються *критичними точками функції* $f(x,y)$.

Тоді теорема 1 еквівалентна твердженню: екстремуми функції декількох змінних можуть набуватись лише в критичних точках її.

Геометричний зміст необхідної умови екстремуму полягає в тому, що дотична площина до графіка функції, проведена у відповідній точці екстремуму, є паралельною площині Oxy.

Зауваження. Наведена умова існування екстремуму не є достатньою, тобто якщо, наприклад, у деякій точці всі частинні функції дорівнюють нулю, то в цій точці функція не обов'язково має локальний екстремум.

Приклад. Для функції $z = x^3 + y^3$ частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2$ і $\frac{\partial z}{\partial y} = 3y^2$ дорівнюють нулю в точці (0;0), проте екстремуму ця функція в точці (0;0) не має, оскільки в будь-якому околі цієї точки вона приймає значення різних знаків, а в самій точці (0;0) $z = 0$.

Теорема 2 (достатні умови екстремуму функції двох змінних): Нехай функція $z = f(x,y)$ двічі неперервно диференційовна в деякому околі точки $M_0(x_0,y_0)$ та точка M_0 є критичною точкою функції M_0. Тоді, якщо позначити

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)\Bigg|_{M_0} = A; \qquad \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)\Bigg|_{M_0} = B; \qquad \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)\Bigg|_{M_0} = C,$$

тоді в точці M_0 функція $z = f(x,y)$:

1) має max, якщо $AC - B^2 > 0$ і $A < 0$;

2) має min, якщо $AC - B^2 > 0$ і $A > 0$;

3) не має екстремуму, якщо $AC - B^2 < 0$;

4) може мати або не мати екстремуму, якщо $AC - B^2 = 0$ (сумнівний випадок, потрібні додаткові дослідження).

<u>Зауваження:</u> З необхідної і достатньої умов екстремуму випливає схема дослідження функції двох змінних на екстремум.

Схема дослідження функції двох змінних на екстремум:

1) Знайти перші частинні похідні функції $z = f(x, y)$.

2) Із системи рівнянь $\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 0 \end{cases}$ знайти стаціонарні точки $M_0(x_0, y_0)$.

3) Знайти другі частинні похідні.

4) Для кожної стаціонарної точки (x_0, y_0) обчислити значення частинних похідних, позначаючи

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)\Bigg|_{M_0} = A; \qquad \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right)\Bigg|_{M_0} = B; \qquad \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right)\Bigg|_{M_0} = C,$$

5) Скласти вираз $\Delta = AC - B^2$.

Якщо $\Delta > 0$, $A < 0$, то точка (x_0, y_0) є точкою максимуму.

Якщо $\Delta > 0$, $A > 0$, то точка (x_0, y_0) є точкою мінімуму.

Якщо $\Delta < 0$, то точка (x_0, y_0) не є точкою екстремуму.

Якщо $\Delta = 0$, то висновку про характер стаціонарної точки зробити не можна, потрібне додаткове дослідження

<u>Приклад:</u> Дослідити на екстремум функцію $z = x^2 + xy + y^2 + x - y + 1$.

Розв'язання.

1) Знайдемо перші частинні похідні:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + y + 1; \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = x + 2y - 1.$$

Прирівняємо їх до нуля, одержимо систему рівнянь:

$$\begin{cases} 2x + y + 1 = 0 \\ x + 2y - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{array} \right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -3 \end{array} \right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases}$$

Отже, $(-1;1)$ – стаціонарна точка.

2) Обчислимо значення других частинних похідних у знайденій стаціонарній точці:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2; \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 1; \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2.$$

3) Складемо вираз

$$\Delta = AC - B^2 = 4 - 1 = 3 > 0$$

$\Delta > 0$, $A = 2 > 0 \Rightarrow$ в точці $(-1;1)$ функція має мінімум.

$$z_{\min} = 1 - 1 + 1 - 1 - 1 + 1 = 0$$

<u>Відповідь:</u> $z_{\min} = z(-1;1) = 0$.

Покажемо на прикладах, що в разі $\Delta = 0$ екстремум може існувати, проте може й не існувати.

<u>Приклад 1:</u> Функція $z = x^3 + y^3$ у точці (0;0), де $\Delta = 0$, як показано вище, екстремуму не має.

<u>Приклад 2:</u> Функція $z = x^4 + y^4$ у точці (0;0), де $\Delta = 0$, має мінімум, оскільки в будь-якому околі цієї точки задана функція додатна, а в самі й точці (0;0) дорівнює нулю.

3.2. Знаходження найбільшого і найменшого значень функції, неперервної в обмеженій замкненій області

Згідно з теоремою Вейєрштрасса, функція $z = f(x, y)$, неперервна в обмеженій і замкненій області *D*, досягає в цій області найбільшого й найменшого значень (всередині *D* або на її межі).

Означення 3. Найбільше або найменше значення функції в заданій області називається *абсолютним екстремумом функції* (відповідно *абсолютним максимумом* або *абсолютним мінімумом*) *у цій області*.

Теорема 3: Абсолютний екстремум функції в заданій області набувається або в критичній точці функції, що міститься в цій області, або в граничній точці області.

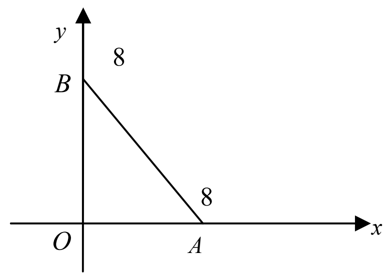
Тому для того, щоб знайти найбільше й найменше значення функції в обмеженій замкненій області, треба:

1) Знайти критичні точки, які лежать всередині області, та обчислити значення функції в цих точках.

2) Знайти критичні точки на межі області та обчислити значення функції в цих точках.

3) Серед здобутих значень функції вибрати найбільше й найменше.

Приклад: Знайти найбільше й найменше значення функції $z = xy(4 - x - y)$ в області *D*, що визначена системою нерівностей $\begin{cases} x \ge 0, \\ y \ge 0, \\ x + y \le 8 \end{cases}$.



Розв'язання. Побудуємо область *D*:

Область *D* є трикутник OAB.

1) Знайдемо критичні точки, які лежать всередині даного трикутника.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 4y - 2xy - y^2 = y(4 - 2x - y),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 4x - x^2 - 2xy = x(4 - 2y - x).$$

Прирівняємо частинні похідні до нуля, отримаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} y(4 - 2x - y) = 0; \\ x(4 - 2y - x) = 0. \end{cases}$$

З урахуванням того, що всередині трикутника $x > 0$, $y > 0$, приходимо до системи рівнянь

$$\begin{cases} 2x + y = 4; \\ x + 2y = 4, \end{cases}$$

звідки

$$\begin{cases} x = \dfrac{4}{3}; \\ y = \dfrac{4}{3}. \end{cases}.$$

Отримана критична точка лежить всередині трикутника. Знайдемо значення функції *z* е цій точці:

$$z\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right) = \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{3}\left(4 - \frac{4}{3} - \frac{4}{3}\right) = \frac{64}{27}$$

2) Межа області складається з трьох ділянок OA, AB і BO, які мають різні рівняння.

а) На ділянці OA, рівняння якої $y = 0$, функція $z = 0$.

б) На ділянці BO, рівняння якої $x = 0$, функція $z = 0$.

в) На ділянці AB, рівняння якої $y = 8 - x$, функція *z* перетворюється на функцію однієї змінної:

$$z(x) = x(8 - x)(4 - x - 8 + x) = 4x(x - 8).$$

Знайдемо критичні точки цієї функції на відрізку $[0, 8]$:

$$z'(x) = 4(2x - 8), \qquad 4(2x - 8) = 0,$$

звідки

$$x = 4.$$

Обчислимо значення функції $z(x)$ на кінцях відрізку $[0, 8]$ і в точці $[0, 8]$:

$z(0)=0$, $z(4)=4\cdot4\cdot(-4)=-64$, $z(8)=0$.

3) Знайдемо найбільше й найменше значення функції z серед наступних її значень:

$$z=\frac{64}{27} \text{ в точці } \left(\frac{4}{3},\frac{4}{3}\right);$$

$$z=0 \text{ – на прямих } x=0 \text{ і } y=0;$$

$$z=-64 \text{ в точці } (4,4).$$

Таким чином, найбільшого значення $z=\frac{64}{27}$ функція z досягає всередині області в точці $\left(\frac{4}{3},\frac{4}{3}\right)$, а найменшого $z=-64$ – на межі області в точці $(4,4)$.

Відповідь: $\max\limits_{D} z = z\left(\frac{4}{3},\frac{4}{3}\right)=\frac{64}{27}$, $\min\limits_{D} z = z(4,4)=-64$.

3.3. Умовний екстремум функції двох змінних

Нехай в області D площини Oxy визначена функція $z=f(x,y)$, незалежні змінні якої зв'язані умовою $\varphi(x,y)=0$. Позначимо через E множину точок області D, в яких функціях $\varphi(x,y)$ обертається в 0.

Означення 4. Точка $M_0(x_0,y_0)\in D$ називається *точкою умовного екстремуму функції* $z=f(x,y)$ за наявністю зв'язку $\varphi(x,y)=0$, якщо вона є точкою звичайного екстремуму цієї функції, яка розглядається тільки на множині E.

Зауваження: Значення функції в точці умовного екстремуму порівнюється із значеннями цієї функції не в усіх точках області D, а лише в точках, які задовольняють рівняння $\varphi(x,y)=0$.

Рівняння $\varphi(x,y)=0$ називається рівнянням зв'язку.

Схема пошуку умовних екстремумів функції $z=f(x,y)$

з рівнянням зв'язку $\varphi(x,y)=0$.

1) Рівняння зв'язку розв'язати відносно будь-якої змінної, наприклад, y: $y=\psi(x)$.

2) Підставити знайдене рівняння в дану функцію $z=f(x,\psi(x))$ та дослідити на екстремум отриману функцію однієї змінної.

Але такий спосіб не завжди можливий, якщо рівняння зв'язку не може бути розв'язане відносно змінних y або x.

Більш загальний спосіб ґрунтується на методі множників Лагранжа.

1) Скласти допоміжну функцію

$$F(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y),$$

яка називається функцією Лагранжа, а число λ називається множником Лагранжа.

2) Дослідити на екстремум функцію $F(x,y,\lambda)$. Для цього знайти й прирівняти до нуля її частинні похідні та з отриманої системи

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x}=0; \\ \frac{\partial F}{\partial y}=0; \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda}=0. \end{cases}$$

знайти критичні точки.

3) Характер критичних точок встановити за допомогою визначника

$$D=\begin{vmatrix} 0 & \dfrac{\partial\varphi}{\partial x} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial y} \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial x} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial x\partial y} \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial y} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial x\partial y} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2} \end{vmatrix},$$

де всі похідні обчислюють в критичній точці, яка досліджується. Якщо $D>0$, то матимемо умовний максимум, якщо $D<0$, то матимемо умовний мінімум, якщо ж $D=0$, то потрібні додаткові дослідження.

Приклад: Знайти екстремум функції $z=xy$ за умови, що $2x+3y-5=0$.

Розв'язання.

1-й спосіб

Із рівняння зв'язку виразимо *y*:

$$y=\frac{5-2x}{3}.$$

Тоді

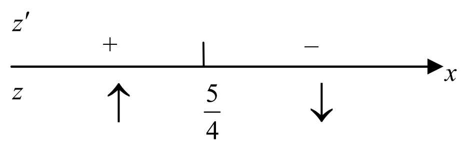
$$z=x\frac{5-2x}{3}, \qquad z=\frac{1}{3}\left(5x-2x^2\right)$$

– функція однієї змінної *x*. Дослідимо її на екстремум.

$$z'=\frac{1}{3}\left(5-4x\right);$$

$$z'=0, \qquad 5-4x=0,$$

звідки $x=\frac{5}{4}$ – критична точка.



Отже, при $x=\frac{5}{4}$ функція має максимум:

$$z_{\max}=\frac{1}{3}\left(\frac{25}{4}-2\cdot\frac{25}{16}\right)=\frac{25}{4}.$$

Знайдемо значення функції при $x=\frac{5}{4}$:

$$y=\frac{5-2\cdot\frac{5}{4}}{3}=\frac{5}{6}.$$

Відповідь: $z_{\max}=\frac{25}{4}$ в точці $\left(\frac{5}{4},\frac{5}{6}\right)$.

2-й спосіб

1) Утворимо функцію

$$F(x,y,\lambda)=xy+\lambda(2x+3y-5).$$

2) Дослідимо на екстремум функцію $F(x,y,\lambda)$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x}=y+2\lambda=0; \\ \dfrac{\partial F}{\partial y}=x+3\lambda=0; \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda}=2x+3y-5=0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-2\lambda; \\ x=-3\lambda; \\ 2\left(-3\lambda\right)+3\left(-2\lambda\right)-5=0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-2\cdot\left(-\dfrac{5}{12}\right)=\dfrac{5}{6}; \\ x=-3\cdot\left(-\dfrac{5}{12}\right)=\dfrac{5}{4}; \\ \lambda=-\dfrac{5}{12}. \end{cases}$$

Отже, точка $\left(\frac{5}{4}, \frac{5}{6} \right)$ – критична.

3) З'ясуємо характер критичної точки. Для цього обчислимо значення частинних похідних в цій точці:

$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 2$, $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 3$, $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 0$, $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 1$, $\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0$

З'ясуємо знак визначника *D*:

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -6 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} -6 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -(-6 - 6) = 12 > 0 .$$

Отже, в точці $\left(\frac{5}{4}, \frac{5}{6} \right)$ маємо умовний максимум і $z_{\max} = \frac{25}{4}$.

Відповідь: $z_{\max} = \frac{25}{4}$ в точці $\left(\frac{5}{4}, \frac{5}{6} \right)$.

3.4. Дотична площина та нормаль до поверхні

Нехай задано поверхню $F(x, y, z) = 0$ й точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, яка належить цій поверхні. Функція $F(x, y, z)$ диференційовна в точці M_0, причому не всі її частинні похідні дорівнюють нулю.

Розглянемо на поверхні $F(x, y, z) = 0$ криву *L*, яка проходить через точку M_0.

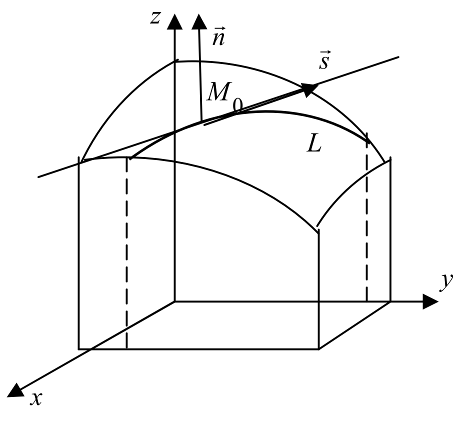
Означення 5. *Дотичною площиною до поверхні в точці* M_0 називається площина, в якій розташовані дотичні в точці M_0 до всіх кривих на поверхні $F(x, y, z) = 0$, які проходять через цю точку.

Оскільки дотична площина проходить через точку M_0 перпендикулярно до вектора

$$\vec{n} = \left(\frac{\partial F}{\partial x}\bigg|_{M_0} ; \frac{\partial F}{\partial y}\bigg|_{M_0} ; \frac{\partial F}{\partial z}\bigg|_{M_0} \right),$$

то її рівняння має вигляд:

$$F'_x(M_0)(x - x_0) + F'_y(M_0)(y - y_0) + F'_z(M_0)(z - z_0) = 0 . \qquad (1)$$



Означення 6. *Нормаллю до поверхні в точці* M_0 називається пряма, що проходить через точку M_0 перпендикулярно до дотичної площини в цій точці.

Оскільки нормаль проходить через точку M_0 та має напрямний вектор

$$\vec{n} = \left(\frac{\partial F}{\partial x}\bigg|_{M_0} ; \frac{\partial F}{\partial y}\bigg|_{M_0} ; \frac{\partial F}{\partial z}\bigg|_{M_0} \right),$$

то канонічні рівняння нормалі мають такий вигляд:

$$\frac{x - x_0}{F'_x(M_0)} = \frac{y - y_0}{F'_y(M_0)} = \frac{z - z_0}{F'_z(M_0)} \qquad (2)$$

Зауваження: Якщо рівняння поверхні задано в явній формі $z = f(x, y)$, то, поклавши

$$F(x, y, z) = f(x, y) - z = 0 ,$$

дістанемо:

$$F'_x(M_0) = f'_x(x_0, y_0), \qquad F'_y(M_0) = f'_y(x_0, y_0), \qquad F'_z(M_0) = -1 .$$

Тоді рівняння дотичної площини й нормалі наберуть відповідно вигляду:

$$f'_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f'_y(x_0,y_0)(y-y_0)-(z-z_0)=0, \qquad (3)$$

$$\frac{x-x_0}{f'_x(x_0,y_0)}=\frac{y-y_0}{f'_y(x_0,y_0)}=\frac{z-z_0}{-1} \qquad (4)$$

Позначивши в рівнянні (3)

$$x-x_0=\Delta x, \qquad y-y_0=\Delta y, \qquad z-z_0=\Delta z,$$

отримаємо:

$$f'_x(x_0,y_0)\Delta x+f'_y(x_0,y_0)\Delta y-\Delta z=0,$$

звідки

$$\Delta z=f'_x(x_0,y_0)\Delta x+f'_y(x_0,y_0)\Delta y,$$

або

$$df(x_0,y_0)=\Delta z,$$

тобто повний диференціал функції двох змінних дорівнює приросту аплікати дотичної площини. У цьому полягає геометричний зміст повного диференціалу функції $f(x,y)$.

Приклад: Написати рівняння дотичної площини й нормалі до поверхні $2x^2+y^2+z^2=15$ (еліпсоїд) у точці $M_0(1,2,3)$.

Розв'язання. Маємо:

$$F(x,y,z)=2x^2+y^2+z^2-15,$$

$$F'_x=4x, \qquad F'_y=2y, \qquad F'_z=2z,$$

$$F'_x(M_0)=4, \qquad F'_y(M_0)=4, \qquad F'_z(M_0)=6.$$

Шукане рівняння дотичної площини за (1) має вигляд:

$$4(x-1)+4(y-2)+6(z-3)=0,$$

або

$$2x+2y+3z-15=0.$$

Шукане рівняння нормалі до поверхні за (2) має вигляд:

$$\frac{x-1}{4}=\frac{y-2}{4}=\frac{z-3}{6},$$

або

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-3}{3}.$$

Відповідь: $2x+2y+3z-15=0$ – рівняння дотичної площини, $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-3}{3}$ – рівняння нормалі до поверхні.

3.5. Похідна за напрямом. Градієнт

Якщо виходити з тлумачення похідної як "швидкості зміни" функції, то для функції $z=f(x,y)$ частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$ виражають швидкості зміни функції за напрямом координатних осей Ox і Oy відповідно. Похідна за напрямом у деякому розумінні узагальнює поняття частинної похідної.

Нехай $z=f(x,y)$ – функція, що визначена в області D. Розглянемо деяку точку $M(x,y)\in D$ і деякий напрям $\vec{l}$, що визначається напрямними косинусами $\cos\alpha$ і $\cos\beta$. При переміщенні в заданому напрямі $\vec{l}$ точки $M(x,y)$ у точку $M'(x+\Delta x,y+\Delta y)\in D$ функція $z=f(x,y)$ отримає приріст

$$\Delta_{\vec{l}}z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y),$$

який називається *приростом функції z за напрямом* $\vec{l}$.

Означення 7. *Похідною* функції $z = f(x, y)$ *за напрямом вектора* $\vec{l}$ називається границя відношення приросту функції за цим напрямом до величини переміщення за умови, що остання прямує до нуля, тобто

$$\frac{\partial z}{\partial \vec{l}} = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta_{\vec{l}} z}{\Delta l}, \qquad (5)$$

З цієї точки зору похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$ можна розглядати як похідні функції z за додатними напрямами осей координат Ox і Oy.

Похідна $\frac{\partial z}{\partial \vec{l}}$ характеризує швидкість зміни функції у напрямі $\vec{l}$.

Означення 8. *Похідною* функції $z = f(x, y)$ *за напрямом вектора* $\vec{l}$ називається величина

$$\frac{\partial z}{\partial \vec{l}} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}\cos\beta, \qquad (6)$$

яка характеризує зміну функції $z = f(x, y)$ в даному напрямі $\vec{l}$, де $\cos\alpha$, $\cos\beta$ – напрямні косинуси напряму $\vec{l}$.

Зокрема, якщо $\alpha = 0$, $\beta = \frac{\pi}{2}$, то $\frac{\partial z}{\partial \vec{l}} = \frac{\partial z}{\partial x}$; якщо $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $\beta = 0$, то $\frac{\partial z}{\partial \vec{l}} = \frac{\partial z}{\partial y}$.

Приклад: Знайти похідну функції $z = 4 - x^2 - y^2$ в точці $A(-1, 2)$ за напрямом вектора $\overrightarrow{AB}$, де $B(3, 1)$.

Розв'язання.

1) Знайдемо частинні похідні в точці $A(-1, 2)$:

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{A(-1,2)} = \left.-2x\right|_{A(-1,2)} = 2;$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{A(-1,2)} = \left.-2y\right|_{A(-1,2)} = -4.$$

2) Знайдемо координати вектора $\overrightarrow{AB}$:

$$\overrightarrow{AB} = (3+1; 1-2) = (4; -1)$$

та його напрямні косинуси:

$$\cos\alpha = \frac{4}{\sqrt{4^2 + 1^2}} = \frac{4}{\sqrt{17}}, \qquad \cos\beta = \frac{-1}{\sqrt{17}}.$$

3) Обчислимо похідну за указаним напрямом за формулою (5):

$$\frac{\partial z}{\partial \vec{l}} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}\cos\beta = 2 \cdot \frac{4}{\sqrt{17}} + (-4)\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right) = \frac{12}{\sqrt{17}} = \frac{12\sqrt{17}}{17}.$$

Відповідь: $\frac{\partial z}{\partial \vec{l}} = \frac{12\sqrt{17}}{17}$.

Зауваження: Для функції $u = f(x, y, z)$ її похідна за напрямом вектора $\vec{l}(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ дорівнює:

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{l}} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma.$$

Виникає питання, а за яким напрямом похідна функції $z = f(x, y)$ у даній точці має найбільше значення? Цей напрям визначає вектор, який називається *градієнтом*.

Означення 9. *Градієнтом* функції $z = f(x, y)$ в точці $M(x, y)$ називається вектор, координатами якого є значення частинних похідних цієї функції в точці *M*.

Позначається: $grad\ z$.

Отже, за означенням,

$$grad\ z = \frac{\partial z}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial z}{\partial y}\vec{j}\,. \qquad (6)$$

Зауваження: Саме $gradz$ у заданій точці вказує напрям найшвидшого зростання функції в цій точці, при цьому

$$\max_{\vec{l}} \frac{\partial z}{\partial \vec{l}} = |\ grad\ z\ | = \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,.$$

Приклад: Знайти найбільшу швидкість зростання функції $z = 4 - x^2 - y^2$ в точці $A(-1,2)$.

Розв'язання. Знайдемо частинні похідні в точці $A(-1,2)$:

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{A(-1,2)} = -2x\Big|_{A(-1,2)} = 2\,;$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{A(-1,2)} = -2y\Big|_{A(-1,2)} = -4\,.$$

2) Знайдемо градієнт за формулою (6):

$$grad\ z = \frac{\partial z}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial z}{\partial y}\vec{j} = 2\vec{i} + 4\vec{j}\,.$$

3) Найбільша швидкість зростання функції в точці $A(-1,2)$:

$$\max_{\vec{l}} \frac{\partial z}{\partial \vec{l}} = |\ grad\ z\ | = \sqrt{2^2+4^2} = \sqrt{20} = 4\sqrt{5}.$$

Відповідь: $\max_{\vec{l}} \frac{\partial z}{\partial \vec{l}} = 4\sqrt{5}.$

Завдання для самостійного розв'язання

Завдання № 1. Знайти екстремуми функції:

1) $z = x^2 + y^2 - 2x - 4\sqrt{xy} - 2y + 8$; 2) $z = 2x^3 - xy^2 + 5x^2 + y^2$;

3) $z = e^{x/2} \cdot (x + y^2)$.

Завдання № 2. Обчислити найбільше та найменше значення функції $z = f(x,y)$ в заданій області:

1) $z = x^2 + y^2 - 9xy + 27$; $0 \le x \le 3,\ \ 0 \le y \le 3$;

1) $z = x^2 + 2xy - 4x + 8y$; $x = 0$; $y = 0$; $x = 1$; $y = 2$;

2) $z = x^2 \cdot y \cdot (4 - x - y)$; $x = 0$; $y = 0$; $x + y = 6$;

3) $z = e^{-x^2-y^2} \cdot (2x^2 + 3y^2)$; $x^2 + y^2 \le 4$

Завдання № 3. Скласти рівняння дотичної площини й нормалі до поверхні $z = f(x,y)$ у точці A:

1) $z = 2x^2 - xy + y^2$; A (1;2;4); 2) $z = x^2 + 2y^2 + 3y$; A (–1;2;3).

Завдання № 4. Для заданої функції $z = f(x,y)$ знайти: 1) grad z у точці A; 2) похідну функції z у точці A за напрямом з вектора $\bar{l}$:

1) $z = arctg(x^2 \cdot y^2)$; A (1;–1); $\bar{l} = 5\bar{i} - 12\bar{j}$; 2) $z = \ln(5x^2 + 4y^2)$; A (1;1); $\bar{l} = 2\bar{i} - \bar{j}$;

3) $z = \sqrt{xy}$; A (4;2); $\bar{l} = \bar{i} - 2\bar{j}$.

Питання для самоконтролю

1. Що називається функцією двох змінних та якими способами вона може бути задана?
2. Що називається функцією трьох змінних?
3. Що називається областю існування функції декількох змінних?

4. Що називається границею функції $z = f(x, y)$ в точці $M_0(x_0, y_0)$? У якому разі ця функція називається неперервною в точці M_0 в області D?
5. Що називається точкою розриву функції двох змінних?
6. Як за допомогою границі відношення приросту функції двох змінних до приросту аргументу визначаються частинні похідні?
7. Що називається повним диференціалом функції двох змінних? У чому полягає його геометричний зміст?
8. Що називається повною похідною функції $z = f(x, y)$, де $x = x(t)$, $y = y(t)$?
9. Як знаходяться частинні похідні складеної функції $z = f(x, y)$, де $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, по u і v?
10. Як за допомогою частинних похідних виражаються частинні похідні неявної функції двох змінних?
11. Дайте означення частинних похідних вищих порядків.
12. Як визначаються локальні максимум і мінімум функції двох змінних та що необхідно зробити, щоб знайти ці значення?
13. Як визначається похідна за напрямом?

РОЗДІЛ 3. ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

1. КРАТНІ ІНТЕГРАЛИ

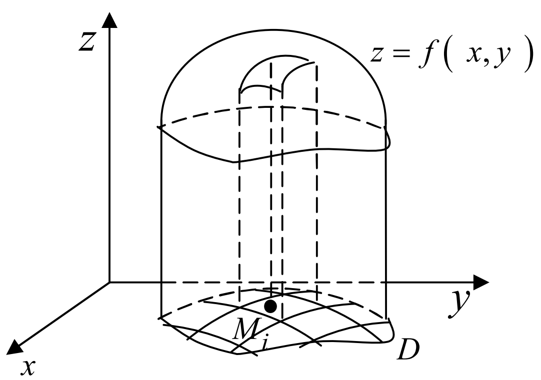
1.1. Задачі, що приводять до поняття подвійного інтеграла

1. Задача про об'єм циліндричного тіла. Нехай функція $z = f(x,y)$ неперервна й невід'ємна в деякій області D площини Oxy.

Тіло, обмежене графіком функції $f(x,y)$, областю D та циліндричною поверхнею, напрямна якої збігається з межею області D, а твірні паралельні осі Oz, називається *циліндричним*.

Задача полягає в обчислені об'єму V цього тіла.

Розв'язання. Розіб'ємо область D довільним чином на n часткових областей D_i за допомогою гладких ліній, площі яких дорівнюють ΔS_i, так, щоб вони не мали внутрішніх спільних точок. Через лінії розбиття проведемо циліндричні поверхні з твірними, паралельними осі Oz. Ці поверхні розіб'ють циліндричне тіло на n елементарних циліндричних стовпчиків. Очевидно, що об'єм усього циліндричного тіла дорівнює сумі об'ємів V_i цих стовпчиків.



У кожній частковій області D_i виберемо довільну точку $M_i(\xi_i;\eta_i)$ та обчислимо значення функції f у цій точці:

$$f(\xi_i,\eta_i) = f(M_i).$$

Об'єм елементарного циліндричного тіла наближено дорівнює:

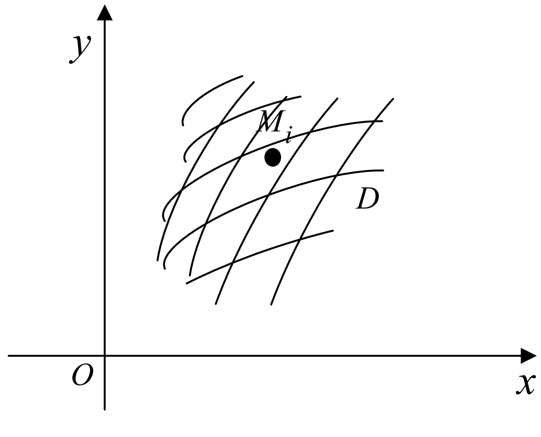
$$V_i \approx f(M_i)\Delta S_i.$$

Тоді об'єм усього тіла:

$$V = \sum_{i=1}^{n} V_i \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta S_i.$$

Точність цієї формули збільшується із збільшенням кількості часткових областей та із зменшенням найбільшої відстані $d(D_i)$ між будь-якими двома точками її межі. Точне значення об'єму циліндричного тіла одержимо, перейшовши до границі при $\max d(D_i) \to 0$:

$$V = \lim_{\max d(D_i)\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta S_i.$$



2. Задача про масу тонкої пластини. Нехай плоска неоднорідна матеріальна пластина займає на площині Oxy область D та її речовина неперервно розподілена з густиною $\rho = \rho(x,y)$. Задача полягає у визначенні маси m пластини.

Розв'язання. Якщо функція ρ стала, то

$$m = \rho S.$$

Розіб'ємо пластину довільним чином на n частин D_i, які не мають спільних внутрішніх точок таі площі яких дорівнюють ΔS_i, $i = 1,...,n$. У кожній області D_i виберемо довільну точку

$M_i(\xi_i;\eta_i)$ та обчислимо значення функції ρ в цій точці:

$$\rho(\mathrm{M_i}) = \rho(\xi_i, \eta_i).$$

Якщо область D_i достатньо мала, то можна вважати густину на ній сталою та рівною $\rho(\xi_i;\eta_i)$. Тоді маса частини D_i пластини наближено дорівнює:

$$m_i \approx \rho(\xi_i, \eta_i)\Delta S_i.$$

Маса всієї пластини:

$$m = \sum_{i=1}^{n} m_i \approx \sum_{i=1}^{n} \rho(\xi_i, \eta_i)\Delta S_i.$$

Точне значення маси пластини одержимо, якщо перейдемо до границі при $\max d(D_i) \to 0$:

$$\mathrm{m} = \lim_{\max d(D_i)\to 0} \sum_{i=1}^{n} \rho(\xi_i, \eta_i)\Delta S_i.$$

Отже, різні за змістом задачі зведено до знаходження границь одного й того самого вигляду. До границь такого вигляду приводять багато інших задач фізики й техніки (про сумарний заряд, розподілений у області D із заданою густиною; про тиск на дно судини; про кількість світлової енергії, що падає; тощо). Тому виникає потреба навчитися обчислювати такі границі незалежно від конкретного змісту певної задачі.

1.2. Означення подвійного інтеграла. Умови існування подвійного інтеграла

Нехай функція $f(x,y)$ визначена в замкненій обмеженій області $D \subset Oxy$, межа якої є гладкою або кусково-гладкою лінією. Розіб'ємо область D довільним чином на n часткових областей D_i, які не мають спільних внутрішніх точок та площі яких дорівнюють ΔS_i, $i = 1,...,n$. Виберемо в кожній з цих областей довільну точку $M_i(\xi_i;\eta_i)$ та обчислимо значення функції f у цій точці: $f(\xi_i;\eta_i)$.

Побудуємо суму $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta S_i$. Ця сума називається *інтегральною сумою функції* $f(x,y)$, яка відповідає заданому розбиттю області D на частини D_i та заданому вибору проміжних точок M_i.

Означення 1. *Діаметром обмеженої множини* L *точок* називається найбільша відстань між її двома довільними точками.

Позначається: $\lambda_n : \lambda_n = \max\limits_{i=1,..n} d(D_i)$.

Означення 2. Скінчена границя інтегральної суми при $\lambda_n \to 0$, якщо вона існує та не залежить ні від розбиття області D на часткові області, ні від вибору проміжних точок M_i в них, називається *подвійним інтегралом від функції* $f(x,y)$ *по області* D.

Позначається: $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ (або $\iint\limits_D f(x,y)dS$).

Отже, за означенням

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \lim_{\lambda_n \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta S_i.$$

Функція $f(x,y)$ називається *інтегрованою по області* D.

Область D називається *областю інтегрування*; змінні x, y – *змінними інтегрування*, $dxdy$ (або dS) – *елементом площі*.

Повертаючись до задач із пункту 1.1, матимемо:

1. Об’єм циліндричного тіла, обмеженого графіком функції $f(x,y)$, областю D та циліндричною поверхнею, напрямна якої збігається з межею області D, а твірні паралельні осі Oz, дорівнює подвійному інтегралу функції $f(x,y)$ по області D:

$$V=\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy .$$

У цьому полягає геометричний зміст подвійного інтеграла*:* подвійний інтеграл від невід’ємної функції чисельно дорівнює об’єму циліндричного тіла.

Зауваження: Якщо в останній формулі $f(x,y)\equiv 1\ \forall (x,y)\in D$, то отримаємо формулу для обчислення площі області D:

$$S=\iint\limits_{D} dxdy .$$

2. Маса тонкої пластини дорівнює подвійному інтегралу від густини:

$$m=\iint\limits_{D} \rho(x,y)dxdy .$$

У цьому полягає фізичний зміст подвійного інтеграла.

Зауваження: Подвійному інтегралу можна надати різний геометричний (об’єм тіла, площа плоскої фігури, площа поверхні тощо) і різний фізичний (маса пластини, центр маси, статичні моменти, моменти інерції тощо) зміст.

Теорема 1 (достатня умова інтегрованості функції по двовимірній області): Якщо функція $f(x,y)$ неперервна в замкненій обмеженій області $D\subset R^2$, то вона інтегрована по цій області, тобто існує подвійний інтеграл $\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy$.

Зауваження: Введене означення подвійного інтеграла конструктивно цілком аналогічне означенню визначеного інтеграла: у обох випадках розглядається деяка функція f, у випадку визначеного інтеграла це – функція однієї змінної, визначена на одновимірній області – відрізку $[\,a,b\,]\in R$, у випадку подвійного інтеграла – функція двох змінних, визначена в двовимірній області $D\subset R^2$. У обох випадках проводиться розбиття області на окремі частини, в кожній з яких береться довільна точка та в ній обчислюється значення функції. Після чого знайдене значення функції множиться на міру відповідної частини області визначення: у одновимірному випадку такою мірою була довжина часткового відрізку, у двовимірному випадку – площа часткової області. Потім будуються інтегральні суми та знаходяться їхні границі, коли міра частин області прямує до нуля. За цією ж схемою можна утворити потрійний інтеграл, мірою області при цьому буде об’єм.

1.3. Означення потрійного інтеграла. Умови існування потрійного інтеграла

Нехай функція $f(x,y,z)$ визначена в замкненій обмеженій області $G\subset R^3$ тривимірного простору, межа якої є гладкою або кусково-гладкою поверхнею. Розіб’ємо область G довільним чином на n часткових поверхонь G_i, які не мають спільних внутрішніх точок та об’єми яких дорівнюють ΔV_i, $i=1,...,n$. Виберемо в кожній з цих поверхонь довільну точку $M_i(\,\xi_i,\eta_i,\zeta_i\,)$ та обчислимо значення функції f у цій точці: $f(\,\xi_i,\eta_i,\zeta_i\,)$.

Побудуємо суму вигляду $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta V_i$. Ця сума називається *інтегральною сумою функції* $f(x,y,z)$, яка відповідає заданому розбиттю області G на частини G_i та заданому вибору проміжних точок M_i.

Позначимо через λ_{n} найбільший із діаметрів областей G_i, тобто найбільшу відстань між двома довільними точками області G :

$$\lambda_n = \max_{i=1,..n} d(G_i).$$

Означення 3. Скінчена границя інтегральної суми при $\lambda_n \to 0$, якщо вона існує та не залежить ні від вибору проміжних точок M_i в них, називається *потрійним інтегралом від функції* $f(x, y, z)$ *по області* G.

Позначається: $\iiint\limits_G f(x, y, z)dxdydz$ (або $\iiint\limits_G f(x, y, z)dV$).

Отже, за означенням,

$$\iiint\limits_G f(x, y, z)dxdydz = \lim_{\lambda_n \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta V_i .$$

Функція $f(x, y, z)$ називається *інтегрованою по області* G, область G – *областю інтегрування*; змінні x, y, z – *змінними інтегрування*, $dxdydz$ (або dV) – *елементом об'єму.*

Потрійному інтегралу можна надати різний геометричний і фізичний зміст. Наприклад, якщо в області G $f(x, y, z) \equiv 1$, то об'єм тіла G :

$$V = \iiint\limits_G dxdydz .$$

Якщо функцію f розглядати як об'ємну густину $\rho(x, y, z)$ (масу одиниці об'єму) розподілу деякої речовини в області G, то маса тіла G :

$$m = \iiint\limits_G \rho(x, y, z)dxdydz .$$

Теорема 2 (достатня умова інтегрованості функції по тривимірній області): Якщо функція $f(x, y, z)$ неперервна в замкненій обмеженій області $G \subset R^3$, то вона в цій області інтегрована, тобто існує потрійний інтеграл $\iiint\limits_G f(x, y, z)dxdydz$.

1.4. Властивості кратних інтегралів

Оскільки подвійний і потрійний інтеграли є безпосередніми узагальненнями визначеного інтеграла відповідно на двовимірний і тривимірний простір, то їх властивості аналогічні відповідним властивостям визначеного інтеграла: лінійність, адитивність, формули середнього значення й т.ін. Сформулюємо ці властивості.

1. Сталий множник можна виносити за знак кратного інтеграла:

$$\iint\limits_D cf(x, y)dxdy = c\iint\limits_D f(x, y)dxdy;$$

$$\iiint\limits_G cf(x, y, z)dxdydz = c\iiint\limits_G f(x, y, z,)dxdydz .$$

2. Кратний інтеграл від суми функцій дорівнює сумі кратних інтегралів від цих функцій:

$$\iint\limits_D f(x, y) \pm \mathrm{g}(\le)dxdy = \iint\limits_D f(x, y)dxdydz \pm \iint\limits_D g(x, y)dxdy;$$

$$\iiint\limits_G f(x, y, z) \pm g(x, y, z)dxdydz = \iiint\limits_G f(x, y, z,)dxdydz \pm \iiint\limits_G g(x, y, z)dxdydz .$$

Зауваження: Рівності 1 і 2 виражають властивість лінійності кратного інтеграла.

3 (адитивність кратного інтеграла): Якщо область інтегрування функції f розбити на дві області, які не мають спільних внутрішніх точок, то

$$\iint\limits_D f(x, y)dxdy = \iint\limits_{D_1} f(x, y)dxdy + \iint\limits_{D_2} f(x, y)dxdy,$$

де $D = D_1 \cup D_2, D_1 \cap D_2 = \varnothing$;

$$\iiint\limits_G f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint\limits_{G_1} f(x,y,z)\,dxdydz + \iiint\limits_{G_2} f(x,y,z)\,dxdydz,$$

де $G = G_1 \cup G_2, G_1 \cap G_2 = \varnothing$.

4 (збереження знака підінтегральної функції кратним інтегралом): Якщо в області інтегрування $f \ge 0$, то

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy \ge 0;$$

$$\iiint\limits_G f(x,y,z)\,dxdydz \ge 0.$$

5 (монотонність кратного інтеграла): Якщо функції f і g визначені в одній і тій самій області D (G) і $f \ge g$, то

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy \ge \iint\limits_D g(x,y)\,dxdy,$$

$$\iiint\limits_G f(x,y,z)\,dxdydz \ge \iiint\limits_G g(x,y,z)\,dxdydz.$$

6 (оцінка кратного інтеграла по області): Якщо функція f неперервна в обмеженій замкненій двовимірній (тривимірній) області D(G), яка має площу S (об'єм V), то

$$mS \le \iint\limits_D f(x,y)\,dxdy \le MS,$$

$$mV \le \iiint\limits_D f(x,y,z)\,dxdydz \le MV,$$

де m і M – відповідно найменше й найбільше значення функції f в області D(G).

7 (середнє значення функції): Якщо функція f неперервна в замкненій обмеженій двовимірній (тривимірній) області D(G), яка має площу S (об'єм V), то в цій області існує така точка (x_0, y_0) ((x_0, y_0, z_0)), що

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = f(x_0,y_0)S,$$

де

$$f(x_0,y_0) = \frac{1}{S}\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$$

– середнє значення функції f в двовимірній області D;

$$\iiint\limits_D f(x,y,z)\,dxdydz = f(x_0,y_0,z_0)V,$$

де

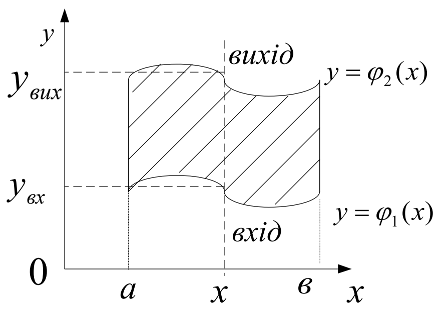
$$f(x_0,y_0,z_0) = \frac{1}{V}\iiint\limits_D f(x,y,z)\,dxdydz$$

– середнє значення функції f в тривимірній області G.

1.5. Обчислення подвійного інтеграла повторним інтегруванням

Нехай функція $f(x,y)$ неперервна й невід'ємна в області D. Відносно області D зробимо певні припущення:

1) $D = \{ (x, y) : a \le x \le y,\ \ \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x) \}$.

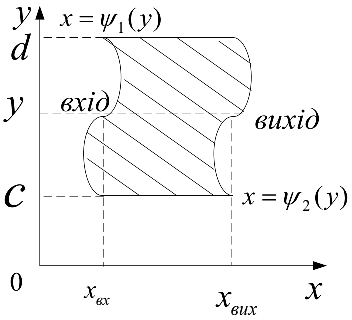


Область такого типу називається *правильною в напрямку осі* Oy (*стандартною відносно осі* Oy).

Виберемо довільну точку $x \in [a, в]$ та проведемо через неї пряму, паралельну осі Oy. Точки перетину цієї прямої з кривими $y = \varphi_1(x)$ і $y = \varphi_2(x)$ називаються відповідно *точкою входу в область* D та *точкою виходу з області* D.

Позначимо ординати цих точок:

$$y_{входу} = \varphi_1(x); \qquad y_{виходу} = \varphi_2(x).$$



2) $D = \{ (x, y) : \varphi_1(x) \le x \le \varphi_2(x),\ \ c \le y \le d \}$.

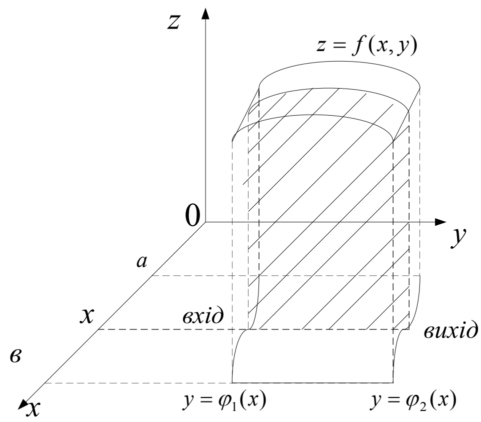
Область такого типу називається *правильною в напрямку осі* Ox (*стандартною відносно осі* Oy).

Виберемо довільну точку $y \in [c, d]$ та проведемо через неї пряму, паралельну осі Ox. Точки перетину цієї прямої з кривими $x = \varphi_1(y)$ і $x = \varphi_2(y)$ називаються відповідно *точкою входу в область* D та *точкою виходу з області D*.

Позначимо абсциси цих точок:

$$x_{входу} = \varphi_1(y); \qquad x_{виходу} = \varphi_2(y).$$

Скористаємося тепер геометричним змістом подвійного інтеграла.



Припустимо, що $f(x, y) \ge 0$ в області D та область D є правильною в напрямку осі Oy (*область* 1-*го типу*).

Побудуємо відповідне циліндричне тіло та знайдемо його об'єм. За означенням

$$\iint\limits_D f(x, y)dxdy = V.$$

З іншого боку,

$$V = \int_a^в S(x)dx,$$

де $S(x)$ – площа перерізу циліндричного тіла площиною $x = const$, $x \in [a, в]$.

Цей переріз являє собою криволінійну трапецію, обмежену лініями $z = f(x, y) = f(c, y)$ (при фіксованому x $z = f(x, y)$ залежить лише від y), $y = y_{входу}$ та $y = y_{виходу}$. Площа $S(x)$ цієї трапеції дорівнює визначеному інтегралу:

$$S(x) = \int_{y_{входу}}^{y_{виходу}} zdy = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)dy.$$

Тоді об'єм циліндричного тіла дорівнює

$$V = \int_a^в \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)dy \right) dx,$$

або у більш зручному записі:

$$V = \int_a^в dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)dy.$$

Оскільки об'єм циліндричного тіла дорівнює подвійному інтегралу від $f(x, y)$, то звідси отримаємо формулу для обчислення подвійного інтеграла по області D:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^в dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy\,. \qquad (1)$$

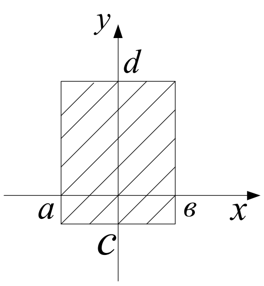
Права частина формули (1) називається *повторним* (*двократним*) *інтегралом* від функції $f(x, y)$.

Отже, подвійний інтеграл дорівнює відповідному повторному інтегралу, тобто обчислення подвійного інтеграла зводиться до двох квадратур. У повторному інтегралі (1) інтегрування спочатку виконується по змінній y (при цьому змінна x вважається сталою), а потім по змінній x. Інтеграл по y називається *внутрішнім*, по x – *зовнішнім*.

Зауваження: Аналогічна формула має місце у випадку, коли область D є правильною в напрямі осі Ox (*область* 2-*го типу*):

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} f(x,y)dx \qquad (2)$$

У повторному інтегралі (2) спочатку обчислюємо внутрішній інтеграл по змінній x (при цьому змінна y вважається сталою), а потім – зовнішній по змінній y.



Зауваження: Якщо область D є правильною в обох напрямках, то подвійний інтеграл можна обчислювати як за формулою (1), так і за формулою (2). Наприклад, якщо область D є прямокутником

$$D = \{ (x, y) : a \le x \le b, \quad c \le y \le d \},$$

то

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^в dx \int\limits_c^d f(x,y)dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_a^в f(x,y)dx\,, \qquad (3)$$

Отже, якщо межі інтегрування в повторному інтегралі від неперервної функції скінчені й сталі, то результат інтегрування не залежить від порядку інтегрування.

Зауваження: Якщо область D не є правильною ні в якому напрямі, то таку область слід розбити на частини, кожна з яких є правильною у напрямі осі Ox або осі Oy, а потім скористатись властивістю адитивності подвійного інтеграла.

Повторні інтеграли в правих частинах формул (1) − (3) називаються *інтегралами з різним порядком інтегрування*.

Зміна порядку інтегрування є переходом від однієї формули до іншої і її роблять для полегшення обчислень.

Приклад: Обчислити подвійний інтеграл:

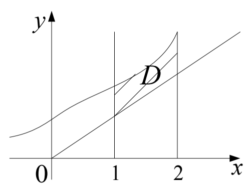
1) $\iint\limits_D (x^2 + xy + y^2)dxdy$ по області $D = \{ (x, y) : 1 \le x \le 2, x \le y \le e^2 \}$;

2) $\iint\limits_D (x^2 + y)dxdy$ по області, обмеженій параболами $y = x^2$ і $x = y^2$.

Розв'язання.

1) Область D обмежена лініями $x = 1$, $x = 2$, $y = x$, $y = e^x$. Область D є правильною у напрямку осі Oy.

За формулою (1)



$$\iint\limits_D (x^2 + xy + y^2)dxdy = \int\limits_1^2 dx \int\limits_x^{e^x} (x^2 + xy + y^2)dy = \int\limits_1^2 \left(x^2 y + \frac{xy^2}{2} + \frac{y^3}{3} \right)\Bigg|_x^{e^x} dx =$$

$$= \int\limits_1^2 \left(x^2 e^x + \frac{xe^{2x}}{2} + \frac{e^{3x}}{3} - x^3 - \frac{x^3}{2} - \frac{x^3}{3} \right) dx = \int\limits_1^2 \left(x^2 e^x + \frac{xe^{2x}}{2} + \frac{e^{3x}}{3} - \frac{11}{6}x^3 \right) dx =$$

$$=\left(x^2e^x-2xe^x+2e^x-\frac{1}{4}xe^{2x}-\frac{1}{8}e^{2x}+\frac{1}{9}e^{3x}-\frac{11}{24}x^4 \right)\Bigg|_1^2= 4e^2-4e^2+2e^2-\frac{1}{2}e^4-\frac{1}{8}e^4+\frac{1}{9}e^6-\frac{11}{24}\cdot 16-e+$$

$$+2e-2e-\frac{1}{4}e^2+\frac{1}{8}e^2-\frac{1}{9}e^2+\frac{11}{24}=\frac{1}{9}e^6+\frac{3}{8}e^4-\frac{1}{9}e^3+\frac{15}{8}e^2-e-\frac{165}{24}.$$

Відповідь: $\iint\limits_D\left(x^2+xy+y^2 \right)dxdy=\frac{1}{9}e^6+\frac{3}{8}e^4-\frac{1}{9}e^3+\frac{15}{8}e^2-e-\frac{165}{24}.$

2) Область

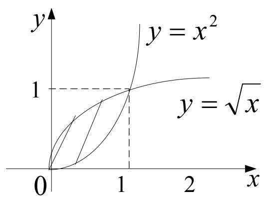
$$D=\left\{ \left(x,y \right): 0\le x\le 1,\quad \sqrt{x}\le y\le x^2 \right\}$$

є правильною в обох напрямках. Виберемо напрям осі Оу:

$$D=\left\{ \left(x,y \right): 0\le x\le 1,\quad \sqrt{x}\le y\le x^2 \right\}.$$

За формулою (1):

$$\iint\limits_D\left(x^2+y \right)dxdy=\int\limits_0^1 dx\int\limits_{x^2}^{\sqrt{x}}\left(x^2+y \right)dy=\int\limits_0^1\left(x^2y+\frac{y^2}{2} \right)\Bigg|_{x^2}^{\sqrt{x}}dx=$$



$$=\int\limits_0^1\left(x^2\sqrt{x}+\frac{x}{2}-x^4-\frac{x^4}{2} \right)dx=\int\limits_0^1\left(x^{5/2}+\frac{x}{2}-\frac{3}{2}x^4 \right)dx=\left(\frac{2}{7}x^{7/2}+\frac{x^2}{4}-\frac{3}{20}x^5 \right)\Bigg|_0^1=$$

$$=\frac{2}{7}+\frac{1}{4}-\frac{3}{20}=\frac{40+35-21}{140}=\frac{54}{140}=\frac{27}{70}.$$

Відповідь: $\iint\limits_D\left(x^2+y \right)dxdy=\frac{27}{70}$.

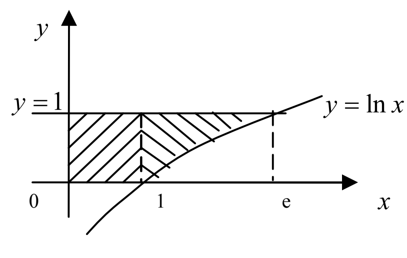
Приклад 2: Змінити порядок інтегрування у повторному інтегралі $I=\int\limits_0^1 dy\int\limits_0^{e^y} f(x,y)dx$

Розв'язання. 1) Відновимо область D :
Область

$$D=\left\{ \left(x,y \right): 0\le x\le 1,\quad 0\le y\le e^y \right\}$$

правильна в напрямку осі Ox. При зміні порядку інтегрування область D треба розбити на дві області D_1 і D_2, правильні в напрямі осі Oy .

2) Виразимо рівняння меж областей D_1 і D_2 через у:



$D_1=\left\{ \left(x,y \right): 0\le x\le 1,\quad 0\le y\le 1 \right\}$;

$D_2=\left\{ \left(x,y \right): 1\le x\le e,\quad \ln x\le y\le 1 \right\}$.

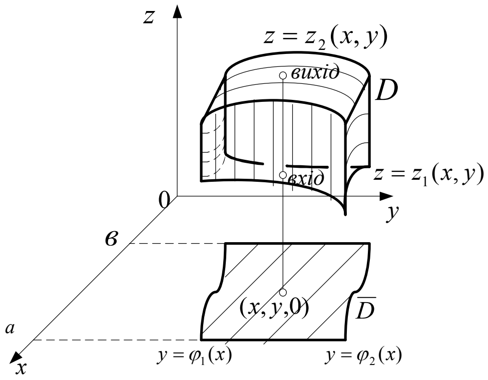
Отже,

$$I=\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^1 f(x,y)dy+\int\limits_0^e dx\int\limits_{\ln x}^1 f(x,y)dy .$$

Відповідь: $I=\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^1 f(x,y)dy+\int\limits_0^e dx\int\limits_{\ln x}^1 f(x,y)dy$.

1.6. Обчислення потрійного інтеграла повторним інтегруванням

Як і у випадку подвійного інтеграла, обчислення потрійного інтеграла зводиться до обчислення повторного (трикратного) інтеграла, добто до трьох квадратур.



Нехай тривимірна область G обмежена знизу поверхнею $z = z_1(x, y)$, зверху – поверхнею $z = z_2(x, y)$, з боків – циліндричною поверхнею з твірними, паралельними осі Oz. Спроектуємо область G на площину Oxy та припустимо, що її проекція D є правильною, наприклад, в напрямі осі Oy. Така тривимірна область називається *правильною у напрямі осі* Oz.

Виберемо довільну точку $(x; y; 0) \in D$ та проведемо через неї пряму, паралельну осі Oz.
Позначимо аплікати цих точок:

$$z_{входу} = z_1(x, y), \qquad z_{виходу} = z_2(x, y).$$

Якщо функції $z = z_1(x, y)$ і $z = z_2(x, y)$ неперервні в області D, а функція $u = f(x, y, z)$ неперервна в області G, то має місце формула:

$$\iiint\limits_G f(x, y, z)\,dv = \iint\limits_D \left(\int\limits_{z_{входу}}^{z_{виходу}} f(x, y, z)\,dz \right) dS.$$

Якщо область G обмежена лініями: $x = a$, $x = b$, $z = z_2(x, y)$ з боків, $y = \varphi_1(x)$ знизу та $y = \varphi_2(x)$ зверху, то, переходячи від подвійного інтеграла до повторного, дістанемо формулу:

$$\iiint\limits_G f(x, y, z)\,dxdydz = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z)\,dz. \qquad (4)$$

Права частина формули (4) називається *повторним* (*трикратним*) *інтегралом*.

У повторному інтегралі (4) інтегрування спочатку виконується по змінній z (при цьому змінні x і y вважаються сталими), потім по змінній y (при цьому змінна x вважається сталою). Інтегруючи отриману функцію від x в межах від a до b, дістанемо значення потрійного інтеграла.

<u>Зауваження 1:</u> Порядок інтегрування в правій частині (4) може бути й іншим. Наприклад, якщо область G, правильна в напрямі осі Oz, проектується в область D, правильну в напрямі осі Ox, яка обмежена лініями $y = c$, $y = d$, $x = \psi_1(y)$, $x = \psi_2(y)$, то

$$\iiint\limits_G f(x, y, z)dxdydz = \int\limits_c^d dy \int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} dx \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z)dz$$

<u>Зауваження 2:</u> Якщо тривимірна область правильна в напрямі всіх трьох координатних осей, то інтегрування виконується в будь-якому порядку. Зокрема, якщо область інтегрування є паралелепіпедом

$$G = \left\{ (x, y, z) : a \le x \le b, \quad c \le y \le d, \quad k \le z \le l \right\},$$

то

$$\iiint\limits_G f(x, y, z)dxdydz = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d dy \int\limits_k^l f(x, y, z)dz = \int\limits_c^d dy \int\limits_a^b dx \int\limits_k^l f(x, y, z)dz = \ldots = \int\limits_k^l dz \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x, y, z)dy \quad (5)$$

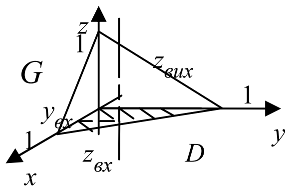
<u>Зауваження:</u> Якщо тривимірна область не є правильною, її розбивають на правильні області та користуються властивістю адитивності потрійного інтеграла.

<u>Приклад 1:</u> Обчислити потрійний інтеграл:

1) $\iiint\limits_D zdxdydz$, якщо область G обмежена площинами $x = 0,\ y = 0,\ x + y + z = 1$;

2) $\iiint\limits_G (x+y+z)\,dxdydzx$ по області $G=\{(x,y,z): 0\le x\le 1,\ \ 0\le y\le 1,\ \ 0\le z\le 1\}$.

Розв'язання.



1) Побудуємо область G. Проекцією області G на площину Oxy є трикутник, обмежений лініями $x=0$, $y=0$, $y=1-x$. Область G правильна в напрямку осі Oz;

$z_{входу}=0$, $z_{виходу}=1-x-y$.

Її проекція D правильна в напрямі осі Oy: $y_{входу}=0$, $y_{виходу}=1-x$.

Отже, за формулою (4):

$$\iiint\limits_D z\,dxdydz=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}dy\int_0^{1-x-y}z\,dz=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}\frac{z^2}{2}\Bigg|_0^{1-x-y}dy=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1 dx\int_0^{1-x}(1-x-y)^2\,dy=$$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^1 dx\int_0^{1-x}(1-x-y)^2\,d(1-x-y)=$$

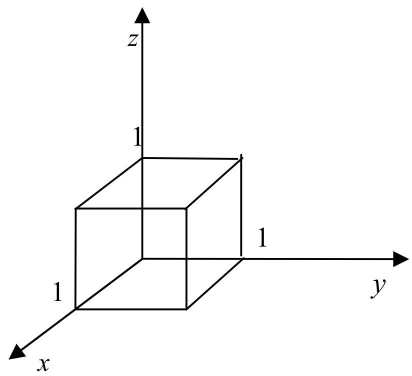
$$=-\frac{1}{6}\int_0^1 (1-x-y)^3\Bigg|_0^{1-x}dx=\frac{1}{6}\int_0^1(1-x)^3\,dx=$$

$$=-\frac{1}{6}\int_0^1(1-x)^3\,d(1-x)=-\frac{1}{24}(1-x)^4\Bigg|_0^1=\frac{1}{24}.$$

Відповідь: $\iiint\limits_D z\,dxdydz=\frac{1}{24}$.

2) Побудуємо область G.

Оскільки область G є кубом, то за формулою (5)



$$\iiint\limits_G (x+y+z)\,dxdydzx=\int_0^1 dx\int_0^1 dy\int_0^1 (x+y+z)\,dz=$$

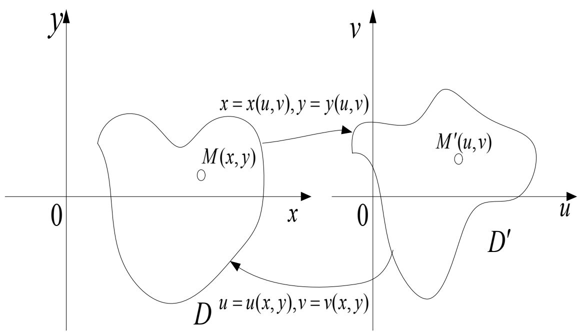
$$=\int_0^1 dx\int_0^1\left(xz+yz+\frac{z^2}{2}\right)\Bigg|_0^1 dy=\int_0^1 dx\int_0^1\left(x+y+\frac{1}{2}\right)dy=$$

$$=\int_0^1\left(xy+\frac{y^2}{2}+\frac{y}{2}\right)\Bigg|_1^0 dx=\int_0^1(x+1)\,dx=\left(\frac{x^2}{2}+x\right)\Bigg|_1^0=\frac{3}{2}.$$

Відповідь: $\iiint\limits_G (x+y+z)\,dxdydzx=\frac{3}{2}$.

2. ЗАМІНА ЗМІННИХ У КРАТНИХ ІНТЕГРАЛАХ

2.1. Заміна змінних у подвійному інтегралі



Положення точки на площині може визначатися не лише прямокутними декартовими координатами x і y, але й якимось іншими, взагалі кажучи, криволінійними координатами u і v.

Нехай задано дві системи координат Oxy і Ouv та в системі координат Oxy задано деяку область D. Нехай у цій області визначена неперервна функція $f(x,y)$. Функція $f(x,y)$ інтегрована по цій області, отже існує подвійний інтеграл

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy.$$

Перейдемо від декартової системи координат Oxy до системи координат Ouv за формулами

$$x = x(u,v), \qquad y = y(u,v) \qquad (1).$$

Припустимо, що в області D визначено дві функції

$$u = u(x,y), \qquad v = v(x,y) \qquad (2)$$

Формули (1) і (2) визначають перетворення координат, а саме: формула (1) – з Oxy до Ouv, а формула (2) – з Ouv до Oxy.

За допомогою функцій (2) кожній точці $M(x,y) \in D \subset Oxy$ ставиться у відповідність деяка точка $M'(u,v) \subset Ouv$.

Нехай множина всіх точок $M'(u,v)$ теж утворює обмежену замкнену область $D' \subset Ouv$.

Будемо вважати, що функції u, v в області D однозначні й рівняння (2) можна розв`язати відносно u і v.

Теорема 1 (про заміну змінних у подвійному інтегралі): Якщо функції (1) взаємно однозначно відображають замкнену обмежену область $D \subset Oxy$ в замкнену обмежену область $D' \subset Ouv$ та якщо вони мають в області D' неперервні частинні похідні першого порядку й визначник

$$J(u,v) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0,$$

а функція $f(x,y)$ неперервна в області D, то справедлива формула заміни змінних:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D'} f(x(u,v), y(u,v)) \left| J(u,v) \right| dudv \qquad (3)$$

Означення 1. Функціональний визначник $J(u,v)$ називається *визначником Якобі*, або *якобіаном* (Карл Якобі (1804–1851) – німецький математик).

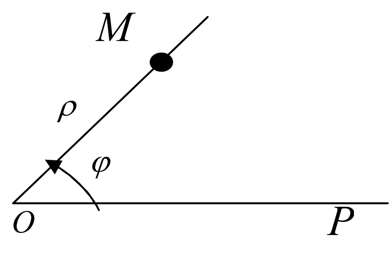
Виконуючи заміну змінних за формулою (3), треба область інтегрування D замінити відповідною областю D', а елемент площі $dxdy$ в декартових координатах x, y замінити елементом площі $\left| J(u,v) \right| dudv$ у координатах u, v.

<u>Зауваження:</u> У подвійному інтегралі, як і у визначеному, заміна змінних – найважливіший спосіб зведення подвійного інтеграла до виду, більш зручному для його обчислення.

2.2. Обчислення подвійного інтеграла у полярній системі координат

Розглянемо окремий випадок – перехід від декартової до полярної системи координат.

У полярній системі координат координати точки M на площині визначаються *полярним радіусом* ρ – відстанню від початку координат (*полюса*) O до точки M – і *полярним кутом* φ – кутом між *полярною віссю* OP і променем, що містить полярний радіус.



Запис $M(\rho,\varphi)$ означає, що точка M має полярні координати.

Перехід з декартових координат до полярних здійснюється за формулами (1), які набувають у цьому випадку вигляду:

$$Oxy \to O\rho\varphi: \qquad \begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{cases}$$

Обчислимо якобіан $J(\rho,\varphi)$:

$$J(\rho,\varphi)=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial\rho} & \dfrac{\partial x}{\partial\varphi}\\ \dfrac{\partial y}{\partial\rho} & \dfrac{\partial y}{\partial\varphi}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\cos\varphi & -\rho\sin\varphi\\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi\end{vmatrix}=\rho,$$

де модуль якобіана

$$|J(\rho,\varphi)|=\rho.$$

Тоді за формулою (3):

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy=\iint\limits_{D'} f(\rho\cos\varphi,\ \rho\sin\varphi)\rho\,d\rho\,d\varphi, \qquad (4)$$

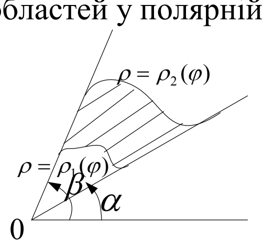
де область інтегрування D задана в декартовій системі координат Oxy, а відповідна їй область D' – у полярній системі координат $O\rho\varphi$.

Отже, щоб у подвійному інтегралі перейти до полярних координат, достатньо координати x і y замінити за формулами $\begin{cases} x=\rho\cos\varphi \\ y=\rho\sin\varphi\end{cases}$, а замість елемента площі $dxdy$ підставити вираз $\rho\,d\rho\,d\varphi$.

Зауваження: Формулу (4) зручно застосовувати тоді, коли підінтегральна функція або рівняння межі області D містить суму x^2+y^2, оскільки в полярних координатах ця сума має дуже простий вигляд:

$$x^2+y^2=\rho^2\cos^2\varphi+\rho^2\sin^2\varphi=\rho^2.$$

Покажемо розміщення меж інтегрування в правій частині формули (4) для деяких випадків областей у полярній системі.

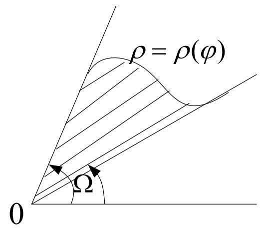


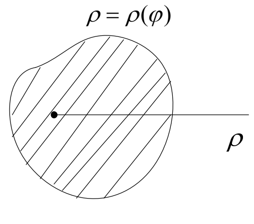
1. Якщо область D обмежена променями, які утворюють з полярною віссю кути α, β $(\alpha<\beta)$, та кривими $\rho=\rho_1(\varphi)$ та $\rho=\rho_2(\varphi)$, то

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy=\int\limits_\alpha^\beta d\varphi\int\limits_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} f(\rho\cos\varphi,\ \rho\sin\varphi)\rho\,d\rho\,d\varphi. \qquad (4.1)$$

2. Якщо область D обмежена променями, які утворюють з полярною віссю кути α і β $(\alpha<\beta)$, та кривою $\rho=\rho(\varphi)$, то

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy=\int\limits_\alpha^\beta d\varphi\int\limits_0^{\rho(\varphi)} f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)\rho\,d\rho. \qquad (4.2)$$





3. Якщо область D містить початок координат $O\in D$, то

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy=\int\limits_0^{2\pi} d\varphi\int\limits_0^{\rho(\varphi)} f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)\rho\,d\rho \qquad (4.3)$$

Приклад: Обчислити $\iint\limits_D\sqrt{4-x^2-y^2}\,dxdy$, якщо область D – круг радіуса $R=2$ з центром у початку координат $x^2+y^2\le 4$.

Розв'язання. Знайдемо рівняння межі області в полярних координатах:

$$\rho^2\cos^2\varphi+\rho^2\sin^2\varphi=4\Rightarrow\rho^2=4\Rightarrow\rho=2.$$

За формулою (4.3)

$$\iint\limits_D\sqrt{4-x^2-y^2}\,dxdy=\iint\limits_D\sqrt{4-(x^2+y^2)}\,dxdy=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^2\sqrt{4-\rho^2}\,\rho\,d\rho=-\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^2\sqrt{4-\rho^2}\,d(4-\rho^2)=$$

$$=-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\int_0^{2\pi}\left(4-\rho^2\right)^{3/2}\Bigg|_0^2 d\varphi=-\frac{1}{3}\int_0^{2\pi}4^{3/2}d\varphi=\frac{1}{3}4\sqrt{4}\varphi\Bigg|_0^{2\pi}=\frac{8}{3}2\pi=\frac{16\pi}{3}.$$

Відповідь: $\iint\limits_D\sqrt{4-x^2-y^2}\,dxdy=\frac{16\pi}{3}$.

2.3. Заміна змінних у потрійному інтегралі

Нехай функція $f(x,y,z)$ неперервна в деякій замкненій обмеженій області $G\subset Oxyz$. Функція $f(x,y,z)$ інтегрована по цій області, тобто існує потрійний інтеграл $\iiint\limits_G f(x,y,z)dxdydz$. Перейдемо від декартової системи координат $Oxyz$ до нової системи координат $Ouvw$, взагалі кажучи, криволінійної, за формулами

$$x=x(u,v,w),\quad y=y(u,v,w),\quad z=z(u,v,w)\qquad(5)$$

де праві частини – неперервно диференційовні в G функції.

Теорема 2 (про заміну змінних в потрійному інтегралі): Якщо функції (5) взаємно однозначно відображають замкнену обмежену область $G\subset Oxyz$ на замкнену обмежену область $G'\subset Ouvw$ і якщо вони мають в області G' неперервні частинні похідні та їх якобіан

$$J(u,v,w)=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w}\\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w}\end{vmatrix}\neq 0,$$

а функція $f(x,y,z)$ неперервна в області G, то справедлива формула:

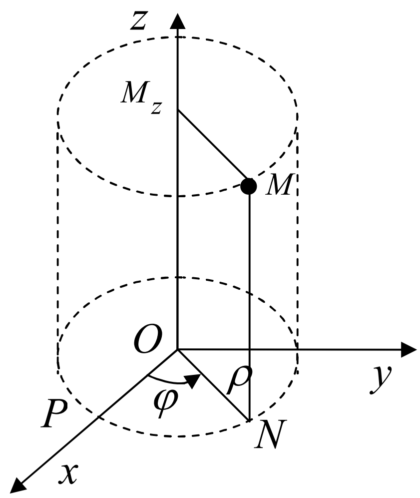
$$\iiint\limits_G f(x,y,z)dxdydz=\iiint\limits_{G'}f\left(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w)\right)\left|J(u,v,w)\right|dudvdw\qquad(6)$$

2.4. Обчислення потрійного інтеграла у циліндричній і сферичній системах координат

Розглянемо окремий випадок – перехід від декартової системи координат $Oxyz$ до циліндричної системи координат.

У циліндричній системі координат координати точки M у просторі визначаються полярними координатами ρ (відстань точки до осі Oz), φ (кут, утворений площиною, що проходить через вісь Oz і точку, з площиною xOz) точки N – проекції точки M на площину Oxy – та величиною відрізка OM_z осі Oz, тобто аплікатою точки M:

$$z=OM_z.$$



Запис $M(\rho,\varphi,z)$ означає, що точка M має циліндричні координати.

Назва "циліндричні координати" пов'язана з тим, що координатна поверхня $\rho=const$ (тобто множина точок, які мають одну й ту саму першу координату ρ) є циліндром.

Перехід з декартових координат до циліндричних здійснюється за формулами (5), які набувають у цьому випадку вигляду:

$$x=\rho\cos\varphi,\quad y=\rho\sin\varphi,\quad z=z$$

$$0\le\rho<+\infty;\quad 0\le\varphi<2\pi;\quad -\infty<z<+\infty.$$

Обчислимо якобіан переходу

$$J(\rho,\varphi,z)=\begin{vmatrix}\cos\varphi & -\rho\sin\varphi & 0\\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=\rho;$$

модуль якобіана:

$$|J(\rho,\varphi,z)|=\rho.$$

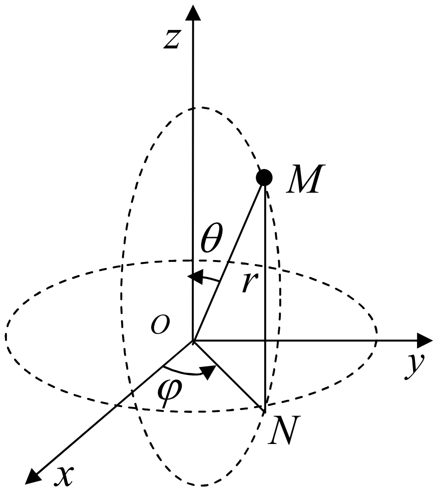
Тоді за формулою (6):

$$\iiint\limits_G f(x,y,z)\,dxdydz=\iiint\limits_{G'} f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi,z)\rho d\rho d\varphi dz \qquad (7).$$

Обчислення потрійного інтеграла в циліндричних координатах зводиться до трьох однократних інтегрувань по z, ρ, φ на підставі тих самих принципів, що й у разі прямокутних координат.

Розглянемо ще один окремий випадок – перехід від декартової до сферичної системи координат.

У сферичній системі координат координати точки M у просторі визначаються відстанню r точки M до початку координат, кутом φ – кутом, на який треба повернути вісь Ox у додатному напрямку, щоб вона збіглася з променем ON, де точка N – проекція точки M на площину Oxy, кутом θ – кутом, який утворює відрізок OM з віссю Oz.



Запис $M(r,\varphi,\theta)$ означає, що точка M має сферичні координати.

Назва "сферичні координати" пов’язана з тим, що координатна поверхня $r=const$ (тобто множина точок, які мають одну й ту саму першу координату r) є сферою.

Перехід з декартових координат до сферичних здійснюється за формулами (5), які набувають у цьому випадку вигляду:

$$x=r\sin\theta\cos\varphi,\quad y=r\sin\theta\sin\varphi,\quad z=r\cos\theta$$

$$0\le r<+\infty;\quad 0\le\varphi<2\pi;\quad 0\le\theta<\pi$$

Обчислимо якобіан

$$J(r,\theta,\varphi)=\begin{vmatrix}\sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi\\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi\\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0\end{vmatrix}=r^2\sin\theta;$$

модуль якобіана:

$$|J(r,\theta,\varphi)|=r^2\sin\theta.$$

Тоді за формулою (6):

$$\iiint\limits_D f(x,y,z)\,dxdydz=\iiint\limits_{D'} f(r\sin\theta\cos\varphi,r\sin\theta\sin\varphi,r\cos\theta)r^2\sin\theta\,drd\varphi d\theta \qquad (8)$$

При обчисленні потрійного інтеграла в циліндричних або сферичних координатах область G', як правило, не будують, а межі інтегрування знаходять безпосередньо за областю G, користуючись геометричним змістом нових координат.

Покажемо розміщення меж інтегрування в правих частинах (7) і (8) для деяких випадків областей:

1. Якщо область G обмежена циліндричною поверхнею $x^2+y^2=R^2$ та площинами $z=a$, $z=b$ $(a<b)$, то в циліндричній системі координат

$$\iiint\limits_G f(x,y,z)\,dxdydz = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^R \rho d\rho \int\limits_a^b f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z)\,dz\,. \qquad (7.1)$$

2. Якщо область G – куля $x^2+y^2+z^2 \le R^2$, то в сферичній системі координат

$$\iiint\limits_G f(x,y,z)\,dxdydz = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^R \sin\theta d\theta \int\limits_0^R f(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)\,r^2 dr\,. \qquad (8.1)$$

Зауваження: Загальних рекомендацій щодо переходу до тієї чи іншої системи координат не існує. Це залежить і від області інтегрування, й від підінтегральної функції. Слід обирати таку систему координат, у якій обчислення буде найпростішим.

Приклад 1: Обчислити:

1) $\iiint\limits_G z\sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz$, якщо область G обмежена циліндром $x^2+y^2=2x$ та площинами $y=0$, $z=0$, $z=2$;

2) $\iiint\limits_G \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz$, якщо область G – куля $x^2+y^2+z^2 \le 1$.

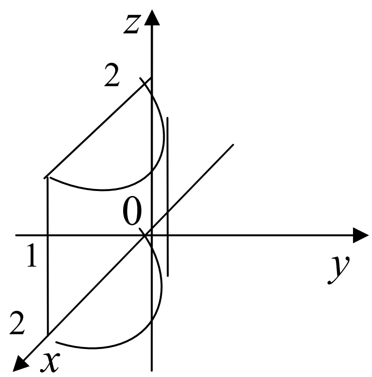
Розв'язання.

1) Знайдемо рівняння межі області в циліндричних координатах: рівняння кола $x^2+y^2=2x$, яке лежить у основі циліндра, має вигляд:

$$\rho = 2cos\varphi\,.$$

Оскільки в циліндричній системі координат

$$x^2+y^2=\rho^2,$$



то підінтегральна функція

$$z\sqrt{x^2+y^2} = z\sqrt{\rho^2} = z\rho\,.$$

За формулами (7) і (7.1)

$$\iiint\limits_G z\sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz = \iiint\limits_{G'} z\rho^2 d\rho d\varphi dz =$$

$$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{2\cos\varphi} \rho^2 d\rho \int\limits_0^2 zdz = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{2\cos\varphi} \rho^2 d\rho \left.\frac{z^2}{2}\right|_0^2 =$$

$$= 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left.\frac{\rho^3}{3}\right|_0^{2\cos\varphi} d\varphi = \frac{16}{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\varphi d\varphi = \frac{16}{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1-\sin^2\varphi\right) d\sin\varphi =$$

$$= \frac{16}{3}\left.\left(\sin\varphi - \frac{\sin^3\varphi}{3}\right)\right|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{16}{3}\left(1-\frac{1}{3}\right) = \frac{16}{3}\cdot\frac{2}{3} = \frac{32}{9}\,.$$

Відповідь: $\iiint\limits_G z\sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz = \frac{32}{9}$.

2) Знайдемо рівняння межі області в сферичних координатах. Рівняння сфери $x^2+y^2+z^2=1$ має вигляд:

$$r^2=1\,.$$

Оскільки в сферичній системі координат

$$x^2+y^2+z^2=r^2,$$

то підінтегральна функція:

$$\sqrt{x^2+y^2+z^2} = r\,.$$

За формулами (8) і (8.1):

$$\iiint\limits_G z\sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz = \iiint\limits_{G'} \rho^3\sin\theta \;\; drd\varphi d\theta = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} \sin\theta d\theta \int\limits_0^1 \rho^3 d\rho = \frac{1}{4}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_o^{\pi} \sin\theta d\theta = \frac{1}{4}\int\limits_0^{2\pi} \left(-\cos\theta\right)\Big|_0^{\pi} d\varphi =$$

$$= \frac{2}{4}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi = \frac{1}{2}\varphi\,\Big|_0^{2\pi} = \pi\,.$$

3. ЗАСТОСУВАННЯ КРАТНИХ ІНТЕГРАЛІВ

3.1. Застосування кратних інтегралів до задач геометрії

<u>1. Обчислення площ</u>

а) Площа плоскої області.

Якщо в подвійному інтегралі підінтегральна функція

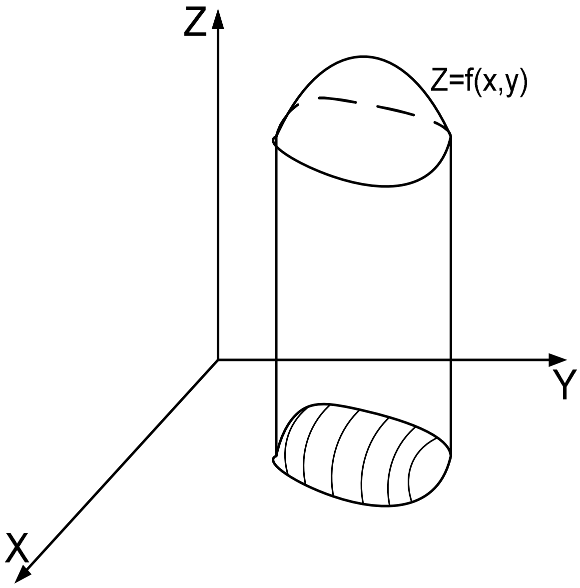
$$f(x,y)=1$$

у деякій обмеженій замкненій області D, то подвійний інтеграл чисельно дорівнює площі S області D:

$$S=\iint_D dxdy \qquad (1) \text{ – у декартовій системі координат;}$$

$$S=\iint_{D'} \rho d\rho d\varphi \qquad \text{– у полярній системі координат.}$$

б) Площа поверхні.



Нехай у просторі $Oxyz$ деяка поверхня задана рівнянням $z=f(x,y)$. Розглянемо частину цієї поверхні, обмежену гладким (кусково-гладким) контуром, яка проектується на площину Oxy в область D.

Якщо функція $z=f(x,y)$ неперервна в області D і має в цій області неперервні частинні похідні $\frac{\partial f}{\partial x}$ і $\frac{\partial f}{\partial y}$, то площу частини поверхні, що розглядається, можна обчислити за формулою:

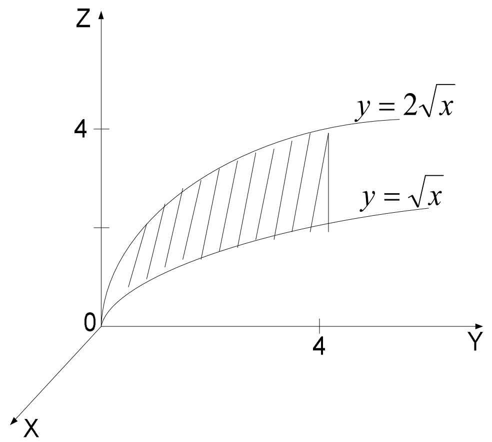
$$S=\iint_D \sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\,dxdy, \qquad (2)$$

або

$$S=\iint_D \sqrt{1+f_x'^2(x,y)+f_y'^2(x,y)}\,dxdy.$$

<u>Приклад 1:</u> Обчислити площу плоскої області, обмеженої лініями: $y=\sqrt{x}$, $y=2\sqrt{x}$, $x=4$.

Розв'язання. Побудуємо область, площу якої потрібно знайти:



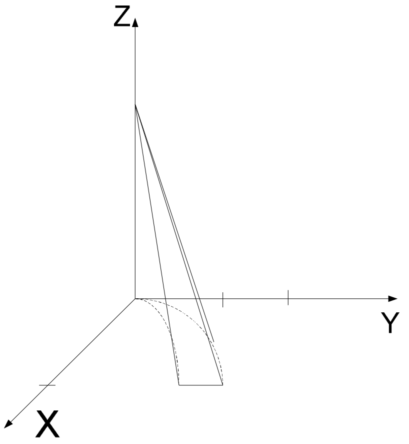
За формулою (1)

$$S=\iint_D dxdy=\int_0^4 dx\int_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} dy=\int_0^4 y\Big|_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} dx=\int_0^4 \sqrt{x}dx=\frac{2}{3}x\sqrt{x}\Big|_0^4=$$

$$=\frac{2}{3}\cdot 8=\frac{16}{3} \text{ (кв.од.)}$$

<u>Відповідь:</u> $S=\frac{16}{3}$ кв.од. .

Приклад 2: Обчислити площу поверхні, обмеженої циліндрами $y=\sqrt{x}$, $y=2\sqrt{x}$ та площинами $z=0$, $x+z=4$.



Розв'язання. Побудуємо поверхню, площу якої потрібно знайти:

За формулою (2)

$$S=\iint_D \sqrt{1+(\ 4-1\ )^2}\,dxdy=\sqrt{10}\iint_D dxdy=\frac{16\sqrt{10}}{3}\ \text{(кв.од.)}$$

Відповідь: $S=\dfrac{16\sqrt{10}}{3}$ кв.од.

2. Обчислення об'ємів тіл

Якщо в потрійному інтегралі підінтегральна функція

$$f(\ x,y,z\ )=1$$

у деякій обмеженій замкненій тривимірній області G, то потрійний інтеграл чисельно дорівнює об'єму V області G:

$$V=\iiint_G dxdydz \qquad (3)$$

Якщо область G є правильною в напрямі осі Oz, то

$$\iiint_G dxdydz=\iint_D\left(\int_{f_1(\ x,y\ )}^{f_2(\ x,y\ )}dz\right)dxdy=\iint_D\big(\ f_2(\ x,y\ )-f_1(\ x,y\ )\big)dxdy,$$

де функції $f_1(\ x,y\ )\le f_2(\ x,y\ )$ неперервні й невід'ємні в області D – проекції області G на площину Oxy.

Отже,

$$V=\iiint_D\big[\ f_2(\ x,y\ )-f_1(\ x,y\ )\ \big]dxdy \qquad (4)$$

В окремому випадку тіла, обмеженого зверху поверхнею $z=f(x,y)$, знизу – областю $D\subset Oxy$, з боків – циліндричною поверхнею, твірні якої паралельні Oz, а напрямна є межею області D

$$V=\iint_D f(\ x,y\ )dxdy \qquad (4.1)$$

Приклад 1: Обчислити об'єм тіла:

1) обмеженого циліндрами $y=\sqrt{x}$, $y=2\sqrt{x}$ і площинами $z=0$, $x+z=4$. (див. приклад 2 п. 1);

2) сферою $x^2+y^2+z^2=6^2$ і верхнею частиною конуса $\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{3}-z^2=0$ $\left(\begin{cases}\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{3}=1,\\ z=1\end{cases}\right)$.

Розв'язання.

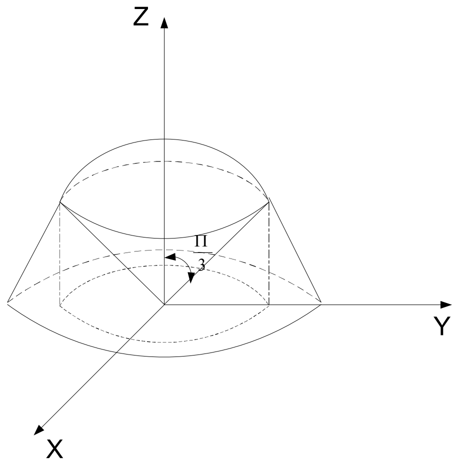
1) За формулою (4.1):

$$V=\iint_D(\ 4-x\ )dxdy=\int_0^4(\ 4-x\ )dx\int_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}}dy=\int_0^4(\ 4-x\ )\sqrt{x}dx==\int_0^4\left(\ 4\sqrt{x}-x^{3/2}\ \right)dx=\left(\ \frac{8}{3}x^{3/2}-\frac{2}{5}x^{5/2}\ \right)\Bigg|_0^4=$$

$$=\frac{64}{3}-\frac{64}{5}=\frac{128}{15}\ \text{(куб.од.)}$$

Відповідь: $V = \dfrac{128}{15}$ куб.од.

2) Дане тіло обмежене зверху сферою $x^2 + y^2 + z^2 = 6^2$, знизу – конусом $\dfrac{x^2}{3} + \dfrac{y^2}{3} - z^2 = 0$ та проектується на площину Oxy в круг $x^2 + y^2 \le 3^3 = 27$ ($r \approx 5.2$).



Використовуючи сферичні координати, знайдемо рівняння сфери $x^2 + y^2 + z^2 = 6^2$:

$$\rho^2 = 6^2 \Rightarrow \rho = 6,$$

конуса $z = \sqrt{\dfrac{x^2 + y^2}{3}}$:

$$\rho\cos\theta = \sqrt{\frac{\rho^2 \sin^2\theta}{3}};\ \rho\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}\rho\sin\theta;\ \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\theta \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}.$$

За формулою (3):

$$V = \iiint\limits_{G} dxdydz = \iiint\limits_{G'} r^2 \sin\theta dr d\varphi d\theta = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi/3} \sin\theta d\theta \int\limits_0^6 r^2 dr = 2\pi\left(-\cos\theta \right)\Big|_0^{\pi/3} \frac{r^3}{3}\Bigg|_0^6 =$$

$$2\pi\left(-\frac{1}{2} + 1 \right) \cdot \frac{216}{3} = 72\pi \text{ (куб.од.).}$$

Відповідь: $V = 72\pi$ куб.од.

3.2. Застосування кратних інтегралів до задач фізики

1. Обчислення мас

а) Маса пластини

Нехай матеріальна пластина лежить в площині Oxy та має форму області D; густина речовини пластини визначається неперервною функцією $\rho = \rho(x, y)$. Тоді маса пластини

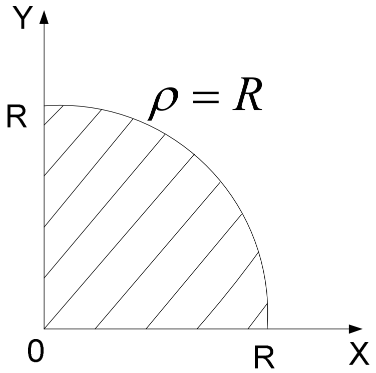
$$m = \iint\limits_{D} \rho(x, y) dxdy \qquad (5)$$

Якщо пластина однорідна, то вважають

$$\rho(x, y) = 1.$$

Приклад 1: Обчислити масу пластини, обмеженої лініями $x^2 + y^2 = R^2$, $x \ge 0$, $y \ge 0$, якщо її густина пропорційна квадрату відстані точки від центра.

Розв'язання. Побудуємо область D, форму якої має пластина:



За умовою густина речовини пластини

$$\rho(x, y) = k\left(\sqrt{x^2 + y^2} \right)^2 = k\left(\sqrt{x^2 + y^2} \right).$$

Використовуючи полярні координати, знайдемо рівняння кола:

$$\rho = R.$$

За формулою (5):

$$m = \iint\limits_{D} k\left(x^2 + y^2 \right) dxdy = k\iint\limits_{D'} \rho^2 \rho d\rho d\varphi = k\int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^R \rho^3 d\rho = \frac{k\pi R^4}{8}.$$

Відповідь: $m = \dfrac{k\pi R^4}{8}$.

б) Маса тіла

Нехай матеріальне тіло займає в просторі область G; речовина розподілена з густиною $\rho=\rho(x,y,z)$, де $\rho(x,y,z)$ – неперервна в області G функція, тоді:

$$m=\iiint\limits_G \rho(x,y,z)\,dxdydz \qquad (6)$$

Якщо тіло однорідне, вважають

$$\rho(x,y)=1.$$

Приклад 2: Обчислити масу однорідного тіла, обмеженого поверхнями $x^2+y^2+z^2=R^2$, $x\ge 0$, $y\ge 0$, $z\ge 0$.

Розв'язання. Використовуючи сферичні координати, знайдемо рівняння сфери:

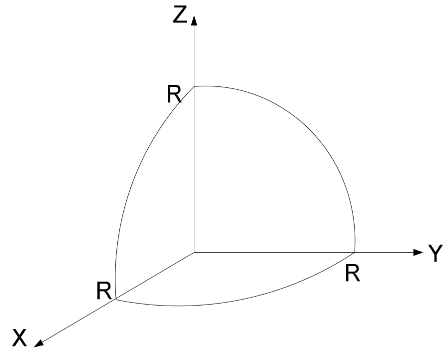
$$\rho=R.$$

За формулою (6):

$$m=\iiint\limits_G \rho(x,y,z)\,dxdydz=\iiint\limits_{G'} \rho^2\sin\theta\, d\rho d\varphi d\theta=$$

$$=\int\limits_0^{\pi/2} d\varphi\int\limits_0^{\pi/2}\sin\theta d\theta\int\limits_0^R \rho^2 d\rho=\frac{\pi}{2}\cdot 1\cdot\frac{R^3}{3}=\frac{\pi R^3}{6}.$$

Відповідь: $m=\dfrac{\pi R^3}{6}$.



Зауваження: У останньому прикладі таку ж відповідь одержимо, якщо скористаємося формулою об'єму кулі:

$$V=\frac{4}{3}\pi R^3.$$

Отже,

$$m=\frac{1}{8}V_{\text{кулі}}=\frac{\pi \mathrm{R}^3}{6}.$$

2. Обчислення статичних моментів та координат центру маси

а) Статичні моменти й центр маси пластини

Статичні моменти відносно осей координат матеріальної пластини, що займає в площині Oxy область D і речовина якої розподілена з густиною $\rho=\rho(x,y)$, де $\rho(x,y)$ – неперервна в області D функція, визначаються за формулами :

$$M_x=\iint\limits_D y\rho(x,y)\,dxdy \text{ – відносно осі } Ox \qquad (7)$$

$$M_y=\iint\limits_D x\rho(x,y)\,dxdy \text{ – відносно осі } Oy$$

Координати центра маси $C(x_c,y_c)$ пластини визначаються за формулами:

$$x_c=\frac{M_y}{m};\qquad y_c=\frac{M_x}{m}, \qquad (8)$$

де m – маса пластини.

Приклад: Знайти координати центра маси пластини із приклада 1 п. 1.

Розв'язання. За формулами (7):

$$M_x=k\iint\limits_D y\left(x^2+y^2\right)dxdy=k\iint\limits_{D'}\rho\sin\varphi\cdot\rho\cdot\rho^2 d\rho d\varphi=k\int\limits_0^{\pi/2}\sin\varphi d\varphi\int\limits_0^R\rho^4 d\rho=\frac{kR^5}{5}$$

$$M_y = k\iint_D x\left(x^2 + y^2 \right)dxdy = k\iint_{D'} \rho\cos\varphi\cdot\rho^2 d\rho d\varphi = k\int_0^{\pi/2}\cos\varphi d\varphi\int_0^R \rho^4 d\rho = \frac{kR^5}{5}.$$

За формулами (8):

$$x_c = \frac{M_y}{m} = \frac{kR^5}{5}\cdot\frac{8}{k\pi R^4} = \frac{8R}{5\pi}; \qquad y_c = \frac{Mx}{m} = \frac{kR^5}{5}\cdot\frac{8}{k\pi R^4} = \frac{8R}{5\pi}.$$

Отже, $C\left(\frac{8R}{5\pi};\frac{8R}{5\pi} \right)$.

Відповідь: $C\left(\frac{8R}{5\pi};\frac{8R}{5\pi} \right)$.

б) Статичні моменти і центр маси тіла

Статичні моменти відносно координатних площин матеріального тіла, що займає у тривимірному просторі область G і речовина якого розподілена з густиною $\rho = \rho\left(x,y,z \right)$, де $\rho\left(x,y,z \right)$ – неперервна в області G функція, визначаються за формулами :

$$M_{xy} = \iiint_G z\rho dxdydz \text{ – відносно осі } Oxy;$$

$$M_{xz} = \iiint_G y\rho dxdydz \text{ – відносно осі } Oxz; \qquad (9)$$

$$M_{yz} = \iiint_G x\rho dxdydz \text{ – відносно осі } Oyz.$$

Координати центра маси $C\left(x_c,y_c,z_c \right)$ тіла визначаються за формулами:

$$x_c = \frac{M_{yz}}{m}, \qquad y_c = \frac{M_{xz}}{m}, \qquad z_c = \frac{M_{xy}}{m}, \qquad (10)$$

де m – маса тіла.

Приклад: Знайти координати центра маси однорідного тіла із приклада 2 п. 1.

Розв'язання. За формулами (9) в сферичних координатах обчислимо:

$$M_{xy} = \iiint_G zdxdydz = \iiint_{G'} r\cos\theta r^2\sin\theta drd\varphi d\theta = \int_0^{\pi/2}d\varphi\int_0^{\pi/2}\sin\theta\cos\theta d\theta\int_0^R r^3dr = \frac{\pi}{2}\frac{\sin^2\theta}{2}\Bigg|_0^{\pi/2}\frac{R^4}{4} = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{R^4}{4} = \frac{\pi R^4}{16};$$

$$M_{xz} = \iiint_G ydxdydz = \iiint_{G'} r\sin\theta\sin\varphi r^2\sin\theta drd\varphi d\theta = \int_0^{\pi/2}\sin\varphi d\varphi\int_0^{\pi/2}\sin^2\theta d\theta\int_0^R r^3dr =$$

$$= \left(-\cos\varphi \right)\Big|_0^{\pi/2}\frac{1}{2}\left(\theta - \frac{\sin 2\theta}{2} \right)\Bigg|_0^{\pi/2}\cdot\frac{R^4}{4} = 1\cdot\frac{\pi}{4}\cdot\frac{R^4}{4} = \frac{\pi R^4}{16};$$

$$M_{yz} = \iiint_G xdxdydz = \iiint_{G'} r\sin\theta\cos\varphi r^2\sin\theta drd\varphi d\theta = \int_0^{\pi/2}\cos\varphi d\varphi\int_0^{\pi/2}\sin^2\theta d\theta\int_0^R r^3dr = \sin\varphi\Big|_0^{\pi/2}\frac{1}{2}\left(\theta - \frac{\sin 2\theta}{2} \right)\Bigg|_0^{\pi/2} = \frac{\pi R^4}{16}.$$

За формулами (10) при $m = \frac{\pi R^3}{6}$ маємо:

$$x_c = y_c = z_c = \frac{\pi R^4}{16}\cdot\frac{6}{\pi R^3} = \frac{3R}{8}.$$

Отже, $C\left(\frac{3R}{8};\frac{3R}{8};\frac{3R}{8} \right)$.

Відповідь: $C\left(\frac{3R}{8};\frac{3R}{8};\frac{3R}{8} \right)$.

3. Обчислення моментів інерції

а) Моменти інерції пластини

Як відомо, *моментом інерції* матеріальної точки P з масою m відносно заданої осі називається добуток маси на квадрат відстані від точки P до цієї осі.

Моменти інерції неоднорідної пластини відносно координатних осей визначаються за формулами:

$$I_x = \iint_D y^2 \rho(x,y)\,dxdy \text{ – відносно осі } Ox; \tag{11}$$

$$I_y = \iint_D x^2 \rho(x,y)\,dxdy \text{ – відносно осі } Oy.$$

Момент інерції пластини відносно початку координат:

$$I_o = \iint_D (x^2 + y^2)\rho(x,y)\,dxdy.$$

Приклад: Знайти момент інерції пластини з приклада 1 п. 1. відносно осі Ox:

Розв'язання. За формулою (11)

$$I_x = k\iint_D y^2 (x^2 + y^2)\,dxdy = \iint_{D'} \rho^2 \sin^2\varphi \cdot \rho^2 \cdot \rho d\rho d\varphi = k\int_0^{\pi/2} \sin^2\varphi d\varphi \int_0^R \rho^5 d\rho = k\left(\frac{\varphi}{2} - \frac{\sin 2\varphi}{4}\right)\Bigg|_0^{\pi/2} \frac{R^6}{6} = \frac{k\pi R^6}{24}.$$

Відповідь: $I_x = \dfrac{k\pi R^6}{24}$.

б) Моменти інерції тіла

Моменти інерції неоднорідного тіла обчислюються за формулами (12):

відносно координатних площин:

$$I_{xy} = \iiint_G z^2 \rho\,dxdydz \text{ – відносно } Oxy;$$

$$I_{xz} = \iiint_G y^2 \rho\,dxdydz \text{ – відносно } Oxz;$$

$$I_{yz} = \iiint_G x^2 \rho\,dxdydz \text{ – відносно } Oyz;$$

відносно координатних осей:

$$I_x = \iiint_G (y^2 + z^2)\rho\,dxdydz \text{ – відносно } Ox;$$

$$I_y = \iiint_G (x^2 + z^2)\rho\,dxdydz \text{ – відносно } Oy;$$

$$I_z = \iiint_G (x^2 + y^2)\rho\,dxdydz \text{ – відносно } Oz;$$

Момент інерції тіла відносно початку координат:

$$I_o = \iiint_G (x^2 + y^2 + z^2)\rho\,dxdydz.$$

Приклад: Знайти момент інерції відносно осі Oz однорідного тіла з приклада 2 п. 1.

Розв'язання. За формулою (12)

$$I_z = \iiint_G (x^2 + y^2)\,dxdydz = \iiint_{G'} r^2 \sin^2\theta \cdot r^2 \sin\theta\, dr d\varphi d\theta = = \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{\pi/2} \sin^3\theta d\theta \int_0^R r^4 dr =$$

$$= \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{3}\cos^3\theta - \cos\theta\right)\Bigg|_0^{\pi/2} \frac{R^5}{5} = \frac{\pi}{2}\cdot\left(-\frac{1}{3} + 1\right)\frac{R^5}{5} = \frac{\pi R^5}{15}.$$

Відповідь: $I_z = \dfrac{\pi R^5}{15}$.

Завдання для самостійного розв'язання

Завдання № 1. Обчислити подвійний інтеграл, взятий по прямокутній області інтегрування G: $\iint_G xy^2 dxdy, -1 \le x \le 0,\ 0 \le y \le 1$.

Завдання № 2. Обчислити подвійний інтеграл: $\int\limits_{-1}^{3} dx \int\limits_{-x}^{2x} \frac{y}{x} dy$.

Завдання № 3. Побудувати область, площа якої задається інтегралом $\int\limits_{0}^{2} dx \int\limits_{x}^{4-x^2} dy$. Змінити порядок інтегрування та обчислити площу.

Завдання № 4. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями:

1) $xy = 2$, $y = x$, $x = 2$; 2) $y = x^2$, $y = x + 3$.

Завдання № 5. За допомогою подвійного інтеграла знайти об'єм тіла, обмеженого заданими поверхнями. Зробити рисунок тіла та його проекцію на площину Oxy:

1) $z = 1 - x^2 - y^2$, $z = 0$; 2) $x^2 + y^2 = 4$; $z = x^2$; $z = 0$;

3) $x^2 + y^2 = 1$; $y + z = 4$; $z = 0$; 4) $x + y + z = 6$; $x = 0$; $y = 0$; $z = 0$; $x = 2$.

Завдання № 6. За допомогою потрійного інтеграла знайти об'єм тіла, обмеженого заданими поверхнями. Зробити рисунок тіла та його проекцію на площину Oxy:

1) $z = x^2 + y^2$; $x + y = 2$; $x = 0$; $y = 0$; $z = 0$;

2) $z = 2y$; $y^2 = 9 - x^2$; $z = 0$;

3) $z = y^2$; $3y + 2x = 6$; $x = 0$; $z = 0$.

Завдання № 7. Визначити центр маси фігури, обмеженої заданими лініями:

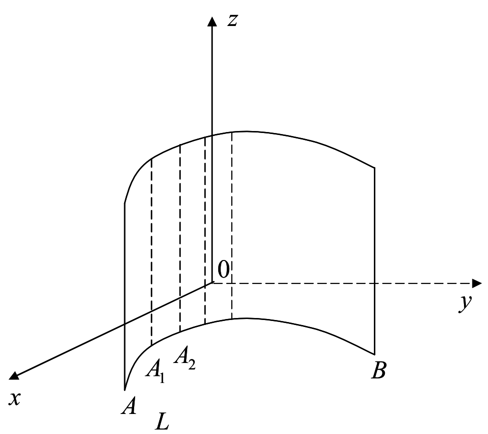
1) $y = 0$ та однією напівхвилею синусоїди $y = \sin x$;

2) астроїдою $\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$.

4. КРИВОЛІНІЙНІ ІНТЕГРАЛИ

4.1. Задачі, що приводять до поняття криволінійного інтеграла I роду

1. Задача про площу частини циліндричної поверхні. Нехай функція $z = f(x, y)$ невід'ємна й визначена на деякій кривій L, заданій на площині Oxy. Розглянемо частину циліндричної поверхні, твірні якої паралельні осі Oz та мають довжину $f(x, y)$, а напрямна збігається з дугою кривої L на площині Oxy.



Задача полягає в обчисленні площі цієї частини циліндричної поверхні.

Розв'язання. Розіб'ємо дугу AB кривої L довільним чином на n часткових дуг за допомогою точок $A = A_0, A_1, ..., A_n = B$; нехай довжина i-ї дуги дорівнює Δl_i, $i = \overline{1, n}$. Через точки розбиття проведемо прямі, паралельні Oz. Ці прямі розіб'ють циліндричну поверхню на n елементарних поверхонь. Очевидно, що площа S всієї поверхні дорівнює сумі площ S_i елементарних поверхонь.

У кожній частковій дузі $A_{i-1}A_i$ виберемо довільну точку $M_i(\xi_i, \eta_j)$ та обчислимо значення функції f у цій точці:

$$f_i(\xi_i, \eta_j) = f(M_i).$$

Площа елементарної поверхні наближено дорівнює:

$$S_i \approx f\left(M_i \right)\Delta l_i .$$

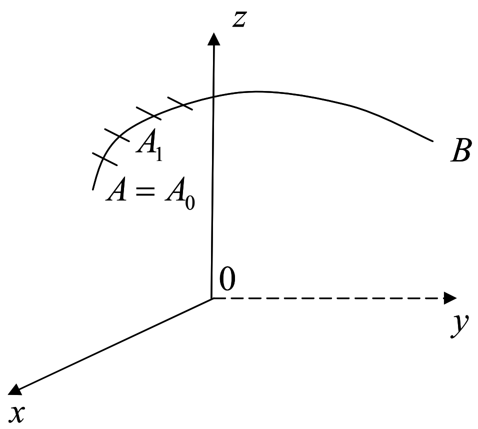
Тоді площа всієї поверхні:

$$S = \sum_{i=1}^{n} S_i \approx \sum_{i=1}^{n} f\left(\xi_i, \eta_j \right)\Delta l_i .$$

Точність цієї формули збільшується із збільшенням кількості часткових дуг та із зменшенням їх найбільшої довжини. Точне значення площі цієї частини циліндричної поверхні одержимо, коли перейдемо до границі при $\lambda = \max\limits_{i=\overline{i,n}} \Delta l_i \to 0$:

$$V = \lim_{\max\limits_{i=\overline{i,n}} \Delta l_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f\left(\xi_i, \eta_j \right)\Delta l_i .$$

2. Задача про масу вигнутого стержня. Нехай неоднорідний матеріальний стержень займає на площині Oxy частину кривої L від точки A до точки B та його речовина розподілена з густиною $\rho\left(x, y \right)$. Задача полягає у визначенні маси стержня.



Розв'язання. Розіб’ємо стержень довільним чином на n частин L_i, довжини яких дорівнюють Δl_i, $i = \overline{1, n}$. У кожній частині L_i виберемо довільну точку $M_i\left(\xi_i, \eta_j \right)$ та обчислимо значення функції ρ у цій точці:

$$\rho\left(M_i \right) = \rho\left(\xi_i, \eta_j \right).$$

Якщо частина стержня L_i достатньо мала, то можна вважати її густину сталою та рівною $\rho\left(\xi_i, \eta_j \right)$. Тоді маса частини L_i стержня наближено дорівнює:

$$m_i \approx \rho\left(\xi_i, \eta_j \right)\Delta l_i .$$

Маса всього стержня:

$$m = \sum_{i=1}^{n} m_i \approx \sum_{i=1}^{n} \rho\left(\xi_i, \eta_j \right)\Delta l_i .$$

Точне значення маси стержня одержимо, коли перейдемо до границі при $\max\limits_{i=\overline{i,n}} \Delta l_i \to 0$:

$$m = \lim_{\max\limits_{i=\overline{i,n}} \Delta l_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \rho\left(\xi_i, \eta_j \right)\Delta l_i .$$

4.2. Означення криволінійного інтеграла 1-го роду

Нехай у площині Oxy задана дуга деякої кривої L від точки A до точки B, у кожній точці якої визначена обмежена функція $f\left(x, y \right)$. Розіб’ємо дугу AB кривої L довільним чином на n часткових дуг L_i, довжини яких дорівнюють Δl_i, $i = \overline{1, n}$. Виберемо на кожній дузі L_i довільну точку $M_i\left(\xi_i, \eta_j \right)$ та обчислимо значення функції $f\left(x, y \right)$ у цій точці: $f\left(\xi_i, \eta_j \right)$.

Побудуємо суму $\sum_{i=1}^{n} f\left(\xi_i, \eta_j \right)\Delta l_i$. Ця сума називається *інтегральною сумою для функції* $f(x,y)$ *по дузі* AB *кривої* L, яка відповідає заданому розбиттю дуги L на частини L_i та заданому вибору проміжних точок M_i.

Позначимо через λ_n найбільшу з довжин окремих дуг L_i:

$$\lambda_n = \max_{i=\overline{i,n}} \Delta l_i .$$

Означення 1. Скінчена границя інтегральної суми при $\lambda_n \to 0$, якщо вона існує й не залежить ні від розбиття дуги на часткові дуги, ні від вибору проміжних точок M_i в них, називається *криволінійним інтегралом* 1*-го роду* (*криволінійним інтегралом по довжині дуги*) *від функції* $f(x,y)$ *по кривій* L.

Позначається: $\int_L f(x,y)dl$.

Отже, за означенням:

$$\int_L f(x,y)dl = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f\left(\xi_i, \eta_j \right)\Delta l_i .$$

У цьому випадку функція $f(x,y)$ називається *інтегрованою по кривій* L, дуга AB кривої L – *контуром* (*шляхом*) *інтегрування*, точки A і B – відповідно *початковою* й *кінцевою точками інтегрування.*

Повертаючись до задач із п. 1., можна сказати, що:

1. Площа частини циліндричної поверхні, твірні якої мають довжину $f(x,y)$ та паралельні осі Oz, а напрямок збігається з дугою кривої L на площині Oxy, дорівнює криволінійному інтегралу функції $f(x,y)$ по довжині дуги:

$$S = \int_L f(x,y)dl .$$

У цьому полягає геометричний зміст криволінійного інтеграла 1-го роду: криволінійний інтеграл 1-го роду функції $f(x,y)$ чисельно дорівнює площі частини циліндричної поверхні.

2. Маса вигнутого матеріального стержня дорівнює криволінійному інтегралу 1-го роду від густини:

$$m = \int_L \rho(x,y)dl .$$

У цьому полягає фізичний зміст криволінійногоінтеграла 1-го роду.

Теорема 1 (умова існування криволінійного інтеграла I-го роду): Криволінійний інтеграл 1-го роду від обмеженої функції $f(x,y)$ існує, якщо:

1) Дуга AB кривої L є гладкою або кусково-гладкою.

2) Функція $f(x,y)$ має на дузі AB кривої L скінчену кількість точок розриву 1-го роду.

Оскільки криволінійний інтеграл 1-го роду є безпосереднім узагальненням визначеного інтеграла на випадок, коли область інтегрування є кривою, то його властивості аналогічні відповідним властивостям визначеного інтеграла: лінійність, адитивність тощо. Формулювати їх не будемо. Сформулюємо лише спеціальну властивість криволінійного інтеграла 1-го роду: криволінійний інтеграл 1-го роду не залежить від напряму інтегрування по дузі AB кривої L:

$$\int_{AB} f(x,y) = \int_{BA} f(x,y)$$

4.3. Обчислення криволінійного інтеграла першого роду

Нехай крива L задана параметричними рівняннями

$$\begin{cases} x = x(t); \\ y = y(t). \end{cases} \; t \in [\alpha, \beta],$$

причому значення α відповідає початковій точці A, значення β – кінцевій точці B. Вважатимемо, що функції $x(t)$, $y(t)$ неперервно диференційовні на відрізку $[\alpha, \beta]$ (при цій умові дуга AB є гладкою). Нехай функція $f(x, y)$ неперервна вздовж кривої L. Щоб обчислити криволінійний інтеграл від функції $f(x, y)$ по дузі кривої L, яка задана параметричними рівняннями, треба

1) виразити $f(x, y)$ через t: $f(x(t), y(t))$;
2) знайти диференціал дуги dl:

$$dl = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt = \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2}\, dt$$

3) межі інтегрування вказати по t: $t \in [\alpha, \beta]$.

Тоді одержимо звичайний визначений інтеграл по t:

$$\int_L f(x, y)\, dl = \int_\alpha^\beta f(x(t), y(t)) \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt, \qquad (1)$$

який обчислюється за звичайними правилами інтегрування.

Якщо дуга кривої L задана у явному вигляді рівнянням $y = y(x)$ на відрізку $[a, b]$, де функція $y(x)$ неперервно диференційовна на відрізку $[a, b]$, то обираємо за параметр x та записуємо рівняння кривої у вигляді

$$\begin{cases} x = x \\ y = y(x) \end{cases} \; x \in [a, b].$$

Тоді формула (1) набуде вигляду:

$$\int_L f(x, y)\, dl = \int_a^b f(x, y(x)) \sqrt{1 + y'^2(x)}\, dx. \qquad (2)$$

Якщо дуга кривої L задана рівнянням $\rho = \rho(\varphi)$ у полярній системі координат, $\varphi \in [\alpha, \beta]$, де $\rho(\varphi)$ неперервно диференційовна на $[\alpha, \beta]$, то з урахуванням зв'язку між полярними й декартовими координатами, можна записати, прийнявши за параметр кут φ:

$$\begin{cases} x = \rho(\varphi)\cos\varphi \\ y = \rho(\varphi)\sin\varphi \end{cases}, \; \varphi \in [\alpha, \beta],$$

тоді формула (1) прийме вигляд:

$$\int_L f(x, y)\, dl = \int_\alpha^\beta f(\rho(\varphi)\cos\varphi, \rho(\varphi)\sin\varphi) \sqrt{\rho^2(\varphi) + \rho'^2(\varphi)}\, d\varphi \qquad (3)$$

Приклад: Обчислити криволінійний інтеграл $\int_L (x - y)\, dl$, де L – відрізок прямої $y = \frac{3}{4}x$ від $A(0, 0)$ до $B(4, 3)$.

Розв'язання. 1) Виразимо підінтегральну функцію через x:

$$x - y = x - \frac{3}{4}x = \frac{1}{4}x.$$

2) Знайдемо диференціал дуги dl:

$$dl=\sqrt{1+\left(\frac{3}{4}\right)^2}dx=\sqrt{1+\frac{9}{16}}dx=\frac{5}{4}dx$$

3) Межі інтегрування за умовою: $x=0$, $x=4$. Тоді за формулою (2):

$$\int_L (x-y)\,dl=\int_0^4 \frac{1}{4}x\frac{5}{4}dx=\frac{5}{16}\frac{x^2}{2}\Bigg|_0^4=\frac{5}{2}.$$

Відповідь: $\int_L (x-y)dl=\frac{5}{2}$.

4.4. Застосування криволінійного інтеграла першого роду

а) Застосування в геометрії

Нехай у площині Oxy задано замкнену чи незамкнену криву L та на цій кривій визначено неперервну функцію $f(x,y)$, тоді:

1) площа циліндричної поверхні, визначеної функцією $z=f(x,y)$, дорівнює

$$S=\int_{AB} f(x,y)\,dl;$$

2) довжина l дуги AB кривої L:

$$l=\int_{AB} dl.$$

б) Застосування в фізиці

Нехай речовина розподілена з густиною $\rho=\rho(x,y)$ уздовж дуги кривої L, тоді

1) маса кривої L:

$$m=\int_L \rho(x,y)\,dl;$$

2) координати центру маси $C(x_c,y_c)$ кривої L:

$$x_c=\frac{M_y}{m}, \qquad y_c=\frac{M_x}{m},$$

де

$$M_x=\int_L y\rho(x,y)dl \qquad M_y=\int_L x\rho(x,y)dl$$

– статичні моменти кривої L відносно осей Ox і Oy.

3) моменти інерції кривої L відносно координатних осей та початку координат:

$$I_x=\int_L y^2\rho(x,y)\,dl; \qquad I_y=\int_L x^2\rho(x,y)\,dl; \qquad I_0=\int_L \left(x^2+y^2\right)\rho(x,y)\,dl.$$

Приклад. Знайти момент інерції відносно осі Ox однорідної дуги кола $\begin{cases} x=2\cos t; \\ y=2\sin t; \end{cases}$, $0\le t\le\frac{\pi}{2}$.

Розв'язання. $I_x=\int_L y^2dl=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\sqrt{4\sin^2 t+4\cos^2 t}\,dt=8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos 2t}{2}dt=4\left(t-\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=$

$$=4\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\cdot 0\right)=2\pi.$$

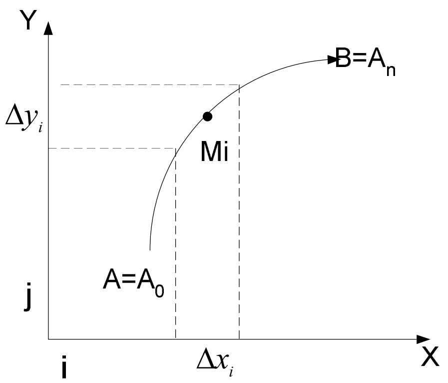
Відповідь: $I_x=2\pi$.

4.5. Задачі, що приводять до поняття криволінійного інтеграла 2-го роду

1. Задача про роботу змінної сили на криволінійному шляху. Нехай матеріальна точка під дією змінної сили

$$\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} \,,$$

де $P = P(\ x, y\ )$, $Q = Q(\ x, y\ )$ – проекції вектора сили на осі Ox і Oy, рухається на площині Oxy вздовж дуги AB кривої L. Треба знайти роботу A сили $\vec{F}$ при переміщенні матеріальної точки з точки A в точку B.



<u>Розв'язання.</u> Розіб'ємо криву AB точками $A = A_0, A_1, .., A_n = B$ на n частин та на кожній окремій дузі $A_{i-1}A_i$ виберемо точку $M_i(\xi_i;\eta_i)$, $i = 1,...,n$. На цю точку діє сила

$$\vec{F}(\ M_i\ ) = \vec{P}(\ M_i\ )\vec{i} + \vec{Q}(\ M_i\ )\vec{j} \,.$$

Робота ΔA_i сили $\vec{F}(\ M_i\ )$ при переміщенні матеріальної точки по вектору

$$\overrightarrow{A_{i-1}A_i} = \Delta x_i\vec{i} + \Delta y_i\vec{j}$$

дорівнює скалярному добутку вектора сили на вектор переміщення:

$$\Delta A_i = \vec{F}(\ M_i\ )\overrightarrow{A_{i-1}A_i} = P(\ \xi_i\eta_i\ )\Delta x_i + Q(\ \xi_i\eta_i\ )\Delta y_i \,.$$

Ця робота наближено дорівнює роботі змінної сили $\vec{F}$ при переміщенні матеріальної точки по дузі $A_{i-1}A_i$ довжиною Δl_i. Вся робота змінної сили $\vec{F}$ по переміщенню матеріальної точки вздовж L наближено дорівнює роботі вздовж ламаної $B_0, B_1, B_2, .., B_{i-1}, B_i, ..B_n$:

$$A \approx A_n \sum_{i=1}^{n} P(\ \xi_i\eta_i\ )\Delta x_i + \sum_{i=1}^{n} Q(\ \xi_i\eta_i\ )\Delta y_i \,.$$

Точне значення роботи одержимо, коли перейдемо до границі при $\lambda = \max\limits_{i=1,..n} \Delta l_i \to 0$:

$$A \approx \lim_{\lambda \to 0}\left(\sum_{i=1}^{n} P(\ \xi_i\eta_i\ )\Delta x_i + \sum_{i=1}^{n} Q(\ \xi_i\eta_i\ )\Delta y_i \right).$$

4.6. Означення криволінійного інтеграла другого роду

Нехай у площині Oxy задано деяку гладку криву L з напрямом від точки A до точки B, на цій кривій визначено обмежену функцію $P(\ x, y\ )$. Розіб'ємо дугу AB кривої L на n довільних частин точками $A = A_0, A_1, .., A_n = B$. На кожній частковій дузі $A_{i-1}A_i$ виберемо довільну точку $M_i(\xi_i;\eta_i)$, $i = 1,...,n$, та складемо інтегральну суму $\sum\limits_{i=1}^{n} P(\ \xi_i\eta_i\ )\Delta x_i$, де Δx_i – проекція вектора $\overrightarrow{A_{i-1}A_i}$ на вісь Ox.

Означення 2. Скінчена границя інтегральної суми при $\lambda = \max \Delta l_i \to 0$, якщо вона існує й не залежить ні від розбиття дуги AB на часткові дуги, ні від вибору проміжних точок M_i в них, називається *криволінійним інтегралом від функції* $P(\ x, y\ )$ *по координаті* x *вздовж кривої* AB.

Позначається: $\int\limits_{AB} P(\ x, y\ )dx$.

Таким чином, за означенням,

$$\int\limits_{AB} P(\ x, y\ )dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} P(\ \xi_i\eta_i\ )\Delta x_i \,.$$

Аналогічно визначається криволінійний інтеграл від функції $Q(\ x, y\ )$ по координаті y:

$$\int\limits_{AB} Q(x,y)dy = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} Q(\xi_i\eta_i)\Delta y_i .$$

Означення 3. Сума $\int\limits_{AB} P(x,y)dx + \int\limits_{AB} Q(x,y)dy$ називається *криволінійним інтегралом по координатах*, або *криволінійним інтегралом другого роду від функцій P і Q по кривій AB*.

Позначається: $\int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$.

Скорочено криволінійний інтеграл другого роду записують у вигляді: $\int\limits_{AB} Pdx + Qdy$.

Повертаючись до задачі про роботу змінної сили, можна сказати що робота

$$A = \int\limits_{AB} Pdx + Qdy .$$

У цьому полягає фізичний зміст криволінійного інтеграла другого роду.

Криволінійний інтеграл другого роду має всі властивості визначеного інтеграла. Відзначимо спеціальну властивість: при зміні напряму кривої криволінійний інтеграл другого роду змінює знак на протилежний:

$$\int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = -\int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy .$$

У разі, коли AB – замкнена крива, тобто коли точка B співпадає з точкою A, із двох можливих напрямів обходу контура називатимемо *додатним* той, при якому область, що лежить всередині цього контура, залишається ліворуч відносно точки, що здійснює обхід. Протилежний напрям отходу контура AB називатимемо *від'ємним*.

Зауваження: Криволінійний інтеграл другого роду по замкненому контуру L, що пробігається в додатному напрямі, часто позначають символом

$$\int\limits_{L} P(x,y)dx + Q(x,y)dy .$$

Як і у випадку визначеного інтеграла, із визначень криволінійних інтегралів двох родів установлюються властивості, спільні для криволінійних інтегралів першого й другого родів:

1. Постійний множник можна виносити за знак криволінійного інтеграла.

2. Криволінійний інтеграл від алгебраїчної суми скінченого числа функцій дорівнює такій самій сумі криволінійних інтегралів від доданків.

3. Якщо шлях інтегрування розбитий на скінчене число частин, то криволінійний інтеграл по всьому шляху дорівнює сумі криволінійних інтегралів по всім його частинам.

4. Криволінійний інтеграл по замкненому контуру не залежить від вибору початкової точки на цьому контурі.

4.7. Обчислення криволінійного інтеграла другого роду

Нехай крива AB задана параметричними рівняннями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [\alpha,\beta]$, причому точці A відповідає значення α параметра, точці B – значення β; функції $x(t)$, $y(t)$ неперервно диференційовані на $[\alpha,\beta]$. Припустимо, що функції $P(x,y)$, $Q(x,y)$ неперервні на кривій AB. Тоді

$$\int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{\alpha}^{\beta}\Big(P\big(x(t),y(t)\big)x'(t) + Q\big(x(t),y(t)\big)y'(t)\Big)dt . \quad (4)$$

Якщо крива AB задана явно рівнянням $y = y(x)$, $x \in [a,b]$, де функція $y(x)$ неперервно диференційована на $[a,b]$, то

$$\int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_a^b \Big(P\big(x, y(x)\big) + Q\big(x, y(x)\big) y'(x) \Big) dx \qquad (5)$$

Приклад. Обчислити криволінійний інтеграл 2-го роду $\int\limits_{AB} xdy - ydx$ по кривій AB, заданій параметричними рівняннями $\begin{cases} x = R\cos t \\ y = R\sin t \end{cases}$, $t \in [0, 2\pi]$.

Розв'язання. За формулою (4)

$$\int\limits_{AB} xdy - ydx = \int\limits_0^{2\pi} \big(R\cos t + R\cos t - R\sin t(-r\sin t) \big) dt = R^2 \int\limits_0^{2\pi} dt = R^2 t \Big|_0^{2\pi} = 2\pi R .$$

Відповідь: $\int\limits_{AB} xdy - ydx = 2\pi R$.

4.8. Обчислення криволінійного інтеграла другого роду

а) Обчислення площі плоскої фігури.

Площа S правильної області

$$D = \{ (x,y) : a \le x \le b, \quad y_1(x) \le y \le y_2(x) \}$$

дорівнює

$$S = -\int\limits_L ydx \qquad \text{або } S = \int\limits_L xdy \qquad \text{або} \quad S = \frac{1}{2}\int\limits_L xdy - ydx .$$

б) Обчислення роботи сили $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j}$.

$$A = \int\limits_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy .$$

Приклад. Знайти роботу сили $\vec{F} = yx\vec{i} + (y + x)\vec{j}$ при переміщенні матеріальної точки по кривій $L : y = x$ із точки $O(0,0)$ до точки $B(1,1)$.

Розв'язання. $A = \int\limits_{OB} yxdx + (y+x)dy = \int\limits_0^1 \big(x^2dx + (x+x)dx \big) = \int\limits_0^1 \big(x^2 + 2x \big) dx = \frac{x^3}{3} + 2\frac{x^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3}$.

Відповідь: $A = \frac{4}{3}$.

4.9. Формула Гріна

Формула Гріна (Джордж Грін (1793–1841) – англійський математик і фізик) зв'язує подвійний інтеграл по замкненій області D з криволінійним інтегралом по замкненому контуру – межі області D.

Теорема 2: Нехай D – деяка замкнена область, обмежена кусково-гладким контуром L, і функції $P(x,y)$, $Q(x,y)$ неперервні в D разом зі своїми частинними похідними $\frac{\partial P}{\partial y}$ і $\frac{\partial Q}{\partial x}$.

Тоді справедлива формула, яка називається формулою Гріна:

$$\int\limits_L Pdx + Qdy = \iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy .$$

Геометричний зміст формули Гріна полягає в тому, що вона дозволяє обчислити площу правильної плоскої замкненої області за допомогою криволінійного інтеграла.

Дійсно, нехай плоска область D обмежена кусково-гладким контуром L. Як відомо,

$$S_D = \iint\limits_D dxdy.$$

Розглянемо криволінійний інтеграл $\int\limits_L ydx - xdy$, у якому

$$P(x,y) = y, \quad Q(x,y) = x, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = 1, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = -1.$$

За формулою Гріна

$$\int\limits_L ydx - xdy = \iint\limits_D (-1-1)\,dxdy = -2\iint\limits_D dxdy,$$

звідки

$$S = \frac{1}{2}\int\limits_L xdy - ydx.$$

Приклад 1. Обчислити криволінійний інтеграл $I = \int\limits_L (x-2y)dx + (x+y)dy$, де L – коло $x^2+y^2=R^2$ за формулою Гріна.

Розв'язання. За умовою

$$P = x - 2y; \qquad Q = x + y.$$

Обчислимо частинні похідні:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -2; \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = 1.$$

За формулою Гріна

$$I = \iint\limits_D (1+2)\,dxdy = 3\iint\limits_D dxdy = 3\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^R \rho^2 d\rho = 3\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \frac{\rho^2}{2}\Bigg|_0^R = 3\frac{R^2}{2}\varphi\Bigg|_0^{2\pi} = 3\pi R^2.$$

Відповідь: $I = \int\limits_L (x-2y)dx + (x+y)dy = 3\pi R^2$.

Приклад 2. Обчислити площу еліпса $\left\{ \begin{array}{l} x = a\cos t \\ y = b\sin t \\ t \in [0, 2\pi] \end{array} \right\}$.

Розв'язання. $dy = b\cos t dt$, $\qquad dx = -a\sin t dt$.

За формулою $S = \frac{1}{2}\int\limits_L xdy - ydx$:

$$S = \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} \left(a\cos t b\cos t - b\sin t(-a\sin t) \right) dt = \frac{ab}{2}\int\limits_0^{2\pi} dt = \frac{ab}{2} t \Big|_0^{2\pi} = \pi ab.$$

У окремому випадку $a = b$ площа круга дорівнює πa^2.

Відповідь: $S = \pi ab$.

4.10. Умови незалежності криволінійного інтеграла другого роду від шляху інтегрування

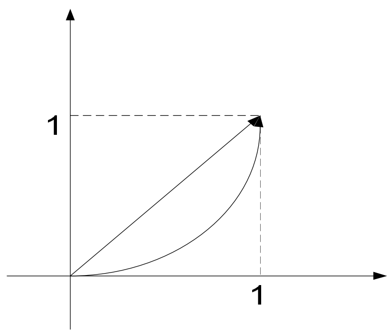
Розглянемо приклади:

Приклад 1. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_L y^2dx + 2xydy$ вздовж лінії а) $y = x$; б) $y = x^2$ від точки $A(0,0)$ до точки $B(1,1)$.

Розв'язання.

а) $y = x$; $dy = dx$.

$$\int\limits_L y^2dx + 2xydy = \int\limits_0^1 \left(x^2 + 2x^2 \right) dx = 3\int\limits_0^1 x^2dx = x^3 \Big|_0^1 = 1 .$$



б) $y = x^2$; б) $dy = 2xdx$

$$\int\limits_L y^2dx + 2xydy = \int\limits_0^1 \left(x^4 + 2x \cdot x^2 \cdot 2x \right) dx = \int\limits_0^1 \left(x^4 + 4x^4 \right) dx = 5\int\limits_0^1 x^4dx = x^5 \Big|_0^1 = 1 .$$

<u>Відповідь:</u> а) $\int\limits_L y^2dx + 2xydy = 1$; б) $\int\limits_L y^2dx + 2xydy = 1$.

<u>Приклад 2.</u> Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_L ydx + 2dy$ вздовж лінії а) $y = x$; б) $y = x^2$ від точки $A\left(0,0 \right)$ до точки $B\left(1,1 \right)$.

Розв'язання.

а) $$\int\limits_L ydx + 2dy = \int\limits_0^1 \left(x + 2 \right) dx = \frac{\left(x + 2 \right)^2}{2} \Bigg|_0^1 = \frac{3^2}{2} - \frac{2^2}{2} = \frac{9}{2} - \frac{4}{2} = \frac{5}{2}.$$

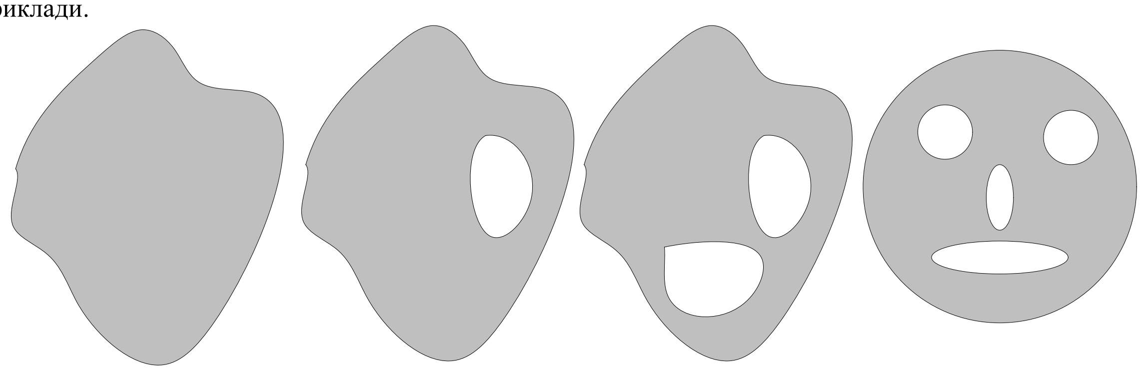
б) $$\int\limits_L ydx + 2dy = \int\limits_0^1 \left(x^2 + 2 \cdot 2x \right) dx = \int\limits_0^1 \left(x^2 + 4x \right) dx = \left(\frac{x^3}{3} + 2x^2 \right) \Bigg|_0^1 = \frac{1}{3} + 2 = \frac{7}{3}.$$

<u>Відповідь:</u> а) $\int\limits_L ydx + 2dy = \frac{5}{2}$; б) $\int\limits_L ydx + 2dy = \frac{7}{3}$.

<u>Зауваження:</u> Приклади показують, що значення криволінійного інтеграла може не залежати від того, якою саме кривою сполучено початкову й кінцеву точки шляху інтегрування (приклад 1), а може й залежати (приклад 2). З'ясуємо умови, за яких існує така незалежність.

Означення 4. Двовимірна область D називається *однозв'язною*, якщо її межа складається з однієї замкненої неперервної кусково-гладкої кривої без точок самоперетину. (Якщо будь-який заданий контур, що належить області D, можна стягнути в точку, не виходячи з області). Якщо межа області складається більше ніж з однієї замкненої неперервної кусково-гладкої кривої, то область називається *многозв'язною*.

Приклади.



однозв'язна область двозв'язна область тризв'язна область п'ятизв'язна область

Однозв'язними областями є круги прямокутники. Кругове кільце – двозв'язна область.

Теорема 3 (про умови незалежності криволінійного інтеграла другого роду від шляху інтегрування на площині): Нехай функції $P = P\left(x,y \right)$, $Q = Q\left(x,y \right)$, $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$ визначені й неперервні в деякій замкненій однозв'язній області $D \subset Oxy$. Тоді наступні чотири умови еквівалентні, тобто при виконанні однієї з них виконуються й усі інші:

1. Для довільної замкненої кусково-гладкої кривої L, що належить області D,

$$\int_L Pdx+Qdy=0$$

2. Для довільних двох точок $M,N\in D$ значення інтеграла $\int\limits_{MN} Pdx+Qdy$ не залежить від форми шляху інтегрування, який лежить в області D, а залежить тільки від положення цих точок.

3. Вираз $Pdx+Qdy$ є повним диференціалом деякої функції, визначеної в області D, тобто існує така функція $F(x,y)$, що

$$dF=Pdx+Qdy.$$

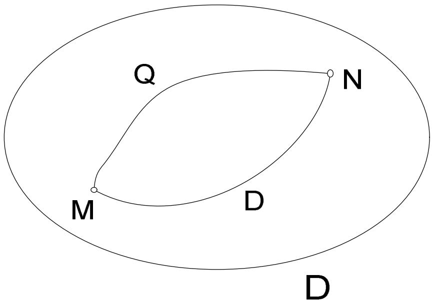
4. У всіх точках області D виконується рівність

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Доведення. Доведемо еквівалентність всіх чотирьох умов за схемою $1\Rightarrow 2\Rightarrow 3\Rightarrow 4\Rightarrow 1$.

$1\Rightarrow 2$. Нехай виконана перша з умов, тобто

$$\forall L\in D\left(\int_L Pdx+Qdy=0\right).$$



Візьмемо дві довільні точки M,N та сполучимо їх дугами довільних кривих, що належать D : MPN і MQN. В сумі ці дуги утворюють замкнену криву $L=MPNQM$. Згідно з умовою **1**,

$$\int_L Pdx+Qdy=\int_{MPNQM} Pdx+Qdy=\int_{MNP} Pdx+Qdy+\int_{NQM} Pdx+Qdy=0,$$

тому

$$\int_{MPN} Pdx+Qdy=-\int_{NQM} Pdx+Qdy,$$

або

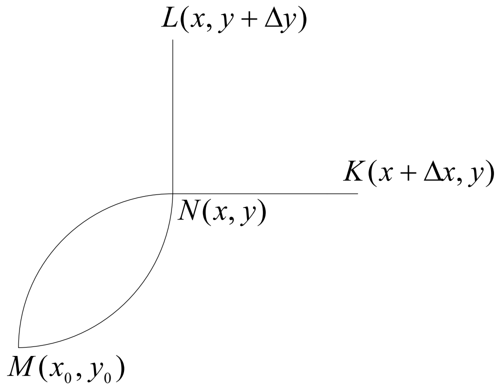
$$\int_{MPN} Pdx+Qdy=\int_{MQN} Pdx+Qdy,$$

тобто виконана умова **2.**

$2\Rightarrow 3$. Нехай виконана друга умова, тобто інтеграл $\int\limits_{MN} Pdx+Qdy$ не залежить від форми кривої, яка сполучає точки M,N, а залежить лише від самих точок M,N. Зафіксуємо точку M, а точку N будемо вважати довільною. Тоді $\int\limits_{MN} Pdx+Qdy$ буде функцією координат точки N:

$$\int_{MN} Pdx+Qdy=F(N)=F(x,y).$$

Перейдемо з точки N до точки $K(\ x+\Delta x, y\ )$ вздовж відрізка, паралельного осі Ox. Тоді $F(\ x, y\ )$ отримає приріст



$$\Delta_x F = \int\limits_{NK} Pdx + Qdy = \int\limits_{NK} Pdx = \int\limits_{x}^{x+\Delta x} Pdx$$

($y = const$, тому $dy = 0$ і $Qdy = 0$). Застосуємо до останнього визначеного інтеграла теорему про середнє, дістанемо:

$$\Delta_x F = P(\ \xi, y\ )\Delta x,$$

де $\xi \in [\ x; x+\Delta x\ ]$. Звідси

$$\frac{\Delta_x F}{\Delta x} = P(\ \xi, y\ ).$$

Оскільки за умовою функція $P(\ x, y\ )$ неперервна в області D, то, переходячи до границі при $\Delta x \to 0$, одержимо:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x F}{\Delta x} = \frac{\partial F}{\partial x} = \lim_{\xi \to 0} P(\ \xi, y\ ) = P(\ x, y\ ).$$

Таким чином, ми довели, що функція $F(\ x, y\ )$ має неперервну частинну похідну

$$\frac{\partial F}{\partial x} = P(\ x, y\ ).$$

Якщо перейти з точки $N(\ x, y\ )$ до точки $L(\ x, y+\Delta y\ )$ вздовж відрізка, паралельного осі Oy, то аналогічно можна довести, що функція $F(\ x, y\ )$ має неперервну частинну похідну

$$\frac{\partial F}{\partial y} = Q(\ x, y\ ).$$

Отже, умова **3** виконується.

$\underline{3 \Rightarrow 4}$. Нехай існує функція $F(\ x, y\ )$, $(\ x, y\ ) \in D$, така, що

$$dF = Pdx + Qdy.$$

З цієї умови випливає, що

$$P = \frac{\partial F}{\partial x}; \qquad Q = \frac{\partial F}{dy}.$$

За теоремою про змішані похідні

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}; \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}; \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x},$$

звідки

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

$\underline{4 \Rightarrow 1}$. Нехай виконується четверта умова. Розглянемо довільну замкнену кусково-гладку криву L, яка належить області D та обмежує деяку область D^*. Застосуємо до області D^* формулу Гріна (це можна зробити, оскільки область D однозв'язна) та, з урахуванням четвертої умови, дістанемо:

$$\iint\limits_{D^*} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \int\limits_{L} Pdx + Qdy = 0. \blacksquare$$

Зауваження: Умови **3** і **4** є необхідними й достатніми умовами незалежності криволінійного інтеграла від шляху інтегрування. Найзручнішою для застосувань є умова **4**.

Приклад. Перевіримо виконання умови 4 для інтеграла з приклада 1:

$$\int_L y^2dx + 2xydy: \qquad P = x^2; Q = 2xy; \qquad \frac{\partial P}{\partial y} = 2y; \frac{\partial Q}{\partial x} = 2y.$$

Отже,

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x},$$

тому цей інтеграл не залежить від шляху інтегрування та результати а), б) були однакові.

Перевіримо виконання умови 4 для інтеграла з приклада 2:

$$\int_L y^2dx + 2xydy: \qquad P = y; Q = 2; \qquad \frac{\partial P}{\partial y} = 1; \frac{\partial Q}{\partial x} = 0.$$

Отже,

$$\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x},$$

тому значення цього інтеграла залежить від шляху інтегрування.

Зауваження: Аналогічна теорема має місце для криволінійних інтегралів другого роду вздовж просторових кривих.

Означення 5. Тривимірна область G називається *поверхнево-однозв'язною*, якщо на будь-який замкнений контур L, який лежить в G та не має точок самоперетину, можна натягнути поверхню S, яка повністю належить G.

Поверхнево-однозв'язними областями є, наприклад, куля, еліпсоїд, многогранник, неоднозв'язною поверхнею є тор.

Теорема 4 (про умови незалежності криволінійного інтеграла другого роду від шляху інтегрування у просторі): Нехай функції $P = P(x,y,z)$, $Q = Q(x,y,z)$, $R = R(x,y,z)$ неперервні разом із своїми частинними похідними першого порядку в поверхнево-однозв'язній області $G \subset Oxyz$. Тоді наступні чотири умови еквівалентні:

1. Для довільної замкненої кусково-гладкої кривої L, що належить області G,

$$\int_L Pdx + Qdy + Rdz = 0.$$

2. Криволінійний інтеграл $\int_{AB} Pdx + Qdy + Rdz$ не залежить від форми кривої інтегрування, яка сполучає точки A, B, та лежить в G.

3. Вираз $Pdx + Qdy + Rdz$ є повним диференціалом деякої функції $F(x,y,z)$, визначеної в G.

4. У всіх точках області G виконуються рівності:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}; \qquad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}; \qquad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}$$

4.11. Інтегрування повних диференціалів

Нехай вираз $Pdx + Qdy + Rdz$ є повним диференціалом деякої функції, тобто в області D існує функція $F(x,y)$ така, що

$$dF = Pdx + Qdy.$$

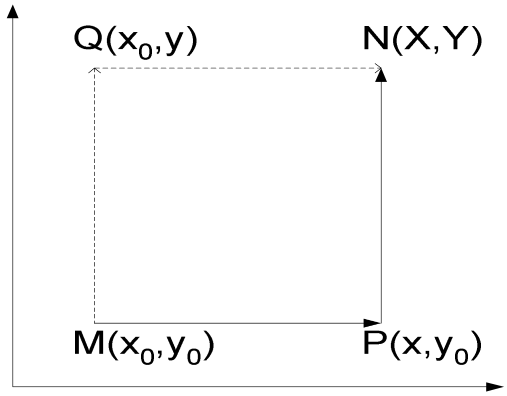
Згідно з теоремою про умови незалежності криволінійного інтеграла від шляху інтегрування по площині, функцію $F(x,y)$ можна визначити рівністю

$$F(x,y) = \int_{MN} Pdx + Qdy.$$

Оскільки диференціали відрізняються на сталу величину C, то в більш загальному вигляді вираз для функції $F(x,y)$ визначається рівністю:

$$F(x,y)=\int\limits_{MN} Pdx+Qdy+C.$$

Вираз, що стоїть під знаком інтеграла в останній формулі, є повним диференціалом функції $F(x,y)$, тому цей інтеграл не залежить від шляху інтегрування, що сполучає точки M і N, а залежить тільки від положення цих точок. Тому при інтегруванні повних диференціалів шлях інтегрування обирається найзручнішим з обчислювальної точки зору. Виявляється, що найзручнішим шляхом інтегрування є ламана, ланки якої паралельні координатним осям.



Обчислимо

$$F(x,y)=\int\limits_{MN} Pdx+Qdy$$

від точки $M(x_0,y_0)$ до точки $N(x,y)$ по ламаній MPN:

$$\int\limits_{MN} Pdx+Qdy=\int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} Pdx+Qdy.$$

На $[MP]$:

$$y=y_0; \qquad dy=0;$$

на $[PN]$:

$$x=const; \qquad dx=0,$$

тому

$$F(x,y)=\int\limits_{x_0}^{x} P(x,y_0)dx+\int\limits_{y_0}^{y} Q(x,y)dy+C.$$

Аналогічну формулу можна дістати при інтегруванні по ламаній MQN:

$$F(x,y)=\int\limits_{x_0}^{x} P(x,y_0)dx+\int\limits_{y_0}^{y} Q(x,y)dy+C.$$

За останніми двома формулами можна знайти загальний інтеграл диференціального рівняння

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0,$$

яке називається диференціальним рівнянням у повних диференціалах.

Приклад. Обчислити $I=\int\limits_{MN}(x^2+2xy-y^2)dx+(x^2-2xy+y^2)dy$, де $M=(2,0)$, $N=(2,1)$.

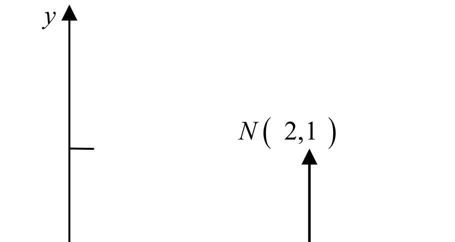
Розв'язання. Підінтегральний вираз є повним диференціалом тому що

$\frac{\partial P}{\partial y}=2x-2y;\quad \frac{\partial Q}{\partial x}=2x-2y$ і $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}\quad \forall(x,y)\in Oxy$.

Виконаємо інтегрування по ламаній OMN.

На відрізку $[OM]$: $y=0, dy=0, x\in[0,2]$.

На відрізку $[MN]$: $x=2, dx=0, y\in[0,1]$.



Отже,

$$I=\int\limits_0^2 x^2dx+\int\limits_0^1(4-4y+y^2)dy=$$

$$=\frac{x^3}{3}\Bigg|_0^2+\left(4y-2y^2+\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_0^1=\frac{8}{3}+4-2+\frac{1}{3}=5.$$

Відповідь: $I=\int\limits_{MN}(x^2+2xy-y^2)dx+(x^2-2xy+y^2)dy=5$.

Завдання для самостійного розв'язання

Завдання № 1. Маємо точки A (3, 3) і B (3, 0). Обчислити $\int\limits_L (x-y)dx$:

1) по прямій OA; 2) по дузі OA параболи $y=\dfrac{x^2}{3}$; 3) по ламаній OBA.

Завдання № 2. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_L (2a-y)dx-(a-y)dy$, якщо L – перша (від початку координат) арка циклоїды $\begin{cases} x=a(t-\sin t), \\ y=a(1-\cos t) \end{cases}$.

Завдання № 3. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_L (1-x^2)ydx+x(1+y^2)dy$, якщо контуром інтегрування L є коло $x^2+y^2=R^2$:

1) безпосередньо; 2) за допомогою формули Гріна.

Питання для самоконтролю

1. Що таке інтегральна сума для функції $f(x,y)$ по області D?
2. Що називається подвійним інтегралом від функції $f(x,y)$ по області D?
3. Чому, якщо $f(x,y)=1$ скрізь у області D, то будь-яка інтегральна сума від цієї функції по області D дорівнює
$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=S(D)\ ?$$
4. Що називається потрійним інтегралом від функції $f(x,y,z)$ по області G?
5. Чому, якщо $f(x,y,z)=1$ скрізь у області G, то будь-яка інтегральна сума від цієї функції по області G дорівнює
$$\iiint\limits_G dxdydz=V(G)\ ?$$
6. Якими формулами виражаються моменти інерції однорідного тіла відносно вісей координат?
7. Якими формулами виражаються координати центра маси тіла?
8. За якою формулою може бути обчислена за допомогою криволінійного інтеграла площа плоскої фігури?
9. Наведіть приклад криволінійного інтеграла, який залежить від шляху інтегрування.
10. Напишіть формулу Гріна та скажіть, чи вірна вона, якщо область D обмежена двома концентричними колами? Як у цьому разі обходиться контур інтегрування для криволінійного інтегрування?

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Баврин И. И. Курс высшей математики. – М. : Просвещение, 1992.
2. Берман Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа. – М. : Наука, 1977.
3. Васильченко І. П., Данилов В. Я., Лобанов А. І., Таран С. Ю. Вища математика: основні означення, приклади і задачі. – К. : Либідь, 1992.
4. Виленкин И. В. Высшая математика. – Ростов н/Дону : Феникс, 2004.
5. Вища математика : навч. посіб. для студ. вищ. навч. закл.: у 2 ч. / Ф. М. Лиман, В. Ф. Власенко, С. В. Петренко та ін. – Суми : Університетська книга, 2006.
6. Данко П. Е., Кожевников А. Г., Попов А. Г. Высшая математика в упражнениях и задачах. – М. : Высш. шк., 1986.
7. Дюженкова Л. Г., Носель Т. В. Вища математика. Практикум. – К. : Вища шк., 1991
8. Жовтан Л. В., Прошкін В. В., Темнікова С. В. Елементи лінійної алгебри та аналітичної геометрії : Навчальний посібник для студентів технічних спеціальностей вищих навчальних закладів. – Луганськ : Альма-матер, 2007.
9. Жовтан Л. В., Прошкін В. В., Темнікова С. В. Вступ до математичного аналізу. Елементи диференціального числення : навчальний посібник для студентів технічних спеціальностей вищих навчальних закладів. – Луганськ : Вид-во ДЗ “ЛНУ імені Тараса Шевченка”, 2008.
10. Зимина О. В. Высшая математика. – М. : Физматлит, 2003.
11. Каплан И. А. Практические занятия по высшей математике. – Харьков : ХГУ, 1967.
12. Киричевский В. В., Конилова Н. А. Курс высшей математики. Учеб. пособие для вузов. – К. : Наук. думка, 1998.
13. Коваленко І. П. Вища математика. – К. : Вища школа, 2006.
14. Кривуца В. Г. Вища математика. – К. : Центр навч. літератури, 2005.
15. Кудрявцев В. А., Демидович Б. П. Краткий курс высшей математики: Учеб. пособие для втузов. – М. : Наука, 1989.
16. Кузнєцов Л. А. Сборник заданий по высшей математике (типовые расчеты). – М. : Высш. шк., 1982.
17. Кулініч Г. Л., Максименко Л. О., Плахотнік В. В., Призва Г. Й. Вища математика: основні означення, приклади і задачі. – К. : Либідь, 1992.
18. Литвин І. І. Вища математика. – К. : Центр навч. літератури, 2004.
19. Мантуров О. В., Матвеев Н. М. Курс высшей математики. – М. : Высш. шк., 1986.
20. Минорский В. П. Сборник задач по высшей математике. – М. : Наука, 1978.
21. Овчинников П. П. Вища математика. – К. : Техніка, 2004.
22. Тевяшев А. Д. Вища математика у прикладах та задачах. – К. : Кондор, 2006 .
23. Щипачев В. С. Высшая математика. – М. : Высш. шк., 1985.

Навчальне видання

ЖОВТАН Людмила Василівна
ПРОШКІН Володимир Вадимович
ТЕМНІКОВА Світлана Володимирівна

ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ, ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

Навчальний посібник
для студентів технічних спеціальностей
вищих навчальних закладів

За редакцією авторів
Комп'ютерний макет – Прошкін В. В.
Коректор – Мілєва І. В.

Здано до склад. 07.12.2009 р. Підп. до друку 06.01.2010 р.
Формат 60x84 1/8. Папір офсет. Гарнітура Times New Roman.
Друк ризографічний. Ум. друк. арк. 15,11. Наклад 100 прим. Зам. № 3.

Видавець і виготовлювач
Видавництво Державного закладу
«Луганський національний університет імені Тараса Шевченка»
вул. Оборонна, 2, м. Луганськ, 91011. т/ф: (0642) 58-03-20.
e-mail: alma-mater@list.ru
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 3459 від 09.04.2009 р.