Ю. Г. Козуб, О. В. Калайдо

Теоретична механіка

Частина І.

Статика і кінематика

Міністерство освіти і науки, молоді та спорту України
Державний заклад
«Луганський національний університет
імені Тараса Шевченка»

Ю. Г. Козуб,
О. В. Калайдо

Теоретична механіка

Частина І.
Статика і кінематика

Навчальний посібник з варіантами завдань
до розрахунково-графічної роботи
для студентів спеціальності «Професійна освіта»
напряму підготовки «Транспорт» усіх форм навчання

Луганськ
ДЗ «ЛНУ імені Тараса Шевченка»
2011

УДК 531(075.8)
ББК 22.21я73
К59

Рецензенти:

Меняйленко О. С. – доктор технічних наук, професор, проректор з науково-педагогічної роботи Луганського національного університету імені Тараса Шевченка.

Дохняк Б. М. – кандидат технічних наук, доцент кафедри вищої математики Східноукраїнського національного університету імені Володимира Даля.

Завгородній Є. Є. – кандидат технічних наук, доцент кафедри інженерно-педагогічних дисциплін Луганського національного університету імені Тараса Шевченка.

Козуб Ю. Г.

К59 Теоретична механіка. Частина I. Статика і кінематика : навч. посіб. з варіантами завдань до розрахунково-графічної роботи для студ. спец. «Професійна освіта» напряму підготовки «Транспорт» усіх форм навчання / Ю. Г. Козуб, О. В. Калайдо ; Держ. закл. «Луган. нац. ун-т імені Тараса Шевченка». – Луганськ : Вид-во ДЗ «ЛНУ імені Тараса Шевченка», 2011. – 138 с.

У навчальному посібнику в повному обсягу викладено лекційний матеріал першої частини курсу, наведено методику вирішення задач і розглянуто велику кількість прикладів їх розв’язання до усіх тем, що можуть бути включені у розрахунково-графічну роботу, наведені задання до РГР з 12 глав дисципліни.

Посібник призначений для студентів 1 та 2 курсів денної та заочної форм, які навчаються по технічним та технологічним напрямам.

УДК 531(075.8)
ББК 22. 21 я73

Рекомендовано до друку навчально-методичною радою Луганського національного університету імені Тараса Шевченка (протокол № 3 від 2 листопада 2011 р.)

Зміст

РОЗДІЛ II. КІНЕМАТИКА

ПЕРЕДМОВА

Теоретична механіка – фундаментальна природнича наука, яка вивчає найбільш загальні закони руху і взаємодії тіл, пояснює якісні і кількісні закономірності, що спостерігаються у природі. Теоретична механіка має велике значення при підготовці майбутніх інженерів, оскільки вона є фундаментом для вивчення подальших інженерних дисциплін: опору матеріалів, теорії механізмів і машин, деталей машин, ряду спеціальних дисциплін. Курс теоретичної механіки повинен сформувати у майбутніх інженерів творчу інтуїцію, вміння легко орієнтуватися і приймати правильні рішення в питаннях техніки і технології, що постійно виникають у зв'язку з розвитком нових видів виробництва і нових технічних засобів.

Дане видання **має дві мети**: по-перше – надати студентам лекційний матеріал у повному обсязі, зорієнтувати на найбільш важливі питання курсу, допомогти в підготовці до модульних чи екзаменаційних робіт; по-друге – сприяти опануванню студентами не менш важливої практичної частини курсу, підготувати їх до самостійного виконання розрахунково-графічної роботи (РГР), та надати всю необхідну інформацію в процесі її виконання.

Дане видання є *навчальним посібником* для студентів тих спеціальностей, в яких теоретична механіка вивчається за повною програмою з виконанням двох розрахунково-графічних робіт, проте може бути використане також студентами спеціальностей, що навчаються за скороченою програмою.

Посібник складений у повній відповідності до діючої програми курсу «Теоретична механіка» спеціальностей професійної освіти і присвячений першій частині курсу дисципліни – розділам «Статика» і «Кінематика». В ***статиці*** розглядаються питання перетворення одних сукупностей сил в інші, еквівалентні даним, з'ясовуються умови рівноваги різних сукупностей сил. В ***кінематиці*** вивчається рух матеріальних тіл з геометричної точки зору, без урахування силових взаємодій між ними. На кожен із розділів в посібнику відведено по шість глав і по стільки ж завдань до РГР.

Посібник орієнтовано насамперед на студентів денної та заочної форм навчання напряму підготовки «Транспорт», тому місцями свідомо опущений глибокий аналіз теорії та виводи формул, а також деякі питання, що не мають відношення до транспортної сфери або дуже рідко постають перед інженером широкого профілю. Це тим більш оправдано наявністю великої кількості підручників з широким висвітленням теорії і детальним виводом формул, на які автори посилаються в кінці посібника.

В даному виданні приділено значну увагу базовим поняттям і законам теоретичної механіки, без скорочень викладено лекційний матеріал, детально розглянуто ті теоретичні питання, які традиційно важко засвоюються студентами. Наряду з цим, викладення лекційного матеріалу супроводжується детальним описанням методів розв'язання задач, прикладами вирішення великої кількості задач за усіма без виключення темами курсу. Контрольні запитання в кінці кожної глави мають зорієнтувати студентів на найбільш важливі моменти теоретичної частини в процесі підготовки до модульних та екзаменаційних робіт.

Особливістю даного навчального посібника є саме поєднання в рамках одного видання класичного підручника і посібника до розв'язання задач з варіантами завдань до РГР. Як відомо, основні труднощі при виконанні розрахунково-графічної роботи становлять великий об'єм обчислень при розв'язанні задач і слабка підготовка студентів з суміжних дисциплін – фізики і математики, причому ці труднощі багатократно збільшуються при роботі із студентами заочної форми навчання. Тому для більш оптимального використання часу в розрахункові роботи авторами введена певна кількість спрощених задач, а також задач, в яких зменшення об'єму розрахунків не впливає на їх технічну інформативність.

Перед виконанням РГР студенти мають засвоїти матеріал курсу через прослуховування лекцій, роботу на практичних заняттях і подальше самостійне опрацювання проблемних питань при роботі з даним посібником. По мірі вивчення матеріалу викладач видає студентам завдання до РГР. Наявність завдань до РГР з усіх без виключення глав статики і кінематики дозволить викладачу варіювати їх кількістю і тематикою в залежності від професійного спрямування студентів та часу, відведеного на вивчення курсу.

Для найбільш ефективного використання навчального посібника при виконанні РГР автори рекомендують наступний *алгоритм роботи* студента: після отримання завдання студент повторює лекційний матеріал, після чого знайомиться з методичними рекомендаціями щодо розв'язання задач з даної теми, наведеними в кожній главі. Далі студент має детально розібрати приклади вирішення типових задач, наведені у посібнику, після цього спробувати розв'язати дані задачі самостійно і порівняти отримані результати з авторськими. Лише після успішного опанування типових задач можна приступати до розв'язання власної задачі з даної теми. У разі виникнення труднощів при вирішенні власної задачі студент звертається по консультацію до викладачів даної дисципліни на найближчому практичному занятті.

Даний посібник є результатом викладацької діяльності авторів в Луганському національному університеті імені Тараса Шевченка. Перехід до університетської інженерної освіти призвів до необхідності розширення змісту курсу, більш повного фізичного трактування деяких питань, ускладнення математичного апарату, що знайшло відображення в даному посібнику. Матеріал в посібнику розподілений між авторами наступним чином: Передмова, глави 5, 7 – 12 написані Козубом Ю.Г., ним же складені завдання до РГР приклади і методика розв'язання задач з даних глав. Глави 1 – 4 і 6, а також методичні рекомендації і завдання до РГР з них складені Калайдо О.В.

Автори будуть вдячні читачам, які пришлють відгуки і побажання за адресою: м. Луганськ, вул. Оборонна 2а, видавництво ДЗ «Луганський національний університет імені Тараса Шевченка», або на адресу кафедри: м. Луганськ, вул. Оборонна 2а, кафедра інженерно-педагогічних дисциплін, завідувачу кафедри Козубу Ю.Г.

РОЗДІЛ І. СТАТИКА

Глава 1. Вступ до статики

1.1. Основні поняття статики

Статика – розділ механіки, який вивчає способи зведення складних систем до еквівалентних їм простіших, а також умови рівноваги тіл під дією різних систем сил.

У теоретичній механіці розглядаються не конкретні тіла, а їх наступні ідеалізовані моделі:

а) *матеріальна точка* – тіло, розмірами якого в даних умовах можна знехтувати (Земля в її русі навколо Сонця). Матеріальна точка має масу і здатність взаємодіяти з іншими тілами;

б) *механічна система* – сукупність матеріальних точок, положення і рухи яких взаємно пов'язані;

в) *абсолютно тверде тіло* – система матеріальних точок, відстань між якими завжди залишається незмінною;

г) *суцільне середовище* – система матеріальних точок, відстань між якими може змінюватися.

Найважливішим поняттям теоретичної механіки є поняття сили. **Сила** – міра механічної дії одного тіла на інше, яка визначає напрям та інтенсивність цієї дії. Взаємодія тіл може відбуватися як при їх безпосередньому контакті, так і за допомогою силових полів різної природи (наприклад електричного чи магнітного).

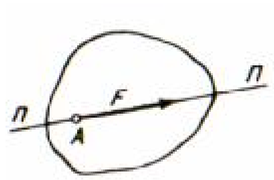


Рис. 1.1. Основні характеристики сили.

Усі фізичні величини поділяються на скалярні і векторні. Сила – векторна величина, її основні характеристики: *n*-*n* – лінія дії і *A* – точка прикладення (рис. 1.1). В системі СІ одиницею виміру сили є **ньютон** (Н) – сила, що надає масі 1 кг прискорення 1 м/с^2. Рідше використовують технічну систему одиниць МКГСС и систему СГС. В них одиницею виміру сили є кілограм-сила (1 кгс = 9,81 Н) та дина (1 дин = 10^{-5} Н) відповідно.

В теоретичній механіці обчислення часто проводяться за допомогою розрахункових схем. **Розрахункова схема** – реальний об’єкт, який звільнено від несуттєвих особливостей. На рисунку, зробленому Галілеєм, показано реальний об’єкт (рис. 1.2, а) і його розрахункову схему (рис. 1.2, б).

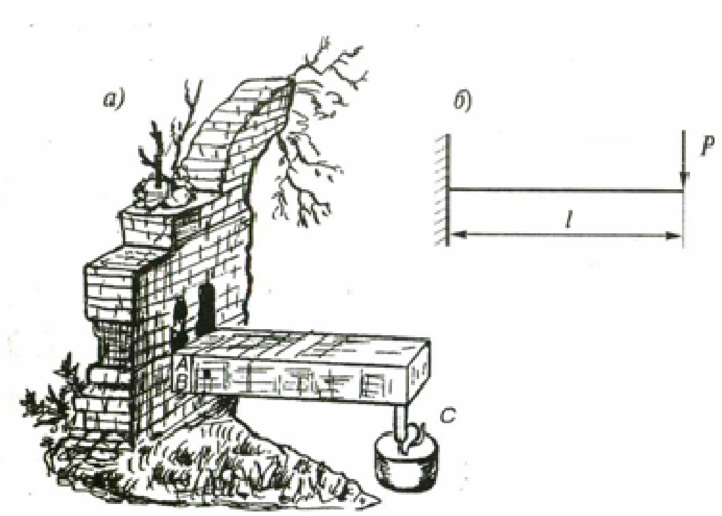


Рис. 1.2. Реальний об’єкт та його розрахункова схема.

Усі сили за характером дії на тіло поділяються на два типи:
1. **Зосереджені** – сили, які можна вважати прикладеними в одній точці (рис. 1.2, б). Реально через тіло, що не має розмірів, неможливо передати силову дію, тому така сила є схематизацією дійсності. Такі сили характеризуються абсолютним значенням.
2. **Розподілені** – сили, які не можна вважати прикладеними в одній точці. Вони характеризуються інтенсивністю і бувають трьох видів:

а) *розподілені по поверхні* p (рис. 1.3, б) – сили, прикладені в місці контакту тіл, коли площею контакту не можна знехтувати. Інтенсивність вимірюється в Н/м^2, прикладом можуть слугувати сила дії вітру та снігове навантаження, тиск газу на стінки циліндра двигуна та поршень.

б) *лінійно розподілені* q (рис. 1.3, в) – сили, які можуть бути зведені до осі тіла, наприклад сила дії поїзда на залізничні рейки.

в) *розподілені по об'єму* γ (рис. 1,3, а) – сили, які не є результатом контакту тіл. Вони прикладені в кожній точці об'єму, зайнятого тілом. Прикладом є сили інерції, власна вага тіла, архімедова сила.

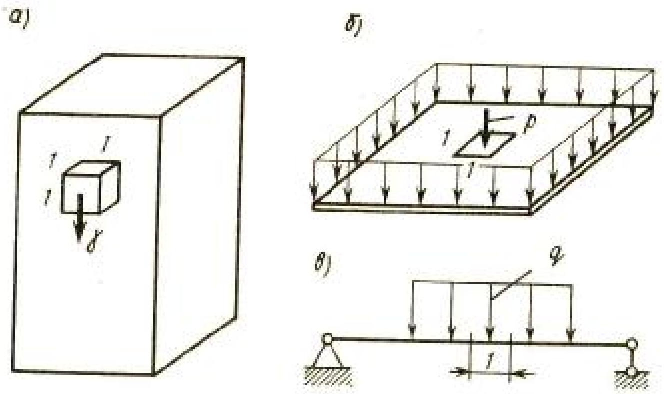


Рис. 1.3. Види розподілених сил.

Система сил - сукупність сил, що діють на тіло. Геометрично системи сил класифікуються наступним чином:

1. *Збіжні* – лінії дії сил перетинаються в одній точці.
2. *Паралельні* – лінії дії сил паралельні.
3. *Довільні* – лінії дії сил не паралельні і не перетинаються.

По розташуванню в просторі системи сил поділяються на
а) *плоскі* – лінії дії сил лежать в одній площині;
б) *просторові* – лінії дії сил не лежать в одній площині.

По напряму дії сили діляться на:
а) *зовнішні* – діють з боку точок або тіл, що не входять в дану систему;
б) *внутрішні* – сили взаємодії між матеріальними точками даної системи.
Належність сили до того чи іншого типу визначається системою, яка розглядається, тому одна сила може бути як зовнішньою, так і внутрішньою.

По характеру дії системи сил бувають:
а) *еквівалентні* – під дією кожної з них тіло знаходиться в одному і тому ж стані;
б) *зрівноважені* - системи, що не змінюють стану тіла, до якого прикладені.

1.2. В'язі та їх реакції

У теоретичній механіці усі точки і системи матеріальних точок діляться на вільні (на їх рух не накладені обмеження) і невільні. Вільна матеріальна точка має три ступені свободи, вільна система матеріальних точок – шість. Якщо система невільна, то говорять, що на її переміщення накладені в'язі.

В'язь - тіло або поле, що обмежує переміщення матеріальної точки або твердого тіла, яке розглядається. Також існують в'язі, які накладаються на швидкість та прискорення точки чи тіла, тобто обмежують рух в цілому.

Реакція в'язі - сила, з якою в'язь діє на дану матеріальну точку або тверде тіло. Реакції в'язей називають пасивними силами, оскільки вони виникають тільки під дією активних (зовнішніх) сил. На рис. 1.4 активна сила $\boldsymbol{G}$ (вага літака) викликає появу трьох пасивних сил $\boldsymbol{R}_1$, $\boldsymbol{R}_2$ і $\boldsymbol{R}_3$ в місцях контакту його колес із в’яззю (злітною смугою).

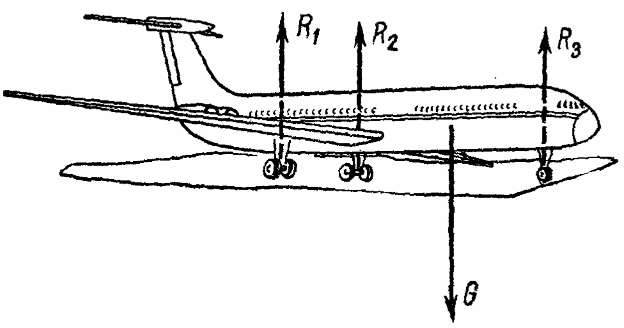
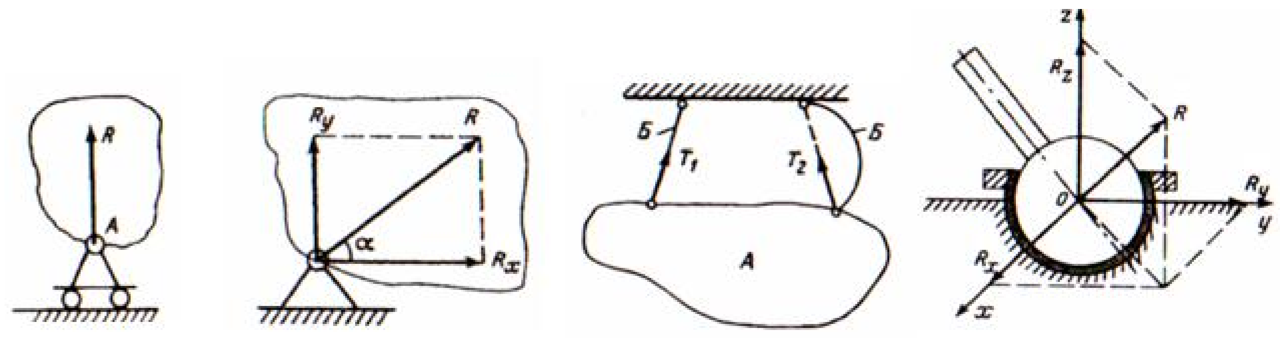


Рис. 1.4. В'язі та їх реакції.

У статиці розглядаються найпростіші в'язі, виконані у формі різних твердих або гнучких тіл.

У шарнірно рухомій опорі реакція перпендикулярна до поверхні кочення (рис. 1.5, а), а в шарнірно нерухомій реакцію знаходять через горизонтальну і вертикальну складові (рис. 1.5, б). Реакція невагомої нерозтяжної нитки (троса, шнура або ланцюга) завжди спрямована по нитці до точки закріплення (рис. 1.5, в). Реакцію сферичного шарніра (підп'ятника) визначають через три взаємно перпендикулярні складові за правилом паралелепіпеда (рис. 1.5, г).



а) б) в) г)

Рис. 1.5. Найбільш поширені в'язі та їх реакції.

У випадку *ідеально гладенької* поверхні точка контакту тіла A вільно ковзає по ній, тому існує тільки нормальна реакція $\boldsymbol{N}_A$. Якщо поверхня шорстка (рис. 1.6, а), то до нормальної реакції додається горизонтальна реакція в'язі – сила тертя $\boldsymbol{F}_A$. У випадку защемлення виникає три силових фактори (рис. 1.6, б) – вертикальна та горизонтальна реакції та крутний момент, який буде детально розглянутий в наступному параграфі.

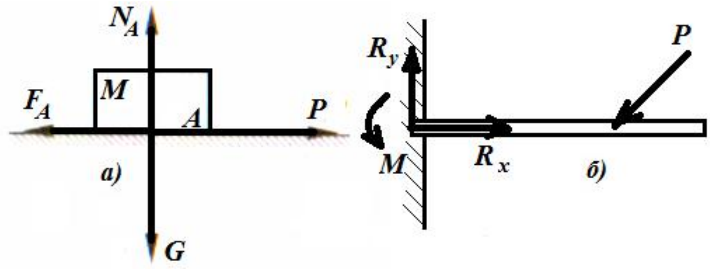
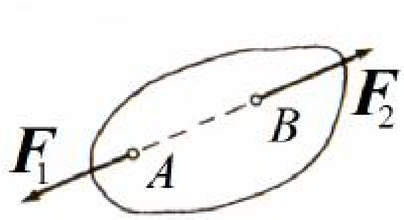


Рис. 1.6. Реакції шорсткої поверхні і защемлення.

1.3. Аксіоми статики

У основі статики лежить 6 аксіом, встановлених дослідним шляхом і тривалими спостереженнями за фізичними явищами реального світу.

Аксіома I (про зрівноважену систему)



Дві сили є зрівноваженою (еквівалентною нулю) системою, якщо вони лежать на одній прямій, рівні за величиною і протилежні за напрямом (рис. 1.7). Ця аксіома справедлива тільки для абсолютно твердого тіла.

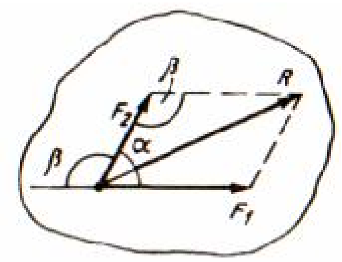
Рис. 1.7. Зрівноважена система сил.

Аксіома II (аксіома інерції)

Під дією зрівноваженої системи сил матеріальна точка (тіло) рухається рівномірно і прямолінійно або знаходиться в стані спокою. Ця аксіома є законом інерції Галілея.

Аксіома III (про паралелограм сил)

Рівнодійна системи сил ***R*** - сила, еквівалентна заданій системі сил. У разі двох сил, прикладених до тіла в одній точці, рівнодійна дорівнює їх векторній сумі і прикладена в тій же точці (рис. 1.8). Графічно рівнодійна визначається за правилом паралелограма, а її модуль знаходиться по формулі



$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2 \cos a}\,. \qquad (1.1)$$

Рис. 1.8. Паралелограм сил.

З цієї аксіоми виходить, що геометрично можна складати будь-яку кількість сил, прикладених в одній точці. Для цього до кінця першого вектора прикладаємо початок другого, до кінця другого - початок третього і т. д. З'єднавши початок першого вектора з кінцем останнього, отримаємо рівнодійну сил (рис. 1.9). Отримана фігура називається силовим багатокутником. Якщо ж початок першого вектора співпаде з кінцем останнього (замкнутий багатокутник), то рівнодійна системи дорівнює нулю.

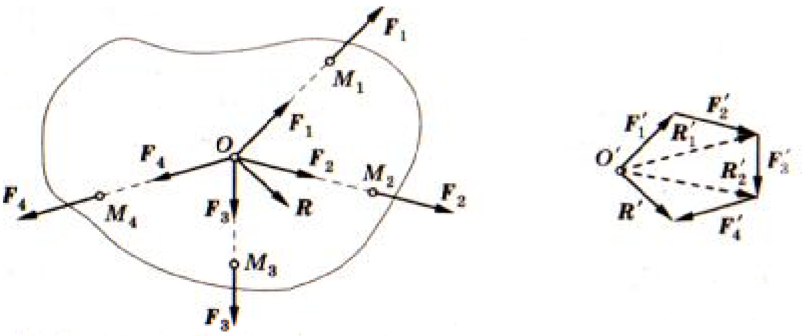


Рис. 1.9. Силовий багатокутник.

Сила, що зрівноважує – сила, рівна за модулем до рівнодійної і спрямована по лінії її дії у протилежний бік.

Аксіома IV (про накладення нових в'язей)

Рівновага твердого тіла не порушиться при накладенні на нього додаткових в'язей.

Аксіома V (про звільнення від в'язей)

Невільне тверде тіло можна представити як вільне, на яке окрім зовнішніх сил діють реакції в'язей.

Нехай куля лежить на гладкій горизонтальній площині, яка є в'яззю (рис. 1.10, а). З цієї аксіоми виходить, що кулю можна представити вільною, такою, що знаходиться під дією зовнішньої сили тяжіння $\boldsymbol{G}$ і рівної за величиною і протилежної за напрямком реакції в'язі $\boldsymbol{N}$ (рис. 1.10, б).

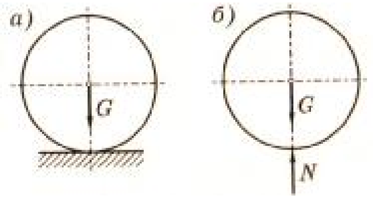


Рис. 1.10. Принцип звільнення від в'язей.

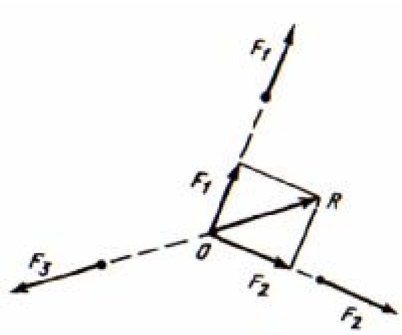
Аксіома VI (про затвердження)

Рівновага деформівного тіла зберігається, якщо не змінюючи його форми, розмірів і положення в просторі представити його абсолютно твердим.

Ця аксіома дозволяє розв'язувати прості задачі статики гнучких тіл (розрахунок ниток, ланцюгових і ремінних передач), застосувавши до них методи статики твердого тіла.

1.4. Найпростіші теореми статики

Теорема про три сили: якщо абсолютно тверде тіло знаходиться в рівновазі під дією трьох непаралельних сил і лінії дії двох сил перетинаються, то усі сили лежать в одній площині і їх лінії дії перетинаються в одній точці.



Д о в е д е н н я. Переносимо в точку O перетини ліній дії сили $\boldsymbol{F}_1$ і $\boldsymbol{F}_2$ і складаємо їх (рис. 1.11)

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2.$$

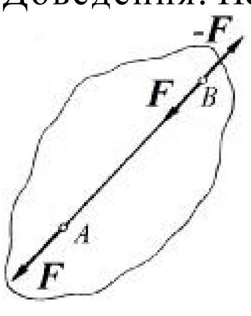
На тіло діють дві сили – $\boldsymbol{R}$ і $\boldsymbol{F}_3$. Щоб тіло знаходилося в рівновазі, вони повинні утворювати зрівноважену систему. Це означає, що їх лінія дії теж проходить через точку O.

Рис. 1.11. Теорема про три сили.

Зрівноважена система з трьох сил є замкнутим трикутником. Знаючи три елементи цього трикутника (сторону і два прилеглі кути або дві сторони і кут між ними), можна визначити інші невідомі елементи: сили або кути між силами.

Теорема про силу як ковзний вектор: дія сили на тверде тіло не зміниться, якщо перенести її в межах тіла по лінії дії в будь-яку точку.

Д о в е д е н н я. Нехай в точці A до тіла прикладена сила $\boldsymbol{F}$. У довільній точці B на її лінії дії прикладемо зрівноважену систему сил $\boldsymbol{F}$ і - $\boldsymbol{F}$ (рис. 1.12).



З першої аксіоми сила $\boldsymbol{F}$ в точці A і - $\boldsymbol{F}$ в точці B утворюють зрівноважену систему, еквівалентну нулю. В результаті залишається тільки сила $\boldsymbol{F}$, прикладена в точці B. З цього випливає, що сила є ковзним вектором.

Рис. 1.12. Теореми про силу як ковзний вектор.

1.5. Умови рівноваги системи збіжних сил

Усі збіжні сили можуть бути перенесені в точку перетину їх ліній дії *O*. Дві сили додаються за правилом паралелограма (рис. 1.6), а для додавання більшого числа сил використовують силовий багатокутник (рис. 1.7). У разі трьох збіжних сил, що утворюють просторову систему, користуються правилом паралелепіпеда.

Рівнодійну системи сил можна визначити й аналітично. Як відомо, будь-яку силу можна розкласти на складові за координатними осями

$$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{i}R_x+\boldsymbol{j}R_y+\boldsymbol{k}R_z,$$

де $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ – одиничні вектори (орти). Тоді рівнодійна системи збіжних сил дорівнює векторній (геометричній) сумі доданків

$$\boldsymbol{R}=\sum_{k=1}^{n}\boldsymbol{F}_k=\boldsymbol{i}\sum_{k=1}^{n}F_{kx}+\boldsymbol{j}\sum_{k=1}^{n}F_{ky}+\boldsymbol{k}\sum_{k=1}^{n}F_{kz}, \tag{1.2}$$

де $\boldsymbol{F}_{kx}$, $\boldsymbol{F}_{ky}$ і $\boldsymbol{F}_{kz}$ – проекції відповідних сил на координатні осі.

Модуль рівнодійної визначається по формулі

$$R=\sqrt{R_x^2+R_y^2+R_z^2}=\sqrt{\left(\sum_{k=1}^{n}F_{kx}\right)^2+\left(\sum_{k=1}^{n}F_{ky}\right)^2+\left(\sum_{k=1}^{n}F_{kz}\right)^2}\,. \tag{1.3}$$

Кути між напрямом рівнодійної і координатними осями знаходяться за допомогою напрямних косинусів

$$\cos a=\frac{R_x}{R},\ \cos b=\frac{R_y}{R},\ \cos g=\frac{R_z}{R}. \tag{1.4}$$

Необхідною і достатньою умовою рівноваги тіла під дією системи збіжних сил є рівність нулю рівнодійної даної системи, тобто

$$\boldsymbol{R}=0. \tag{1.5}$$

Векторному рівнянню (1.5) відповідають наступні скалярні вирази

$$R_x=R_y=R_z=0\ \text{або}\ \sum_{k=1}^{n}F_{kx}=\sum_{k=1}^{n}F_{ky}=\sum_{k=1}^{n}F_{kz}=0. \tag{1.6}$$

Формули (1.6) є аналітичною формою **умови рівноваги системи збіжних сил**: для рівноваги довільної системи збіжних сил необхідно і достатньо, щоб алгебричні суми проекцій сил на три взаємно перпендикулярні осі дорівнювали нулю.

У разі плоскої системи збіжних сил умови рівноваги мають вигляд

$$R_x=R_y=0\ \text{або}\ \sum_{k=1}^{n}F_{kx}=\sum_{k=1}^{n}F_{ky}=0. \tag{1.7}$$

Питання для самоконтролю

1. Якими параметрами характеризується сила, що діє на тіло?
2. Які моделі реальних об’єктів застосовуються в теоретичній механіці?
3. Чи утворюють дія і протидія зрівноважену систему сил і чому?
4. Чи може знаходитись тіло у стані рівноваги під дією трьох сил?
5. Скільки умов рівноваги можна записати для плоскої системи збіжних сил, просторової системи збіжних сил?
6. Де використовується аксіома про затвердження?

Завдання № 1. «Системи збіжних сил»

Рекомендації до розв'язання задач

Перед початком розв'язання задачі треба визначити кількість сил у системі. Якщо їх не більше трьох, доречно користуватися геометричними умовами рівноваги, за більшої кількості сил слід використовувати аналітичний метод.

а) При використанні **аналітичних умов** рівноваги (*аналітичний метод*) необхідно:

1. Визначити об'єкт рівноваги і точку, де перетинаються лінії дії сил.
2. Прикласти до виділеного тіла усі задані зовнішні сили.
3. Звільнити тіло від в'язей, замінивши їх реакціями.
4. Обрати систему координат і скласти рівняння рівноваги для кожної осі.
5. Розв'язати отримані рівняння і, за необхідності, зробити перевірку.

б) При використанні **геометричної умови** рівноваги (*графоаналітичний метод*) необхідно:

1. Розпочати побудову силового трикутника з відомої сили, далі через початок і кінець відомої сили провести лінії, паралельні лініям дії двох інших сил.
2. Провести невідомі сили так, щоб отримати замкнений силовий трикутник.
3. За відомими елементами трикутника знайти невідомі величини. Якщо силовий трикутник прямокутний, слід користуватися теоремою Піфагора і співвідношеннями в прямокутному трикутнику; якщо ж силовий трикутник косокутний, слід використовувати теорему синусів.
4. Інколи доцільним є використання умови пропорційності сторін двох подібних трикутників (силового трикутника і трикутника за основним рисунком).

в) Значно рідше використовують *графічний метод,* при якому відома сила відкладається в певному масштабі. Далі будують силовий трикутник як і в попередньому способі, після чого вимірюють невідомі сили на рисунку і за допомогою масштабу визначають їх величину.

Приклад розв'язання задачі (аналітична умова рівноваги)

Задача 1. Балка довжиною 4 м і вагою P = 300 Н має шарнірно нерухому опору на кінці A і шарнірно рухому на кінці B. Визначити реакції опор балки R_A і R_B балки у випадку, коли на неї діє зовнішня сила $\boldsymbol{F}$ = 800 Н (рис. 1.13).

Розв'язання.

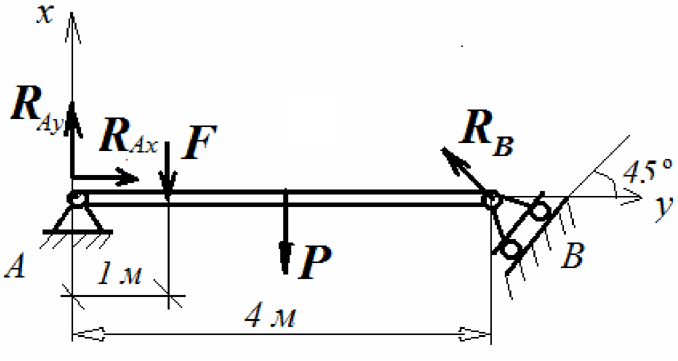


Рис. 1.13. До задачі 1.

1. Визначимо метод для розв'язання задачі. На балку діють дві активні сили – власна вага балки $\boldsymbol{P}$ і зовнішня сила $\boldsymbol{F}$. Ці сили викликають реакції в опорах A і B. Оскільки число сил системи перевищує три, то доцільно використати аналітичний спосіб.

2. Наносимо на рисунок усі сили. Так вага балки буде прикладена в її середині, реакція в шарнірній рухомій опорі B завжди спрямована перпендикулярно опорній поверхні. Напрям реакції в нерухомій опорі A невідомий, тому виразимо реакцію через вертикальну R_{Ay} і горизонтальну R_{Ax} складові.
3. Вісі координат проведемо таким чином, щоб початок відліку співпадав з точкою A. Для визначення трьох невідомих реакцій треба скласти три рівняння рівноваги. Умови рівноваги для даної плоскої системи мають вигляд

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0; \quad \sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0; \quad \sum_{k=1}^{n} M_B(F_k) = 0.$$

Слід зазначити, що в рівнянні моментів могла стояти будь-яка точка балки.
4. Для зменшення об'єму розрахунків почнемо складання рівнянь з рівняння моментів. При цьому моменти, направлені проти годинникової стрілки, вважатимемо додатними, а за годинниковою стрілкою – від'ємними.

$$\sum_{k=1}^{n} M_B(F_k) = P \cdot 2 + F \cdot 3 - R_{Ay} \cdot 4 = 0.$$

$$4R_{Ay} = 2 \cdot 300 + 3 \cdot 800 = 3000. \to R_{Ay} = \frac{3000}{4} = 750(H).$$

5. Оскільки знайдено вертикальну складову реакції лівої опори, то доцільно перейти до другого рівняння. При складанні рівняння сили, що співпадають з напрямом осі y вважаються додатними, усі інші – від'ємними.

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ky} = R_{Ay} - F - P + R_B \cdot \sin 45° = 0.$$

$$0{,}707 R_B = P + F - R_{Ay} = 300 + 800 - 750 = 350; \quad R_B = \frac{350}{0{,}707} = 495(H).$$

6. Записуємо перше рівняння і находимо з нього останнє невідоме

$$\sum_{i=1}^{n} F_{kx} = R_{Ax} - R_B \cos 45° = 0; \; R_{Ax} = R_B \cos 45° = 495 \cdot 0{,}707 = 350(H).$$

7. За теоремою Піфагора можна знайти повну реакцію в опорі А

$$R_A = \sqrt{R_{Ax}^2 + R_{Ay}^2} = \sqrt{350^2 + 750^2} = 827{,}6(H).$$

Задачу розв'язано.

Приклад розв'язання задачі (графічна умова рівноваги)

Задача 2. Тіло M_1 вагою P = 30 Н підвішене за допомогою двох гнучких нерозтяжних тросів OM_1 і M_1M_2 і утримується в стані рівноваги за допомогою тіла M_2 ваги Q (рис. 1.14, а). При цьому ділянка тросу M_1A горизонтальна, а трос OM_1 утворює кут α = 30° із вертикальною стіною.
Знайти вагу Q тіла M_2 і натяг тросу OM_1, вважаючи блок ідеальним і нехтуючи розмірами вантажів.

Розв'язання.

1. В задачі розглядається рівновага матеріальної точки M_1, оскільки відома сила ваги тіла $\boldsymbol{P}$ прикладена до неї. Також до неї прикладені ще дві сили: $\boldsymbol{T}_1$ – сила

натягу троса OM_1 і $\boldsymbol{T}_2$ – сила натягу ділянки троса M_1A. Оскільки кількість сил не перевищує трьох, то можна використати геометричну умову рівноваги.

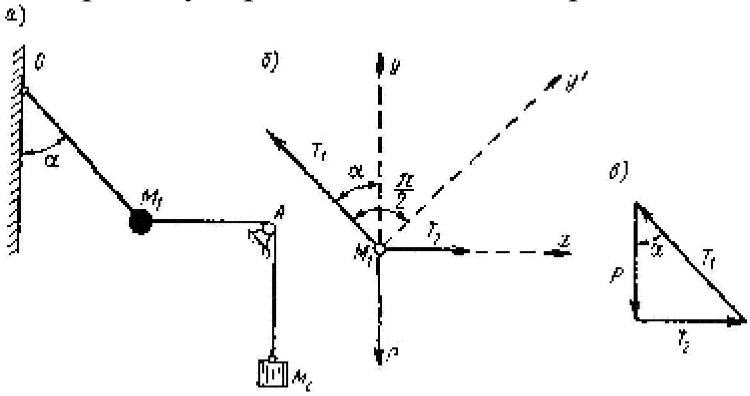


Рис. 1.14. До задачі 2.

Використаємо принцип звільнення від в'язей, замінивши їх на відповідні реакції (рис. 1.14, б), причому реакція $\boldsymbol{T}_2$ дорівнює вазі точки M_2

$$T_2 = Q.$$

Оскільки тіло M_1 знаходиться в стані рівноваги під дією трьох сил, то силовий трикутник, утворений цими силами, має бути замкнений. Побудову трикутника починаємо з відомої сили $\boldsymbol{P}$, яка направлена вертикально вниз. Далі через початок і кінець вектора $\boldsymbol{P}$ проводимо прямі, паралельні силам натягу $\boldsymbol{T}_1$ і $\boldsymbol{T}_2$. Точка їх перетину дає третю вершину силового трикутника (рис. 1.12, в), причому орієнтація сил натягу має утворювати замкнений трикутник. Це дасть можливість перевірити правильність проставлених напрямів невідомих реакцій.

Із співвідношень в прямокутному трикутнику маємо

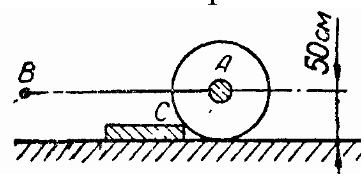
$$P = T_1 \cos a \Rightarrow T_1 = \frac{P}{\cos a} = \frac{30}{\cos 30^\circ} = \frac{30}{0{,}866} = 34{,}5\,(H);$$

$$T_2 = Q = Ptga = 30 \cdot tg30^\circ = 30 \cdot 0{,}577 = 17{,}3\,(H).$$

Задачу розв'язано.

<u>Завдання №1 до РГР</u>

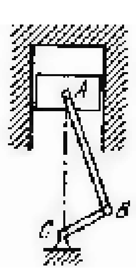
1.1. Каток трамбівки має вагу G = 40 кН і радіус R = 50 см. Визначити горизонтальне зусилля P, необхідне для підйому котка на кам'яну плиту заввишки h = 10 см.



Відповідь: P = 30 кН.

До задачі 1.1.

1.2. Ланки кривошипно-шатунного механізму двигуна внутрішнього згоряння мають наступні розміри: довжина шатуна AB = 30 см, довжина кривошипа BC = 6 см, площа поршня S = 200 см^2. В даний момент тиск газу над поршнем P_1 = 1,0 МПа, під поршнем – P_2 = 0,2 МПа. Знайти силу T, яка діє на кривошип BC збоку шатуна AB при їх перпендикулярному розташуванні. Тертям між поршнем і стінками циліндра знехтувати.



Відповідь: T = 16 кН.

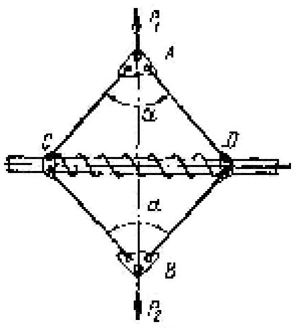
До задачі 1.2.

1.3. Аби витягти автомобіль, який застряг на поганій дорозі, водій натяг канат AB між автомобілем і деревом, прив'язавши до дерева кінець B на *2* м вище, ніж

кінець *A* до машини. Потім водій встав на канат біля автомобіля, відтягши його донизу власною вагою G = 770 Н, після чого вирушив по канату в напрямку дерева. Визначити силу, що діє на автомобіль (силу натягу канату), коли водій стояв на канаті в точці C на відстані від дерева: CD_1 = 2 м, CD_2 = 10 м.
Відповідь: T_1= 3 850 Н, T_2 = 770 Н.

1.4. На ланки *A* і *B* пружинного амортизатора, який використовується для послаблення поштовхів, діють протилежно спрямовані сили $P_1 = P_2$ = 800 Н. Визначити жорсткість пружини c (силу, необхідну для її деформації на 1 м), аби рівновага мала місце при α = 60°, якщо при α = 180° пружина знаходиться в ненапруженому стані. Прийняти $AC = AD = CB = BD$ = 0,4 м. Тертям і вагою ланок знехтувати.

Відповідь: $c = \dfrac{P}{\sqrt{3}l} = 1155\left(\dfrac{H}{м}\right)$.



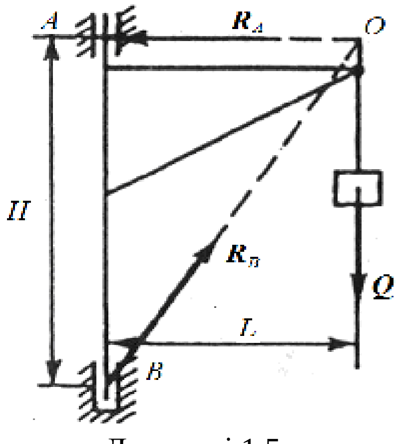
До задачі 1.4.

1.5. Поворотний кран знаходиться в стані рівноваги під дією сили тяжіння вантажу Q = 15 кН. Визначити реакції в опорах *A* і *B*, якщо розміри крана H = 4 м, L = 3 м.
Відповідь: R_A = 11,25 кН; R_B = 18,75 кН.

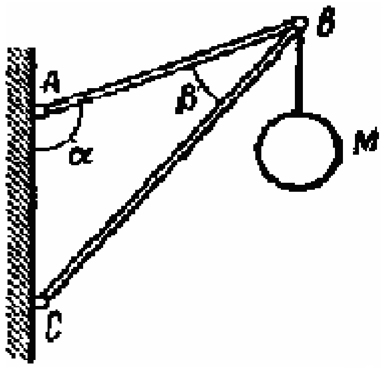
1.6. В точці *B* кронштейну підвішений тягар ваги G = 25 Н. Визначити реакції стержнів кронштейна, якщо його кути $\alpha = 100°$, $\beta = 35°$, а кріплення в точках *A* і *C* є шарнірними.
Відповідь: N_A = 61 Н, N_C = 50 Н.

1.7. Повітряна куля *A* з підйомною силою Q = 2 Н утримується невагомим тросом *OA* довжиною l = 1 м і відноситься вітром на відстань OB = 0,5 м. Визначити силу вітру F, вважаючи його постійним і горизонтальним, а також силу натягу тросу T. Розмірами кульки і її вагою знехтувати.

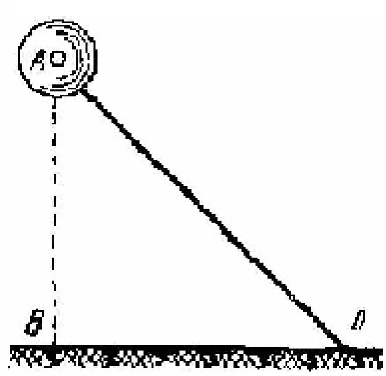
Відповідь: $T = \dfrac{lQ}{\sqrt{l^2 - OB^2}} = 2{,}31(H)$, $F = \dfrac{OB \cdot Q}{\sqrt{l^2 - OB^2}} = 1{,}15(H)$.



До задачі 1.5.



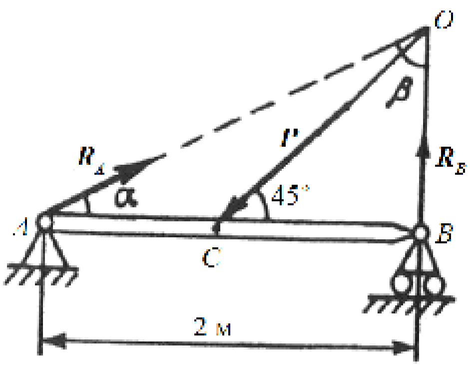
До задачі 1.6.



До задачі 1.7.

1.8. Балка *AB* довжиною 2 м, яка має шарнірно нерухому опору *A* і шарнірно рухому опору *B*, завантажена силою P = 1,4 кН. Визначити реакції в опорах балки, якщо сила P прикладена посередині під кутом 45° до її осі.

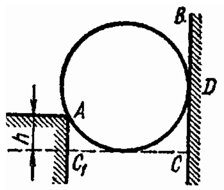
Відповідь: R_A = 1,11 кН, R_B = 0,50 кН.



До задачі 1.8.

1.9. Циліндр радіуса R = 0,8 м і ваги P = 7 кН розташований між виступом *A* і горизонтальною стіною. Визначити силу тиску циліндра на виступ *A* і стіну, якщо відстань від точки *A* до горизонтальної дотичної площини CC_1 дорівнює h = 10 см.

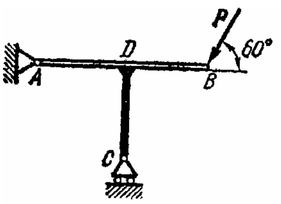
Відповідь: R_A = 8 кН, R_D = 3,87 кН.



До задачі 1.9.

1.10. Невагомі стержні *AB* і *CD* жорстко скріплені під прямим кутом в точці *D*, причому *AD* = *BD*. До кінця *B* стержня під кутом α = 60° прикладена сила P = 300 Н. Визначити реакції в шарнірно рухомій опорі *C* і шарнірно нерухомій опорі *A*.

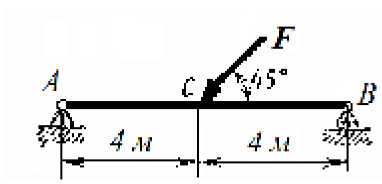
Відповідь: R_A = 300 Н, R_C = 520 Н.



До задачі 1.10.

1.11. Визначити кут нахилу α повної реакції R_A в шарнірно нерухомій опорі *A* до осі горизонтальної балки *AB*, яка навантажена посередині силою F = 6 кН під кутом 45° до горизонту.

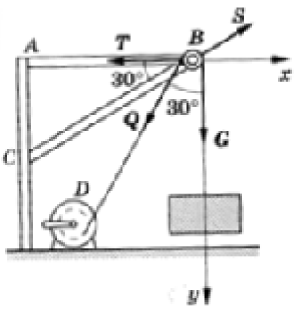
Відповідь: α = 26,6°



До задачі 1.11.

1.12. Вантаж G = 20 кН підіймається лебідкою за допомогою тросу, перекинутого через нерухомий блок в точці *B*. Нехтуючи тертям в блоці, визначити натяг T бруса *AB* і зусилля S в брусі *BC*.

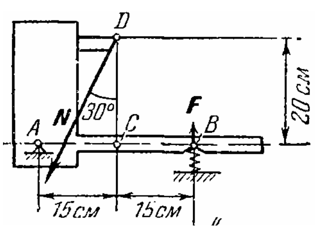
Відповідь: T = 54,6 кН, S = 74,6 кН.



До задачі 1.12.

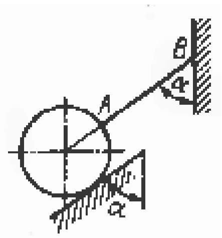
1.13. До різця, закріпленого в супорті металорізального верстата, в точці *D* з боку деталі, яка обробляється, прикладена сила N = 300 Н, яка утворює кут α = 30° з вертикаллю. Знайти реакцію в шарнірній опорі *A* і силу пружності F пружини, яка підтримує супорт в точці *B*. Власною вагою супорта знехтувати.

Відповідь: R_A = 275 Н, F = 30 Н.



До задачі 1.13.

1.14. Однорідна куля вагою 12 Н утримується в стані рівноваги на похилій площині за допомогою мотузки *AB*. Визначити силу тиску *N* кулі на площину, якщо вона утворює з вертикаллю кут α = 60°. Тертям між кулею та площиною знехтувати.

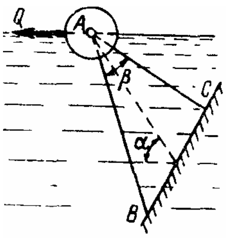


Відповідь: *N* = 10,4 Н.

До задачі 1.14.

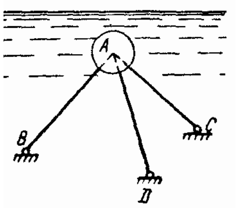
1.15. Бочка *A* вагою *P* = 3 кН утримується від зносу течією за допомогою двох якорів *B* і *C*, які знаходяться на однаковій глибині. Об’єм підводної частини бочки *V* = 0,33 м^3, питома вага води γ = 9,81 Н/м^3. Якірні троси утворюють між собою кут β = 90° і лежать в площині, нахиленій до горизонту під кутом α = 60°. Визначити натяги тросів і величину горизонтальної сили *Q*, обумовленої течією, якщо ця сила лежить в вертикальній площині, поділяючій кут β навпіл.

Відповідь: $T_1 = T_2$ = 0,19 кН, *Q* = 0,14 кН.



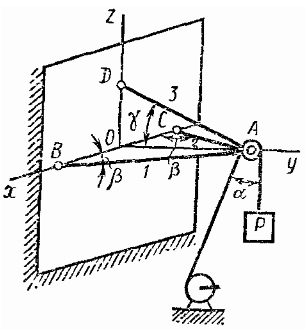
До задачі 1.15.

1.16. Куля *A* вагою 5 кН і об’ємом 0,7 м^3 утримується в підводному положенні за допомогою трьох якорів *B*, *C* і *D*, розташованих на одній глибині та на однаковій відстані один від одного. Визначити натяг кожного тросу, якщо вони утворюють з вертикаллю кути 45°. Питому вагу води прийняти рівною γ = 10 кН/м^3.



Відповідь: $T_1 = T_2 = T_3$ = 0,943 кН.

До задачі 1.16.



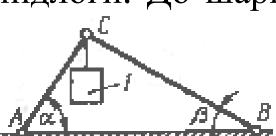
1.17. Вантаж *P* рівномірно підіймається лебідкою за допомогою тросу, перекинутого через нерухомий блок *A*, закріплений в вершині кронштейна *ABCD*. Нехтуючи вагою стержнів, тросу і блоків та тертям в них, визначити вагу вантажу *P* і зусилля в стержні 1, якщо зусилля в стержні 3 S_3 = 3 кН, а кути відповідно $\alpha = \beta$ = 30°, γ = 60°.

Відповідь: *P* = 1 кН, S_1 = - 2 кН.

До задачі 1.17.

1.18. Два невагомі стержні *AC* і *BC* з’єднані в точці *C* і шарнірно прикріплені до підлоги. До шарніра *C* підвішений вантаж 1. Визначити реакцію стержня *BC*, якщо зусилля в стержні *AC* дорівнює S_{AC} = 43 Н. Кути, утворені стержнями з горизонтальною площиною: α = 60°, β = 30°.

Відповідь: S_{BC} = - 24,8 Н.



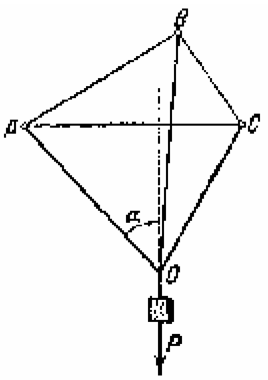
До задачі 1.18.

1.19. Вантаж вагою *P* = 80 Н висить на трьох однакових мотузках, прикріплених до вершин рівнобічного трикутника *ABC*, розташованого в

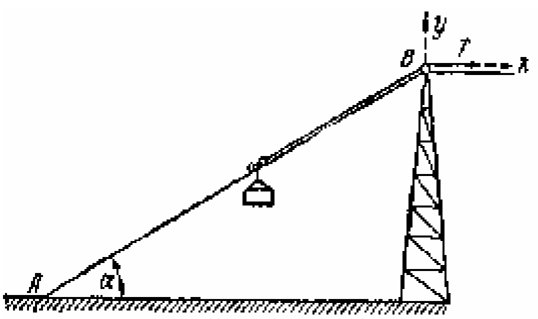
горизонтальній площині. Мотузки утворюють однакові кути α = 60°. Визначити натяги T_A, T_B і T_C мотузок *AO, BO* і *CO*.
Відповідь: $T_A = T_B = T_C$ = 53,3 Н.

1.20. Вагонетка вагою G = 20 кН знаходиться на похилій ділянці підвісної дороги. Знайти натяг T тягового канату і силу тиску вагонетки N на канат *AB*, який натягнутий так, що не провисає. Найти повну силу тиску R на опору B та її горизонтальну і вертикальну складові, якщо канат *AB* натягнутий з силою P = 30 кН під кутом α = 30° до горизонту.
Відповідь: T = 1 кН, N = 1,73 кН, X_B = 4,18 кН, Y_B = - 15,5 кН , R = 16 кН.

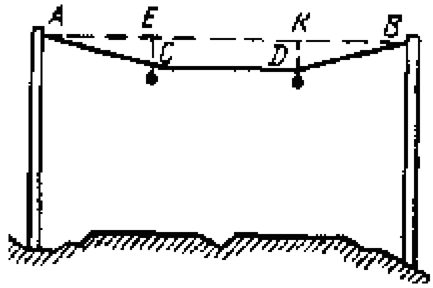
1.21. Два електровозних контакти підвішені до поперечних канатів, кожен з яких прикріплений до двох стовпів. Стовпи розставлені вздовж дороги на відстані 40 м один від одного. Для кожного поперечного канату $AE = KB$ = 3,3 м, $EC = KD$ = 0,8 м. Нехтуючи вагою дротяного канату, знайти натяги T_1, T_2 і T_3 в його частинах *AC*, *CD* і *DB*, якщо вага 1 м дроту 8,9 Н.
Відповідь: $T_1 = T_2$ = 1 510 Н, T_3 = 1 470 Н.



До задачі 1.19.

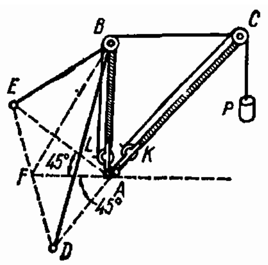


До задачі 1.20.



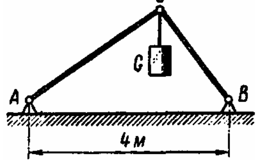
До задачі 1.21.

1.22. На тросі крана, перекинутому через блок C, висить вантаж ваги P = 100 кН. Інший кінець тросу прикріплено до лебідки K. Нехтуючи тертям в блоці і вагою стержнів, знайти зусилля в стержнях і натяг T троса *CBL*, якщо $AB = BC = AD = AE$, кріплення стержнів шарнірні, а *BC* паралельно *AF*.



Відповідь: $S_{CA} = S_{BA}$ = 241,4 кН, $S_{BD} = S_{BE} = T$ = 100 кН.
До задачі 1.22.

1.23. За допомогою двох стержнів *AC* і *BC*, кінці яких A і B закріплені в горизонтальній площині на відстані AB = 4 м, необхідно утримати вантаж вагою G = 40 кН. Визначити, якої довжини l необхідно взяти стержні, аби в кожному з них виникли однакові зусилля стиску S = 30 кН.



Відповідь: l = 2,74 м.
До задачі 1.23.

Глава 2. Момент сили і пари сил

<u>2.1. Момент сили відносно точки</u>

Для приведення довільної системи незбіжних сил до більш простого виду потрібно ввести ще дві основні величини статики: момент сили відносно точки (центру) і момент сили відносно осі.

Момент сили $\boldsymbol{F}$ відносно точки O – вектор, який дорівнює векторному добутку радіус-вектора $\boldsymbol{r}$, проведеного з центра O в точку A прикладення сили, на вектор сили $\boldsymbol{F}$ (рис. 2.1)

$$\boldsymbol{M_0} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}. \qquad (2.1)$$

Вектор моменту сили $\boldsymbol{M_o}$ прикладений в точці O і перпендикулярний площині, в якій лежать вектори $\boldsymbol{r}$ і $\boldsymbol{F}$. Спрямований він убік, звідки силу $\boldsymbol{F}$ видно такою, що прагне повернути тіло навколо центру O проти годинникової стрілки.

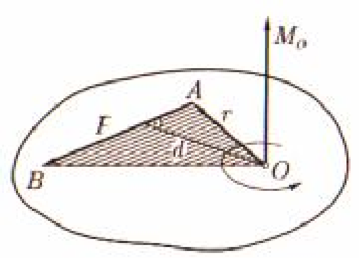


Рис. 2.1. Момент сили відносно точки.

Модуль векторного добутку дорівнює двом площам трикутника з силою в основі і вершиною в точці O

$$M_0 = |\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{P}| = rP \cdot \sin(\boldsymbol{r} \wedge \boldsymbol{P}) = Pd, \qquad (2.2)$$

де d - плече сили, найкоротша відстань від центру O до лінії дії сили AB.

Якщо відомі проекції на осі прямокутних координати радіус-вектора $\boldsymbol{r}$ (x, y, z) і сили $\boldsymbol{F}$ (F_x, F_y, F_z), то момент сили можна визначити, розклавши цей визначник за елементами першого рядка

$$\boldsymbol{M}_0 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \boldsymbol{i}(yF_z - zF_y) - \boldsymbol{j}(xF_z - zF_x) + \boldsymbol{k}(xF_y + yF_x). \qquad (2.3)$$

З іншого боку, момент сили відносно центру можна розкласти по проекціях на координатні осі

$$\boldsymbol{M_0} = \boldsymbol{i}M_{0x} + \boldsymbol{j}M_{0y} + \boldsymbol{k}M_{0z}, \qquad (2.4)$$

Прирівнюючи між собою вирази (2.2) і (2.3), можна визначити проекції моменту сили відносно центру О на координатні осі

$$\begin{aligned} M_{0x} &= yF_z - zF_y; \\ M_{0y} &= zF_x - xF_z; \\ M_{0z} &= xF_y - yF_x. \end{aligned} \qquad (2.5)$$

Якщо проекції моменту сили відносно точки на координатні осі відомі, то його модуль можна визначити із співвідношення

$$M_0 = \sqrt{M_{0x}^2 + M_{0y}^2 + M_{0z}^2}, \qquad (2.6)$$

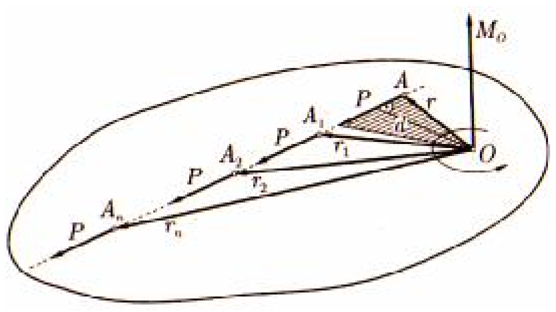
а напрям за напрямними косинусами

$$\cos a = \frac{M_{0x}}{M_0}, \cos b = \frac{M_{0y}}{M_0}, \cos g = \frac{M_{0z}}{M_0}.$$

З (2.2) витікають наступні властивості моменту сили відносно центра:

а) Момент сил перетворюється на нуль у тому випадку, коли лінія дії сили проходить через точку O, тобто плече $\boldsymbol{d} = 0$.

б) При перенесенні сили по лінії її дії величина моменту відносно точки O не змінюється (рис. 2.2).



в) При переході від правої системи координат до лівої і навпаки вектор моменту сили, зберігаючи величину, міняє напрям на протилежний, тому він є *псевдовектором*. Існують також і істинні вектора, такі як швидкість, прискорення, які ні по величині, ні по напряму від виду системи координат не залежать.

Рис. 2.2. Властивості моменту сила відносно точки O.

Теорема Варіньона: момент рівнодійної системи збіжних сил відносно будь-якого центру O дорівнює векторній сумі моментів усіх сил системи відносно того ж центру:

$$\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{R}) = \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}_k). \tag{2.7}$$

Доведення. Нехай в точці A перетинаються лінії дії усіх n сил системи (рис. 2.3, а). Проведемо радіус-вектор $\boldsymbol{r}$ з довільного центру O до точки A. За правилом силового багатокутника знайдемо рівнодійну системи $\boldsymbol{R}$ (рис. 2.3, б). Її аналітичне вираження

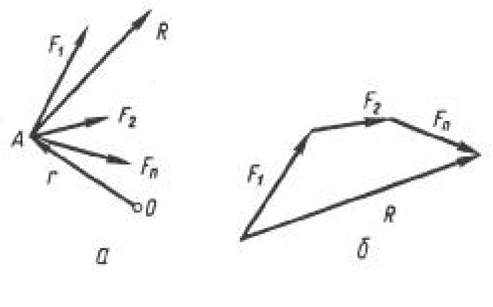
$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 + \ldots + \boldsymbol{F}_n$$

підставляємо у формулу (2.1) і знаходимо момент рівнодійною відносно центру O

$$\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{R}) = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{R} = \boldsymbol{r} \times (\boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 + \ldots + \boldsymbol{F}_n) = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}_2 + \ldots + \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}_n =$$

$$= \boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F_1}) + \boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F_2}) + \ldots + \boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F_n}) = \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}_k),$$

що повністю співпадає з (2.7).



Якщо усі сили і центр O лежать в одній площині, їх моменти будуть лежати на одній прямій, яка проходить через точку O перпендикулярно до цієї площини. Тоді момент рівнодійної дорівнює алгебричній сумі моментів усіх сил системи відносно цієї точки.

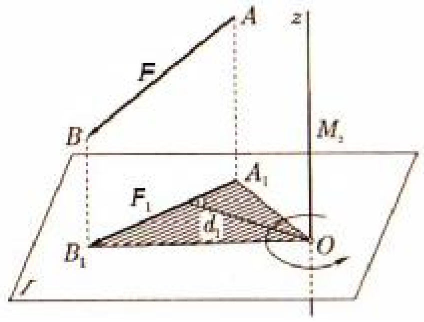
Рис. 2.3. Теорема Варіньона.

2.2. Момент сили відносно осі

Моментом сили $\boldsymbol{F}$ відносно довільної осі називається проекція на цю вісь моменту сили відносно будь-якої точки цієї осі. Обчислення моментів сили відносно осей виконується по формулах (2.5). Для обчислення моменту сили $\boldsymbol{F}$ відносно довільної осі z можна також користуватися наступним алгоритмом:

1. Проводимо довільну площину $\boldsymbol{I}$, перпендикулярну в осі $\boldsymbol{z}$. Знаходимо їх точку перетину O.

2. Проектуємо силу $\boldsymbol{F}$ на цю площину і знаходимо величину проекції F_1.



3. Моментом сили $\boldsymbol{F}$ відносно осі z називається добуток модуля проекції сили F_1 на площину, перпендикулярну осі, на її плече d_1 відносно точки O на перетини осі з площиною (рис. 2.4) :

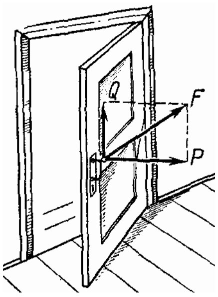
$$M_z = \pm F_1 d_1. \qquad (2.8)$$

4. Якщо при спостереженні назустріч осі z проекція F_1 прагне повернути площину проти годинникової стрілки, момент вважається додатним.

Рис. 2.4. До визначення моменту сили відносно осі.

Момент сили відносно осі дорівнює нулю, якщо:
а) лінія дії сили паралельна осі, тобто $F_1 = 0$;
б) лінія дії сили перетинає вісь, тобто плече $d_1 = 0$.
З (а) і (б) витікає, що коли сила і вісь лежать в одній площині, то момент сили відносно цієї осі дорівнює нулю.

Властивості моменту сил відносно осі можна пояснити простим прикладом. Двері можуть вільно обертатися навколо осі. На ручку з боку руки людини діє сила F. Цю силу можна розкласти на перпендикулярну P і паралельну Q складові. Паралельна осі складова Q не може повертати двері, оскільки знаходиться з віссю в одній площині. Дія ж на двері складової P залежить не тільки від її величини, а й від відстані до осі обертання (плеча).

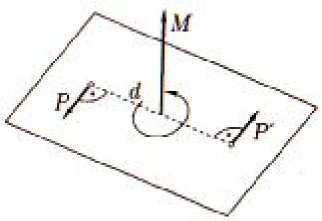


Механічний сенс моменту відносно осі z в тому, що він характеризує обертальний ефект сили $\boldsymbol{F}$ відносно цієї осі. Він є скалярною величиною, оскільки не має власного напряму, а залежить від напряму осі.

Рис. 2.5. Властивості моменту сили відносно осі.

2.3. Пара сил і її момент

Пара сил – система двох паралельних, рівних по модулю і протилежно спрямованих сил $\boldsymbol{P}$ і $\boldsymbol{P}'$ (рис. 2.6).



Пара сил прагне привести в обертання тверде тіло, до якого вона прикладена. Вона не має рівнодійної, а сили, що утворюють пару, не урівноважуються, оскільки вони не лежать на одній прямій.

Рис. 2.6. Пара сил.

Основні поняття, що характеризують пару сил :
а) *площина дії* – площина, що проходить через лінії дії сил, які утворюють пару;
б) *плече пари* $\boldsymbol{d}$ – найкоротша відстань між лініями дії сил, які утворюють пару;
в) *момент пари сил* – добуток модуля однієї з сил пари на її плече:

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{P}d. \qquad (2.9)$$

Основною характеристикою пари сил (мірою її механічної дії на тверде тіло) являється її момент. Він має ту ж розмірність, що і моменти відносно точки і осі, тобто ньютон на метр (Н·м) і є векторною величиною. Вектор моменту пари сил ***M*** спрямований перпендикулярно площини дії пари убік, звідки можна бачити пару сил такою, що прагне повернути тіло проти годинникової стрілки.

Момент пари сил вважається додатним, якщо пара прагне обертати площину рисунка проти годинникової стрілки (рис. 2.7, а), і від'ємним – якщо пара прагне обертати площину рисунка за годинниковою стрілкою (рис. 2.7, б).

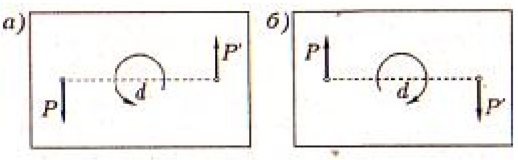


Рис. 2.7. До визначення знаку моменту пари сил.

2.4. Теореми про еквівалентність

Теорема про еквівалентність пар сил, які лежать в одній площині: пари сил, які лежать в одній площині, еквівалентні, якщо їх моменти рівні за величиною і однакові за знаком.

Наслідок: не змінюючи дії пари сил на тверде тіло, її можна переносити в будь-яке місце і повертати на будь-який кут в площині дії. Також можна змінювати плече і величину сил, залишаючи незмінним числове значення і знак моменту пари.

Для більшого розуміння наслідку з теореми слід розглянути гайковий ключ (рис. 2.8). Він однаково діє на гайку, до яких граней він би не був прикладений, адже момент пари залишається незмінним.

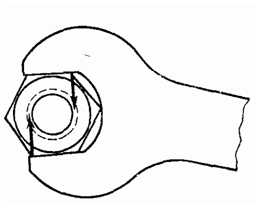


Рис. 2.8. Поворот пари в площині дії.

Теорема про еквівалентність пар сил в просторі: пари сил в просторі еквівалентні, якщо їх моменти геометрично рівні.

Наслідок: не змінюючи дії пари сил на тверде тіло, її можна переносити в будь-яку площину, паралельну площині дії пари, змінювати величину плеча і модуль сили, не змінюючи при цьому числового значення і напряму її моменту.

Трансмісійний вал (рис. 2.9) надає шківу обертальний момент незалежно від його розташування на валу – тобто момент пари не змінюється при перенесені в паралельну площину.

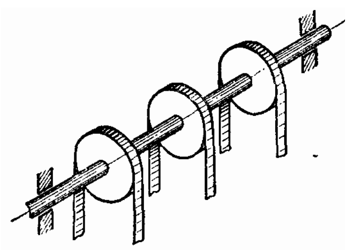


Рис. 2.9. Поворот пари в площині дії.

Оскільки пари сил можна переносити в будь-яку точку і повертати на будь-який кут в площині дії, змінювати величину сили і плеча, замінювати систему пар сил еквівалентною парою, то з усього цього виходить, що пара є ***вільним вектором*** (не має точки прикладення). Цим момент пари відрізняється від моменту сили.

2.5. Умова рівноваги пар сил

Умова рівноваги пар сил, розташованих на площині: пари сил, розташовані на площині (рис. 2.10), взаємно зрівноважуються лише у тому випадку, коли алгебрична сума їх моментів дорівнює нулю:

$$M = \sum_{k=1}^{n} M_k = \sum_{k=1}^{n} P_k d_k = 0. \qquad (2.10)$$

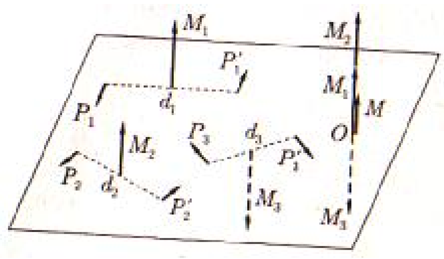


Рис. 2.10. Рівновага пар сил на площині.

Умова рівноваги пар сил, довільно розташованих в просторі: пари сил, довільно розташовані в просторі, взаємно зрівноважуються лише у тому випадку, коли геометрична сума їх моментів дорівнює нулю:

$$\boldsymbol{M} = \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{M}_k = 0. \qquad (2.11)$$

У цих випадках момент еквівалентної пари сил дорівнює нулю.

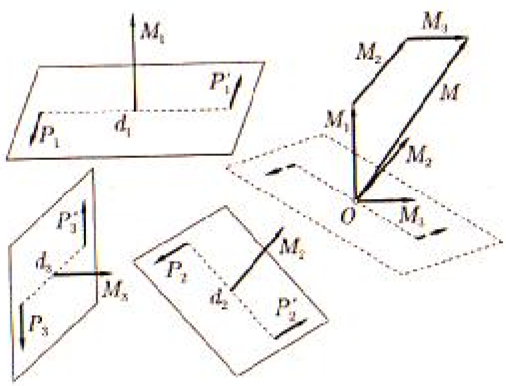
2.6. Складання пар сил

Система пар сил, які діють на тверде тіло, еквівалентна одній парі з моментом, рівним геометричній сумі моментів складових пар.

Нехай необхідно скласти декілька пар сил, довільно розташованих в просторі (рис. 2.11). Визначивши їх моменти по формулі (2.9), перенесемо їх в будь-яку точку O простору. Далі по правилу трикутника або паралелограма складаємо отримані вектори моментів пар сил :

$$\boldsymbol{M} = \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{M}_k = \boldsymbol{M}_1 + \boldsymbol{M}_2 + ...\boldsymbol{M}_n.$$

Теорема про складання пар сил, довільно розташованих в просторі: момент пари сил, яка еквівалентна системі пар сил в просторі, дорівнює геометричній сумі моментів складових пар сил.



Якщо пари сил розташовані в паралельних площинах, то теорема набирає наступного вигляду.

Теорема про складання пар сил, розташованих в паралельних площинах: момент пари сил, яка еквівалентна системі пар сил в паралельних площинах, дорівнює алгебричній сумі моментів складових пар.

Рис. 2.11. Складання пар сил у просторі.

ВИСНОВОК. В статиці усі механічні взаємодії описуються трьома типами векторів: ковзним вектором (силою), прикладеним вектором (моментом відносно центру) і вільним вектором (парою сил).

Питання для самоконтролю

1. Як визначити напрям моменту сили відносно центра?
2. В яких випадках момент сили відносно центра дорівнює нулю?
3. Чим характеризується дія пари сил на тверде тіло?
4. Чим можна зрівноважити пару сил, що діє на тверде тіло?
5. Який вектор у статиці є прикладеним, а який ковзним?
6. Сформулюйте умову рівноваги системи пар сил на площині, у просторі.

Завдання № 2. «Момент сили і пари сил»

Рекомендації до розв'язання задач

1. Виявити силу, момент якої знаходиться, і знайти центр моментів – точку, відносно якої знаходиться момент даної сили.
2. Провести лінію дії сили, після чого опустити перпендикуляр на неї з центра моменту. Довжина перпендикуляра і є плечем h.
3. Визначити знак моменту сили: якщо сила намагається повернути плече навколо центра моменту проти годинникової стрілки, то момент є додатним, якщо за годинниковою стрілкою – від'ємним.
4. Знайти числове значення моменту сили відносно даної точки по формулі (2.2), тобто помноживши силу на плече.
5. Якщо центр моментів лежить на лінії дії сили, то момент сили буде дорівнювати нулю.

Приклад розв'язання задачі (пари сил)

Задача 1. Балка, яка спирається на шарнірно нерухому опору A і шарнірно рухому опору B, навантажена трьома парами сил з моментами $M_1 = 2$ кН·м, $M_2 = 3$ кН·м і $M_3 = 4$ кН·м, які лежать в площині рисунка (рис. 2.12). Визначити реакції в опорах A і B, якщо відстань між ними $L = 2$ м.

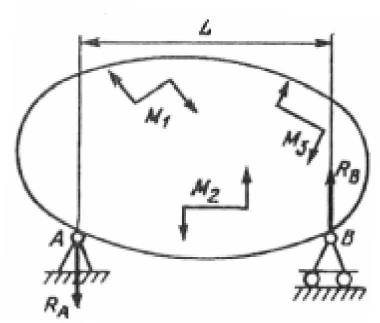


Рис. 2.12. До задачі 1.

Розв'язання

Система трьох заданих пар приводиться до результуючої пари з моментом

$$M_{\sum} = -M_1 + M_2 - M_3 = -2 + 3 - 4 = -3\ (кН \cdot м).$$

При розрахунку сумарної пари додатними вважались моменти, спрямовані проти годинникової стрілки. Знак «мінус» вказує на те, що момент результуючої пари спрямований за годинниковою стрілкою.

Результуюча пара може бути врівноважена лише реактивною парою з таким же моментом, спрямованою проти годинникової стрілки. Реакція R_B в рухомій шарнірній опорі перпендикулярна до площини кочення, тому вона буде спрямована по вертикалі. В такому випадку реакція R_A в нерухомій опорі А буде теж вертикальна, така сама за величиною і спрямована в інший бік. Оскільки в парі величини сил однакові

$$R_A = R_B,$$

то залишається лише визначити їх напрямки. Аби момент пари був спрямований за годинниковою стрілкою, реакція R_B має бути спрямована догори, R_A – вниз.

Записуємо умови рівноваги системи

$$\sum M = 0. \qquad R_A L - 3 = 0 \Rightarrow R_A = \frac{3}{2} = 1{,}5\ (кН),\ R_B = R_A = 1{,}5\ (кН).$$

Задачу розв'язано.

Приклад розв'язання задачі (момент сили відносно центра)

Задача 2. Тонкий однорідний стержень *AB* вагою P = 50 Н може вільно обертатись навколо шарніра *B*, прикріпленого до підлоги (рис. 2.13). Визначити величину сили *F*, яку треба прикласти в горизонтальному напрямку, аби стержень знаходився в стані рівноваги, утворивши при цьому кут $\alpha = 45°$ з вертикаллю.

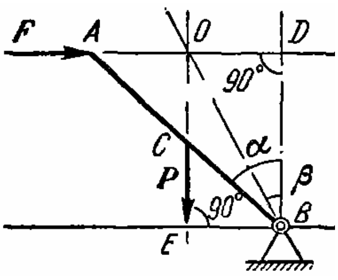


Рис. 2.13. До задачі 2.

Розв'язання

В даній задачі розглядається рівновага стержня. Умову рівноваги запишемо відносно точки *B*, оскільки в такому випадку нема потреби знаходити реакцію в шарнірній опорі

$$\sum_{i=1}^{n} M_B(F_i) = 0. \qquad M_B(F) + M_B(P) = 0. \tag{2.12}$$

Для кожної з сил проводимо лінії дії: *AD* – для сили *F* і *OE* для сили *P*. Далі з точки *B* опускаємо перпендикуляри *BD* і *BE* на кожну лінію дії. Знаходимо моменти від дії кожної сили і підставляємо їх в (2.12)

$$M_B(F) = -F \cdot BD = -F \cdot AB\cos a; \qquad M_B(P) = P \cdot BE = P \cdot BC\sin a = P \cdot \frac{AB}{2}\sin a.$$

$$-F \cdot AB\cos a + P \cdot \frac{AB}{2}\sin a \Rightarrow F \cdot AB\cos a = P \cdot \frac{AB}{2}\sin a \Rightarrow F = \frac{P \cdot AB\sin a}{2AB\cos a} = \frac{Ptga}{2}.$$

Тепер в розрахункову формулу підставимо числові значення

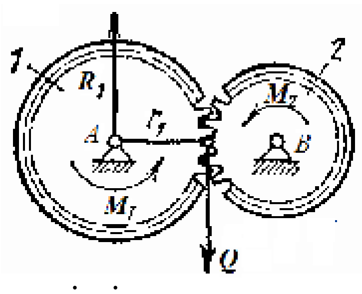
$$F = \frac{50 \cdot tg45°}{2} = 25\,(H).$$

Задачу розв'язано.

Завдання № 2 до РГР

2.1. На шестірню 1 радіуса r_1 = 60 см діє пара сил з моментом M_1 = 42 Н·м. Визначити момент пари M_2, який необхідно прикласти до шестерні 2 радіуса r_2 = 25 см, аби система залишилась в стані рівноваги.

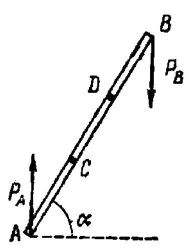
Відповідь: M_2 = 26,25 Н·м.



До задачі 2.1.

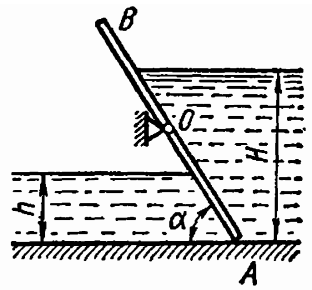
2.2. Прямолінійний стержень *AB* має знаходитися в стані рівноваги в положенні, показаному на рисунку. При цьому в точках *A* і *B* на стержень діють вертикальні сили $P_A = P_B$ = 100 Н, які утворюють пару. Які дві рівні сили треба прикласти до стержня в точках *C* і *D* в перпендикулярному до стержня напрямку, аби забезпечити рівновагу. Довжина стержня *AB* = 3 м, довжина ділянки *CD* = 1 м, кут $\alpha = 60°$.

Відповідь: $P_C = P_D$ = 150 Н.



До задачі 2.2.

2.3. Прямокутний щит AB іригаційного каналу може вільно обертатися навколо осі O. Рівень води зліва від щита дорівнює h. Нехтуючи тертям і вагою щита, найти положення осі O, за якого при рівні H води зліва щит буде знаходитись в стані граничної рівноваги. Кут, який утворює щит із горизонталлю, дорівнює α.

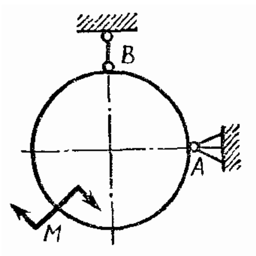


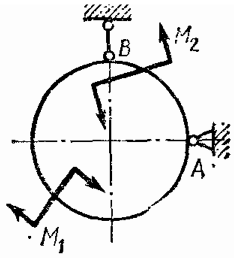
Відповідь: $OA = \dfrac{H^2 + Hh + h^2}{3(H+h)\sin\alpha}$.

До задачі 2.3.

2.4. Невагоме кільце радіуса r = 20 см знаходиться під дією пари сил з моментом M = 6 Н·м. Визначити реакцію в опорі A.

Відповідь: R_A = 30 Н.





2.5. Невагоме кільце радіуса r = 20 см знаходиться під дією двох пар сил з моментами M_1 = 6 Н·м і M_2 = 9 Н·м. Визначити реакцію в опорі A.

Відповідь: R_A = 15 Н.

До задачі 2.4. До задачі 2.5.

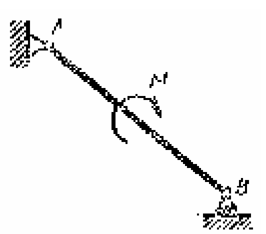
2.6. Невагомий стержень AB довжини l = 20 см знаходиться під дією пари сил з моментом M = 26 Н·м. Визначити реакції в опорах A і B, якщо кут між віссю стержня AB і горизонталлю α = 45°.

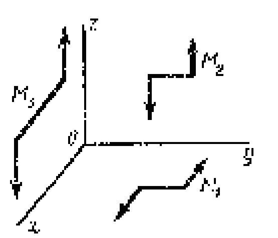
Відповідь: $R_A = -R_B$ = 185,7 Н.

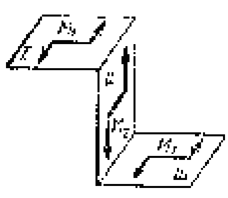
2.7. Дана система трьох пар сил з моментами M_1 = 2 Н·м, M_2 = 3 Н·м і M_3 = 6 Н·м, які діють у взаємно перпендикулярних площинах. Визначити момент еквівалентної пари.

Відповідь: $M_{екв}$ = 2 Н·м.

2.8. В площинах *I*, *II* і *III* діють три пари сил з моментами M_1 = 1 Н·м, M_2 = 2 Н·м і M_3 = 1 Н·м. Визначити модуль моменту M пари, еквівалентної даній системі, якщо площини *I* і *III* паралельні, а площина *II* перпендикулярна до них.







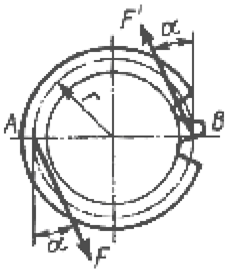
Відповідь: $M_{екв}$ = 2,83 Н·м.

До задачі 2.6. До задачі 2.7. До задачі 2.8.

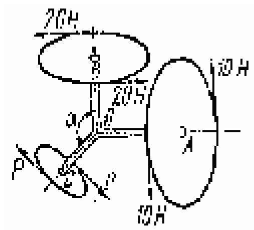
2.9. Визначити момент пари сил, яка діє на зубчате колесо, якщо сили $F = F'$ = 100 Н діють в точках A і B, розташованих на колі радіуса r = 4 см і утворюють кут α = 20° з дотичними до цього кола.

Відповідь: M = 7,52 Н·м.

2.10. До трьох дисків *A*, *B* і *C* радіусами r_A = 15 см, r_B = 10 см, r_C = 5 см прикладені пари сил. Величини сил, що утворюють пару, відповідно дорівнюють F_A = 20 Н, F_B = 10 Н і F_C = *P* Н. Осі *OA*, *OB* і *OC* лежать в одній площині, причому кут *AOB* – прямий. Визначити величину сили *P* і кута *BOC* = *α*, за умови, що система знаходиться в стані рівноваги.
Відповідь: *P* = 50 Н, α = 143°.



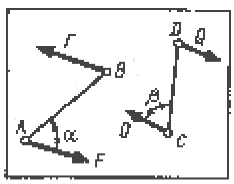
До задачі 2.9.



До задачі 2.10.

2.11. На плиту в її площині діють дві пари сил. Визначити суму моментів пар, якщо *F* = 8 Н, *Q* = 5 Н, відстані *AB* = 0,25 м, *CD* = 0,20 м, кути *α* = 60°, *β* = 70°.
Відповідь: *M* = 0,792 Н·м.

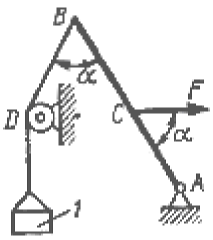
2.12. В одній площині розташовані три пари сил. Визначити момент пари M_3, при якому вся система буде знаходитись в стані рівноваги, якщо M_1 = 510 Н·м, M_2 = 120 Н·м.
Відповідь: M_3 = 390 Н·м.



До задачі 2.11.

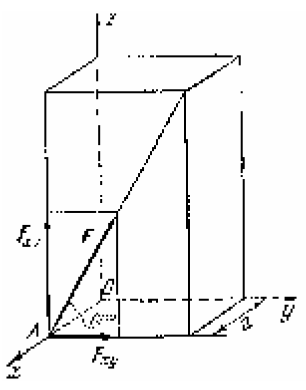
До задачі 2.12.

2.13. До стержня *AB*, закріпленого в шарнірі *A*, прив'язана мотузка *BD* з вантажем 1 вагою *G* = 2 Н. Визначити силу *F*, необхідну для утримання стержня в стані рівноваги, якщо кут *α* = 60°, а відстань *AB* = *BC*.
Відповідь: *F* = 4,0 Н.



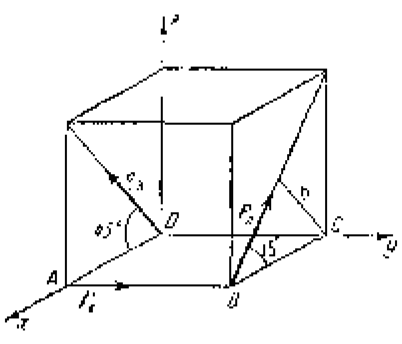
До задачі 2.13.

2.14. Визначити моменти відносно координатних осей сили *F* = 100 Н, яка прикладена в точці *A* і спрямована по діагоналі бокової грані прямокутного паралелепіпеда. Довжина ребра, паралельного осі *x* дорівнює *a* = 20 см.
Відповідь: M_x = 0 Н·м, M_y = -17,3 Н·м, M_z = 10 Н·м.



До задачі 2.14.

2.15. Визначити моменти відносно координатних осей системи сил F_1 = 10 Н, F_2 = 17 Н і F_3 = 17 Н, якщо сила F_1 лежить на ребрі куба, а сили F_2 і F_3 на діагоналях його бокових граней. Довжина ребра куба дорівнює *a* = 200 см.

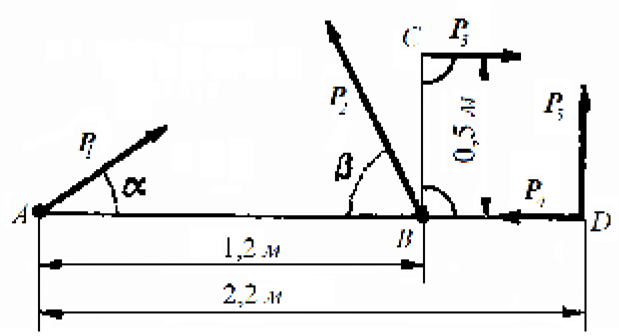


До задачі 2.15.

Відповідь: M_x = 0 Н·м, M_y = -17,3 Н·м, M_z = 10 Н·м.

2.16. До точок A, B, C і D тіла прикладені п’ять сил: P_1 = 50 Н, P_2 = 80 Н, P_3 = 30 Н, P_4 = 25 Н, P_5 = 40 Н. Визначити моменти кожної з сил відносно точки A, якщо відомо, що α = 28°, β = 63°.

Відповідь: M_A (P_1) = 0 Н·м, M_A (P_2) = 85,5 Н·м, M_A (P_3) = -15 Н·м, M_A (P_4) = 0 Н·м, M_A (P_5) = 88 Н·м.



До задачі 2.16.

2.17. До точок A, B, C і D тіла прикладені п’ять сил: P_1 = 50 Н, P_2 = 80 Н, P_3 = 30 Н, P_4 = 25 Н, P_5 = 40 Н (рис. до задачі 2.16). Визначити моменти кожної з сил відносно точки B, якщо відомо, що α = 28°, β = 63°.

Відповідь: M_B (P_1) = -28,2 Н·м, M_B (P_2) = 0 Н·м, M_B (P_3) = -15 Н·м, M_B (P_4) = 0 Н·м, M_B (P_5) = 40 Н·м.

2.18. До точок A, B, C і D тіла прикладені п’ять сил: P_1 = 50 Н, P_2 = 80 Н, P_3 = 30 Н, P_4 = 25 Н, P_5 = 40 Н (рис. до задачі 2.16). Визначити моменти кожної з сил відносно точки C, якщо відомо, що α = 28°, β = 63°.

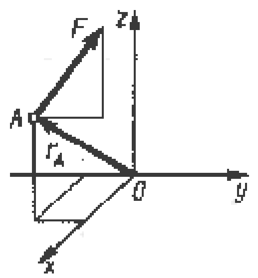
Відповідь: M_C (P_1) = - 6,05 Н·м, M_C (P_2) = - 18,2 Н·м, M_C (P_3) = 0 Н·м, M_C (P_4) = -12,5 Н·м, M_C (P_5) = 40 Н·м.

2.19. Сила $\boldsymbol{F} = 3\boldsymbol{j} + 4\boldsymbol{k}$ прикладена в точці A, причому радіус-вектор точки прикладення $\boldsymbol{r}_A = 3\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$. Визначити момент цієї сили відносно осі Oz.

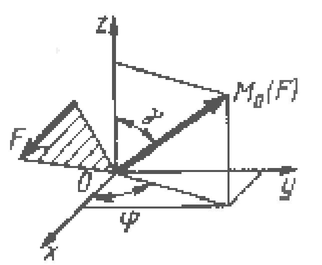
Відповідь: M_z ($\boldsymbol{F}$) = 9 Н·м.

2.20. Момент сили $\boldsymbol{F}$ відносно точки O дорівнює $M_O(\boldsymbol{F})$ = 100 Н·м і розташований в просторі таким чином, що кути γ = φ =30°. Визначити момент цієї сили відносно осі Oy.

Відповідь: M_z ($\boldsymbol{F}$) = 25 Н·м.



До задачі 2.19.



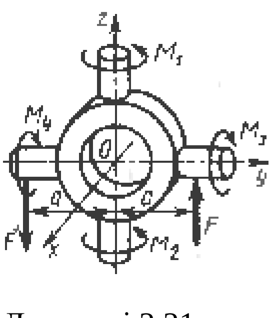
До задачі 2.20.

2.21. Визначити модуль моменту $M_O(\boldsymbol{F})$ рівнодійної системи пар сил, якщо відстань a = 5 см, моменти пар сил $M_1 = M_2$ = М$_3$ = М$_4$ = 5 Н·м, сили $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}'$ = 100 Н утворюють пару, яка діє в площині Oyz.

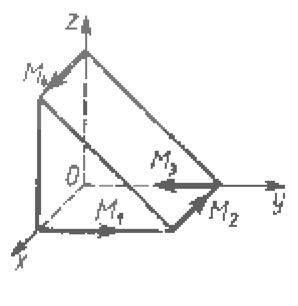
Відповідь: M_z ($\boldsymbol{R}$) = 17,3 Н·м.

2.22. Визначити модуль моменту $M_{зр}$ зрівноваженої пари для просторової системи чотирьох пар сил, якщо $M_1 = M_2 = M_3 = M_4$ = 20 Н·м.

Відповідь: $M_{зр}$ = 0 Н·м.



До задачі 2.21.



До задачі 2.22.

Глава 3. Довільна плоска система сил

3.1. Головний вектор і головний момент плоскої системи сил

Головний вектор плоскої системи сил – геометрична сума усіх сил системи:

$$\boldsymbol{F} = \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{F}_k. \qquad (3.1)$$

Проекції головного вектора на осі декартової системи координат

$$F_x = \sum_{k=1}^{n} F_{kx}; \qquad F_y = \sum_{k=1}^{n} F_{ky}. \qquad (3.2)$$

Модуль головного вектора визначається по формулі

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{\left(\sum_{k=1}^{n} F_{kx}\right)^2 + \left(\sum_{k=1}^{n} F_{ky}\right)^2}. \qquad (3.3)$$

Кути між напрямом головного вектора і координатними осями знаходяться за допомогою напрямних косинусів

$$\cos(F, Ox) = \frac{F_x}{F}, \ \cos(F, Oy) = \frac{F_y}{F}. \qquad (3.4)$$

Головний момент плоскої системи сил відносно центра *O* – алгебрична сума моментів усіх сил системи відносно того ж центр O:

$$\boldsymbol{M}_o = \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{M}_{ko}. \qquad (3.5)$$

3.2. Приведення плоскої системи сил

Теорема: якщо сили, довільно розташовані на площині, не зрівноважуються, то їх можна звести або до однієї сили (головного вектора), або до однієї пари сил.

Окремі випадки приведення сил, довільно розташованих на площині:

а) Якщо головний вектор і головний момент системи сил дорівнюють нулю, то сили взаємно зрівноважуються:

$$\boldsymbol{F} = 0 \text{ і } \boldsymbol{M}_0 = 0.$$

б) Якщо головний вектор системи сил дорівнюють нулю, а головний момент не дорівнює нулю, то система сил приводиться до пари сил з моментом, який дорівнює головному моменту усіх сил системи відносно центра зведення O:

$$\boldsymbol{F} = 0 \text{ и } \boldsymbol{M}_0 \neq 0.$$

в) Якщо тільки головний момент системи сил дорівнює нулю, то система приводиться до головного вектора $\boldsymbol{F}$, розташованого в точці приведення O:

$$\boldsymbol{F} \neq 0 \text{ и } \boldsymbol{M}_0 = 0.$$

3.3. Умови рівноваги довільної плоскої системи сил

Теорема: для рівноваги будь-якої плоскої системи сил необхідно і достатньо, аби головний вектор цієї системи та її головний момент відносно будь-якого центру дорівнювали нулю:

$$\boldsymbol{F} = 0, \ \boldsymbol{M}_0 = 0. \qquad (3.6)$$

Запишемо скалярні умови рівноваги плоскої системи сил, які витікають з (3.6).

1. Основна форма умов рівноваги.

Для рівноваги довільної плоскої системи сил необхідно і достатньо, аби суми проекцій усіх сил системи на кожну з координатних осей і сума їх моментів відносно будь-якого центру O в площині дії сил дорівнювали нулю:

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0, \qquad \sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0, \qquad \sum_{k=1}^{n} M_0(F_k) = 0. \qquad (3.7)$$

2. Друга форма умов рівноваги.

Для рівноваги довільної плоскої системи сил необхідно і достатньо, щоб суми моментів усіх сил системи відносно яких-небудь двох центрів A і B, а також сума їх проекцій на одну з координатних осей, не перпендикулярну прямій AB, дорівнювали нулю:

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0, \qquad \sum_{k=1}^{n} M_A(F_k) = 0, \qquad \sum_{k=1}^{n} M_B(F_k) = 0. \qquad (3.8)$$

3. Третя форма умов рівноваги.

Для рівноваги довільної плоскої системи сил необхідно і достатньо, щоб суми моментів усіх сил системи відносно будь-яких трьох центрів A, B і C, які не лежать на одній прямій, дорівнювали нулю:

$$\sum_{k=1}^{n} M_A(F_k) = 0, \qquad \sum_{k=1}^{n} M_B(F_k) = 0, \qquad \sum_{k=1}^{n} M_C(F_k) = 0. \qquad (3.9)$$

3.4. Плоска система розподілених сил

В інженерних розрахунках часто доводиться стикатися з плоскою системою розподілених сил (загальна класифікація розподілених сил наведена в пункті 1.1). Деякі найпростіші приклади таких сил наведено на рис. 3.4.

Інтенсивність – основна характеристика розподілених сил, характеризує значення сили, що приходиться на одиницю довжини навантаженого відрізка. Одиниця виміру інтенсивності – ньютон на метр (Н/м).

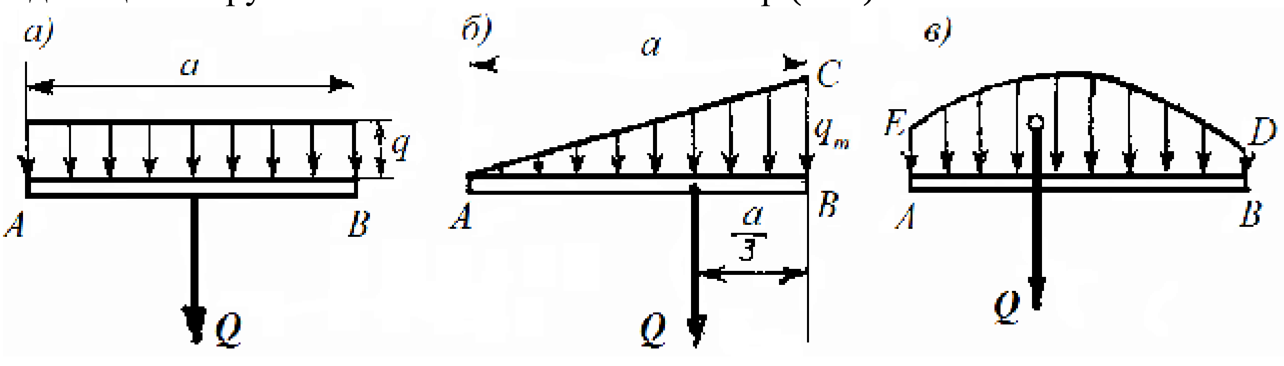


Рис. 3.4. Приклади лінійно розподілених сил.

Рівномірно розподілена – система сил, для якої інтенсивність q має постійне значення. Таку силу можна звести до рівнодійної Q, модуль якої визначається по формулі

$$Q = aq.$$

Рівнодійна Q прикладена в центрі відрізку AB (рис. 3.4, *а*).

Розподілена по лінійному закону – система сил, для якої інтенсивність q змінюється від мінімального до максимального значення. Таку силу також можна звести до рівнодійної Q, модуль якої визначається по формулі

$$Q = \frac{aq}{2}.$$

Рівнодійна Q прикладена в центрі тяжіння трикутника, тобто на відстані від основи, рівній 1/3 висоти трикутника (рис. 3.4, *б*).

Розподілена по довільному закону – система сил, для якої інтенсивність q змінюється якимось довільним чином. Таку систему теж можна звести до рівнодійної, прикладеної в центрі тяжіння фігури (рис. 3.4, *в*). Її модуль дорівнює площі фігури, виміряної в відповідному масштабі.

Питання для самоконтролю

1. До яких силових факторів може бути зведена довільна плоска система сил?
2. Скільки існує типів розподілених сил? Наведіть їх приклади.
3. Як визначити точку прикладення рівнодійної розподіленої системи сил, що змінюється по лінійному закону?
4. Скільки форм умов рівноваги може бути записано для довільної плоскої системи сил?
5. Яка одиниця виміру інтенсивності розподіленої по лінії сили?

Завдання № 3. «Довільна плоска система сил»

Рекомендації до розв’язання задач

1. Вибрати матеріальну систему, рівновага якої розглядається, нанести всі активні сили, звільнити систему від в’язів, замінивши їх реакціями.
2. При розв’язанні задач даної теми можна використовувати будь-яку з форм рівноваги системи (3.7) – (3.9).
3. Вибрати систему координат при використанні форм рівноваги (3.7) і (3.8). Напрям координатних осей *x* і *y* варто обрати таким чином, щоб вони були перпендикулярні максимально можливій кількості сил.
4. Доцільно складати рівняння системи таким чином, щоб кожне з них містило лише одну невідому, оскільки це зменшує обсяг розрахунків. Таку систему можна отримати при вдалому виборі осей координат і центра моментів.
5. В якості центра моментів рекомендується вибирати точку, в якій перетинаються лінії дії двох невідомих сил, тоді це рівняння буде містити лише одну невідому.
6. Якщо в системі діють розподілені сили, то необхідно привести їх до рівнодійної.
7. Визначення невідомих краще починати з рівняння моментів, а потім вже переходити до рівнянь проекцій. Це дасть змогу обійтись без сумісного розв’язання рівнянь і зменшить ймовірність похибки.

Приклад розв'язання задачі

Задача 1. Двоопорна балка AB довжиною l = 5 м і вагою P = 300 Н навантажена зосередженою силою $\boldsymbol{F}$ = 1 000 Н, прикладеною під кутом α = 30° і лінійно розподіленою силою з інтенсивністю q = 2 кН/м. Визначити реакції в опорах балки, якщо її розміри a = 2 м, b = 3 м.

Розв'язання.

Замінимо в'язі їх реакціями. В шарнірно нерухомій опорі A виникає реакція $\boldsymbol{R}_A$, напрям якої наперед невідомий, тому розкладемо її на вертикальну $\boldsymbol{Y}$ і горизонтальну $\boldsymbol{X}$ складові. В шарнірно рухомій опорі B має місце лише вертикальна реакція $\boldsymbol{R}_B$. Напрями горизонтальних і вертикальних реакцій вибираємо довільно.

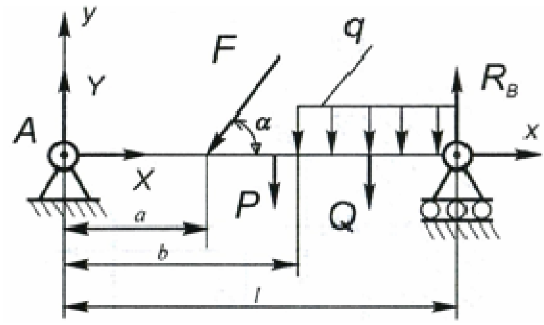


Рис. 3.4 До задачі 1.

На балку діє сила, розподілена по лінії, тому зведемо її до рівнодійної $\boldsymbol{Q}$, модуль якої дорівнює

$$Q = q(l-b) = 2(5-3) = 4\ (кH).$$

Використаємо рівняння рівноваги системи в формі (3.7). Згідно рекомендацій 7 і 5 спершу запишемо рівняння моментів відносно точки A

$$\sum_{i=1}^{4} M_A(F_i) = 0;\ R_B l - Q\left(b + \frac{l-b}{2}\right) - P\frac{l}{2} - Fa\sin a = 0.$$

$$5R_B = 4\left(3 + \frac{5-3}{2}\right) + 0{,}3\cdot\frac{5}{2} + 1\cdot 2\cdot\sin 30° = 17{,}75 \Rightarrow R_B = \frac{17{,}75}{5} = 3{,}55\ (кH).$$

При складанні рівнянь застосовувалось правило знаків, згідно якого моменти, дія яких направлена проти годинникової стрілки, вважаються додатними, а за нею – від'ємними.

Тепер записуємо проекції сил на координатні осі і знаходимо невідомі складові реакції в лівій опорі

$$\sum_{i=1}^{2} F_x = 0.\ X - F\cos a = 0 \Rightarrow X = 1\cdot\cos 30° = 0{,}87\ (кH).$$

$$\sum_{i=1}^{5} F_y = 0.\ Y - F\sin a - P - Q + R_B = 0 \Rightarrow Y = 1\cdot\sin 30° + 0{,}3 + 4 - 3{,}55 = 1{,}25\ (кH).$$

При складанні рівнянь додатними вважалися проекції, які співпадають з напрямом відповідної координатної осі. Оскільки всі реакції виявились додатними, то напрями реакцій на рисунку були обрані вірно.

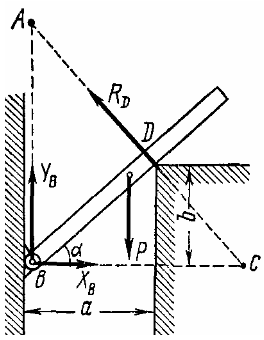
Наостанок знайдемо повну реакцію в опорі A

$$R_A = \sqrt{X^2 + Y^2} = \sqrt{0{,}87^2 + 1{,}25^2} = 1{,}52\ (кH).$$

Задачу розв'язано.

<u>Завдання № 3 до РГР</u>

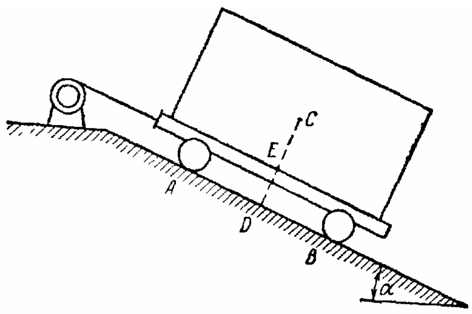
3.1. Однорідний стержень довжиною l = 50 см і вагою P = 40 Н прикріплений до стіни в точці B за допомогою шарніра, а в точці D спирається на кут іншої стіни. Знайти всі реакції в системі, якщо відомо, що точка D відстоїть від першої стіни на відстані a = 35 см і знаходиться на висоті b = 25 см над шарніром B.



Відповідь: X_B = 22 Н; Y_B = 9,2 Н; R_D = 37,8 Н.

До задачі 3.1.

3.2. Вагонетка вагою G = 1 000 Н утримується на похилій площині з кутом нахилу α = 30° за допомогою канату, перекинутого через блок і паралельного даній площині. Визначити силу тиску коліс вагонетки на площину в точках A і B і натяг канату, якщо AD = DB = 0,75 м, CE = 0,3 м. Вага вагонетки прикладена в центрі тяжіння C.



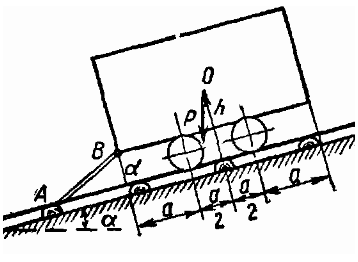
Відповідь: T = 500 Н, N_A = 333 Н, N_B = 533 Н.

До задачі 3.2.

3.3. Автомобіль вагою P = 10 000 Н рухається рівномірно і прямолінійно угору по дорозі, яка утворює з горизонталлю кут α = 10°. Відстань від центра тяжіння автомобіля до дороги h = 75 см, відстані від осей передніх і задніх коліс до площини, яка проходить через центр тяжіння перпендикулярно дорозі складають l_1 = 100 см і l_2 = 120 см. Визначити силу нормального тиску коліс автомобілю на дорогу.

Відповідь: N_1 = 4,78 (кН), N_1 = 5,07 (кН).

3.4. Упорна вилка AB шарнірно з'єднана з вагонеткою вагою G = 1 600 Н і волочиться за нею по шпалах, коли та рухається угору. У разі обриву канату вилка впирається у шпалу і зупиняє вагонетку. Знайти зусилля S у вилці і силу тиску коліс вагонетки на рейки, якщо канат обірвався. Відомі розміри: AB = 1 м, h = 40 см, d = 30 см, a = 56 см, кут нахилу дороги α = 15°, вагу вагонетки вважати прикладеною в точці O.



Відповідь: S = 435 Н, N_1 = 808 Н, N_2 = 607 Н.

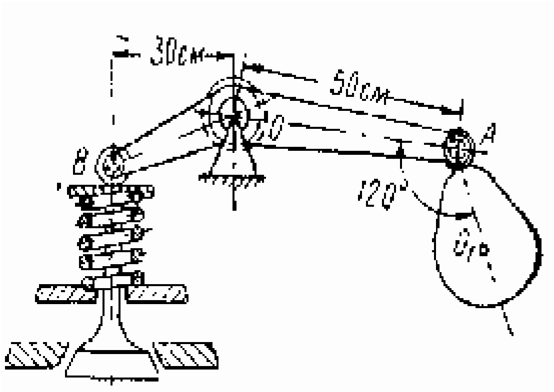
До задачі 3.4.

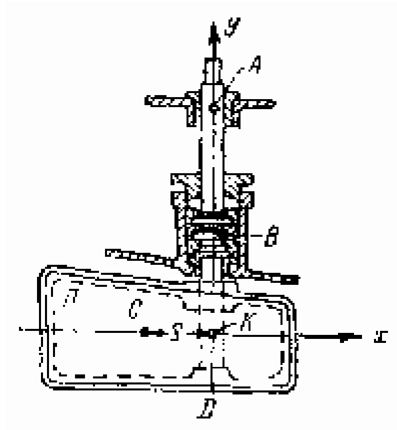
3.5. Клапан двигуна працює від кулачка за допомогою важеля OAB. Визначити силу тиску Q кулачка на ролик, якщо відомо, що на клапан діє загальне зусилля F = 400 Н. Вагою важеля знехтувати.

Відповідь: Q = 277 Н.

3.6. Кермо судна складається з балера ABD і пера $П$. Визначити реакції опорного A і упорного B підшипників в середньому положенні керма, якщо його вага 6 кН прикладена в точці C на відстані s = 40 см від осі, AB = 120 см.

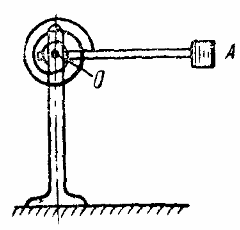
Відповідь: X_A = 2 кН, X_B = - 2 кН, Y_B = 6 кН.





До задачі 3.5. До задачі 3.6.

3.7. Віброграф (прилад для запису вертикальних коливань) складається із стержня *AB* ваги *P* і довжини *l* і вантажу *A* ваги *Q*, який утримується в горизонтальному положенні пружиною. При закручуванні пружини на 1 радіан в пружині виникає момент *c*. Визначити кут закручування пружини.



До задачі 3.7.

Відповідь: $j = \frac{(2Q+P)l}{2c}$.

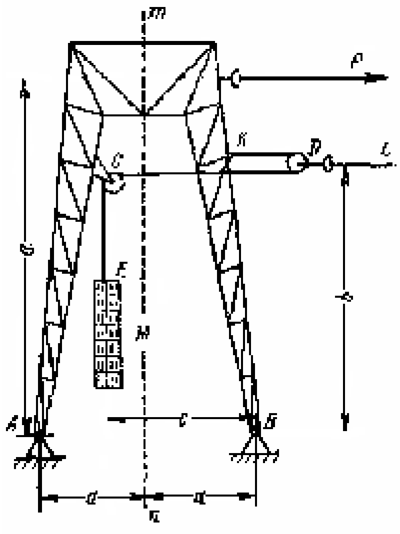
3.8. До твердого тіла в точці *A* з радіус-вектором $\boldsymbol{r}_A = 10\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j}$ м прикладена сила $\boldsymbol{F}_1 = -3\boldsymbol{j}$ Н. До цього ж тіла прикладена сила $\boldsymbol{F}_2$ = 4 Н, спрямована по осі *x* в додатний бік. Привести обидві сили до початку координат і замінити дану систему головним вектором і головним моментом.
Відповідь: $\boldsymbol{F}$ = 5 Н і утворює з віссю *x* кут α = 36,9°; M_0 =-30 Н·м.

3.9. Верхній дріт щогли електричної залізної дороги має натяг *P*, а нижній натягується за допомогою вантажу *M* і тросу *ECDK*, перекинутого через нерухомий блок *C* і рухомий блок *D*. Вага щогли *G*, вага вантажу *Q*, відстань між опорами 2*b*, відстані від дротів до рівня опори і від опори *B* до вантажу *CE* вказано на рисунку. Визначити силу натягу нижнього дроту і вертикальну складову реакції в опорі *A*, якщо щогла симетрична відносно прямої *m*-*n*. Тертям і розмірами блоків знехтувати.

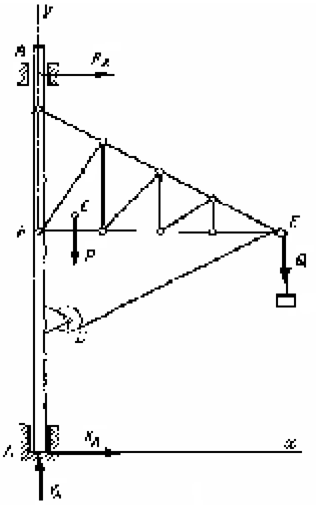
Відповідь: $T = 2Q,\ Y_A = \frac{Q(c-2b)+Gd-Pa}{2d}$.

3.10. Вертикальна вісь *AB* підйомного крану вагою *P* = 12 кН може вільно обертатися в підп'ятнику *A* і підшипнику *B*. Вантаж вагою *Q* = 8,4 кН підіймається за допомогою мотузки, яка перекинута через блок *E* і йде до лебідки *D*, закріпленої на осі крана. Визначити реакції підп'ятника *A* і підшипника *B*, вважаючи вагу крана прикладеною в точці *C* на відстані 0,9 м від осі обертання. Геометричні розміри *AB* = 12 м, *KE* = 4 м.

Відповідь: X_A = 3,7 кН, Y_A = 20,4 кН, R_B = - 3,7 кН.

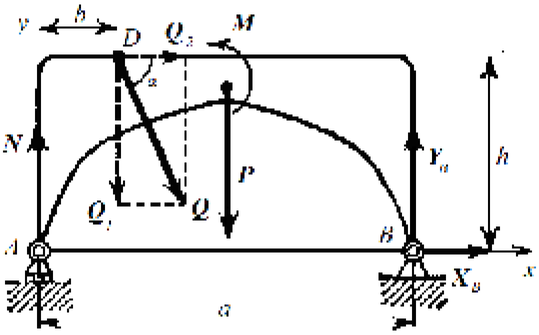


До задачі 3.9.



До задачі 3.10.

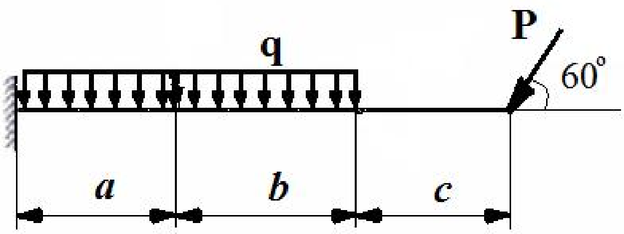
3.11. Симетрична арка вагою P = 80 кН (рис. 3.9) завантажена системою сил, яка зводиться до рівнодійної Q = 40 кН, прикладеної в точці D, і пари з моментом M = 120 кН·м. Визначити реакції в рухомій опорі A і шарнірно нерухомій опорі B, якщо a = 10 м, b = 2 м, h = 3 м, α = 60°.
Відповідь: N = 73,7 кН, X_B = - 20 кН, Y_B = 40,9 кН.



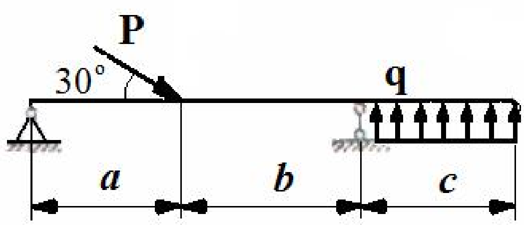
До задачі 3.11.

3.12. Визначити реакції в защемленні невагомої консольної балки, навантаженої зосередженою силою P = 3 кН, спрямованою під кутом α = 60° до горизонту, і лінійно розподіленою силою з інтенсивністю q = 2 кН/м. Геометричні розміри балки a = 1 м, b = 1,5 м, с = 1 м.
Відповідь: X = 1,5 кН; Y = 7,6 кН; M = 15,3 кН·м.

3.13. Визначити реакції в опорах невагомої двоопорної балки з консольною частиною, яка навантажена зосередженою силою P = 2 кН, спрямованою під кутом α = 30° до горизонту, і лінійно розподіленою силою з інтенсивністю q = 0,5 кН/м. Геометричні розміри балки a = 1 м, b = 1,5 м, с = 1 м.
Відповідь: X_A = -1,7 кН; Y_A = 0,8 кН; Y_B = - 0,3 кН.



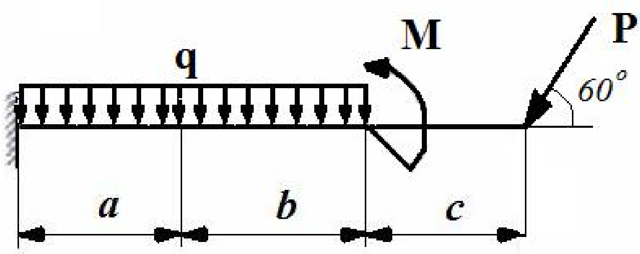
До задачі 3.12.



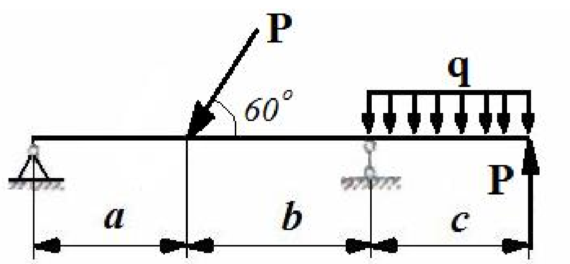
До задачі 3.13.

3.14. Визначити реакції в защемленні невагомої консольної балки, навантаженої зосередженою силою P = 1,2 кН, спрямованою під кутом α = 60° до горизонту, і лінійно розподіленою силою з інтенсивністю q = 1,2 кН/м, яка також знаходиться під дією крутного моменту M = 1,2 кН·м. Геометричні розміри балки a = 0,2 м, b = 0,3 м, c = 0,2 м.
Відповідь: X = 0,6 кН; Y = 1,64 кН; M_A = - 0,32 кН·м.

3.15. Визначити реакції в опорах невагомої двоопорної балки з консольною частиною, яка навантажена зосередженою силою P = 2 кН, спрямованою під кутом α = 60° до горизонту, і лінійно розподіленою силою з інтенсивністю q = 5 кН/м. Геометричні розміри балки a = 10 м, b = 15 м, с = 10 м.
Відповідь: X_A = 1 кН; Y_A = 6,4 кН; Y_B = 41,3 кН.



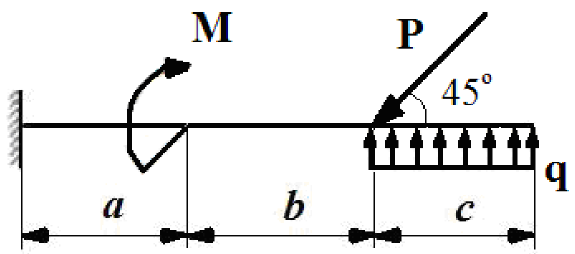
До задачі 3.14.



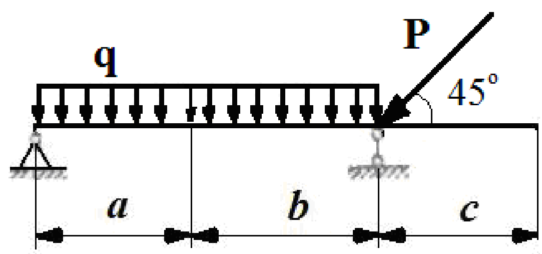
До задачі 3.15.

3.16. Визначити реакції в защемленні невагомої консольної балки, навантаженої зосередженою силою P = 2 кН, спрямованою під кутом 45° до горизонту, лінійно розподіленою силою з інтенсивністю q = 0,5 кН/м і крутним моментом M = 1,2 кН·м. Геометричні розміри балки a = 2 м, b = 3 м, c = 2 м.
Відповідь: X = 1,42 кН; Y = 0,42 кН; M_A = -1,1 кН·м.

3.17. Визначити реакції в опорах невагомої двоопорної балки з консольною частиною, яка навантажена зосередженою силою P = 1,3 кН, спрямованою під кутом α = 45° до горизонту, і лінійно розподіленою силою з інтенсивністю q = 0,5 кН/м. Геометричні розміри балки a = 1 м, b = 1,5 м, с = 1 м.
Відповідь: X_A = 0,92 кН; Y_A = 0,62 кН; Y_B = 1,55 кН.



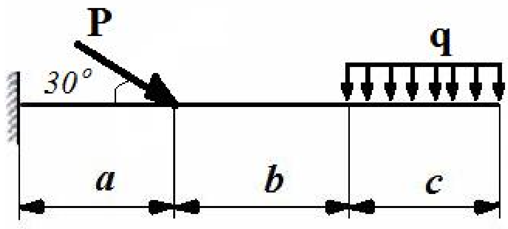
До задачі 3.16.



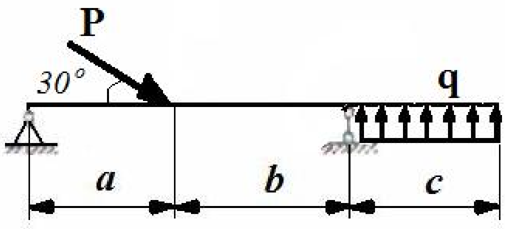
До задачі 3.17.

3.18. Визначити реакції в защемленні невагомої консольної балки, навантаженої зосередженою силою P = 4 кН, спрямованою під кутом α = 30° до горизонту, та лінійно розподіленою силою з інтенсивністю q = 3 кН/м. Геометричні розміри балки a = 0,2 м, b = 0,3 м, c = 0,2 м.

Відповідь: X = - 3,46 кН; Y = 2,6 кН; M = 0,76 кН·м.



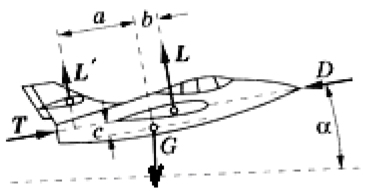
До задачі 3.18.



До задачі 3.19.

3.19. Визначити реакції в опорах невагомої двоопорної балки з консольною частиною, яка навантажена зосередженою силою P = 5 кН, спрямованою під кутом α = 30° до горизонту, і лінійно розподіленою силою з інтенсивністю q = 5 кН/м. Геометричні розміри балки a = 5 м, b = 7,5 м, с = 5 м.
Відповідь: X_A = - 4,33 кН; Y_A = 6,5 кН; Y_B = - 29 кН.

3.20. Реактивний літак вагою P летить поступально і прямолінійно під кутом α до горизонту під дією постійної сили тяги T. Визначити відношення k повної підйомної сили літака, яка складається із підйомних сил крила L і стабілізатора L', до повного опору літака D, а також кожну з цих величин окремо, виразивши їх через задану вагу P і тягу T. Необхідні розміри вказано на рисунку.

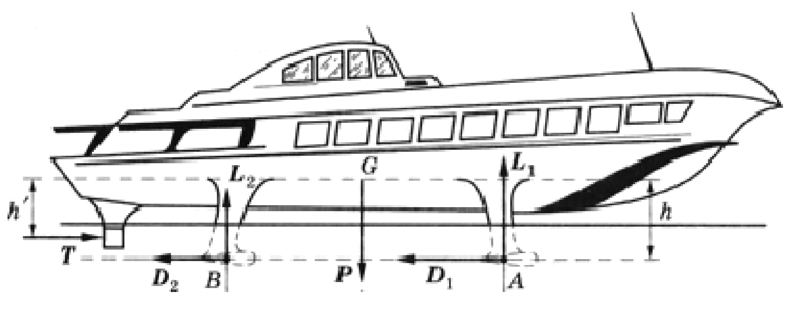


До задачі 3.20.

Відповідь:

$$k = \frac{P\cos a}{T - P\sin a},\ \ L = \frac{a\cos a + c\sin a}{a+b}P,\ \ L' = \frac{b\cos a - c\sin a}{a+b}P.$$

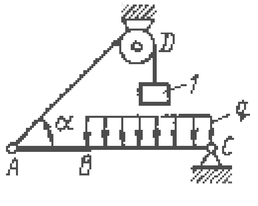
3.21. Катер на підводних крилах ваги P рухається поступально, рівномірно і прямолінійно, спираючись на крила з центрами в точках A і B, розташованих на відстані h від горизонталі. Знаючи, що сила гвинта дорівнює T, визначити підйомні сили передніх L_1 і задніх L_2 крил. Необхідні геометричні розміри вказано на рисунку.



До задачі 3.21.

Відповідь: $L_1 = \frac{1}{2}\left(P + T\frac{h-h'}{a}\right),\ L_2 = \frac{1}{2}\left(P - T\frac{h-h'}{a}\right)$

3.22. Балка AC закріплена в шарнірі C і утримується в горизонтальному положенні мотузкою AD, перекинутою через блок. Визначити інтенсивність розподіленого навантаження q, якщо BC = 5 м, AC = 8 м, α = 45°, а вага вантажу 1 P = 20 Н.



Відповідь: q = 9,05 Н/м.
До задачі 3.22.

Глава 4. Довільна просторова система сил

4.1. Головний вектор і головний момент просторової системи сил

Теорема про перенесення лінії дії сили: не змінюючи стану твердого тіла, прикладену до нього силу можна перенести в будь-яку точку цього тіла паралельно самій собі, додавши при цьому приєднану пару.

Доведення. Нехай до твердого тіла прикладена сила $\boldsymbol{F}$ у точці A (рис. 4.1). У довільній точці O цього ж тіла прикладемо зрівноважену систему сил ($\boldsymbol{F}'$, $\boldsymbol{F}''$), модулі яких дорівнюють силі $\boldsymbol{F}$, а лінії дії паралельні силі $\boldsymbol{F}$. Отримана система із трьох сил еквівалентна силі $\boldsymbol{F}$, в той же час сили $\boldsymbol{F}$ і $\boldsymbol{F}''$ утворюють пару. Тому сила $\boldsymbol{F}$ еквівалентна силі $\boldsymbol{F}'$, прикладеній в точці O і парі сил ($\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{F}''$) з моментом, що дорівнює моменту сили $\boldsymbol{F}$ відносно центра зведення O.

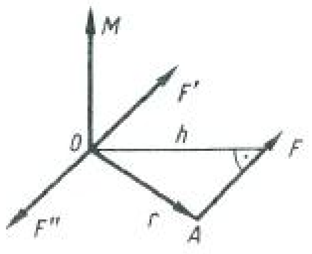


Рис. 4.1. Теорема про перенесення лінії дії сили.

Головний вектор системи сил – геометрична сума усіх сил системи:

$$\boldsymbol{F} = \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{F}_k. \tag{4.1}$$

Проекції головного вектора на осі декартової системи координат мають наступний вигляд

$$F_x = \sum_{k=1}^{n} F_{kx}; \qquad F_y = \sum_{k=1}^{n} F_{ky}; \; F_z = \sum_{k=1}^{n} F_{kz}; \tag{4.2}$$

Модуль головного вектора визначається по формулі

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} = \sqrt{\left(\sum_{k=1}^{n} F_{kx}\right)^2 + \left(\sum_{k=1}^{n} F_{ky}\right)^2 + \left(\sum_{k=1}^{n} F_{kz}\right)^2}\,. \tag{4.3}$$

Кути між напрямом головного вектора і координатними осями знаходяться за допомогою напрямних косинусів

$$\cos(F,Ox) = \frac{F_x}{F},\; \cos(F,Oy) = \frac{F_y}{F},\; \cos(F,Oz) = \frac{F_z}{F}. \tag{4.4}$$

Головний момент системи сил відносно центра зведення *O* – геометрична сума моментів усіх сил системи відносно того ж центр O:

$$\boldsymbol{M}_o = \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{M}_o(\boldsymbol{F}_k). \tag{4.5}$$

Проекції головного моменту на осі декартової системи координат мають наступний вигляд

$$\begin{aligned} M_{ox} &= \sum_{k=1}^{n} M_{ox}(F_k) = \sum_{k=1}^{n} \left(y_k F_{kz} - z_k F_{ky}\right); \\ M_{oy} &= \sum_{k=1}^{n} M_{oy}(F_k) = \sum_{k=1}^{n} \left(z_k F_{kx} - x_k F_{kz}\right); \\ M_{oz} &= \sum_{k=1}^{n} M_{oz}(F_k) = \sum_{k=1}^{n} \left(x_k F_{ky} - y_k F_{kx}\right). \end{aligned} \tag{4.6}$$

Модуль головного моменту визначається по формулі

$$M_o = \sqrt{M_{ox}^2 + M_{oy}^2 + M_{oz}^2}. \qquad (4.7)$$

Кути між напрямом головного моменту і координатними осями

$$\cos(M_o, Ox) = \frac{M_{ox}}{M_o},\ \cos(M_o, Oy) = \frac{M_{oy}}{M_o},\ \cos(M_o, Oz) = \frac{M_{oz}}{M_o}. \qquad (4.8)$$

<u>4.2. Приведення довільної просторової системи сил</u>

Теорема: якщо сили, довільно розташовані в просторі, не зрівноважуються, то їх можна звести до однієї з еквівалентних систем:

1. Головного вектора системи $\boldsymbol{F}$, прикладеного в довільно обраному центрі O, і приєднаної пари сил, момент $\boldsymbol{M}_0$ якої дорівнює головному моменту системи сил відносно центра зведення.

2. Двох мимобіжних сил, одна з яких прикладена в центрі зведення O, а інша у деякій довільній точці.

Окремі випадки приведення сил, довільно розташованих у просторі:

а) Якщо головний вектор системи сил дорівнюють нулю, а головний момент не дорівнює нулю,

$$\boldsymbol{F} = 0 \text{ і } \boldsymbol{M_0} \neq 0,$$

то система приводиться до пари сил з моментом $\boldsymbol{M}_0$, який визначається за формулами (4.6) і (4.7).

б) Якщо тільки головний момент просторової системи сил дорівнює нулю

$$\boldsymbol{F} \neq 0 \text{ і } \boldsymbol{M_0} = 0,$$

то сили приводяться до головного вектора $\boldsymbol{F}$, лінія дії якого проходить через точку зведення O, а величина визначається за формулами (4.2) і (4.3).

в) Якщо головний вектор і головний момент системи сил не дорівнюють нулю

$$\boldsymbol{F} \neq 0 \text{ і } \boldsymbol{M_0} \neq 0, \text{ але } \boldsymbol{F} \perp \boldsymbol{M_0},$$

то система приводиться до рівнодійної $\boldsymbol{F}$, яка не проходить через центр O і визначається за формулами (4.2) і (4.3). Даний випадок завжди має місце в довільній плоскій системі паралельних сил, для яких $\boldsymbol{F} \neq 0$.

г) Якщо головний вектор і головний момент системи сил не дорівнюють нулю

$$\boldsymbol{R} \neq 0 \text{ і } \boldsymbol{M_0} \neq 0, \text{ але } \boldsymbol{R} \parallel \boldsymbol{M_0},$$

то система приводиться до сукупності рівнодійної $\boldsymbol{R}$, і пари (P, P') яка лежить в площині, що перпендикулярна до сили (рис. 4.2). ака сукупність сили і пари зветься динамічним гвинтом, а лінія дії сили $\boldsymbol{R}$ – віссю гвинта.

Якщо одну з сил пари скласти з силою $\boldsymbol{F}$, то дану систему можна замінити двома мимобіжними силами $\boldsymbol{P}$ і $\boldsymbol{Q}$ (рис. 4.3), але звести систему до однієї сили або однієї пари неможливо.

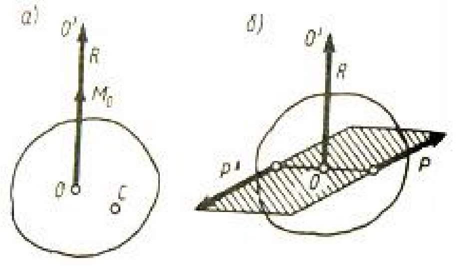


Рис. 4.2. Динамічний гвинт

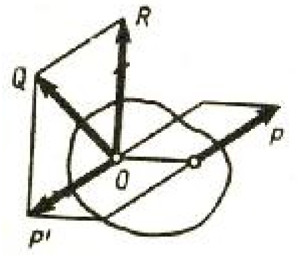


Рис. 4.3. Мимобіжні сили.

д) Якщо головний вектор і головний момент системи сил не дорівнюють нулю

$$\boldsymbol{F} \neq 0 \text{ і } \boldsymbol{M_0} \neq 0,$$

а вектори $\boldsymbol{F}$ і $\boldsymbol{M}_0$ не перпендикулярні і не паралельні, то така система сил теж приводиться к динамічному гвинту, але вісь гвинта вже не буде проходити через центр O.

4.3. Умови рівноваги довільної просторової системи сил

Теорема: для рівноваги будь-якої просторової системи сил необхідно і достатньо, щоб головний вектор цієї системи та її головний момент відносно довільного центру зведення дорівнювали нулю:

$$\boldsymbol{F} = \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{F}_k = 0, \qquad \boldsymbol{M}_o = \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{M}_o(\boldsymbol{F}_k) = 0. \tag{4.9}$$

Запишемо скалярні умови рівноваги просторової системи сил, що витікають з виразу (4.9):

$$\begin{aligned} &F_x = \sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0; \quad F_y = \sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0; \quad F_z = \sum_{k=1}^{n} F_{kz} = 0; \\ &M_{ox} = \sum_{k=1}^{n} M_{ox}(F_k) = 0; \quad M_{oy} = \sum_{k=1}^{n} M_{oy}(F_k) = 0; \quad M_{oz} = \sum_{k=1}^{n} M_{oz}(F_k) = 0. \end{aligned} \tag{4.10}$$

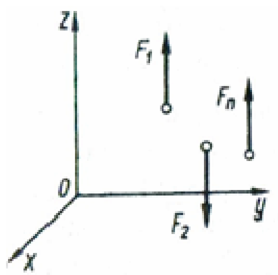
З (4.10) витікає, що для рівноваги довільної просторової системи сил необхідно і достатньо, аби суми проекцій усіх сил на координатні осі та суми моментів цих сил відносно координатних осей дорівнювали нулю.

Окремі випадки рівноваги просторової системи сил:

1. *Рівновага просторової системи паралельних сил*.

Оскільки всі сили паралельні між собою, то напрямимо координатну вісь Oz паралельно цим силам (рис. 4.4). В такому випадку із шести умов рівноваги залишиться три:

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kz} = 0, \qquad \sum_{k=1}^{n} M_{ox}(F_k) = 0, \qquad \sum_{k=1}^{n} M_{0y}(F_k) = 0. \tag{4.11}$$



Висновок: для рівноваги просторової системи паралельних сил необхідно і достатньо, аби алгебрична сума проекцій усіх сил на паралельну вісь дорівнювала нулю і алгебричні суми моментів цих сил відносно двох інших осей дорівнювали нулю.

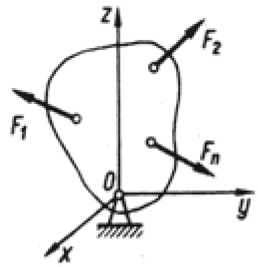
Рис. 4.4. Просторова система паралельних сил.

2. *Рівновага твердого тіла з однією нерухомою точкою*.

Нехай на тіло з нерухомою точкою O діє просторова система n сил (рис. 4.5). Візьмемо за центр зведення точку O, тоді головний вектор і головний момент системи знаходяться за формулами

$$\boldsymbol{F} = \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{F}_k, \quad \boldsymbol{M}_o = \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{M}_o(\boldsymbol{F}_k).$$

Але головний вектор системи зрівноважиться реакцією в нерухомій точці O, тому для рівноваги нулю має дорівнювати головний момент системи. У скалярному вигляді умови рівноваги системи з нерухомою точкою:



$$\sum_{k=1}^{n} M_{Ox}(F_k)=0, \qquad \sum_{k=1}^{n} M_{Oy}(F_k)=0, \qquad \sum_{k=1}^{n} M_{Oz}(F_k)=0. \tag{4.12}$$

Висновок: для рівноваги твердого тіла з однією нерухомою точкою необхідно і достатньо, аби алгебрична сума моментів відносно координатних осей з центром в точці O дорівнювала нулю.

Рис.4.5. Рівновага тіла з нерухомою точкою.

3. *Рівновага твердого тіла з двома нерухомими точками (віссю).*

Нехай на тіло з нерухомими точками O_1 і O_2 діє просторова система n сил (рис. 4.6). За принципом звільнення від в'язів прикладемо в точках O_1 і O_2 невідомі реакції R_1 і R_2. Оскільки їх напрями невідомі, то реакції запишемо через їх проекції на координатні вісі. Умови рівноваги твердого тіла

$$\boldsymbol{F}=\sum_{k=1}^{n}\boldsymbol{F}_k=0, \qquad \boldsymbol{M}_o=\sum_{k=1}^{n}\boldsymbol{M}_o(\boldsymbol{F}_k)=0.$$

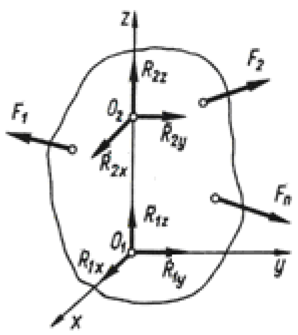
В скалярній формі умови рівноваги мають вигляд:

$$F_x=\sum_{k=1}^{n}F_{kx}+R_{1x}+R_{2x}=0; \quad F_y=\sum_{k=1}^{n}F_{iy}+R_{1y}+R_{2y}=0;$$

$$F_z=\sum_{k=1}^{n}F_{kz}+R_{1z}+R_{2z}=0; \quad M_{ox}=\sum_{k=1}^{n}M_{ox}(F_k)-aR_{2y}=0; \tag{4.13}$$

$$M_{oy}=\sum_{k=1}^{n}M_{oy}(F_k)-aR_{2x}=0; \quad M_{oz}=\sum_{k=1}^{n}M_{oz}(F_k)=0.$$

Лише в останнє рівняння не входять реакції в'язей, тому воно і є єдиною умовою рівноваги твердого тіла з двома нерухомими точками (нерухомою віссю).



Висновок: для рівноваги твердого тіла з двома нерухомими точками необхідно і достатньо, щоб алгебрична сума моментів активних сил відносно осі закріплення (обертання) дорівнювала нулю.

Рис.4.6. Рівновага тіла з нерухомою віссю.

Питання для самоконтролю

1. Яка різниця між поняттями головного вектора і рівнодійної?
2. Скільки незалежних рівнянь рівноваги можна записати для довільної просторової системи сил?
3. Що називається головним моментом системи сил відносно заданого центра?
4. Скільки незалежних рівнянь рівноваги можна записати для просторової системи паралельних сил?
5. Чи завжди довільну просторову систему сил можна привести до двох мимобіжних сил?
6. Як формулюється основна теорема статики?

Завдання № 4. «Довільна просторова система сил»

Рекомендації до розв'язання задач

1. Виділити об'єкт (матеріальну точку або тіло), рівновага якого буде розглядатися в задачі.
2. Зобразити активні сили, які діють на досліджуване тіло.
3. Звільнити систему від в'язей, замінивши їх дію реакціями.
4. Переконатися в тому, що система є статично визначеною, після чого вибрати систему координат, в якій визначення невідомих величин буде найпростіше.
5. Записати рівняння рівноваги (4.13) для системи, яка розглядається.
6. Розв'язати рівняння рівноваги, перевірити отримані результати.

Приклад розв'язання задачі

Задача 1. На горизонтальний вал в підшипниках A і B насаджений шків радіуса r_1 = 20 см і барабан радіуса r_2 = 20 см (рис. 4.7). Вал приводиться до руху за допомогою пасу, який накинуто на шків, при цьому рівномірно підіймається вантаж вагою P = 540 Н. Нехтуючи вагою барабану, вала і шківа, визначити реакції в підшипниках A і B, якщо відомо, що натяг ведучої вітки пасу T_1 у два рази більший від натягу T_2 веденої вітки. Розміри вала: a = 40 см, b = 60 см, α = 30°.

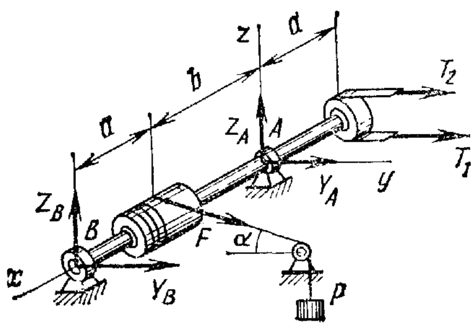


Рис. 4.7. До задачі 1.

Розв'язання.

Якщо вантаж рухається рівномірно, то вся система задовольняє умовам рівноваги (4.13). Ось x спрямуємо вздовж вала, оскільки більшість сил є перпендикулярними до нього. Далі визначимо реакції в підшипниках A і B. Оскільки вони не фіксують осьового зміщення вала, то в кожному з підшипників виникає по дві реакції, перпендикулярних до осі x.

Складаємо умови рівноваги системи, знаючи, що сила натягу нитки F дорівнює вазі вантажу P

$$\sum Y = 0.\ P\cos a + T_1 + T_2 + Y_A + Y_B = 0,$$

$$\sum Z = 0.\ -P\sin a + Z_A + Z_B = 0,$$

$$\sum M_x = 0.\ -r_2 P + r_1 T_1 - r_1 T_2 = 0,$$

$$\sum M_y = 0.\ bP\sin a - (a+b)Z_B = 0,$$

$$\sum M_z = 0.\ bP\cos a - aT_1 - aT_2 + (a+b)Y_B = 0.$$

Знаючи, що $T_1 = 2T_2$, з третього рівняння знайдемо натяги пасів ременя

$$-r_2 P + 2T_2 r_1 - T_2 r_1 = 0 \Rightarrow T_2 r_1 = r_2 P \Rightarrow T_2 = \frac{r_2 P}{r_1} = \frac{15 \cdot 540}{20} = 405\ (H).$$

$$T_1 = 2T_2 = 2 \cdot 405 = 810\ (H).$$

Підставимо отримані результати в останнє рівняння і визначимо реакцію Y_B

$$Y_B = \frac{a(T_1 + T_2) - bP\cos a}{a+b} = \frac{40 \cdot (405 + 810) - 60 \cdot 540 \cdot \cos 30°}{40 + 60} = 205\ (H).$$

Горизонтальну реакцію Y_A знайдемо з першого рівняння, підставивши в нього щойно отримані значення

$$Y_A = -P\cos a - T_1 - T_2 - Y_B = -540 \cdot \cos 30° - 810 - 405 - 205 = -1890\ (H).$$

Вертикальні реакції находимо послідовно розв’язавши четверте та друге рівняння

$$Z_B = \frac{bP\sin a}{a+b} = \frac{60 \cdot 540 \cdot \sin 30°}{40 + 60} = 108\ (H);$$

$$Z_A = P\sin a - Z_B = 540 \cdot \sin 30° - 108 = 162\ (H).$$

Задачу розв’язано.

Завдання № 4 до РГР

4.1. Вантаж Q = 800 Н опускається з постійною швидкістю на канаті, який навернутий на барабан радіуса r_D = 10 см. На цьому ж валу знаходиться колесо E і гальмівний шків C радіуса r_C = 25 см. До колеса E прикладена пара сил з моментом m = 40 Н·м, яка пригальмовує обертання вала. Оскільки пара сил не забезпечує рівномірного руху, то додаткове гальмування системи відбувається за допомогою колодкового гальма, яке притискається силою P до шківу C. Визначити величину цієї сили та реакції в підшипниках A і B, якщо сила, що діє між гальмом і шківом F = 0,5P. Розміри вала: a = 45 см, b = 50 см, c = 35 см, e = 30 см.

Відповідь: Y_A = 104,6 Н; Z_A = 516,9 Н; Y_B = 144 Н; Z_B = 603 Н; P = 320 Н.

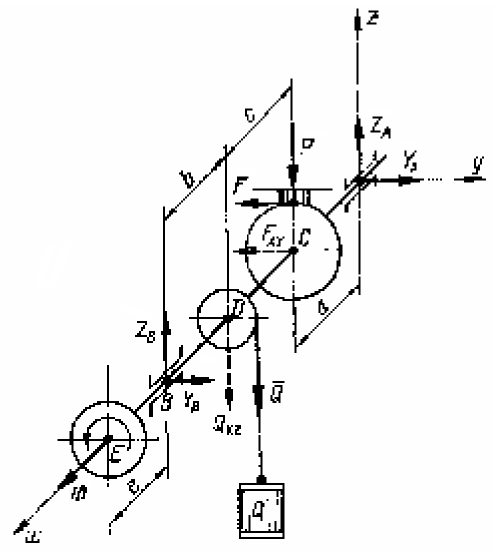
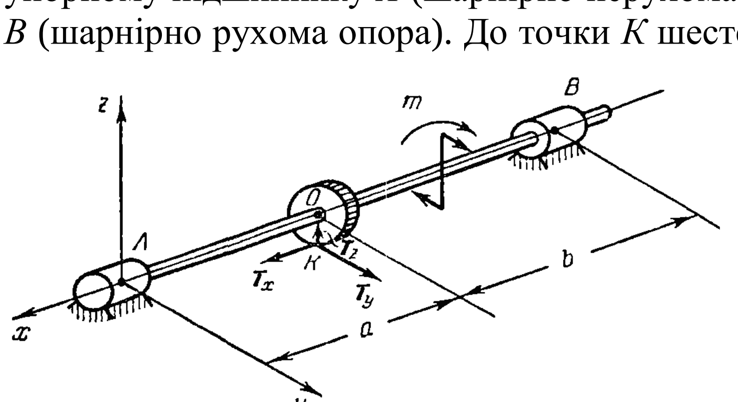


Рис. до задачі 4.1.

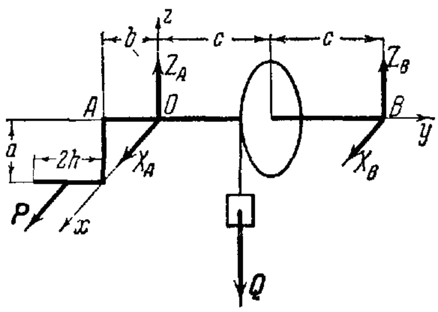
4.2. Косозуба шестірня радіуса r = 10 см знаходиться на валу, закріпленому в упорному підшипнику A (шарнірно нерухома опора) і радіальному підшипнику B (шарнірно рухома опора). До точки K шестерні з боку іншого колеса діє сила T, проекції якої на координатні осі T_x = 30 Н, T_y = 280 Н, T_z = 120 Н. До вала, який обертається рівномірно, прикладена пара сил з моментом m відносно осі x. Нехтуючи вагою вала і шестерні, визначити реакції в підшипниках A і B, а також момент пари m, якщо a = 0,5 м; b = 1 м.



До задачі 4.2.

Відповідь: m = 28 Н·м; R_{Ax} = - 30 Н; R_{Ay} = - 186,7 Н; R_{Az} = - 82 Н; R_{By} = - 93,3 Н; R_{Bz} = - 38 Н.

4.3. Вал підйомного механізму і його рукоятка розташовані в одній вертикальній площині. Вантаж вагою Q = 250 Н, підвішений на шківі,

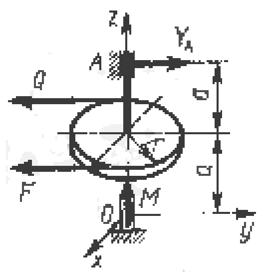


врівноважується силою P, прикладеною перпендикулярно до рукоятки механізму. Нехтуючи вагою вала і шківа, знайти величину сили P, якщо радіус шківа R = 15 см, геометричні розміри: a = 15 см, b = 10 см, c = 25 см, h = 12 см.

Відповідь: P = 250 Н; X_A = - 360 Н; Z_A = 125 Н; X_B = 110 Н; Z_B = 125 Н.

До задачі 4.3.

4.4. Сила F = 2Q = 120 Н, прикладена до шківу, зрівноважена парою сил з

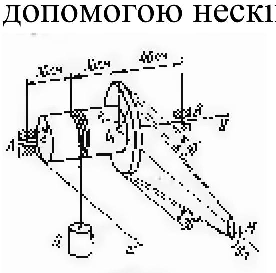


моментом M = 18 Н·м. Скласти рівняння моментів сил відносно осі Ox і визначити реакцію Y_A в підшипнику A, якщо радіус шківа r = 0,3 м, a = 0,3 м, сили F і Q паралельні до осі Oy.

Відповідь: Y_A = 90 Н.

До задачі 4.4.

4.5. Вантаж вагою Q = 10 кН рівномірно підіймається двигуном M за допомогою нескінченого ланцюга. Визначити реакції опор A і B, а також натяг в

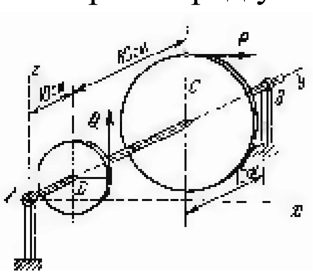


ланцюгу, якщо гілки ланцюга нахилені до горизонту під кутом 30°. Відомо, що r = 10 см, R = 20 см, натяг веденої гілки T_2 в двічі менший натягу ведучої T_1.

Відповідь: T_1 = 10 кН; T_2 = 5 кН; X_A = - 5,2 кН; Z_A = 6 кН; X_B = -7,8 кН; Z_B = 1,5 кН.

До задачі 4.5.

4.6. На горизонтальному валу AB знаходиться колесо C радіуса R = 1 м і шестірня D радіуса r = 10 см. До колеса прикладена горизонтальна сила P = 100

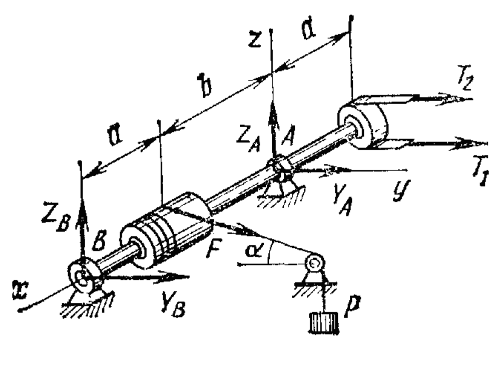


Н, а на шестірню дія вертикальна сила Q. Визначити силу Q і реакцію в підшипниках, якщо відомо, що система знаходиться в стані рівноваги.

Відповідь: Q = 1 000 Н; X_A = - 10 Н; Z_A = -900 Н; X_B = - 90 Н; Z_B = - 100 Н.

До задачі 4.6.

4.7. На горизонтальному валу, закріпленому в підшипниках A і B, знаходяться шків радіуса r_1 = 20 см і барабан радіуса r_2 = 15 см. Вал приводиться до обертання пасом, накинутим на шків, при цьому рівномірно підіймається вантаж вагою P = 540 Н.

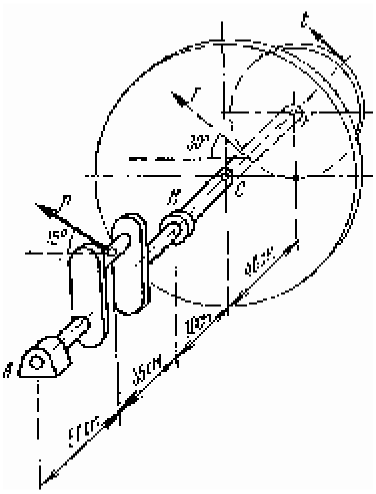


До задачі 4.7.

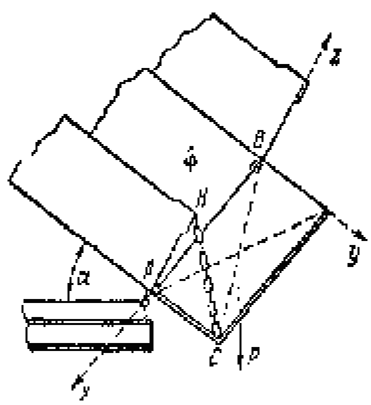
Нехтуючи вагою вала, барабана і шківа, визначити реакції в підшипниках *A* і *B* та натяг T_1 ведучої ланки ременя, якщо відомо, що він вдвічі більший за натяг веденої ланки T_2. Геометричні розміри вала: a = 40 см, b = 60 см, α = 30°.
Відповідь: T_1 = 810 Н; Y_A = - 1890 Н; Z_A = 108 Н; Y_B = 205 Н; Z_B = 162 Н.

4.8. При вертикальному положенні середньої площини коліна вала сила тиску на середину його шийки збоку шатуна дорівнює P = 12 кН і направлена в перпендикулярній до осі площині під кутом α = 15° до горизонту. В точці *C* на осі вала закріплений маховик вагою G =12 кН, а в точці *E* – шків діаметром D = 80 см з пасом, який передає крутний момент на вал робочої машини. Гілки паса лежать в площині шківа і утворюють кут β = 30° з горизонтом. Натяг T_1 ведучої гілки ременя вдвічі більший за натяг веденої гілки T_2, а відстань від осі вала до осі шейки коліна r = 15 см. Визначити натяги ведучої T_1 і веденої T_2 гілок паса і реакції в підшипниках, якщо відомо, що вал обертається рівномірно. Вагу вала і шківа до уваги не брати.
Відповідь: T_1 = 8,7 кН; T_2 = 4,3 кН; Y_A = - 4,5 кН; Z_A = -0,2 кН; Y_B = 27,4 кН; Z_B = 2,5 кН.

4.9. Кузов автомобіля-самоскида утримується під кутом α = 30° до горизонту. Задній борт кузова утримується за допомогою ланцюга *CH* таким чином, що борт і дно кузова лежать в одній площині. Визначити реакції шарнірів *A* і *B*, а також натяг *T* ланцюга *CH*, якщо вага борта *P* = 600 Н, *AH* = *AC*.
Відповідь: T = 368 Н; Y_A = 110 Н; Z_A = 0 Н; Y_B = -150 Н; Z_B = 260 Н.



До задачі 4.8.



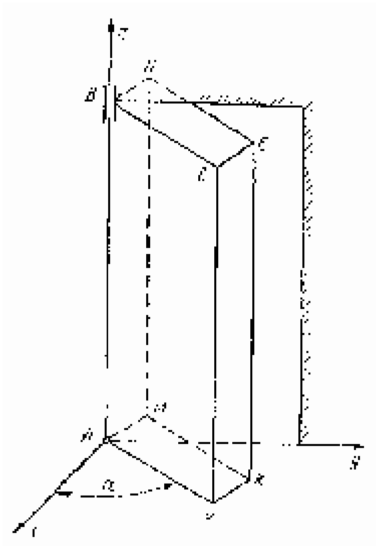
До задачі 4.9.

4.10. Для захисту від радіації споруджаються товстостінні приміщення. Двері такого приміщення являють собою прямокутний залізобетонний паралелепіпед *ABCDKEHM* вагою *P* = 8 кН. Визначити реакції підп'ятника *A* і підшипника *B*, якщо двері відчинені так, що утворюють кут α = 60° з віссю *x*. Товщина двері *a*, її ширина b = 3a, висота h = 5a.
Відповідь: X_A = 504 Н; Y_A = 2 480 Н; Z_A = 8 000 Н; X_B = - 504 Н; Y_B = - 2 480 Н.

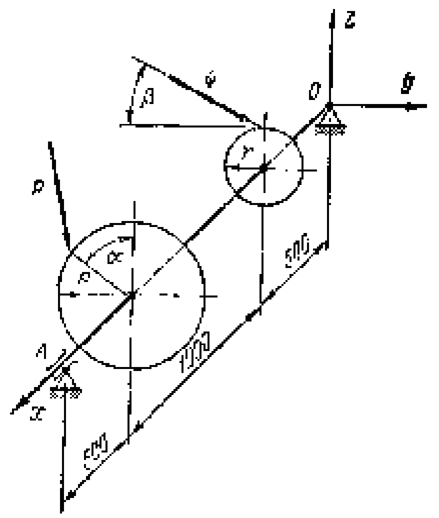
4.11. Визначити реакції в радіально-упорному підшипнику *O* і радіальному підшипнику *A*, а також силу тиску Q на колеса на прямозубу циліндричну шестерню, якщо β = 30°, величина сили тиску колеса на конічну шестерню дорівнює *P* = 1 000 Н, ця сила утворює кут 60° з віссю *Ox* і кут 225° з віссю *Oz*.

Геометричні розміри: R = 20 см, r = 10 см, α = 60°, вагу деталей до уваги не брати.
Відповідь: Q = 835 Н, X_O = - 500 Н; Y_O = - 623 Н; Z_O = 464 Н; Y_A = - 600 Н; Z_A = 660 Н.

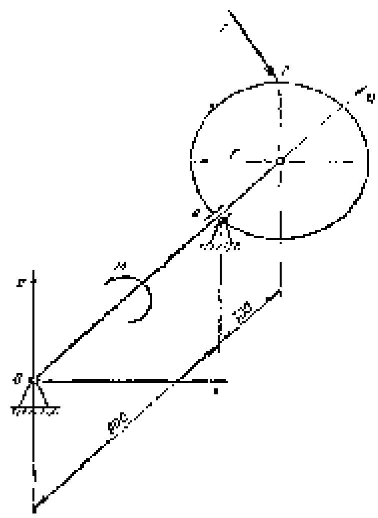
4.12. Визначити реакції в радіально-упорному підшипнику *O* та радіальному підшипнику *A* і величину моменту *M* пари, прикладеної до валу, якщо сила тиску зубців колеса на косозубу шестерню прикладена в точці *C* і дорівнює P = 1 000 Н. Ця сила утворює кут 60° з віссю *Ox* і кут 240° з віссю *Oz*. Радіус шестерні r = 15 см, вагу деталей до уваги не брати.
Відповідь: M = 75 Н·м, X_O = 167 Н; Y_O = - 707 Н; Z_O = - 285 Н; X_A = - 667 Н; Z_A = 785 Н.



До задачі 4.10.



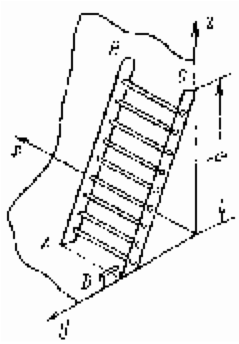
До задачі 4.11.

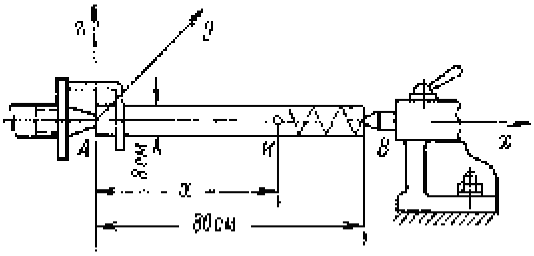


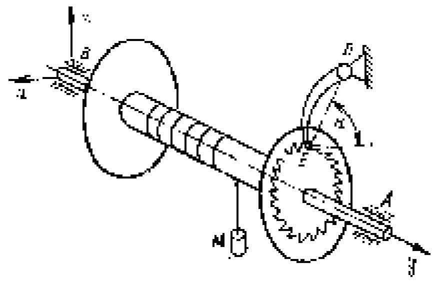
До задачі 4.12.

4.13. Драбина спирається на гладку стіну на висоті h = 2,5 м, а кінцем *D* впирається у виступ, який знаходиться на гладкому полу на відстані a = 1,5 м від стіни. Визначити реакції в точках *A*, *B*, *C* і *D*, якщо вага драбини P = 45 Н прикладена в її центрі.
Відповідь: Z_A = 22,5 Н; Y_B = 0 Н; Y_C = 13,5 Н; Y_D = - 13,5 Н; Z_D = 22,5 Н.

4.14. На токарному верстаті обробляється деталь вагою G = 400 Н. Визначити момент, який має бути прикладений до деталі для утримання її в стані рівноваги, якщо з боку різця в точці *K* на неї діє сила *F*, яка має наступні проекції на координатні осі: F_x = - 3 кН, F_y = 2,4 кН, F_z = 12 кН. Нехтуючи тертям, також визначити реакції в точках *A* і *B* як функцію координати різця *x*, яка визначається відносно точки *A*.
Відповідь: M = 480 Н·м, X_A = 3 кН; Y_A = (30x – 2 550) Н; Z_A = (-11,8 + 0,15x) кН; X_B = 0 кН; Y_B = (150 – 30x) Н; Z_B = (200 – 150x) Н.



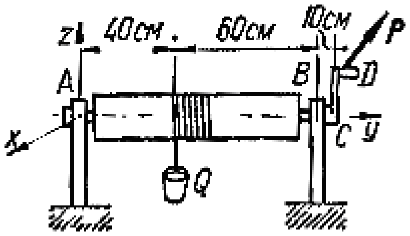




До задачі 4.13. До задачі 4.14. До задачі 4.15.

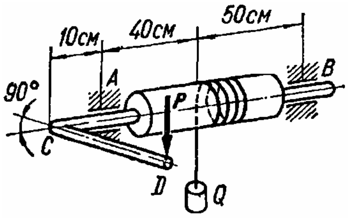
4.15. Храпове колесо радіусом r = 10 см і барабан лебідки радіусом R = 20 см і вагою 2 кН знаходяться на спільному валу *AB* довжиною 80 см. На барабан намотана мотузка, яка несе вантаж *M* вагою G = 3 кН. Визначити реакції в підшипниках *A* і *B* та зусилля в стопорній собачці *ED*, яка утворює з горизонтом кут α = 60°, якщо звисаюча частина мотузки ділить барабан навпіл. Краї барабана знаходяться на відстані 10 см від підшипників. Вагою собачки, храпового колеса і мотузки, а також відстанню між колесом і барабаном знехтувати.
Відповідь: S_{ED} = 3 кН, X_A = - 1,3 кН; Z_A = 4,8 кН; X_B = - 0,19 кН; Z_B = 2,8 кН.

4.16. Із криниці за допомогою ворота рівномірно підіймають вантаж вагою Q = 90 Н. Нехтуючи вагою ворота визначити силу тиску на підшипники *A* і *B* та силу *P*, яку необхідно прикласти перпендикулярно до рукояті *CD*, довжиною 54 см в її вертикальному положенні. Радіус барабана r = 12 см.



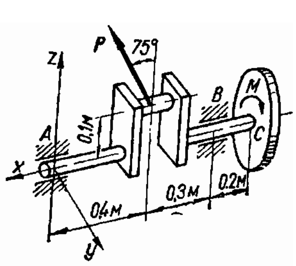
Відповідь: P = 20 Н, X_A = 2 Н; Z_A = - 54 Н; X_B = - 22 Н; Z_B = - 36 Н.
До задачі 4.16.

4.17. За допомогою ворота рівномірно підіймають вантаж вагою Q = 1 000 Н. Нехтуючи вагою ворота визначити повні реакції в підшипниках *A* і *B* та величину сили *P*, яку необхідно прикласти перпендикулярно до рукояті *CD*, довжиною 50 см при її горизонтальному положенні. Радіус вала r = 11 см.



Відповідь: P = 220 Н, R_A = 800 Н; R_B = 420 Н.
До задачі 4.17.

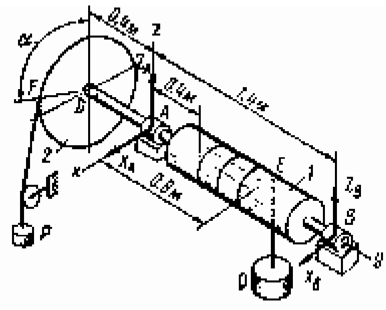
4.18. Шатун давить на колінчастий вал з силою P = 12 кН, перпендикулярною до шийки вала і спрямованою під кутом α = 75° до вертикалі. Нехтуючи вагою вала, визначити складові реакцій в підшипниках *A* і *B*, а також момент пари сил *M*, яку необхідно прикласти до маховика *C* вагою Q = 4,2 кН, аби вал знаходився в стані рівноваги.



До задачі 4.18.

Відповідь: M = 1,16 кН·м, Y_A = 4,97 кН; Z_A = - 2,53 кН; Y_B = 6,63 кН; Z_B = 3,62 кН.

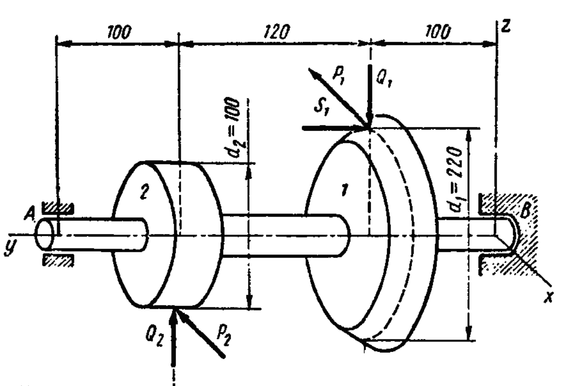
4.19. На вал 1 ворота намотана мотузка, яка утримує вантаж вагою Q. До обода колеса 2, радіус якого вчетверо більший від радіуса вала, прикріплена мотузка, яка натягується вантажем з силою P = 80 Н та сходить з колеса в точці F по дотичній так, що радіус DF колеса утворює з вертикаллю кут α = 60°. Визначити величину вантажу Q, за якої система буде знаходитись у стані рівноваги, а також реакції в підшипниках A і B, якщо вага вала G = 600 Н прикладена в точці C, причому AC = 40 см.



До задачі 4.19.

Відповідь: M = 1,16 кН·м, Y_A = 4,97 кН; Z_A = - 2,53 кН; Y_B = 6,63 кН; Z_B = 3,62 кН.

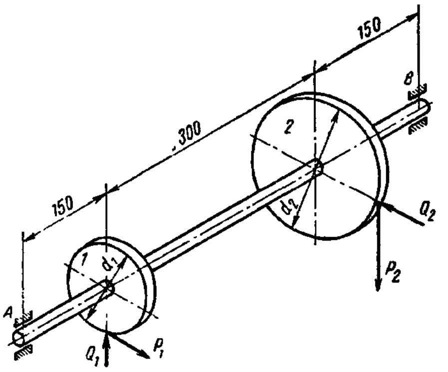
4.20. На валу редуктора жорстко закріплені два зубчасті колеса – конічне 1 і циліндричне 2. Опорами вала є підшипники, причому лівий сприймає лише радіальне навантаження, а правий – радіальне і осьове. На колесо 1 діють три сили: дотична P_1 = 4 кН, радіальна Q_1 = 1,28 кН і осьова S_1 = 0,48 кН. Визначити реакції опор A і B, а також сили P_2, Q_2 = 0,36P_2, які прикладені до колеса 2, якщо відомо, що система знаходиться в стані рівноваги. Вагою вала і колес знехтувати, необхідні розміри взяти з рисунку.



Відповідь: P_2 = 8,8 кН; Q_2 = 3,17 кН; X_A = 7,3 кН; Z_A = - 1,95 кН; X_B = 5,5 кН; Y_B = 0,48 кН; Z_B = 0,05 кН.

До задачі 4.20.

4.21. На горизонтальному валу, встановленому в підшипниках, жорстко закріплені два зубчасті колеса діаметрами d_1 = 300 мм і d_2 = 450 мм. На колесо 1 діють дві сили: дотична P_1 = 1 800 Н, радіальна Q_1 = 0,364P_1 Н. Визначити реакції опор A і B, а також сили P_2 і Q_2 = 0,364P_2, прикладені до колеса 2, якщо відомо, що система знаходиться в стані рівноваги. Вагою вала і колес знехтувати, необхідні розміри взяти з рисунку.



Відповідь: P_2 = 1 200 Н; Q_2 = 437 Н; X_A = - 1 867 Н; Z_A = - 191 Н; X_B = 104 Н; Z_B = 736 Н.

До задачі 4.21.

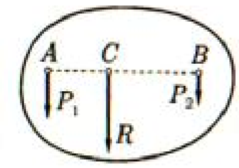
Глава 5. Центр паралельних сил і центр мас

5.1. Паралельні сили на площині

Рівнодійна двох паралельних сил P_1 і P_2 одного напряму (рис. 5.1) має такий же напрям, а її модуль дорівнює алгебричній сумі модулів доданків:

$$R = P_1 + P_2.$$

Точка прикладення рівнодійної C визначається за пропорцією. Вона завжди знаходиться між точками A і B і ділить відрізок AB на частини, обернено пропорційні до модулів сил:



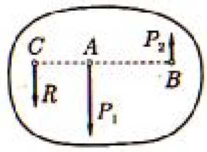
$$\frac{AC}{BC} = \frac{P_2}{P_1} \Rightarrow P_1 \cdot AC = P_2 \cdot BC.$$

Рис. 5.1. Складання паралельних сил одного напрямку.

Рівнодійна двох паралельних сил P_1 і P_2 протилежного напряму (рис. 5.2) має напрям більшої сили, а її модуль дорівнює:

$$R = P_1 - P_2.$$

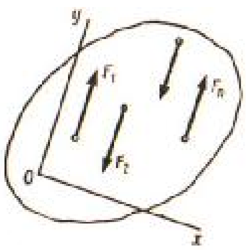
Точка прикладення рівнодійної C лежить на продовженні відрізку AB за точкою прикладення більшої сили, на відстанях від точок A і B, обернено пропорційних до модулів прикладених до них сил:



$$\frac{AC}{BC} = \frac{P_2}{P_1} \Rightarrow P_1 \cdot AC = P_2 \cdot BC.$$

Рис. 5.2. Складання сил протилежного напрямку.

У разі, коли усі діючі на тіло сили паралельні, зручно спрямувати вісь Ox перпендикулярно силам, а вісь Oy паралельно до них (рис. 5.3). В цьому випадку проекція кожної з сил на вісь Ox дорівнюватиме нулю, а умови рівноваги набирають вигляду:



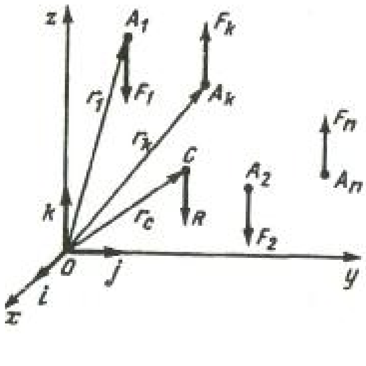
$$\sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0, \qquad \sum_{i=1}^{n} M_0(F_i) = 0. \tag{5.1}$$

Рис. 5.3. Умови рівноваги системи паралельних сил.

Друга форма умов рівноваги у випадку паралельних сил має вигляд:

$$\sum_{i=1}^{n} M_A(F_i) = 0; \qquad \sum_{i=1}^{n} M_B(F_i) = 0, \tag{5.2}$$

причому пряма AB не повинна бути паралельна силам.



5.2. Центр паралельних сил

Нехай ми маємо систему із n паралельних сил (рис. 5.4), яка приводиться до рівнодійної R

$$R = \sum_{i=1}^{n} F_i,$$

що прикладена в точці C.

Рис. 5.4. Центр паралельних сил.

Центр паралельних сил – точка C прикладення рівнодійної системи.

Визначимо метод знаходження центру паралельних сил. Спрямуємо вісь z паралельно силам, а в точку прикладання кожної із сил із початку координат O проведемо радіус-вектори. Також проведемо радіус-вектор і до центра паралельних сил. Згідно теореми Варіньона

$$\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{R}) = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}_i) \Rightarrow \boldsymbol{r}_C \times \boldsymbol{R} = \sum_{i=1}^{n} (\boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i).$$

Оскільки усі сили спрямовані вздовж осі z, то можна записати

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{k}R; \qquad \boldsymbol{F}_i = \boldsymbol{k}F_i \Rightarrow \boldsymbol{r_C} \times \boldsymbol{k}R = \sum_{i=1}^{n} (\boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{k}F_i) = \sum_{i=1}^{n} (F_i \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{k}).$$

Виносимо одиничний вектор за знак суми і остаточно отримуємо для радіус-вектора центра паралельних сил

$$\boldsymbol{r_C} = \frac{\sum_{i=1}^{n} F_i \boldsymbol{r}_i}{R}. \tag{5.3}$$

В проекціях на координатні осі отримуємо

$$x_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} F_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} F_i}; \quad y_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} F_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} F_i}; \quad z_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} F_i z_i}{\sum_{i=1}^{n} F_i}. \tag{5.4}$$

5.3. Центр мас твердого тіла

На кожну частину тіла поблизу поверхні Землі діє сила тяжіння, спрямована вертикально вниз. Якщо розміри тіла значно менше радіуса Землі, то сили, що діють на окремі частини тіла, можна вважати паралельними і такими, що зберігають свою величину при повороті тіла на будь-який кут.

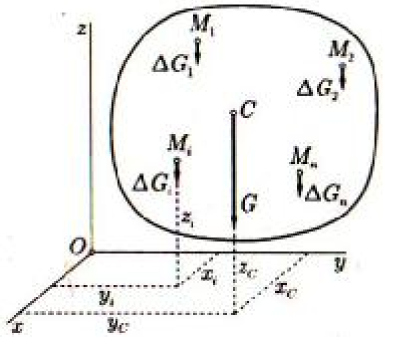


Рис. 5.5. Визначення центра мас твердого тіла.

Центр мас твердого тіла - точка твердого тіла, через яку проходить лінія дії рівнодійної сил тяжіння, що діють на окремі частини тіла. Положення центра мас не змінюється і не залежить від положення тіла в просторі. У цьому випадку координати центра мас твердого тіла можна знайти, як координати центру паралельних сил

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i \Delta G_i}{G}, \; y_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i \Delta G_i}{G}, \; z_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i \Delta G_i}{G}, \tag{5.5}$$

де ΔG_i - вага окремих елементарних часток, i - кількість часток.

По формулі (5.5) також можна знайти центр мас, якщо розбити його не на елементарні частини, а на окремі частини розміру G_i, координати центрів мас яких відомі. Згідно визначення, центр мас – геометрична точка, яка може лежати і за межами даного тіла (наприклад, у кільця).

5.4. Центри мас однорідних тіл

Для однорідних тіл вага ΔP_i кожної елементарної частинки тіла M_i

$$\Delta P_i = \omega V_i,$$

де ω – вага одиниці об'єму тіла, V_i – об'єм даної елементарної частинки тіла. Тоді для ваги усього однорідного твердого тіла маємо

$$P = \omega V.$$

Тоді координати центра мас однорідного твердого тіла

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i P_i}{P} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i w V_i}{wV} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i V_i}{V},\ y_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i P_i}{P} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i w V_i}{wV} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i V_i}{V},$$
$$z_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} z_i P_i}{P} = \frac{\sum_{i=1}^{n} z_i w V_i}{wV} = \frac{\sum_{i=1}^{n} z_i V_i}{V}. \tag{5.6}$$

де сума знаходиться за всіма елементарними частинками.

У випадку плоскої однорідної фігури (рис. 5.6) формули (5.6) набувають вигляду

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i P_i}{P} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i w V_i}{wV} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i V_i}{V},\ y_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i P_i}{P} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i w V_i}{wV} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i V_i}{V}. \tag{5.7}$$

де F_i – площа поверхні елементарної частинки тіла, F – площа усього тіла.

Статичний момент площі плоскої фігури відносно осі – сума добутків елементарних площ, що входять до складу фігури, на алгебричні значення їх відстаней до цієї осі

$$S_x = \sum_{i=1}^{n} y_i \Delta F_i = F y_C,\ S_y = \sum_{i=1}^{n} x_i \Delta F_i = F x_C.$$

Одиниця виміру статичного моменту площі плоскої фігури відносно осі – см^3.

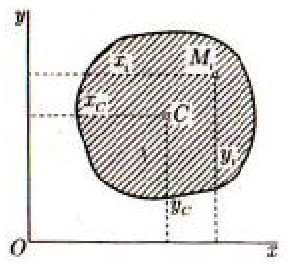


Рис. 5.6. Визначення центру ваги плоскої фігури.

Якщо відомі статичні моменти площі плоскої фігури відносно координатних осей, то координати центру ваги визначають по формулах

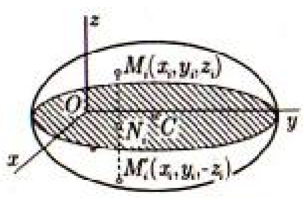
$$x_c = \frac{S_y}{F},\ y_c = \frac{S_x}{F}.$$

Статичний момент плоскої фігури відносно осі, яка проходить через її центр мас, дорівнює нулю.

Висновок: положення центра мас однорідного тіла залежить лише від його геометричної форми і не залежить від матеріалу.

5.5. Способи визначення центрів мас

5.5.1. *Симетрія.*



Теорема: якщо однорідне тіло має площину, вісь або центр симетрії, то його центр мас лежить відповідно в площині, на осі або в центрі симетрії.

Рис. 5.7. Визначення центрів мас симетричних тіл.

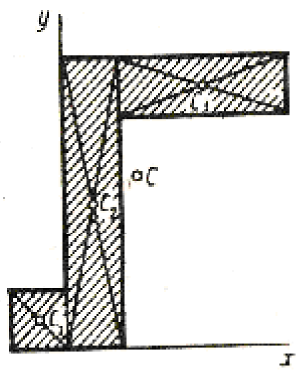
Розглянемо в якості приклада тіло, яке має площину симетрії. Помістимо площину xOy в площині симетрії однорідного тіла (рис. 5.7). Виділимо в цьому тілі дві точки M_i і M'_i, симетричні відносно площини симетрії. Координати цих точок по осі z рівні за величиною, але протилежні за знаком. Тоді проекція центра мас на данну ось

$$z_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} z_i P_i}{P} = 0,$$

тобто центр мас даного тіла знаходиться в площині симетрії.

Наслідки теореми:

1. Центр мас однорідного відрізку прямої лежить в його середині.
2. Центри мас кола, поверхні і об'єму сфери знаходиться в їх геометричних центрах.
3. Центри мас ромба, прямокутника і квадрата лежать в точках перетину діагоналей.



4. Центр мас правильного багатокутника знаходиться в центрі вписаного або описаного кола.

5.5.2. *Розбиття.*

Якщо тіло можна розбити на кілька частин, для яких положення центрів мас відомі (рис. 5.8), то координати центра мас усього тіла можна знайти по формулах (5.6) і (5.7). При цьому число доданків в кожній сумі буде дорівнювати числу частин, на які розбите тіло.

Рис. 5.8. Метод розбиття.

5.5.3. *Доповнення.*

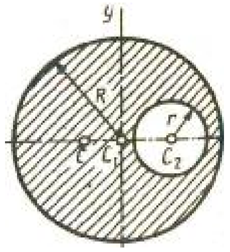
Цей спосіб є частковим випадком способу розбиття. Він застосовується до тіл, які мають вирізи, якщо центри мас тіла без вирізу і вирізаної частини відомі. Наприклад, необхідно визначити центр мас круглої пластини радіуса R з вирізом радіуса r (рис. 5.9), причому відстань $C_1C_2 = a$. Для цього спочатку знайдемо площі пластини F_1 і вирізаної частини F_2, а також площу усієї фігури

$$F_1 = pR^2; \quad F_2 = -pr^2, \quad F = F_1 + F_2 = p\left(R^2 - r^2\right).$$

причому площа вирізаної частини завжди вважається від'ємною.

Фігура має вісь симетрії x, на якій знаходиться центр мас ($y = 0$), і для його визначення необхідно знайти лише ординати центрів мас кожної частини

$$x_1 = 0; \qquad x_2 = a.$$



По формулі (5.5) знаходимо

$$x_C = \frac{0 \cdot pR^2 - a \cdot pr^2}{p\left(R^2 - r^2\right)} = \frac{-ar^2}{R^2 - r^2}; \; y_C = 0.$$

Знак мінус вказує на те, що центр мас фігури лежить лівіше від початку координат.

Рис. 5.9. Метод доповнення.

5.5.4. *Інтегрування.*

Якщо тіло неможливо розбити на кілька простих складових частин, то тіло спочатку розбивають на довільні нескінченно малі об’єми, після чого положення центрів мас визначають за формулами

$$x_C = \frac{1}{V}\int\limits_{(V)} xdV; \qquad y_C = \frac{1}{V}\int\limits_{(V)} ydV; \qquad z_C = \frac{1}{V}\int\limits_{(V)} zdV. \tag{5.8}$$

У випадку плоскої фігури формули інтегрування набувають вигляду

$$x_C = \frac{1}{F}\int\limits_{(V)} xdF; \qquad y_C = \frac{1}{F}\int\limits_{(V)} ydF; \qquad z_C = \frac{1}{F}\int\limits_{(V)} zdF. \tag{5.9}$$

У випадку однорідної лінії

$$x_C = \frac{1}{L}\int\limits_{(V)} xdL; \qquad y_C = \frac{1}{L}\int\limits_{(V)} ydL; \qquad z_C = \frac{1}{L}\int\limits_{(V)} zdL. \tag{5.10}$$

5.5.5. *Експериментальний.*

Центри мас неоднорідних тіл складної конфігурації (літак, автомобіль) можна визначити лише експериментально. Одним із таких методів є *метод підвішування*, при якому досліджуване тіло підвішують на тросі за різні точки. Оскільки напрямок тросу кожен раз дає напрямок дії сили тяжіння, то точка перетину цих напрямків вказує положення центра мас.

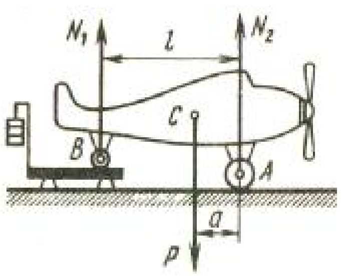


Рис. 5.10. Спосіб зважування.

Іншим способом визначення центра мас є метод зважування (рис. 5.10). Літак колесом *B* встановлюють на ваги і знаходять силу тиску, яка дорівнює нормальній реакції N_1. Потім на ваги встановлюють колесо *A* і знаходять нормальну реакцію N_2. Положення центра мас *C* по горизонталі визначають, прирівнявши до нуля суму моментів реакцій відносно *C*.

5.6. Теореми для визначення центрів мас (теореми Паппа-Гульдіна)

Теорема 1. Об'єм тіла, утвореного обертанням плоскої фігури навколо осі, яка лежить в площині фігури, але не перетинає її, дорівнює добутку площі фігури на довжину кола, описаного її центром ваги (рис. 5.11, зліва)

$$V = Fl = F\cdot 2pR = 2px_cF, \tag{5.11}$$

де F – площа плоскої фігури, $2\pi x_c$ – довжина кола.

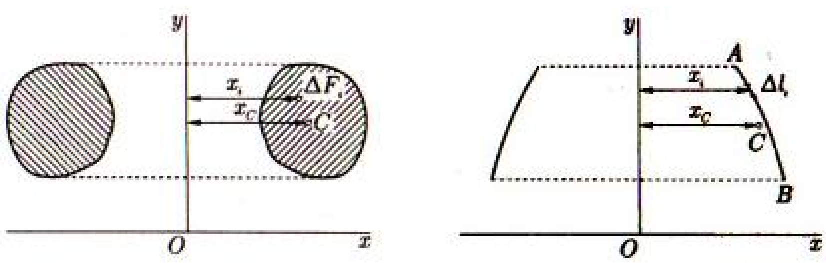


Рис. 5.11. Теореми про визначення центрів ваги.

Теорема 2. Площа поверхні тіла, утвореного обертанням плоскої кривої навколо осі, яка лежить в її площині, але не перетинає її, дорівнює добутку довжини цієї кривої на довжину кола, описаного її центром ваги (рис. 5.11, справа).

$$F = Ll = L\cdot 2pR = 2px_cL, \tag{5.12}$$

де L – довжина кривої, $2\pi x_c$ – довжина кола, описаного центром ваги фігури.

5.6. Центри мас деяких тіл

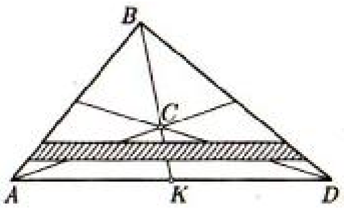


Рис. 5.12. Центр мас трикутника.

Центр мас трикутника (рис. 5.12) завжди лежить в точці перетину його медіан, тобто в точці C на відстані третини медіани від даної сторони

$$CK = \frac{BK}{3}.$$

Центр мас трапеції із сторонами $AE = a$, $BD = b$ і висотою h (рис. 5.14) завжди лежить на прямій FK, що з'єднує середини паралельних сторін трапеції, причому відстань до основи AE дорівнює

$$y_c = \frac{h(a+2b)}{3(a+b)}. \tag{5.13}$$

Центр мас дуги кола радіуса R с центральним кутом 2α лежить на осі симетрії дуги і його положення визначається тільки координатою x_c (рис. 5.15)

$$y_c = R\frac{\sin a}{a}. \tag{5.14}$$

Аналогічний результат виходить для центру ваги площі сектора круга.

Центр мас конуса лежить на відрізку, що з'єднує його вершину з центром ваги основи на відстані 1/4 довжини цього відрізку від центру ваги основи (рис. 5.13)

$$CK = EK/4.$$

Цю формулу також можна застосувати для визначення центру ваги об'єму чотиригранної і багатогранної пірамід.

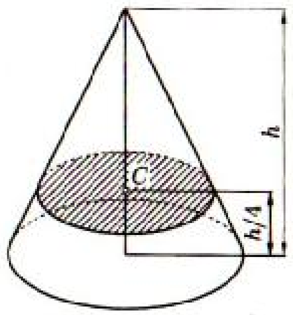


Рис. 5.13.
Центр мас конуса.

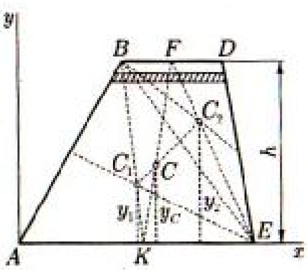


Рис. 5.14.
Центр мас трапеції.

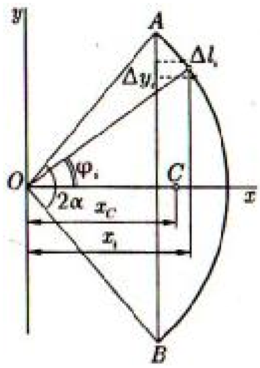


Рис. 5.15.
Центр мас дуги кола.

Питання для самоконтролю

1. Які властивості має центр мас паралельних сил?
2. Який метод застосовується для визначення центра мас плоскої фігури з отвором?
3. Яку розмірність має статичний момент площі плоскої фігури відносно осі?
4. В чому полягає суть методу розбиття?
5. Чому при повороті мотоцикліст нахиляється у бік угнутості дороги?

Завдання № 5. «Паралельні сили. Центр мас»

Рекомендації до розв'язання задач

А. Паралельні сили на площині.

1. Вибрати матеріальну систему, рівновага якої розглядається, зобразити всі активні сили, звільнити систему від в'язів, замінивши їх реакціями.
2. Обрати систему координат таким чином, щоб одна з осей була паралельна діючим силам, а інша перпендикулярна.
3. Записати дві умови рівноваги (умова сил і умова моментів).
4. В якості центра моментів рекомендується вибирати точку, через яку проходять лінії дії однієї чи декількох невідомих сил.
5. Розв'язати складені рівняння.

Б. Центр мас.

1. При розв'язанні задачі, якщо переріз складний, розбити його на прості складові частини, для яких положення центрів мас відомі.
2. Координатні осі провести так, щоб усі часті фігури мали додатні координати і при цьому щоб осі торкалися сторін фігури.
3. Знайти центри мас кожної простої частини і їх площі (об'єми, довжини).
4. Визначити положення центра мас складної фігури, яка допускає розбиття на прості частини, скориставшись формулами (5.6) – (5.7).
5. Якщо розбиття на прості складові неможливе, то для знаходження центра мас слід виконувати інтегрування за формулами (5.8) – (5.10).

Приклад розв'язання задачі

Задача 1. Визначити опорні реакції консольної балки, навантаженої зосередженою силою P = 2 кН і лінійно розподіленою силою з інтенсивністю q = 0,5 кН/м. Розміри балки a = b = c = 2 м. Власною вагою балки знехтувати.

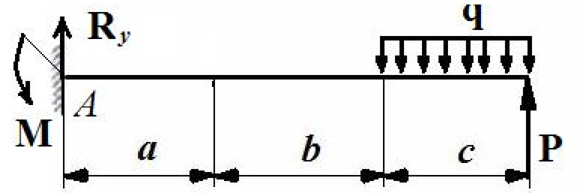


Рис. 5.16. До задачі 1.

Розв'язання.

В задачі діє плоска система паралельних сил, тому для розв'язання задачі достатньо скласти два рівняння рівноваги. Замінимо в'язі їх реакціями. В опорі балки A виникає вертикальна реакція $\boldsymbol{R}_A$ і реактивний крутний момент $\boldsymbol{M}$. Напрями реакцій обираємо довільно, оскільки кожна з них має два можливі варіанти спрямування.

На балку діє сила, розподілена по лінії, тому зведемо її до рівнодійної $\boldsymbol{Q}$, модуль якої дорівнює

$$Q = qc = 0{,}5 \cdot 2 = 1\,(кН).$$

Точка прикладання умовної сили Q знаходиться посередині ділянки довжини c.

Запишемо рівняння рівноваги системи, почавши з рівняння моментів відносно точки A защемлення балки

$$\sum_{i=1}^{4} M_A(F_i) = 0;\ P(a+b+c) - Q\left(a+b+\frac{c}{2}\right) + M = 0.$$

$$M = -P(a+b+c) + Q\left(a+b+\frac{c}{2}\right) = -2\cdot(2+2+2) + 1\cdot\left(2+2+\frac{2}{2}\right) = -7(кН\cdot м).$$

Знак «мінус» вказує на те, що реактивний момент в опорі балки спрямований за годинниковою стрілкою.

Тепер записуємо проекції сил на координатну вісь y і знаходимо невідому вертикальну реакцію в опорі

$$\sum_{i=1}^{n} F_{yi} = 0.\ R_Y + P - Q = 0 \Rightarrow R_Y = 1 - 2 = -1\,(кН).$$

У цьому випадку від'ємний результат вказує на те, що вертикальна реакція спрямована вниз, а не вгору, як показано на рисунку.
Задачу розв'язано.

Задача 2. Визначити центр мас двотаврового профілю, розміри якого вказані на рис. 5.17.

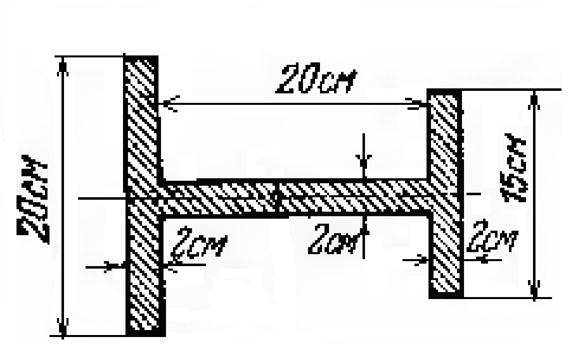


Рис. 5.17. Двотавровий профіль.

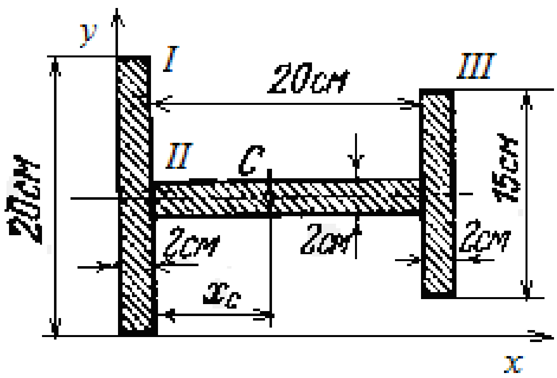


Рис. 5.18. Знаходження центра мас.

Розв'язання.

Оскільки в задачі розглядається плоска фігура, то необхідно визначити дві координати центра мас – x і y. Згідно рекомендацій, координатні осі проведемо так, щоб фігура не мала від'ємних частин (рис. 5.18), а саму фігуру розбиваємо на три прямокутники.

Дане тіло має вісь симетрії, тому згідно теореми, центр мас C має знаходитись на цій осі. Ордината осі симетрії

$$y_c = 10\ (мм).$$

Визначимо площі кожної з трьох простих частин

$$F_1 = 20\cdot 2 = 40\ (см^2);\ F_2 = 20\cdot 2 = 40\ (см^2);\ F_3 = 15\cdot 2 = 30\ (см^2).$$

Знаходимо центри мас простих частин, які, як відомо, знаходяться в точці перетину діагоналей.

$$x_1 = 1\,(см);\ x_2 = 12\,(см);\ x_3 = 23\,(см).$$

Знаходимо положення центра мас по абсцисі

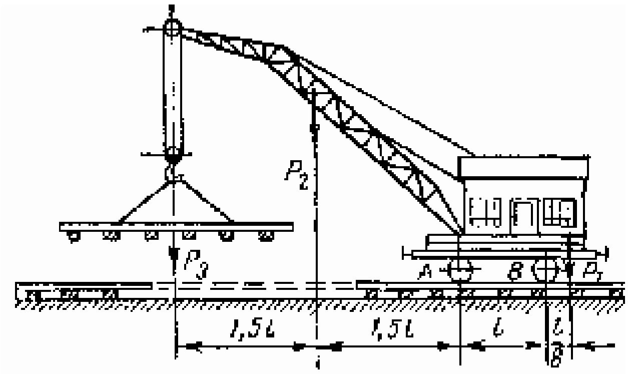
$$x_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} F_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} F_i} = \frac{F_1 x_1 + F_2 x_2 + F_3 x_3}{F_1 + F_2 + F_3} = \frac{40 \cdot 1 + 40 \cdot 12 + 30 \cdot 23}{40 + 40 + 30} = 11\,(см).$$

Координати центра тяжіння C (11, 10). Задачу розв'язано.

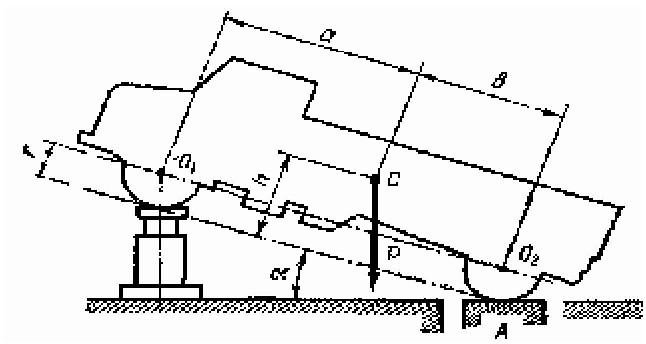
Завдання №5 до РГР

5.1. Визначити опорні реакції коліс залізничного крану, який слугує для переноски колії при відкритих розробках, якщо вага кузова з теліжкою P_1 = 160 кН, вага стріли P_2 = 10 кН, вага ланки залізничної колії P_3 = 20 кН.
Відповідь: N_A = 85 кН, N_B = 105 кН.

5.2. Для визначення висоти h центра тяжіння автомобіля вагою G = 10 кН його поставили задніми колеса на платформу A ваг, при цьому їх показання склали Q = 6,2 кН. Знайти висоту центра тяжіння, якщо α = 30°, a = 5 м, b = 3 м, r = 30 см.
Відповідь: $h = \dfrac{(Q-P)a + Qb}{P} ctga + r.$

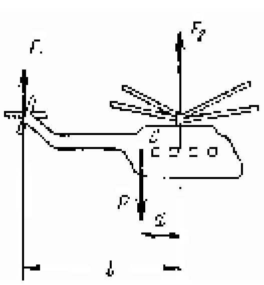


До задачі 5.1.



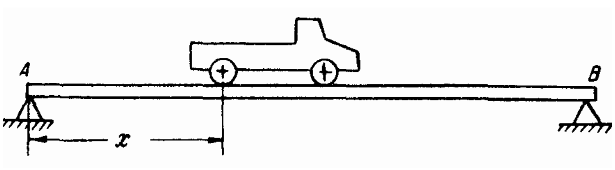
До задачі 5.2.

5.3. Гелікоптер висить нерухомо, при цьому підйомна сила хвостового гвинта F_1 складає 5% від його ваги. Знайти підйомну силу F_2 головного гвинта і відстань d від центра тяжіння гелікоптера C до осі головного гвинта, якщо вага гелікоптера P = 20 кН, а відстань між осями гвинтів l = 4 м.
Відповідь: d = 0,2 м, F_2 = 19 кН.



До задачі 5.3.

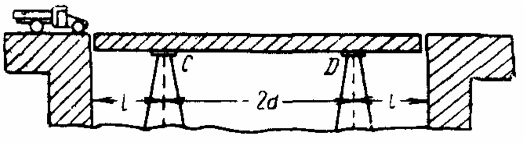
5.4. На горизонтальному мосту AB довжиною 20 м знаходиться автомобіль з навантаженням на передню вісь 10 кН і на задню вісь 20 кН. Визначити відстань x від осі заднього колеса до опори A, за якої реакції в опорах A і B будуть однакові. Відстань між передньою і задньою віссю a = 2,5 м.
Відповідь: x = 9,2 м.



До задачі 5.4.

5.5. Тимчасовий міст, вага одного погонного метра якого q = 1,7 кН, вільно спирається на опори *C* і *D*. Визначити найбільшу довжину l консольної частини моста, за якої він не перекинеться при проїзді машини з навантаженням на передню вісь 20 кН і на задню вісь 40 кН. Відстань між передньою і задньою віссю a = 3 м, відстань між опорами *CD* = 6 м.

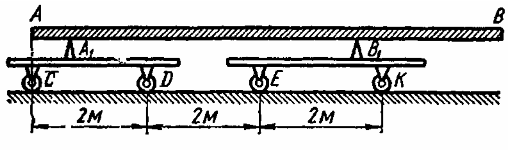
Відповідь: l = 1 м.



До задачі 5.5.

5.6. Однорідна балка довжиною *AB* = 8 м і вагою 36 кН вільно лежить на двох опорах A_1 і B_1, які розташовані на двох візках, вагою в 4 кН кожен. При цьому кінець балки *A* і вісь колеса *C* знаходяться на одній вертикалі. Визначити силу тиску коліс *C*, *D*, *E* і *K* на рейки, якщо AA_1 = 0,8 м, BB_1 = 2,8 м.

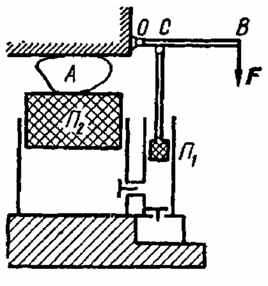
Відповідь: N_C = 7,89 кН, N_D = 5,93 кН, N_E = 12,47 кН, N_K = 17,71 кН.



До задачі 5.6.

5.7. В гідравлічному пресі відношення діаметрів поршнів *D/d* = 10, а *BC* = 9 *CO*. Нехтуючи тертям і вагою поршнів, визначити силу *Q*, яка стискає тіло *A*, якщо перпендикулярно до важеля *OB* прикладена сила *F* = 120 Н.

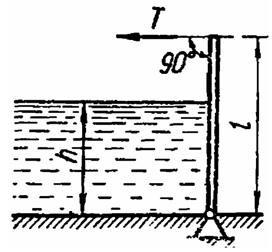
Відповідь: *Q* = 120 кН.



До задачі 5.7.

5.8. Визначити силу *T* натягу тросу, необхідну для утримання в вертикальному положенні прямокутного щита висотою l = 0,8 м і шириною *b* = 2 м, якщо рівень води *h* = 0,6 м.

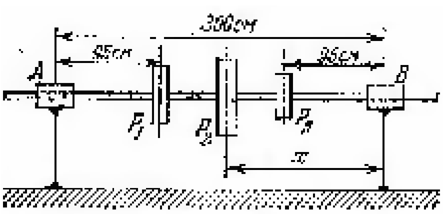
Відповідь: *T* = 883 Н.



До задачі 5.8.

5.9. Вал трансмісії має три шківи вагою P_1 = 3 кН, P_2 = 5 кН, P_3 = 2 кН, відстані між якими показані на рисунку. Визначити, на якій відстані *x* від підшипника *B* треба встановити шків P_2, аби реакції в підшипниках *A* і *B* були однакові. Власною вагою вала знехтувати.

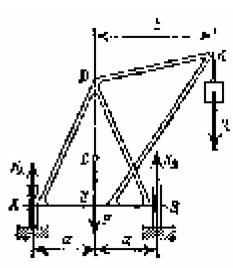
Відповідь: *x* = 1,39 м.



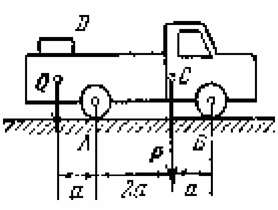
До задачі 5.9.

5.10. Визначити сили тиску на рейки коліс *A* і *B* крану, схематично зображеного на рисунку. Вага крану *P* = 40 кН прикладена в центрі тяжіння *C*, яка лежить на лінії *DE*. Кран підіймає вантаж вагою *Q* = 10 кН, відстань між колесами *AB* = 2*a* = 2,5 м; виліт крану *b* = 3,5 м.

Відповідь: N_A = 11 кН, N_B = 39 кН.



До задачі 5.10.

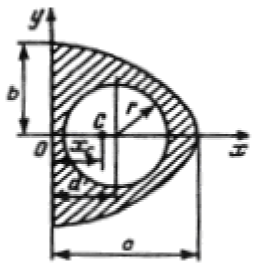


До задачі 5.11.

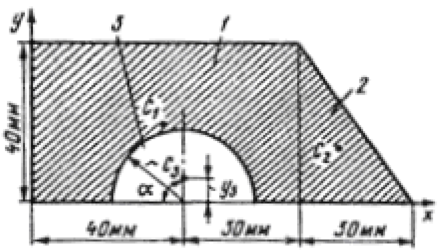
5.11. В кузові вантажного автомобіля вагою P = 1 500 Н знаходиться вантаж вагою $Q = P/2$. Нехтуючи силами тертя, визначити сили тиску коліс на дорогу. Необхідні розміри вказані на рисунку.
Відповідь: R_A = 1 500 м; R_B = 750 м.

5.12. Визначити центр мас пластини, що має вигляд половини еліпса з вирізаним колом. Півосі еліпса a = 60 мм і b = 45 мм, радіус кола r = 25 мм, відстань від центра еліпса до центра кола d = 40 мм.
Відповідь: x_C = 13,0 мм, y_C = 0 мм.

5.13. Визначити центр мас пластини з отвором у вигляді півкола радіусом r = 20 мм. Геометричні розміри пластини вказані на рисунку.
Відповідь: x_C = 43,6 мм, y_C = 20,2 мм.

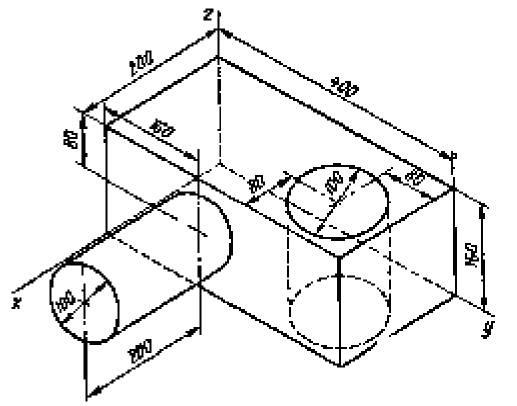


До задачі 5.12.



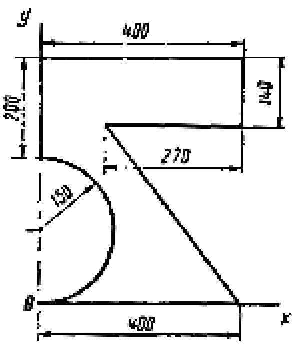
До задачі 5.13.

5.14. Визначити положення центра мас просторової фігури, розміри якої вказано на рисунку.
Відповідь: x_C = 122 мм, y_C = 184 мм, : z_C = 80 мм.



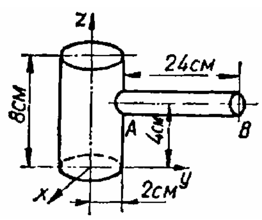
До задачі 5.14.

5.15. Визначити положення центра мас плоскої пластини з отвором і вирізом, розміри якої вказано на рисунку.
Відповідь: x_C = 195 мм, y_C = 284 мм.



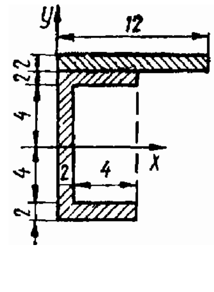
До задачі 5.15.

5.16. Визначити положення центра мас молотка, який складається з однорідної циліндричної головки вагою 6 Н і однорідного тонкого стержня вагою 1 Н.
Відповідь: x_C = 0 см, y_C = 2 см, : z_C = 4 см.



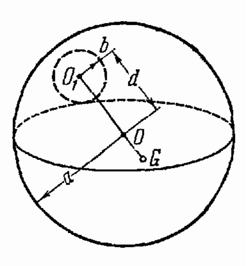
До задачі 5.16.

5.17. Визначити статичні моменти відносно координатних осей x і y плоскої фігури, розміри якої вказані в сантиметрах на рисунку.
Відповідь: S_x = 168 см^2, S_y = 232 см^2.



До задачі 5.17.

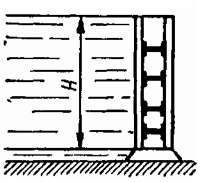
5.18. В однорідній сфері з радіусом a і центром O знаходиться сферичний виріз з радіусом b і центром O_1. Визначити центр мас даного тіла, якщо відстань між центрами сфер дорівнює d.



Відповідь: Центр мас знаходиться на прямій OO_1 на відстані $x = b^3d/(a^3 - b^3)$ від центру великої сфери.

До задачі 5.18.

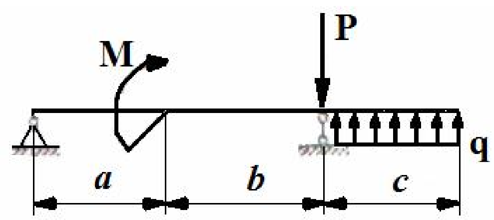
5.19. На яку відстань x по горизонталі в діаметральній площині корабля можна перемістити вантаж вагою P = 600 кН, аби загальний центр тяжіння корабля змістився не більш, ніж на 0,1 м. Водотоннажність корабля 1 200 кН. *Відповідь*: x = 20 м.



До задачі 5.20.

5.20. Тиск води передається через прямокутний щит висотою H = 4 м на чотири двотаврові балки. Визначити, на яких відстанях від вільної поверхні води h_i слід їх розташувати, аби всі балки були навантажені однаково.
Відповідь: h_1 = 1,33 м, h_2 = 2,44 м, h_3 = 3,16 м, h_4 = 3,74 м.

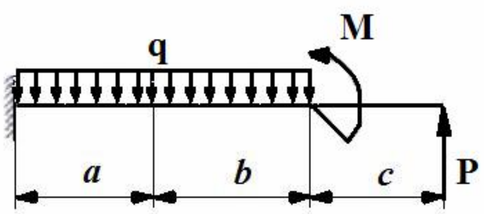
5.21. Визначити реакції в опорах невагомої двоопорної балки, яка навантажена зосередженою силою P = 5 кН, лінійно розподіленою силою з інтенсивністю q = 1,5 кН/м і знаходиться під дією крутного моменту M = 4 кН·м. Геометричні розміри балки a = 2 м, b = 3 м, c = 2 м.
Відповідь: R_A = 5,8 кН, R_B = 2,2 кН.



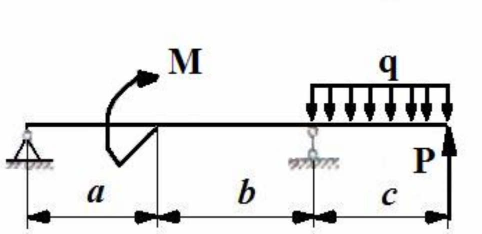
До задачі 5.21.

5.22. Визначити реакції в опорі консольної балки, яка навантажена зосередженою силою P = 3 кН, лінійно розподіленою силою з інтенсивністю q = 0,5 кН/м і знаходиться під дією крутного моменту M = 2 кН·м. Геометричні розміри балки a = 1 м, b = 1,2 м, c = 1 м. Власною вагою балки знехтувати.
Відповідь: R = - 1,9 кН, M_A = - 10,4 кН·м.

5.23. Визначити реакції в опорах невагомої двоопорної балки з консольною частиною, яка навантажена зосередженою силою P = 4 кН, розподіленою лінійно силою з інтенсивністю q = 1 кН/м і знаходиться під дією крутного моменту M = 3 кН·м. Геометричні розміри балки a = 2 м, b = 3 м, c = 2 м.
Відповідь: R_A = 1,8 кН, R_B = - 3,8 кН.



До задачі 5.22.



До задачі 5.23.

Глава 6. Сили тертя

6.1. Види тертя

Тертя - опір, який виникає при русі або прагненні до руху одного тіла по поверхні іншого. Це складне фізичне явище, яке супроводжується нагрівом тертьових поверхонь, їх електризацією, руйнуванням і дифузією, тому часто урахування всіх факторів, що впливають на величину сил тертя не є можливим. В теоретичній механіці тертя вивчається у зв'язку з необхідністю визначення реакцій в'язей.

Виникнення тертя викликане двома причинами:

- тертьові поверхні не є ідеально гладкими, а мають нерівності, які і чинять опір руху зачіплюючись між собою;
- між тертьовими поверхнями діють сили молекулярного зчеплення, для подолання яких необхідно прикласти силу.

Кожна з причин може домінувати в залежності від умов контакту тіл.

В техніці тертя відіграє як корисну, так і шкідливу роль. Завдяки йому рухаються тіла, працюють фрикційні, пасові і ланцюгові передачі. З іншого боку, тертя є причиною зношування деталей машин і механізмів, значних втрат енергії. Підраховано, що близько 30% світових енергетичних ресурсів витрачається на подолання шкідливих сил тертя.

Для зменшення тертя використовують мастила, які можуть бути твердими, рідкими або газоподібними. В залежності від стану тертьових поверхонь виділяють наступні види тертя:

а) *Сухе тертя* – тертя без мастильних матеріалів.

б) *Тертя за наявності мастила* – поверхні твердих тіл розділені шаром мастила, а тертя відбувається між окремими його шарами. Для цього виду тертя існують свої закони і воно детально вивчається в курсі гідравліки.

6.2. Закони тертя

Сила тертя – сила, яка перешкоджає руху одного тіла по поверхні іншого. В залежності від характеру відносного переміщення тертьових поверхонь тіл розрізняють три види тертя:

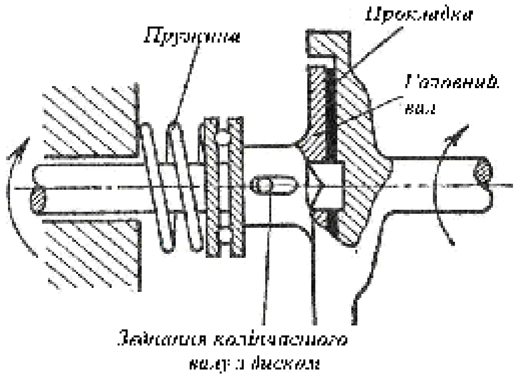
1. **Тертя спокою** – має місце при спробі взаємного руху тіл, коли поверхні тіл не рухаються одна відносно іншої. Існує лише при сухому терті.
2. **Тертя ковзання** – при поступальному відносному руху стичних тіл.
3. **Тертя кочення** – при коченні одного тіла по поверхні іншого.

В інженерних розрахунках користуються наближеними законами, встановленими Амонтоном і Кулоном:

1. *Сила тертя при однакових інших умовах не залежить від розмірів тертьових поверхонь*. Закон не є справедливим для дуже малих поверхонь.
2. *Сила тертя спокою може приймати будь-яке значення від нульового до максимального*, рівного добутку коефіцієнту тертя спокою на силу нормальної реакції

$$0 \le F_{mp}^{cn} \le F_{\max} = f_0 N. \tag{6.1}$$

Максимальна сила тертя спокою F_{max} відповідає стану граничної рівноваги, коли достатньо незначного приросту зовнішньої сили, аби тіло зрушило з місця.
3. *Коефіцієнт тертя спокою залежить від матеріалу і фізичного стану тертьових поверхонь* (шорсткості, наявності мастила, вологості, температури). Матеріали з високим коефіцієнтом тертя (шкіра, гума, текстоліт) називаються **фрикційними**, з низьким (бронза, бабіт, сірий чавун) – **антифрикційними**.



В техніці сили тертя спокою (або сили зчеплення) мають велике значення. Часто використовуються пасові передачі крутного моменту з одного шківа на інший, які можливі лише за наявності сил тертя спокою між пасом і шківом. Іншим прикладом є фрикційне з’єднання двигуна з валом в автомобілі, схема якого показана на рис. 6.1.

Рис. 6.1. Фрикційне з’єднання.

4. *Сила тертя під час руху менша, ніж у стані спокою*. Майже для усіх матеріалів з підвищенням швидкості відносного руху сила тертя ковзання зменшується, виключення – тертя шкіри по сталі або чавуну.
5. *Сила тертя зростає із збільшенням часу попереднього контакту тертьових поверхонь*. Це можна пояснити деформацією поверхонь та дифузією молекул, а значить збільшенням молекулярних зв’язків.
6. *Сила тертя ковзання залежить від коефіцієнту тертя ковзання і нормальної реакції*

$$F_{тр}^{ков} = fN. \qquad (6.2)$$

Зменшення шорсткості поверхонь із метою послаблення сил тертя не ефективне, оскільки при ідеально доведених (полірованих та протравлених) поверхнях сили тертя не зменшуються, а навпаки, сильно зростають. У випадку щільного контакту поверхонь істотно проявляються атомно-молекулярні сили зчеплення, тому в таких випадках необхідно використовувати вираз для сили ковзання, отриманий російським вченим Б.П. Дерягіним

$$F_{тр}^{ков} = f(N + Sp_0), \qquad (6.3)$$

де S – сумарна площа контактуючих поверхонь між тілами, p_0 – додатковий тиск, обумовлений силами молекулярного зчеплення.

Задовільної теорії, яка б пояснювала закони тертя, на цей час не існує. Схематизуючи явище, можна представити процес наступним чином. Поверхні тіл не є ідеально гладкими (рис. 6.2), тому при контакті вони деформуються, причому деформації залежать від місцевого тиску і можуть мати як пружний, так і пластичний характер. Стискання двох тіл і проникнення виступів одного тіла в западини іншого залежить від сили, що притискає тіла одне до одного та фізичного стану поверхні кожного з тіл.

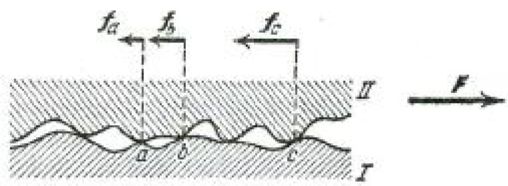


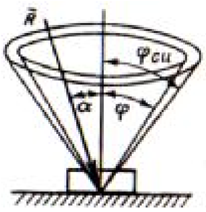
Рис. 6.2. Природа сил тертя.

Під час спокою, коли виникає сила тертя спокою, горизонтальні складові сил, що виникають між виступами обох тіл, зрівноважують зовнішню силу, створюючи тим самим силу тертя спокою.

Під час руху нерівності обох тіл також зачіпляються, але ще і ударяють між собою, викликаючи коливання в різних напрямах, які розповсюджуються в тілах. Ці сили взаємодії в сумі і дають силу тертя ковзання. В цьому випадку велике значення відіграють пластичні деформації при ударах виступів.

6.3. Кут і конус тертя

Кут тертя – найбільший кут, на який через тертя відхиляється від нормалі повна реакція R опорної поверхні:



$$tg\varphi = \frac{F}{N} = f \Rightarrow \varphi = arctgf. \quad (6.4)$$

Рис.6.3. Кут і конус тертя.

Тангенс кута тертя дорівнює коефіцієнту тертя ковзання (або спокою) матеріалу. Якщо кут прикладення зовнішньої сили α менший за кут тертя φ, то тіло завжди перебуватиме в стані рівноваги.

Конус тертя – геометричне місце усіх можливих напрямків граничної реакції. Ним пояснюється явище заклинювання механізмів, коли жодною прикладеною всередині конуса силою не вдається зрушити з місця деталь.

Якщо коефіцієнти тертя ковзання і спокою постійні по усіх напрямах, то конуси тертя колові (рис. 6.3). Неколові конуси мають анізотропні матеріали, для яких коефіцієнти тертя різні в різних напрямах (вздовж і поперек волокон деревини чи напрямку прокату сталі).

Величину коефіцієнта тертя ковзання можна визначити за допомогою похилої площини (рис. 6.4). Для цього повільно збільшують кут нахилу площини α і при деякій величині кута φ починається рух тіла. Коефіцієнт тертя ковзання знаходять за формулою (6.4).

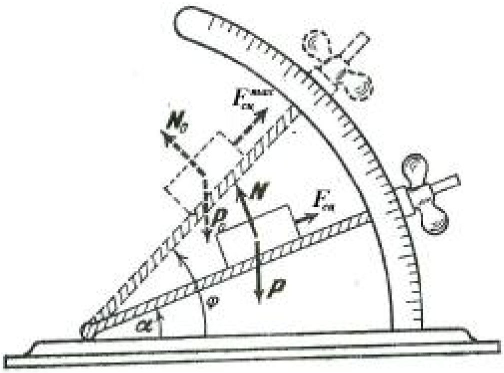


Рис. 6.4. Експериментальне визначення коефіцієнтів тертя.

6.4. Тертя кочення

Тертя кочення **-** опір, який виникає при коченні або спробі кочення одного тіла по поверхні іншого. Відносна швидкість точок контакту дорівнює нулю. Як і у випадку ковзання, розрізняють тертя кочення і тертя зчеплення при коченні.

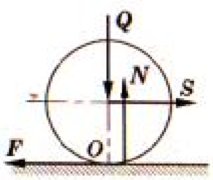


Рис. 6.5. Тертя кочення.

Нехай каток ваги $\boldsymbol{Q}$ і радіусу R (рис. 6.5) покоїться на горизонтальній площині. По осі катка прикладемо силу S. Каток залишатиметься в спокої, поки ця сила не досягне певного значення.

Для реальних тіл завжди існує деформація катка і площини, тому нормальна реакція $\boldsymbol{N}$ прикладена не в точці O, а дещо зрушена по напряму дії сили. Тому можна сказати, що до катка прикладена пара, у якої гранична величина моменту

$$\boldsymbol{M}_{max} = k \cdot \boldsymbol{N}$$

пропорційна максимальному тиску катка на площину. Коефіцієнт тертя кочення k виражається в одиницях довжини (см або мм) і визначається експериментальним шляхом. Коефіцієнт тертя кочення залежить від матеріалу катка, площини і фізичного стану цих поверхонь.

З рисунка видно, що величина моменту пари

$$M_{max} = R \cdot S.$$

Прирівнюючи два останні вираження, отримуємо

$$k \cdot N = R \cdot S \rightarrow S = k \cdot N / R.$$

При такій величині сили каток починає котитися без ковзання. Коли ж величина сили досягне значення

$$S = f \cdot N, \tag{6.5}$$

каток котитиметься з ковзанням. Тут f - коефіцієнт тертя ковзання.

Сили тертя кочення грає важливу роль при русі міського транспорту (автобусу, трамваю). При коченні без ковзання немає відносного руху стичних точок поверхонь колеса і дороги. У цьому випадку має місце сила зчеплення при ковзанні, яка має бути менша силу тертя ковзання

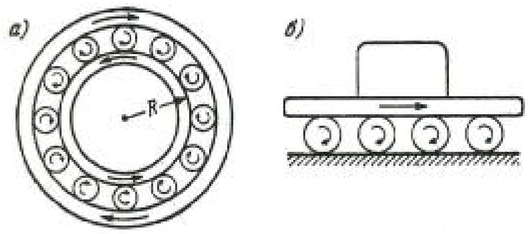
$$F_{ков}^{зч} = \frac{M}{R} \leq F_{ков}. \tag{6.6}$$

Сила зчеплення при ковзанні є рушійною силою, а її величина залежить від обертового моменту двигуна. Формула (6.6) є **умовою кочення колеса без ковзання**. Часто при русі з місця трамваю або автомобіля по снігу чи грязі при різкому збільшенні обертового моменту має місце буксування колес. Колеса ковзають, обертаються зі значною швидкістю, в той час як рушійна сила мала. Це пояснюється тим, що має місце ковзання, сила якого ще й зменшується при збільшенні швидкості. Тому при русі з місця треба плавно збільшувати обертовий момент M.

При гальмуванні автомобіля також не слід різко збільшувати гальмівний момент $M_г$. Оскільки сила ковзання менша за силу зчеплення, то не треба доводити колеса до ковзання. Слід тримати гальмівний момент на самій межі перед ковзанням, але це вимагає значного досвіду, тому при екстреному гальмуванні майже завжди має місце ковзання.

Ковзання при русі нерейкового транспорту небезпечне, оскільки воно може призвести до заносу і втрати керування. Суть явища: якщо тіло ковзає в горизонтальній площині, то навіть невелика сила, прикладена перпендикулярно до напряму ковзання, викликає значні переміщення. Це пояснюється тим, що сила зчеплення в перпендикулярному до руху напряму практично дорівнює нулю. Тому на великих машинах встановлюють спеціальні пристрої, які підтримують необхідну величину гальмівного моменту.

Сили тертя кочення значно менші від сил тертя ковзання. Тому з енергетичної точки зору вигідно, де це можливо, замінити тертя ковзання тертям кочення, як це зроблено в підшипниках кочення, широко вживаних в техніці. У випадку плоскої поверхні (рис. 6.6, б) має місце чисте кочення роликів, а у підшипнику (рис. 6.6, а) чисте кочення не може бути реалізоване.



Але ковзання тим менше, чим менше відношення радіуса ролика r до радіуса внутрішнього кільця R. Та дуже маленький радіус кульки робити не можна через його вдавлювання в прилеглу поверхню.

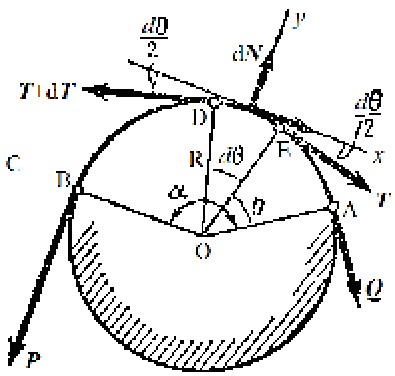
Рис. 6.6. Використання тертя кочення.

6.5. Тертя нитки о циліндричну поверхню

Нехай до нитки, яка накинута на циліндричний вал радіуса R, прикладена сила P (рис. 6.7). Необхідно знайти найменшу силу Q, яку треба прикласти з іншого боку, аби система залишилась в стані спокою.

Розглянемо рівновагу малого елементу нитки DE, довжина якого

$$dl = Rdq.$$



Різниця натягів нитки dT в точках D і E має компенсуватися силою тертя dF, аби система знаходилась в стані рівноваги

$$dT = fdN, \qquad (6.7)$$

де f – коефіцієнт тертя нитки по валу. Значення нормальної реакції знайдемо із умови рівноваги системи по осі y

$$dN - T\sin\frac{dq}{2} - (T + dT)\sin\frac{dq}{2}.$$

Рис. 6.7. Тертя нитки по валу.

Оскільки кут $d\theta$ малий, то його синус приблизно дорівнює самому куту, тому

$$dN = T\frac{dq}{2} + (T + dT)\frac{dq}{2} = T\frac{dq}{2} + T\frac{dq}{2} + dT\frac{dq}{2} = 2T\frac{dq}{2} = Tdq.$$

В даній формулі після розкриття дужок знехтували третім доданком, оскільки він значно менший за перші два. Підставимо отриманий вираз до (6.7) і розв'яжемо диференціальне рівняння

$$dT = fTdq \Rightarrow \int_Q^P \frac{dT}{T} = \int_0^a fdq \Rightarrow \ln P - \ln Q = fa \Rightarrow \frac{P}{Q} = e^{fa} \Rightarrow Q = Pe^{-fa}. \qquad (6.8)$$

З остаточної формули видно, що сила Q залежить лише від коефіцієнта тертя та кута α і не залежить від радіуса вала. На практиці формула (6.8) має велике значення, адже збільшуючи кут α (намотуючи нитку на вал), можна значно зменшити силу Q, необхідну для утримання системи в стані рівноваги.

Питання для самоконтролю

1. В яких випадках виникають сили тертя?
2. Які види тертя існують?
3. Від чого залежить максимальна величина сили тертя спокою?
4. Чим визначається величина коефіцієнта тертя ковзання?

Завдання № 6. «Сили тертя»

Рекомендації до розв'язання задач

1. Вибрати тіло чи матеріальну систему, рівновага якої розглядається, зобразити всі активні сили, звільнити систему від в'язів, замінивши їх реакціями.
2. При розв'язанні задач визначити напрямок можливого руху тіл системи або частин тіла.
3. В площині можливого руху прикласти сили тертя по дотичній до шорсткої поверхні у напрямку, протилежному напрямку цього руху.
4. Обрати ортогональну систему координат таким чином, щоб осі були паралельні як можна більшій кількості діючих сил.
3. Записати необхідні умови рівноваги (сил і моментів).
4. В якості центра моментів рекомендується вибирати точку, в якій перетинаються лінії дії однієї чи двох невідомих сил.
5. Розв'язати складені рівняння.

Приклад розв'язання задачі

Задача 1. Драбина довжиною AB = 3 м спирається на шорсткі стіну і підлогу, утворюючі кут 60° з віссю x. В точці D на драбині знаходиться чоловік вагою Q = 700 Н. Коефіцієнт тертя між драбиною і підлогою f_B = 0,25, між драбиною і стіною f_A = 0,15. Нехтуючи вагою драбини, знайти максимальну відстань BD, на яку може піднятися чоловік, аби драбина залишалася в стані рівноваги.

Розв'язання

В даній задачі розглядається рівновага драбини. Згідно плану розв'язання задачі замінюємо в'язі їх реакціями. В точках A і B будуть діяти по дві сили: нормальні реакції, перпендикулярні опорній поверхні, і сили тертя, направлені проти можливого руху драбини.

В даній задачі ми маємо плоску систему сил, тому необхідно скласти три рівняння рівноваги. За початок координат візьмемо точку О на перетині ліній дії двох сил тертя. Осі направимо вздовж стіни і підлоги, аби максимально спростити подальші розрахунки.

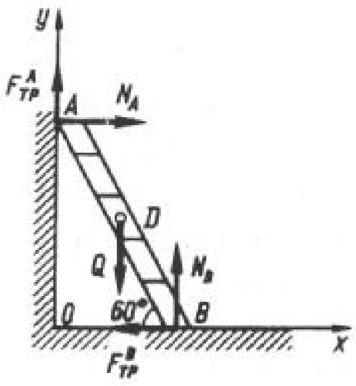


Рис. 6.9. До задачі 1.

Запис рівнянь рівноваги плоскої системи сил почнемо з рівняння моментів, хоча в даній задачі порядок не має значення

$$\sum_{i=1}^{n} M_A(F_i) = 0 \Rightarrow N_B \cdot OB - F_{тр}^{B} OA - Q(OB - BD\cos 60°) = 0;$$

$$N_B \cdot AB\cos 60° - f_B N_B AB\sin 60° - Q(AB\cos 60° - BD\cos 60°) = 0;$$

$$N_B \cdot 3 \cdot \cos 60° - 0{,}25 \cdot N_B 3 \cdot \sin 60° - 700(3 \cdot \cos 60° - BD\cos 60°) = 0.$$

$$1{,}5N_B - 0{,}65N_B - 1050 + 350BD = 0;\ BD = \frac{1050 - 0{,}85N_B}{350}.$$

Невідомі нормальні реакції в точках A і B знаходимо з двох інших рівнянь рівноваги

$$\sum_{i=1}^{n} F_{xi} = 0 \Rightarrow N_A - F_{mp}^{B} = 0 \Rightarrow N_A - f_B N_B = 0 \Rightarrow N_A = 0{,}25 N_B.$$

$$\sum_{i=1}^{n} F_{yi} = 0 \Rightarrow N_B + F_{mp}^{A} - Q = 0 \Rightarrow N_B + f_A N_A = Q \Rightarrow N_B + 0{,}15 N_A = 700.$$

Розв’язуємо сумісно рівняння сил

$$N_B + 0{,}15 \cdot 0{,}25 N_B = 700 \Rightarrow 1{,}04 N_B = 700 \Rightarrow N_B = 673\ (H).$$

$$N_A = 0{,}25 \cdot 673 = 168\ (H).$$

Тепер залишається підставити отримані нормальні реакції в рівняння моментів

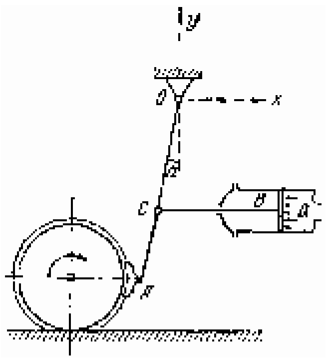
$$BD = \frac{1050 - 0{,}85 \cdot 673}{350} = 1{,}37\ (м).$$

Задачу розв’язано.

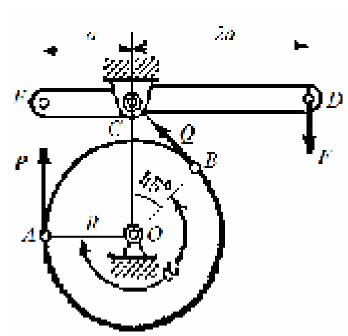
Завдання № 6 до РГР

6.1. На потужних електровозах часто використовуються гальма пневматичного типу, в яких стисле повітря із спеціального резервуару тисне на поршень B циліндра. Цей тиск за допомогою важеля OA передається на гальмівну колодку. Визначити реакцію в шарнірі O і силу тиску гальмівної колодки на колесо, якщо сила тиску на поршень B дорівнює Q = 50 кН, коефіцієнт тертя колодки о колесо f = 0,18; AC = 0,4OA; tgα = 0,25; розмірами гальмівної колодки знехтувати.

Відповідь: $X_O = 21{,}3\ (кH)$; $Y_O = 5{,}2\ (кH)$, $N = 28{,}7\ (кH)$.



До задачі 6.1.



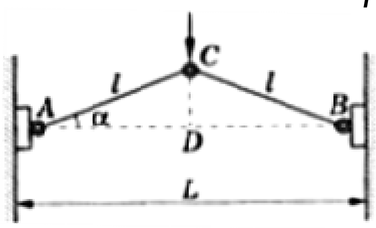
До задачі 6.2.

6.2. К важелю DE стрічкового гальма прикладена сила F = 2 кН. Визначити гальмівний момент M_m , який діє на шків радіуса R = 60 см, якщо CD = 2CE = 80 см, а коефіцієнт тертя стрічки о шків f = 0,5.

Відповідь: = 2,06 кН·м.

6.3. Визначити, якими мають бути розміри механізму, аби при коефіцієнті тертя f = 0,6 між стіною та повзунами A і B даний механізм був самогальмівним.

Відповідь: 0,5 < l/L < 0,585.



До задачі 6.3.

6.4. Визначити найменшу величину сили P, необхідну для того, щоб загальмувати шків O_1 колодкового гальма, а також реакцію в шарнірі A. Коефіцієнт тертя між гальмівною

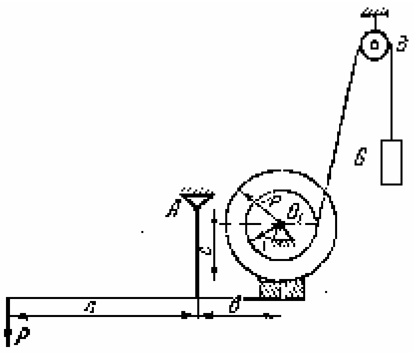
колодкою і поверхнею шківа дорівнює f_1 = 0,45. Геометричні розміри механізму: a = 70 см, b = 30 см, c = 35 см, радіуси шківів R = 40 см, r = 25 см, вага тягаря G = 500 Н.
Відповідь:

6.5. Визначити мінімальне і максимальне значення сили P, необхідної для утримання вантажу вагою Q в заданому положенні, якщо коефіцієнт тертя між повзуном і напрямною дорівнює f, довжина кривошипа r, кут його повороту θ, кут між шатуном і віссю напрямної дорівнює φ, радіус барабана a.

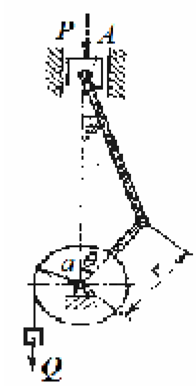
Відповідь:

$$P_{\min} = \frac{Qa(\cos\varphi - f\sin\varphi)}{r\sin(\varphi+\theta)};$$

$$P_{\max} = \frac{Qa(\cos\varphi + f\sin\varphi)}{r\sin(\varphi+\theta)}.$$

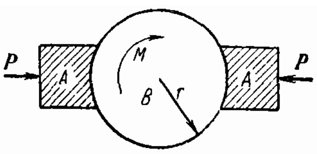


До задачі 6.4.



До задачі 6.5.

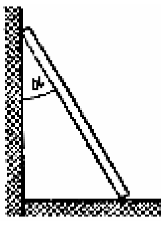
6.6. На валу жорстко закріплено гальмівне колесо B радіуса r = 25 см, до якого з силою P = 800 Н притискаються гальмівні колодки A. До валу прикладена пара сил з моментом M = 100 Н·м. Визначити мінімальне значення коефіцієнту тертя ковзання f між гальмівним колесом і колодками, за якого вал буде знаходитись в стані спокою.
Відповідь: f = 0,25.



До задачі 6.6.

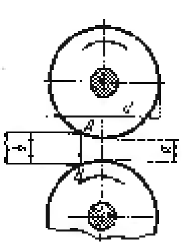
6.7. За яких значень кута α однорідна драбина, яка спирається на шорсткі стіну і підлогу, буде знаходитись в стані рівноваги? Коефіцієнти тертя в місцях контакту драбини з підлогою і стіною вважати однаковими і рівними f.

Відповідь: $\alpha \le arctg\dfrac{2f}{1-f^2}$.



До задачі 6.7.

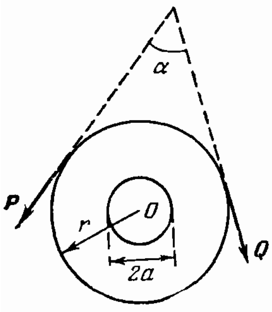
6.8. Прокатний стан складається з двох валів діаметром d = 50 см, які обертаються в протилежні боки. Відстань між валами a = 0,5 см. Якої товщини b листи можна обробляти на цьому стані, якщо коефіцієнт тертя розпеченої сталі по чавуну f = 0,10?
Відповідь: $b \le 0{,}75$ см.



До задачі 6.8.

6.9. Шків радіуса r = 40 мм насаджений на вал радіуса a = 15 см, котрий може обертатись в підшипниках. Коефіцієнт тертя між валом і підшипниками f = 0,05. Визначити величину сили Р, яка утримає вал в стані спокою, якщо до нього прикладена сила Q = 600 Н, яка утворює із силою P кут α = 90°.

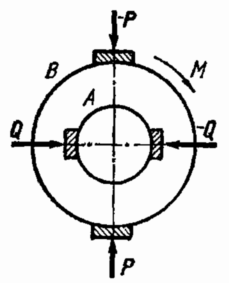
Відповідь: $b \le 0{,}75$ см.



До задачі 6.8.

6.10. На вал A радіуса r = 25 см і шків B радіуса R = 50 см, жорстко скріплені між собою, діє пара сил з моментом M = 200 Н·м. До валу притиснуті гальмівні колодки, кожна з яких діє на нього із силою Q = 250 Н. Визначити найменшу силу P, яку необхідно прикласти к двом іншим гальмівним колодкам, притиснутим до шківа B, аби вал знаходився в стані спокою. Коефіцієнт тертя колодок об вал f_1 = 0,25, об шків – f_2 = 0,4.

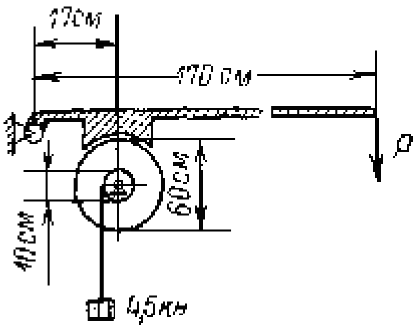
Відповідь: P = 422 Н.



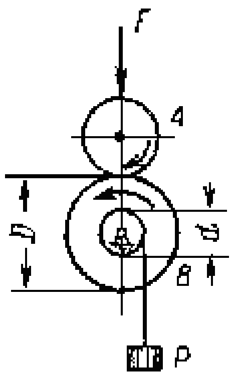
До задачі 6.10.

6.11. На барабан ворота намотаний трос, на кінці якого знаходиться вантаж вагою G = 4,5 кН. Визначити найменшу величину сили P, яку треба прикласти до рукояті колодкового гальма, аби барабан знаходився в стані рівноваги. Коефіцієнт тертя f = 0,5, вагою рукояті знехтувати, необхідні розміри вказані на рисунку.

Відповідь: P = 150 Н.



До задачі 6.11.



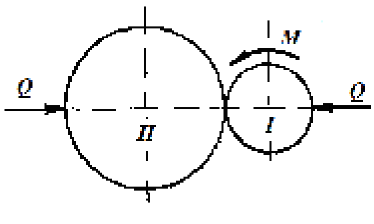
До задачі 6.12.

6.12. З якою мінімальною силою F необхідно притиснути фрикційний шків A до шківу B, аби останній знаходився в стані рівноваги, якщо сила P = 500 Н, коефіцієнт тертя f = 0,5, співвідношення діаметрів D/d = 2?

Відповідь: F = 500 Н.

6.13. На циліндричні катки фрикційної передачі діють однакові за модулем сили Q, які утримують систему в стані граничної рівноваги. Визначити величину цих сил, якщо на каток I радіуса R = 0,25 см діє пара сил з моментом M = 80 Н·м, а коефіцієнт тертя між катками f = 0,5.

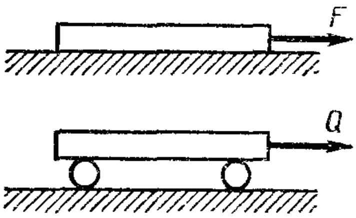
Відповідь: Q = 640 Н.



До задачі 6.13.

6.14. Визначити відношення між максимальними значеннями горизонтальних сил F і Q, прикладених до того ж самого важкого брусу, за яких віх буде залишатися в стані рівноваги безпосередньо на шорсткій поверхні і на циліндричних катках. Коефіцієнт тертя ковзання f = 0,1, коефіцієнт тертя кочення k = 0,005. Радіус кожного катка r = 5 см, вагу катків до уваги не брати.

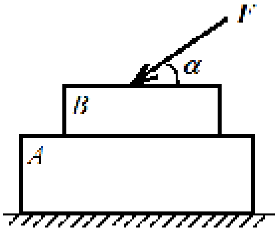
Відповідь: F/Q = 200.



До задачі 6.14.

6.15. На верхній грані прямокутного бруса A ваги P_1 = 300 Н знаходиться прямокутний брус B ваги P_2 = 100 Н. Брус A знаходиться на горизонтальній площині, причому коефіцієнт тертя між ними f_1 = 0,15. Коефіцієнт тертя між брусами A і B f_2 = 0,25. До бруса B прикладена сила F під кутом α = 45° до горизонту. Визначити, при якому максимальному значенні сили F верхній брус буде знаходитись в стані рівноваги.

Відповідь: F = 47,1 Н.



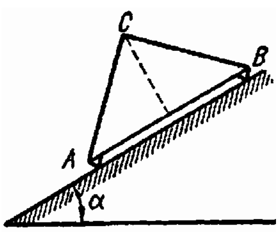
До задачі 6.15.

6.16. На верхній грані прямокутного бруса A ваги P_1 = 300 Н знаходиться прямокутний брус B ваги P_2 = 100 Н. Брус A знаходиться на горизонтальній площині, причому коефіцієнт тертя між ними f_1 = 0,15 (рис. до задачі 6.15). Коефіцієнт тертя між брусами A і B f_2 = 0,25. До бруса B прикладена сила F під кутом α = 45° до горизонту. Визначити, до якого максимального значення сили F нижній брус буде нерухомим відносно горизонтальної площини.

Відповідь: F = 100 Н.

6.17. На шорсткій похилій площині знаходиться призматичне тіло, з прикріпленими до нього виступами A і B. Визначити найбільший кут нахилу площини α, за якого можлива рівновага тіла, якщо $AB = BC = AC$, а коефіцієнти тертя між похилою площиною і виступами A і B відповідно дорівнюють f_1 і f_2.

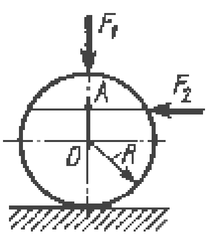
Відповідь: $a = \dfrac{\sqrt{3}(f_1 + f_2)}{f_2 - f_1 + 2\sqrt{3}}$.



До задачі 6.17.

6.18. На однорідний каток вагою G = 2 кН діє горизонтальна сила F_2 = 10 Н і вертикальна сила F_1. Знайти найбільше за модулем значення сили F_1, необхідне для початку руху катка. Коефіцієнт тертя кочення k = 0,005 м, радіус катка R = 0,8 м, OA = 0,4 м.

Відповідь: F_1 = 400 Н.

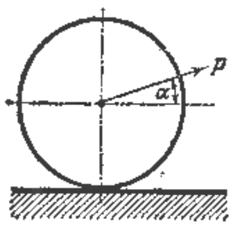


До задачі 6.18.

6.19. Визначити кут нахилу α сталевої площини до горизонту, при якому сталевий ролик радіуса 50 мм буде котитися рівномірно. Коефіцієнт тертя кочення k = 0,05 мм.
Відповідь: $\alpha = 3'26''$.

6.20. До однорідного катка вагою G = 4 кН прикладена пара сил з моментом M = 20 Н·м. Визначити найменший коефіцієнт тертя кочення, при якому каток буде знаходитись в стані рівноваги.
Відповідь: k = 0,5 см.

6.21. Визначити силу P, необхідну для рівномірного кочення циліндричного катка радіуса r = 50 см і ваги G = 300 Н по горизонтальній площині, якщо коефіцієнт тертя кочення k = 0,5 см. Кут між лінією дії сили P і горизонталлю α = 30°.
Відповідь: P = 5,72 Н.

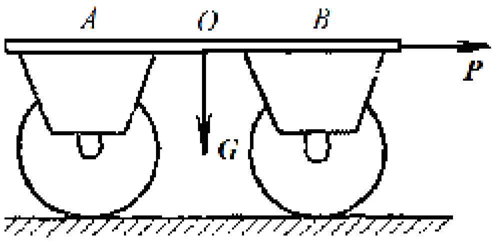


До задачі 6.21.

6.22. Під яким кутом α необхідно прикласти силу P = 4 Н до циліндричного катка радіуса r = 50 см і ваги G = 300 Н (рис. до задачі 6.21) для його рівномірного кочення по горизонтальній площині, якщо коефіцієнт тертя кочення між катком і поверхнею k = 0,5 см.
Відповідь: α = 48,6°.

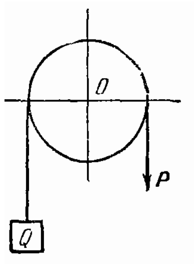
6.23. Визначити силу P, необхідну для рівномірного кочення циліндричного катка радіуса r = 50 см і ваги G = 300 Н по горизонтальній площині (рис. до задачі 6.21), якщо коефіцієнт тертя кочення k = 0,5 см.
Відповідь: P = 3 Н.

6.24. Визначити величину горизонтальної сили P, під дією якої візок вагою G = 600 Н буде рухатись рівномірно по рейковій колії, якщо вага кожного колеса Q = 50 Н, радіус R = 30 см, $AO = OB$, коефіцієнт тертя кочення k = 0,5 см.
Відповідь: P = 10,8 Н.



До задачі 6.24.

6.25. На нерухомий циліндр навита мотузка, до одного з кінців якої прикріплений вантаж вагою Q = 800 Н. Скільки разів достатньо намотати мотузку на циліндр, аби втримати систему в рівновазі за допомогою сили P = 20 Н, прикладеної вертикально до іншого кінця мотузки. Коефіцієнт тертя мотузки о циліндр f = 0,25.
Відповідь: n = 2 рази.



До задачі 6.25.

РОЗДІЛ ІІ. КІНЕМАТИКА

Глава 7. Кінематика точки

7.1. Загальні визначення кінематики

Кінематика – розділ теоретичної механіки, в якому вивчається рух абсолютно твердого тіла або матеріальної точки незалежно від діючих на них сил. Простір, в якому відбувається рух, вважається тривимірним, а всі вимірювання виконуються за законами евклідової геометрії.

Проміжок часу – перебіг часу між двома фізичними явищами.

Початковий час – момент початку відліку.

Рух – зміна положення тіла або точки в просторі з часом. Для визначення руху тіла або точки необхідно мати систему відліку.

Система відліку – годинник і тіло відліку, відносно якого розглядається рух даного тіла. Може бути як рухомою, так і умовно нерухомою. Рух тіла або точки напряму залежить від вибору системи відліку. Всі системи відліку прийнято поділяти на два типи:

1. *Інерціальні* – в них ізольована матеріально точка може нескінченно довго знаходитись у стані спокою або рівномірного і прямолінійного руху. Завжди знаходяться у стані спокою або рухаються рівномірно і прямолінійно.

2. *Неінерціальні* – не мають властивостей попередніх систем.

Якщо в кожен момент часу можна визначити положення тіла відносно системи відліку, то рух вважається заданим (заданий закон руху).

Траєкторія – лінія, яку описує тіло або точка в процесі руху. За формою може бути прямолінійна або криволінійна.

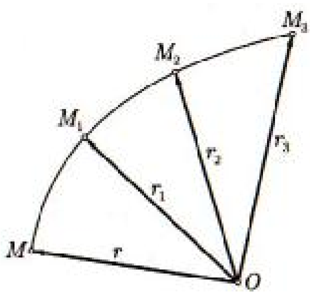
Основна задача кінематики: знаходження способів задання і визначення загальних кінематичних характеристик: положення, швидкості і прискорення.

7.2. Способи задання руху матеріальної точки, рівняння руху

Існує три способи задання руху матеріальної точки: векторний, координатний і натуральний.

7.2.1. *Векторний спосіб*.

Положення точки в просторі однозначно визначається радіус-вектором $\boldsymbol{r}$, проведеним з деякого нерухомого центру O в дану точку M (рис. 7.1). В процесі руху точки радіус-вектор змінюється за величиною і напрямком, а рівняння руху точки у векторній формі має вигляд



$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t). \qquad (7.1)$$

Годограф - лінія, утворена кінцями якого-небудь вектора при його русі. Тому, траєкторія точки M є годографом її радіус-вектора.

Рис. 7.1. Векторний спосіб задання руху.

Векторний спосіб завдання руху дуже зручний для обчислень, тому широко застосовується в кінематиці і динаміці.

7.2.2. *Координатний спосіб.*

Положення точки M в **декартовій системі** відліку $Oxyz$ описується через задання трьох координат x, y и z (рис. 7.2). Рівняння руху точки в декартових координатах

$$x = x(t),\quad y = y(t),\quad z = z(t). \tag{7.2}$$

Рух точки в площині описується двома першими рівняннями, якщо ж точка рухається прямолінійно, то досить одного рівняння.

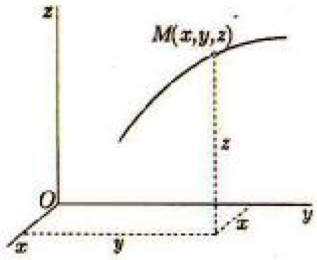


Рис. 7.2. Задання руху в декартовій системі координат.

Якщо виразити з першого рівняння час

$$t = \varphi(x)$$

і підставити в два останні рівняння, то отримуємо

$$y = y(x),\quad z = z(x) \tag{7.3}$$

рівняння траєкторії точки в декартових координатах.

Положення точки M в **полярній системі** відліку описується через задання двох координат r і φ (рис. 7.3). Тоді рівняння руху точки

$$r = r(t),\quad \varphi = \varphi(t). \tag{7.4}$$

Якщо виразити з другого рівняння час і підставити у перше рівняння, то отримуємо

$$r = r(\varphi) \tag{7.5}$$

рівняння траєкторії точки в полярних координатах.

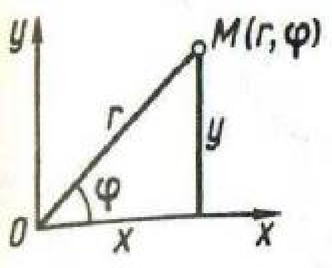


Рис. 7.3. Задання руху в полярній системі координат.

Перехід від декартових координат до полярних і навпаки проводять за формулами

$$x = r\cos\varphi,\quad y = r\sin\varphi,\qquad r = \sqrt{x^2+y^2},\quad \varphi = arctg\frac{y}{x},\quad z = 0.$$

Положення точки M в **циліндричних координатах** описується через задання трьох координат r, φ і z (рис. 7.4). Тоді рівняння руху точки

$$r = r(t),\quad \varphi = \varphi(t),\ z = z(t). \tag{7.6}$$

Якщо виразити з першого рівняння час і підставити у друге рівняння, то отримуємо

$$\varphi = \varphi(r),\quad z = z(r) \tag{7.7}$$

рівняння траєкторії точки в циліндричних координатах.

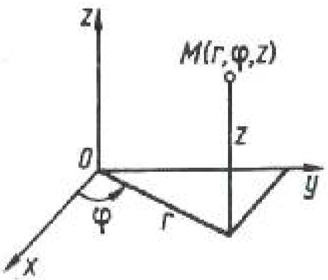
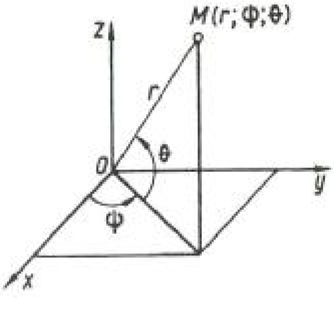


Рис. 7.4. Задання руху в циліндричних координатах.

Перехід від декартових координат до циліндричних і навпаки проводять за формулами

$$x = r\cos\varphi,\quad y = r\sin\varphi,\quad z = z(t);\qquad r = \sqrt{x^2+y^2},\quad \varphi = arctg\frac{y}{x},\quad z = z(t).$$



Положення точки M в **сферичних координатах** описується трьома координатами r, ψ і θ (рис. 7.5). Тоді рівняння руху точки

$$r = r(t),\quad \psi = \psi(t),\ \theta = \theta(t). \tag{7.8}$$

Рис. 7.5. Задання руху в сферичних координатах.

Якщо виразити з першого рівняння час і підставити у друге рівняння, то отримуємо

$$\psi = \psi(r), \quad \theta = \theta(r) \qquad (7.9)$$

рівняння траєкторії точки в сферичних координатах.

Перехід від декартових координат до сферичних і навпаки проводять за формулами

$$x = r\cos q\cos y\,, \qquad y = r\cos q\sin y\,, \qquad z = r\sin q\,;$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, y\ = arctg\frac{y}{x}, \qquad q = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \qquad (7.10)$$

7.2.3. *Натуральний спосіб.*

Якщо траєкторія точки наперед задана, то для визначення закону її руху достатньо вказати положення точки на даній траєкторії. Для цього треба визначити початок відліку *O*, вказати додатний і від’ємний напрями. Тоді положення точки *M* буде визначатися лише дуговою координатою *s*, яка відкладена по траєкторії від точки *O* (рис. 7.6).

Рівняння руху точки в натуральному виді

$$s = f(t), \qquad (7.11)$$

причому ця функція має бути однозначною, неперервною та диференційовною.

Дугову координату *s* не слід поєднувати із шляхом *σ*, який пройшла дана точка. Вони дорівнюють одне одному лише у випадку, коли точка *M* почала рух із центру *O* в додатному напрямі. Якщо ж в початковий момент часу точка займала положення M_0, а в кінцевий момент – положення *M* і рухалась в одному напрямку, то її шлях визначається за формулою

$$s\ = \left|MM_0\right| = \left|OM - OM_0\right| = \left|s - s_0\right|.$$

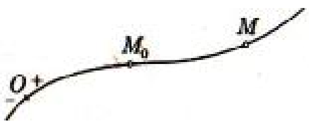


Рис. 7.6. Задання руху при натуральному способі.

7.3. Швидкість і прискорення точки при різних способах задання руху

7.3.1. *Векторний спосіб*

Швидкість матеріальної точки – фізична величина, яка характеризує її переміщення за досить малий проміжок і в даний момент часу (або в даному місці), вона дорівнює першій похідній радіус-вектора точки за часом:

$$\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}. \qquad (7.12)$$

Швидкість спрямована по дотичній до траєкторії у бік руху точки. У випадку криволінійної траєкторії напрям вектора швидкості безперервно змінюється.

За одиницю виміру швидкості в системі СІ приймають метр за секунду (м/с). Також швидкість може виражатися у кілометрах за годину (км/год)

$$1[м/с] = \frac{18}{5}[км/год].$$

Середня швидкість точки за проміжок часу Δt визначається за формулою

$$\boldsymbol{v}_{сер} = \frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t}. \qquad (7.13)$$

Середня швидкість лише наближено відображає характер дійсного руху точки.

Прискорення матеріальної точки – міра зміни швидкості точки, яка дорівнює першій похідній від швидкості за часом або другій похідній від радіус-вектора за часом

$$\boldsymbol{a} = \frac{d\boldsymbol{\upsilon}}{dt} = \frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt}. \tag{7.14}$$

За одиницю виміру прискорення в системі СІ приймають метр за секунду в квадраті (м/с^2). Оскільки прискорення точки дорівнює першій похідній швидкості, то воно напрямлене по дотичній до годографа швидкості.

Інколи використовують середнє прискорення тіла

$$\boldsymbol{a}_{cep} = \frac{\Delta\boldsymbol{\upsilon}}{\Delta t}, \tag{7.15}$$

яке також досить наближено характеризує характер зміни швидкості і напрямлене за вектором $\Delta\boldsymbol{\upsilon}$.

7.3.2. *Координатний спосіб.*

Проекції швидкості точки на нерухомі осі **декартової системи координат** дорівнюють першим похідним відповідних координат за часом:

$$\upsilon_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x}, \qquad \upsilon_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y}, \qquad \upsilon_z = \frac{dz}{dt} = \dot{z}. \tag{7.16}$$

Вектор швидкості точки можна записати через орти

$$\boldsymbol{\upsilon} = \boldsymbol{i}\upsilon_x + \boldsymbol{j}\upsilon_y + \boldsymbol{k}\upsilon_z = \boldsymbol{i}\frac{dx}{dt} + \boldsymbol{j}\frac{dy}{dt} + \boldsymbol{k}\frac{dz}{dt}.$$

Модуль швидкості можна знайти по формулі

$$\upsilon = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2 + \upsilon_z^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}.$$

Його напрямок визначають за допомогою напрямних косинусів

$$\cos(\boldsymbol{\upsilon},\boldsymbol{i}) = \frac{\upsilon_x}{\upsilon}, \ \cos(\boldsymbol{\upsilon},\boldsymbol{j}) = \frac{\upsilon_y}{\upsilon}, \ \cos(\boldsymbol{\upsilon},\boldsymbol{k}) = \frac{\upsilon_z}{\upsilon}.$$

Проекції прискорення точки на **декартові осі координат** дорівнюють першим похідним відповідних проекцій швидкості за часом на ті ж осі, або другим похідним відповідних координат даної точки за часом:

$$a_x = \frac{d\upsilon_x}{dt} = \dot{\upsilon}_x = \ddot{x}, \qquad a_y = \frac{d\upsilon_y}{dt} = \dot{\upsilon}_y = \ddot{y}, \qquad a_z = \frac{d\upsilon_z}{dt} = \dot{\upsilon}_z = \ddot{z}.$$

Модуль і напрям прискорення визначається за формулами

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{\left(\frac{d\upsilon_x}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\upsilon_y}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\upsilon_z}{dt}\right)^2} = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2},$$

$$\cos(\boldsymbol{a},\boldsymbol{i}) = \frac{a_x}{a}, \ \cos(\boldsymbol{a},\boldsymbol{j}) = \frac{a_y}{a}, \ \cos(\boldsymbol{a},\boldsymbol{k}) = \frac{a_z}{a}.$$

Проекції швидкості точки на нерухомі осі **полярної системи координат** дорівнюють першим похідним відповідних координат за часом:

$$\upsilon_x = \frac{dx}{dt} = \frac{d(r\cos\varphi)}{dt} = \frac{dr}{dt}\cos\varphi + r\frac{d(\cos\varphi)}{dt} = \upsilon_r\cos\varphi - r\frac{d\varphi}{dt}\sin\varphi = \upsilon_r\cos\varphi - \upsilon_\varphi\sin\varphi,$$

$$\upsilon_y = \frac{dy}{dt} = \frac{d(r\sin\varphi)}{dt} = \frac{dr}{dt}\sin\varphi + r\frac{d(\sin\varphi)}{dt} = \upsilon_r\sin\varphi + r\frac{d\varphi}{dt}\cos\varphi = \upsilon_r\sin\varphi + \upsilon_\varphi\cos\varphi.$$

Тут υ_r і υ_φ – проекції швидкості на радіальний і трансверсальний напрями відповідно (рис. 7.8).

Модуль вектора швидкості в полярних координатах

$$\upsilon = \sqrt{\upsilon_r^2 + \upsilon_\varphi^2} = \sqrt{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2} = \sqrt{\dot r^2 + r^2\dot\varphi^2}.$$

Проекції прискорення точки на **полярні осі координат** дорівнюють:

$$a_r = \ddot r - r\dot\varphi^2 = \frac{d^2 r}{dt^2} - r\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2, \quad a_\varphi = 2\dot r\dot\varphi + r\ddot\varphi = 2\frac{dr}{dt}\frac{d\varphi}{dt} + r\frac{d^2\varphi}{dt^2}.$$

Модуль прискорення визначається за формулою

$$a = \sqrt{a_r^2 + a_\varphi^2} = \sqrt{(\ddot r - r\dot\varphi^2)^2 + (2\dot r\dot\varphi + r\ddot\varphi)^2}.$$

7.3.3. *Натуральний спосіб*

Кожній точці траєкторії відповідає певний радіус-вектор, тому за даного способу задання руху для вектора швидкості маємо

$$\boldsymbol{\upsilon} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{r}}{ds}\frac{ds}{dt} = \boldsymbol{\tau}\frac{ds}{dt} = \boldsymbol{\tau}\dot s, \tag{7.17}$$

де $\boldsymbol{\tau}$ – орт, який вказує додатний напрямок руху.

Модуль швидкості дорівнює абсолютному значенню похідної від дугової координати точки за часом

$$|\boldsymbol{\upsilon}| = \left|\frac{ds}{dt}\right|.$$

Теорема: повне прискорення точки при натуральному способі задання руху дорівнює векторній сумі дотичного (тангенціального) та нормального (доцентрового) прискорень

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_n + \boldsymbol{a}_t. \tag{7.18}$$

Нормальне прискорення направлене убік угнутості траєкторії до центра кривини. Воно характеризує зміну швидкості за напрямом, а його модуль

$$a_n = \frac{\upsilon^2}{R}. \tag{7.19}$$

Нормальне прискорення існує лише при криволінійному русі точки.

Дотичне прискорення направлене убік руху точки по дотичній до траєкторії. Воно характеризує зміну швидкості за величиною, його модуль дорівнює другій похідній від дугової координати за часом або першій похідній від проекції швидкості на дотичну за часом

$$a_t = \frac{d^2 s}{dt^2} = \frac{du_t}{dt}. \tag{7.20}$$

Оскільки дотична завжди перпендикулярна до радіусу, то модуль повного прискорення точки і його напрям визначаються по теоремі Піфагора

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_t^2} = \sqrt{\left(\frac{du_t}{dt}\right)^2 + \left(\frac{u^2}{R}\right)^2},$$

$$\cos(a,t) = \frac{a_t}{a}, \cos(a,n) = \frac{a_n}{a}. \tag{7.21}$$

Якщо рух точки заданий координатним способом, то рівняння руху точки по траєкторії має вигляд

$$s = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} dt. \tag{7.22}$$

Питання для самоконтролю

1. В чому полягає основна задача кінематики точки?
2. Які існують способи задання руху?
3. Який спосіб задання руху зручно використовувати при заданій наперед траєкторії точки?
4. В яких випадках зручно використовувати полярну систему координат?
5. Яка існує залежність між радіус-вектором точки і її прискоренням?

Завдання № 7. «Кінематика точки»

Рекомендації до розв'язання задач

Рівняння руху задано **натуральним способом**.

1. Для визначення швидкості, нормального і дотичного прискорень як функції від часу або в певний момент часу необхідно знайти похідні від рівняння руху (7.11) по формулам (7.17), (7.19) – (7.21).

2. У випадку, коли відома траєкторія точки і необхідно віднайти закон її руху по заданій швидкості чи прискоренню, задача розв'язується шляхом інтегрування заданої функції. При цьому мають бути задані початкові або кінцеві умови для визначення констант інтегрування.

Рівняння руху задано **координатним способом**.

1. Необхідно отримати рівняння траєкторії точки, виключивши з вихідних рівнянь час.

2. Шляхом диференціювання вихідних рівнянь визначити проекції швидкостей і прискорень на координатні осі.

3. По теоремі Піфагора визначити абсолютні величини швидкості й прискорення.

4. У випадку, коли необхідно віднайти рівняння траєкторії точки і закон її руху по заданій швидкості чи прискоренню, задача розв'язується шляхом інтегрування заданої функції. При цьому мають бути задані початкові або кінцеві умови для визначення констант інтегрування.

Рівняння руху задано **векторним способом**.

1. В цьому випадку швидкості і прискорення визначаються шляхом диференціювання вихідного рівняння (7.1) по формулам (7.12) і (7.14).
2. Закон руху точки по траєкторії визначають по формулі (7.22).

Приклад розв'язання задачі

Задача 1. Знайти рівняння траєкторії точки та її начальне положення, якщо рівняння руху точки мають вигляд

$$x = 2t, \qquad y = 5t.$$

Визначити проекції швидкості і прискорення на осі декартової системи координат, знайти абсолютну швидкість і абсолютне прискорення в початковий момент часу.

Розв'язання

Аби знайти рівняння траєкторії точки, достатньо виключити з рівнянь час. З першого рівняння знаходимо

$$t = \frac{x}{2},$$

після чого підставляємо в друге рівняння

$$y = 5\frac{x}{2} = 2{,}5x \Rightarrow y - 2{,}5x = 0.$$

Дане рівняння є рівнянням прямої лінії.

Для знаходження начального положення точки необхідно в рівняння руху підставити нульове значення часу

$$x_0 = 2 \cdot 0 = 0; \qquad y_0 = 5 \cdot 0 = 0.$$

Початкове положення точки M_0 (0;0).

Знаходимо проекції швидкості на осі декартової системи координат

$$u_x = \frac{dx}{dt} = \frac{d(2t)}{dt} = 2\left(\frac{м}{с}\right); \quad u_y = \frac{dy}{dt} = \frac{d(5t)}{dt} = 5\left(\frac{м}{с}\right).$$

Абсолютну швидкість знаходимо по теоремі Піфагора

$$u = \sqrt{u_x^2 + u_y^2} = \sqrt{2^2 + 5^2} = \sqrt{29} = 5{,}4\left(\frac{м}{с}\right).$$

Знаходимо проекції прискорення на осі декартової системи координат

$$a_x = \frac{du_x}{dt} = \frac{d(2)}{dt} = 0\left(\frac{м}{с^2}\right); \qquad a_y = \frac{du_y}{dt} = \frac{d(5)}{dt} = 0\left(\frac{м}{с^2}\right).$$

Абсолютне прискорення також знаходимо по теоремі Піфагора

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{0^2 + 0^2} = \sqrt{0} = 0\left(\frac{м}{с}\right).$$

Задачу розв'язано.

Задача 2. Визначити траєкторію, швидкість і прискорення точки, рух якої задано рівняннями в полярних координатах

$$r = t^2\ (м),\quad \varphi = 2t\ (рад).$$

Розв'язання

Аби знайти рівняння траєкторії точки, достатньо виключити з рівнянь час. З другого рівняння знаходимо

$$t = \frac{\varphi}{2},$$

після чого підставляємо в перше рівняння

$$r = \left(\frac{\varphi}{2}\right)^2 = \frac{\varphi^2}{4}.$$

Знаходимо перші похідні від рівнянь руху в полярній системі координат

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{d(t^2)}{dt} = 2t;\qquad \dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d(2t)}{dt} = 2.$$

Закон зміни швидкості знаходимо по наступній формулі

$$\upsilon = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2} = \sqrt{(2t)^2 + t^4\cdot 4} = \sqrt{4t^2 + 4t^4} = 2t\sqrt{1+t^2}\ (м/с).$$

Знаходимо другі похідні за часом від радіус-вектора *r* і полярного кута φ

$$\ddot{r} = \frac{d\dot{r}}{dt} = \frac{d(2t)}{dt} = 2;\ \ddot{\varphi} = \frac{d\dot{\varphi}}{dt} = \frac{d(2)}{dt} = 0.$$

Закон зміни прискорення знаходимо по формулі

$$a = \sqrt{(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)^2 + (2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi})^2} = \sqrt{\left(2 - t^2\cdot 4\right)^2 + (2\cdot 2t\cdot 2 + 0)^2} =$$

$$\sqrt{4 - 16t^2 + 16t^4 + 64t^2} = \sqrt{4 + 48t^2 + 16t^4} = 2\sqrt{1 + 12t^2 + 4t^4}\ (м/с^2).$$

Завдання № 7 до РГР

7.1. Знайти рівняння траєкторії точки, накреслити траєкторію на графіку, вказати напрямок руху точки та її начальне положення, якщо рівняння руху точки мають вигляд

$$x = 3t,\qquad y = 2t.$$

Визначити проекції швидкості і прискорення на осі декартової системи координат, знайти абсолютну швидкість і абсолютне прискорення в початковий момент часу.

Відповідь: $2x - 3y = 0$; $\upsilon = 3{,}6$ м/с; $a = 0$ м/с^2.

7.2. Знайти рівняння траєкторії точки, накреслити траєкторію на графіку, вказати напрямок руху точки та її начальне положення, якщо рівняння руху точки мають вигляд

$$x = 3 + t,\qquad y = t^2 + 2t + 1.$$

Визначити проекції швидкості і прискорення на осі декартової системи координат, знайти абсолютну швидкість і абсолютне прискорення в початковий момент часу.

Відповідь: $y = x^2 - 4x + 4$; $\upsilon = 3{,}6$ м/с; $a = 2$ м/с^2.

7.3. Знайти рівняння траєкторії точки, накреслити траєкторію на графіку, вказати напрямок руху точки та її начальне положення, якщо рівняння руху точки мають вигляд

$$x = t^2 + 2, \qquad y = t^2 + 1.$$

Визначити проекції швидкості і прискорення на осі декартової системи координат, знайти абсолютну швидкість і абсолютне прискорення в початковий момент часу.

Відповідь: $x - y - 1 = 0$; $\upsilon = 0$ м/с; $a = 2{,}83$ м/с^2.

7.4. Знайти рівняння траєкторії точки, накреслити траєкторію на графіку, вказати напрямок руху точки та її начальне положення, якщо рівняння руху точки мають вигляд

$$x = 3\cos 2t, \qquad y = 3\sin 2t.$$

Визначити проекції швидкості і прискорення на осі декартової системи координат, знайти абсолютну швидкість і абсолютне прискорення в початковий момент часу.

Відповідь: $x^2 + y^2 = 9$; $\upsilon = 6$ м/с; $a = 12$ м/с^2.

7.5. Знайти рівняння траєкторії точки, накреслити траєкторію на графіку, вказати напрямок руху точки та її начальне положення, якщо рівняння руху точки мають вигляд

$$x = \cos 2t, \qquad y = 2\sin 2t.$$

Визначити проекції швидкості і прискорення на осі декартової системи координат, знайти абсолютну швидкість і абсолютне прискорення в початковий момент часу.

Відповідь: $x^2 + y^2/4 = 1$; $\upsilon = 4$ м/с; $a = 4$ м/с^2.

7.6. Знайти рівняння траєкторії точки, накреслити траєкторію на графіку, вказати напрямок руху точки та її начальне положення, якщо рівняння руху точки мають вигляд

$$x = \cos^2 t, \qquad y = \sin 2t.$$

Визначити проекції швидкості і прискорення на осі декартової системи координат, знайти абсолютну швидкість і абсолютне прискорення в початковий момент часу.

Відповідь: $4x - 4x^2 = y^2$; $\upsilon = 2$ м/с; $a = 4{,}47$ м/с^2.

7.7. Знайти рівняння траєкторії точки, накреслити траєкторію на графіку, вказати напрямок руху точки та її начальне положення, якщо рівняння руху точки мають вигляд

$$x = \sin\frac{pt}{4}, \quad y = 3\cos\frac{pt}{4}.$$

Визначити проекції швидкості і прискорення на осі декартової системи координат, знайти абсолютну швидкість і абсолютне прискорення в початковий момент часу.

Відповідь: $x^2 + y^2/9 = 1$; $\upsilon = \pi/4$ м/с; $a = 3\pi^2/16$ м/с^2.

7.8. Знайти рівняння траєкторії точки, накреслити траєкторію на графіку, вказати напрямок руху точки та її начальне положення, якщо рівняння руху точки мають вигляд

$$x = 2\sin\frac{pt}{2},\ \ y = 2\cos\frac{pt}{2}.$$

Визначити проекції швидкості і прискорення на осі декартової системи координат, знайти абсолютну швидкість і абсолютне прискорення в початковий момент часу.
Відповідь: $x^2 + y^2 = 4$; $\upsilon = \pi$ м/с; $a = \pi^2/2$ м/с^2.

7.9. Знайти рівняння траєкторії точки, накреслити траєкторію на графіку, вказати напрямок руху точки та її начальне положення, якщо рівняння руху точки мають вигляд

$$x = e^t + e^{-t},\ \ y = e^t - e^{-t}.$$

Визначити проекції швидкості і прискорення на осі декартової системи координат, знайти абсолютну швидкість і абсолютне прискорення в початковий момент часу.
Відповідь: $y(x - y)^2 = 2x$; $\upsilon = 2$ м/с; $a = 2$ м/с^2.

7.10. Знайти рівняння траєкторії точки, накреслити траєкторію на графіку, вказати напрямок руху точки та її начальне положення, якщо рівняння руху точки мають вигляд

$$x = 2e^t, \qquad y = 2e^{-t}.$$

Визначити проекції швидкості і прискорення на осі декартової системи координат, знайти абсолютну швидкість і абсолютне прискорення в початковий момент часу.
Відповідь: $yx = 4$; $\upsilon = 2{,}83$ м/с; $a = 2{,}83$ м/с^2.

7.11. Знайти рівняння траєкторії точки, накреслити траєкторію на графіку, вказати напрямок руху точки та її начальне положення, якщо рівняння руху точки мають вигляд

$$x = \sqrt{t}, \qquad y = e^{-t}.$$

Визначити проекції швидкості і прискорення на осі декартової системи координат, знайти абсолютну швидкість і абсолютне прискорення в момент часу $t = 1$ с.

Відповідь: $y = e^{-x^2}$; $u = 0{,}62\ м/с$; $a = 0{,}45\ м/с^2$.

7.12. Знайти рівняння траєкторії точки, накреслити траєкторію на графіку, вказати напрямок руху точки та її начальне положення, якщо рівняння руху точки мають вигляд

$$x = 4t, \qquad y = \frac{1}{t+2}.$$

Визначити проекції швидкості і прискорення на осі декартової системи координат, знайти абсолютну швидкість і абсолютне прискорення в початковий момент часу.

Відповідь: $y(x+8) = 4$; $\upsilon = 4{,}01$ м/с; $a = 0{,}25$ м/с^2.

7.13. Визначити траєкторію, швидкість і прискорення точки, рух якої задано рівняннями в полярних координатах

$$r = 3e^t, \qquad j = \frac{t}{2}.$$

Відповідь: $r = 3e^{2j}$; $u = 1{,}5e^t\sqrt{5}$; $a = \frac{15}{4}e^t$.

7.14. Визначити траєкторію, швидкість і прискорення точки, рух якої задано рівняннями в полярних координатах

$$r = 2t, j = 3t.$$

Відповідь: $r = \frac{2j}{3}$; $u = 2\sqrt{1+9t^2}$; $a = 6\sqrt{4+9t^2}$.

7.15. Визначити траєкторію, швидкість і прискорення точки, рух якої задано рівняннями в полярних координатах

$$r = t, \quad j = 5t.$$

Відповідь: $r = \frac{j}{5}$; $u = \sqrt{1+25t^2}$; $a = 5\sqrt{4+25t^2}$.

7.16. Визначити траєкторію, швидкість і прискорення точки, рух якої задано рівняннями в полярних координатах

$$r = 2\sin t, \quad j = \frac{t}{3}.$$

Відповідь: $r = 2\sin 3j$; $u = \frac{2}{3}\sqrt{1+8\cos^2 t}$; $a = \frac{4}{9}\sqrt{9+16\sin^2 t}$.

7.17. Визначити траєкторію, швидкість і прискорення точки, рух якої задано рівняннями в полярних координатах

$$r = 2 - 4\cos t, \qquad j = t.$$

Відповідь: $r = 2 - 4\cos j$; $u = \sqrt{20-16\cos t}$; $a = \sqrt{68-32\cos t}$.

7.18. Рівняння руху точки задане у векторній формі

$$\boldsymbol{r} = (2t-4)\boldsymbol{i} + (3+2t)\boldsymbol{j}.$$

Визначити траєкторію точки, а також її абсолютну швидкість і прискорення.

Відповідь: $y - x - 7 = 0$; $\upsilon = 2{,}83$ м/с; $a = 0$ м/с^2.

7.19. Рівняння руху точки задане у векторній формі

$$\boldsymbol{r} = t^2\boldsymbol{i} + 2t^3\boldsymbol{j}.$$

Визначити траєкторію точки, а також її абсолютну швидкість і прискорення в момент часу t = 1 с.
Відповідь: $y = 2x^{3/2}$; υ = 3,6 м/с; a = 2,5 м/с^2.

7.20. Рівняння руху точки задане у векторній формі

$$\boldsymbol{r} = \cos t\boldsymbol{i} + \sin 2t\boldsymbol{j}.$$

Визначити траєкторію точки, а також її абсолютну швидкість і прискорення в початковий момент часу.
Відповідь: $4x^2 - 4x^4 = y^2$; υ = 2 м/с; a = 1 м/с^2.

7.21. Рівняння руху точки задане у векторній формі

$$\boldsymbol{r} = 3\cos t^3\,\boldsymbol{i} + \sin 2t^3\,\boldsymbol{j}.$$

Визначити траєкторію точки, а також її абсолютну швидкість і прискорення в початковий момент часу.
Відповідь: $x^2/9 + y^2/4 = 1$; υ = 0 м/с; a = 0 м/с^2.

7.22. Рівняння руху точки задане у векторній формі

$$\boldsymbol{r} = \cos 2t\boldsymbol{i} + t\boldsymbol{j}.$$

Визначити траєкторію точки, а також її абсолютну швидкість і прискорення в початковий момент часу.
Відповідь: $x = \cos 2y$; υ = 1 м/с; a = 4 м/с^2.

7.23. Визначити рівняння руху точки по траєкторії, а також значення дугової координати s в момент часу t = 5 с, якщо прискорення точки задане рівнянням

$$a = 2t + 1\,\left(м/с^2\right).$$

Швидкість точки в початковий момент часу дорівнювала нулю, а її положення співпадало із початком відліку.
Відповідь: $s = t^3/3 + t^2/2$ м; s_5 = 54,2 м.

7.24. Визначити рівняння руху точки по траєкторії, а також значення дугової координати s і шлях x в момент часу t = 5 с, якщо швидкість точки задана рівнянням

$$u = 2t + 1\,(м/с).$$

Відповідь: $s = t^2 + t$ м; $s(5)$ = 30 м; x = 30 м.

7.25. Визначити рівняння руху точки по траєкторії, а також значення дугової координати s в момент часу t = 6 с, якщо швидкість точки задана рівнянням

$$u = t^2 - 2t - 1\,(м/с).$$

Відповідь: $s = t^3/3 - t^2 - t$ м; $s(6)$ = 30 м.

Глава 8. Найпростіші рухи твердого тіла

Тверде тіло – тіло, у якого відстань між його будь-якими двома точками не змінюється в процесі руху. Всі рухи тіл можна розділити на вільні та невільні – обмежені накладеними в'язами.

Число ступенів вільності – число незалежних параметрів, які однозначно визначають положення твердого тіла в просторі. Вільне тверде тіло має шість степеней вільності.

Розрізняють п'ять видів руху твердого тіла: поступальний, обертальний, плоскопаралельний, сферичний та рух вільного тіла. До найпростіших рухів твердого тіла належать поступальний та обертальний рухи.

8.1. Поступальний рух твердого тіла

Поступальний – такий рух твердого тіла, при якому будь-яка пряма, проведена в тілі, залишається протягом усього часу руху паралельна своєму початковому положенню.

Теорема: при поступальному русі всі точки твердого тіла описують однакові (співпадаючі при паралельному переносі) траєкторії і в кожен момент часу мають рівні швидкості і прискорення.

Ця теорема дозволяє звести вивчення руху твердого тіла до вивчення руху окремої точки тіла, оскільки рівняннями поступального руху тіла є рівняння руху однієї точки (зазвичай центру ваги тіла)

$$x = f(t), \; y = f(t), \; z = f(t).$$

Точки тіла при поступальному русі описують будь-які траєкторії, у тому числі і прямі, тому прямолінійний рух є окремим випадком поступального руху.

8.1.1. *Прямолінійний поступальний рух*

Прямолінійний – рух тіла, при якому його траєкторією є пряма лінія. Положення будь-якої точки при такому русі визначається однією координатою, а тому рівняння руху має вигляд

$$x = f(t). \tag{8.1}$$

Види прямолінійного руху:

1. *Прямолінійний рівномірний* – рух тіла по прямій лінії з постійною швидкістю

$$\upsilon = \text{const}.$$

Прискорення точки за такого руху дорівнює нулю, а положення точки у будь-який момент часу визначається по формулі

$$x = x_0 + \upsilon t, \tag{8.2}$$

тому графіком пройденої відстані є пряма лінія.

2. *Прямолінійний рівнозмінний* – рух тіла по прямій лінії з постійним прискоренням

$$\upsilon \neq \text{const}, \; a = \text{const}.$$

Швидкість тіла змінюється в часі за законом

$$\upsilon = \upsilon_0 + at, \tag{8.3}$$

а координата тіла у будь-який момент часу визначається співвідношенням

$$x = x_0 + \upsilon_0 t + at^2/2, \tag{8.4}$$

тому графіком пройденої відстані є парабола. Прискорення тіла може бути як додатним, так і від’ємним.

При прямолінійному русі тіла нормальне прискорення відсутнє, тому його абсолютне прискорення дорівнює дотичному

$$a = a_t = \frac{du}{dt}. \tag{8.5}$$

Прикладом прямолінійного рівнозмінного руху є прямолінійний гармонійний коливальний рух. Іншим випадком поступального руху є криволінійний рух.

8.1.2. *Криволінійний поступальний рух*

Криволінійний – рух тіла, при якому його траєкторією є будь-яка непряма лінія.

Види криволінійного руху:

1. *Плоский* – число рівнянь руху тіла дорівнює двом. Рівняння плоского криволінійного руху в декартових координатах

$$x = x(t), \quad y = y(t).$$

2. *Просторовий* – число рівнянь руху тіла дорівнює трьом. Рівняння просторового криволінійного руху в декартових координатах

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t).$$

При криволінійному русі окрім дотичного прискорення має місце ще і нормальне прискорення

$$a_n = \frac{u^2}{R}. \tag{8.6}$$

За характером криволінійний рух поділяють на два види:

1. *Рівномірний криволінійний рух* – тіло рухається по кривій з постійною швидкістю, тоді повне прискорення дорівнює нормальному

$$a = a_n = \frac{u^2}{R}, \qquad a_t = 0.$$

2. *Рівнозмінний криволінійний рух* – тіло рухається по кривій зі змінною швидкістю, а повне прискорення знаходиться як геометрична сума нормального і дотичного прискорень. Модуль повного прискорення тіла

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_t^2} = \sqrt{\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + \left(\frac{u^2}{R}\right)^2}. \tag{8.7}$$

Якщо напрям дотичного прискорення збігається з напрямом швидкості, то рух є рівноприскореним, інакше – рівносповільненим.

8.2. Обертальний рух твердого тіла навколо нерухомої осі

Обертальний рух тіла навколо нерухомої осі – такий рух, при якому пряма, що проходить через які-небудь дві точки OO_1 під час руху залишається нерухомою. Ця пряма є віссю обертання.

Положення тіла при його обертанні навколо нерухомої осі визначається кутом повороту φ, який вважають додатним при обертанні проти ходу годинникової стрілки.

Кінематичне *рівняння обертального руху тіла* навколо нерухомої осі

$$\varphi = \varphi(t). \tag{8.8}$$

Одиницею виміру кута повороту φ в системі СІ є радіан (рад).

Кутова швидкість – фізична величина, яка характеризує зміну кута повороту з часом і дорівнює першій похідній за часом від кута повороту

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}. \tag{8.9}$$

Одиницею виміру кутової швидкості є радіан за секунду (рад/с).

Рівномірне обертання – обертання, при якому кутова швидкість є сталою величиною (ω = const). Рівняння рівномірного обертання тіла навколо нерухомої осі

$$\varphi = \omega t + \varphi_0, \tag{8.10}$$

де φ_0 – початковий кут повороту. Кутова швидкість також визначає напрям обертання: якщо $\omega > 0$ – тіло обертається в напрямі зростання кута повороту, а при $\omega < 0$ – навпаки. Інколи використовують середню кутову швидкість за певний проміжок часу

$$\omega_{cp} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}.$$

За рівномірного обертання середня і миттєва кутові швидкості однакові.

В техніці замість кутової швидкості часто застосовують частоту обертання *n*, яка вимірюється в обертах за хвилину (об/хв) і пов’язана з кутовою швидкістю співвідношенням

$$\omega = \frac{\pi n}{30}. \tag{8.11}$$

Найбільш повільні обертання зустрічаються в зоряному світі. Так Сонце робить 1 оберт навколо центра Галактики за 180 мільйонів років. В техніці мають місце найшвидші обертання – декілька мільйонів обертів за хвилину (гіроскопи Гюгенара в магнітному полі).

Кутова швидкість є ковзним вектором, напрям якого збігається із віссю обертання і визначається за правилом правого гвинта.

Кутове прискорення – фізична величина, яка характеризує змінення кутової швидкості з часом і дорівнює першій похідній за часом від кутової швидкості або другій похідній за часом від кута повороту

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \dot{\omega} = \ddot{\varphi}. \tag{8.12}$$

Одиницею виміру кутового прискорення є радіан за секунду в квадраті (рад/с^2).

Кутове прискорення теж є ковзним вектором, напрямленим вздовж осі обертання. Якщо напрями векторів $\boldsymbol{\omega}$ і $\boldsymbol{\varepsilon}$ співпадають, то обертання є *прискореним*, якщо протилежні – то *сповільненим*. При $\boldsymbol{\varepsilon}$ = 0 обертання стає рівномірним.

Рівнозмінне обертання – обертання, при якому кутове прискорення не змінюється ($\boldsymbol{\varepsilon}$ = const). Рівняння рівнозмінного обертання тіла навколо нерухомої осі

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}, \qquad \omega = \omega_0 + \varepsilon t, \tag{8.13}$$

де ω_0 – початкова кутова швидкість.

Траєкторіями точок тіла при обертанні навколо нерухомої осі є кола, площини яких перпендикулярні до осі обертання. Центри кіл знаходяться в точках перетину осі обертання з указаними площинами.

Відстань, яку проходить точка при повороті на кут φ

$$s = R\varphi, \tag{8.14}$$

де R – радіус обертання.

Лінійна швидкість – швидкість будь-якої точки, що здійснює обертальний рух навколо нерухомої осі. Якщо дана точка знаходиться на ободі тіла, яке обертається, то її швидкість називають *коловою*. Швидкість за визначенням

$$\upsilon = \frac{ds}{dt} = R\frac{d\varphi}{dt} = R\omega. \tag{8.15}$$

Лінійна швидкість при обертанні навколо нерухомої осі напрямлена по дотичній до траєкторії в бік обертання.

Лінійне прискорення – прискорення будь-якої точки, яка здійснює обертальний рух навколо нерухомої осі. Прискорення при такому русі зручно знаходити, скориставшись натуральним способом задання руху

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_\tau + \boldsymbol{a}_n.$$

Дотичне прискорення характеризує зміну швидкості за величиною

$$a_\tau = \frac{d^2 s}{dt^2} = \frac{d^2(R\varphi)}{dt^2} = R\frac{d^2\varphi}{dt^2} = R\varepsilon$$

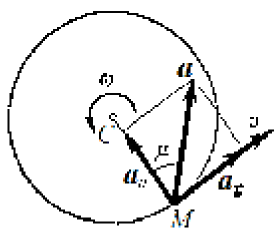
і має місце лише за прискореного або сповільненого обертання.

Нормальне прискорення характеризує зміну швидкості за напрямом

$$a_n = \frac{\upsilon^2}{R} = \frac{(R\omega)^2}{R} = R\omega^2$$

і завжди має місце при обертальному русі. Тоді модуль лінійного прискорення

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{\left(R\omega^2\right)^2 + (R\varepsilon)^2} = R\sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}. \tag{8.16}$$



Напрям лінійного прискорення визначається кутом μ, утвореним між ним і нормальним прискоренням (рис. 12.1)

$$\mu = arctg\frac{a_\tau}{a_n} = arctg\frac{R\varepsilon}{R\omega^2} = arctg\frac{\varepsilon}{\omega^2}.$$

Рис. 12. 1. Прискорення при обертальному русі.

Питання для самоконтролю

1. Яку траєкторію мають точки твердого тіла при поступальному русі?
2. Який взаємозв’язок між лінійними і кутовими швидкостями при обертанні тіла навколо нерухомої осі?
3. Які механізми перетворюють обертальний рух у поступальний.
4. Як визначається прискорення точки при обертальному русі?

Завдання № 8. «Найпростіші рухи твердого тіла»

Рекомендації до розв'язання задач

А. Поступальний рух тіла.

1. Якщо по заданому закону поступального руху (8.2) необхідно визначити лінійні швидкість і прискорення, то така задача розв'язується шляхом послідовного диференціювання закону руху, результатом якого є формули (8.3) і (8.5).
2. Якщо по заданому прискоренню тіла, яке рухається поступально, необхідно визначити його закон руху, то така задача розв'язується шляхом послідовного інтегрування формул (8.3) і (8.5). В цьому випадку мають бути задані початкові або кінцеві умови для визначення констант інтегрування.
3. У випадку криволінійного руху абсолютне прискорення визначається по теоремі Піфагора, як геометрична сума дотичного і нормального прискорень. Складові абсолютного прискорення знаходяться по формулам (8.5) і (8.6) відповідно.

Б. Обертальний рух тіла.

1. Якщо по заданому закону обертального руху (8.8) необхідно визначити кутові швидкість і прискорення, то така задача розв'язується шляхом послідовного диференціювання закону руху по формулам (8.9) і (8.12).
2. Якщо по заданому кутовому прискоренню тіла, яке обертається, необхідно визначити його закон руху, то така задача розв'язується шляхом послідовного інтегрування формул (8.9) і (8.12). В цьому випадку мають бути задані початкові або кінцеві умови для визначення констант інтегрування.
3. Якщо необхідно перетворити обертальний рух одного тіла в обертальний рух іншого тіла, то така задача розв'язується з використанням формул зубчастих механізмів чи передач із гнучкими в'язами

$$\frac{w_2}{w_1} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{d_1}{d_2} = \frac{z_1}{z_2}.$$

Приклад розв'язання задачі (поступальний рух)

Задача 1. Повзун рухається по прямолінійній напрямній з прискоренням

$$a = 2\sin 4t \text{ м/с}^2.$$

Знайти рівняння руху повзуна, якщо його початкова швидкість υ_0 дорівнює 6 м/с, а початкове положення співпадає з початком відліку.

Розв'язання

Даний тип задач відноситься до п. 2 рекомендацій і розв'язується інтегруванням закону зміни прискорення. Спочатку визначимо швидкість руху повзуна по напрямній

$$a = \frac{du}{dt} \Rightarrow \int_{u_0}^{u} du = \int_0^t a dt. \quad u - u_0 = \int_0^t 2\cos 4t dt = \left(\frac{2\sin 4t}{4}\right)_0^t = 0{,}5\sin 4t.$$

$$u = u_0 + 0{,}5\sin 4t = 6 + 0{,}5\sin 4t.$$

Закон руху повзуна по напрямній визначимо за допомогою інтегрування останньої формули

$$u = \frac{dx}{dt} \Rightarrow \int_0^x dx = \int_0^t u dt. \qquad x = \int_0^t (6 + 0{,}5\sin 4t)dt = \left(6t - \frac{0{,}5\cos 4t}{4}\right)_0^t =$$

$$= 6t - \frac{0{,}5\cos 4t}{4} + \frac{0{,}5}{4} = 6t + 0{,}125(1 - \cos 4t)\ (м).$$

Задачу розв'язано.

<u>Приклад розв'язання задачі (обертальний рух)</u>

Задача 2. Махове колесо починає обертатися прискорено із стану спокою із кутовим прискоренням ε = 5 рад/с^2. За який час t_1 частота обертання колеса буде дорівнювати n = 960 об/хв? Скільки часу t_2 має обертатися колесо з таким прискоренням, аби здійснити 500 обертів?

Розв'язання

1. Визначимо кутову швидкість, яка відповідає частоті обертання колеса n

$$w = \frac{pn}{30} = \frac{3{,}14 \cdot 960}{30} = 100{,}5\ (рад/с).$$

Оскільки за умов задачі колесо обертається із стану спокою, то початкова кутова швидкість ω_0 = 0 рад/с. Із формули для кутової швидкості прискореного руху знайдемо час, за який колесо досягне швидкості ω

$$w = w_0 + et_1 = et_1 \Rightarrow t_1 = \frac{w}{e} = \frac{100{,}5}{5} = 20{,}1\ (с).$$

2. Визначимо кутове переміщення при 500 обертах колеса

$$j = 2pN = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 500 = 3140\ (рад).$$

Із формули для кута повороту при прискореному русі знайдемо час, за який колесо зробить 500 обертів

$$j = w_0 t_2 + \frac{et_2^2}{2} = \frac{et_2^2}{2} \Rightarrow t_2 = \sqrt{\frac{2j}{e}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 3140}{5}} = 35{,}4\ (с).$$

Задачу розв'язано.

<u>Завдання № 8 до РГР</u>

8.1. На якій відстані від центру грози звук грому чутно через 8 с після того, як спостерігач замітив сполох блискавки? Швидкість звуку в повітрі дорівнює приблизно 340 м/с.

Відповідь: s = 2 720 м.

8.2. За якій час стругальна машина зніме 1 шар з дошки шириною 0,9 м і довжиною 6 м, якщо різець машини шириною 5 мм рухається рівномірно зі швидкістю 0,54 м/с? На зворотному ході різець не працює і рухається зі швидкістю 1,08 м/с.

Відповідь: t = 3 000 с.

8.3. Мотоцикліст, рухаючись з постійною швидкістю 20 м/с, проїхав на червоне світло повз контрольний пункт, порушивши правила дорожнього руху. Через 4 с з контрольного поста за ним рушила машина з постійним прискоренням, яка настигла порушника через 1 000 м. Через який час машина настигла порушника, чому дорівнювало її прискорення і швидкість в момент затримки порушника?
Відповідь: t = 50 с, a = 0,95 м/с^2, υ = 43,7 м/с.

8.4. Камінь, кинутий із моста, за умов вільного падіння досягає поверхні води через 2,5 с. За який час він досягне поверхні води, якщо кинути його вниз зі швидкістю 1 м/с?
Відповідь: t = 2,42 с.

8.5. Для визначення глибини ущелини в неї кидають камінь без початкової швидкості, одночасно вмикаючи секундомір. Звук від падіння каменя був зафіксований через 7,9 с. Визначити глибину ущелини, вважаючи швидкість звука в повітрі постійною і рівною 340 м/с.
Відповідь: h = 234 м.

8.6. Матеріальна точка рухається по колу радіуса R = 10 м, причому закон руху має вигляд

$$s = 10t - 2{,}5t^2 \text{ м.}$$

Визначити абсолютне прискорення точки в момент часу t = 0,5 с.
Відповідь: a = 7,53 м/с^2.

8.7. Повзун рухається по прямолінійній напрямній з прискоренням

$$a = -9{,}86\sin 1{,}57t \text{ м/с}^2.$$

Знайти рівняння руху повзуна, якщо його початкова швидкість дорівнює 6,28 м/с, а початкове положення співпадає з початком відліку.
Відповідь: x = 4sin1,57t м.

8.8. Шахтна кліть рухається зі швидкістю 12 м/с. Який шлях s після зупинки електродвигуна пройде кліть, якщо її прискорення дорівнює -1,2 м/с^2? Який час t вона буде рухатися до зупинки?
Відповідь: s = 60 м; t = 10 с.

8.9. Швидкість вертикального занурення підводного човна

$$u = 2\left(1 - e^{-4t}\right) \text{ м/с.}$$

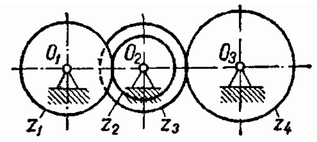
Визначити залежність відстані, пройденої підводним човном, від часу і прискорення човна, як функцію його швидкості.
Відповідь: $s = 2t - 0{,}5(1 - e^{-4t})$; $\upsilon = 4(2 - \upsilon)$ м/с.

8.10. Вал діаметра d = 60 см обертається рівномірно із частотою n = 1 200 об/хв. Визначити швидкість і прискорення точок вала на його поверхні.

Відповідь: υ = 3,77 м/с, a = 474 м/с^2.

8.11. Шестерні скріплені між собою і обертаються навколо паралельних нерухомих осей. Ведуча шестірня 1 обертається із кутовою швидкістю ω_1 = 1,57 рад/с. Знайти кутову швидкість ω_4 веденої шестерні і передаточне число u усього механізму. Кількість зубців на шестернях z_1 = 30, z_2 = 20, z_3 = 25, z_4 = 60.

Відповідь: ω_4 = 0,98 рад/с, u = 1,6.



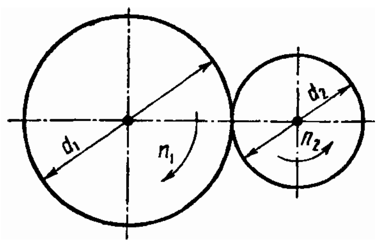
До задачі 8.11.

8.12. Вал починає обертатися рівноприскорено із стану спокою і за перші 14 с робить N = 120 обертів. З яким кутовим прискоренням обертається вал і яку кутову швидкість він отримав за цей час?

Відповідь: ε = 74,5 рад/с^2, ω = 249 м/с^2.

8.13. Каток фрикційної передачі діаметром d_1 = 420 мм обертається із частотою n_1 = 180 об/хв. Чому має дорівнювати діаметр другого катка, якщо його частота обертання n_2 = 600 об/хв? Визначити також прискорення точок на ободі кожного з катків.

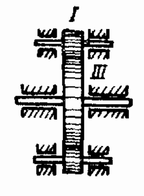
Відповідь: d_2 = 0,126 м, a_1 = 74,5 м/с^2, a_2 = 249 м/с^2.



До задачі 8.13.

8.14. Корабельний зубчастий редуктор складається з трьох коліс: перше має діаметр 20 см і обертається з частотою 7 200 об/хв, друге робить 4 000 об/хв, третє – 600 об/хв. Визначити діаметри другого і третього коліс.

Відповідь: d_2 = 0,036 м, d_3 = 0,24 м.



До задачі 8.14.

8.15. Махове колесо, яке оберталось із частотою 950 об/хв, при гальмуванні почало обертатися сповільнено і зупинилося через 30 с. Визначити кутове прискорення і кількість обертів, зроблених колесом до зупинки.

Відповідь: ε = - 3,31 рад/с^2, N = 237,6 обертів.

8.16. Визначити, за який час t конічне зубчасте колесо 1 радіуса r_1 = 20 мм отримає частоту обертання n_1 = 2 900 об/хв, якщо воно приводиться до руху із стану спокою зубчастим колесом 2 радіуса r_2 = 40 мм, яке обертається з кутовим прискоренням 2 рад/с^2.

Відповідь: t = 76,4 с.

До задачі 8.16.

8.17. Вал електродвигуна обертається згідно рівняння

$$j = 5t + 1{,}2t^3 \ (рад).$$

Визначити, за який час його кутова швидкість стане ω = 70 рад/с, чому в цей час буде дорівнювати кутове прискорення і скільки обертів зробить вал?
Відповідь: t = 4,3 с, ε = 30,6 рад/с^2, N = 18 обертів.

8.18. Електричний вентилятор, який обертався з кутовою швидкість 50 рад/с, після виключення струму зробив 40 обертів і зупинився. Скільки часу пройшло до моменту зупинки вентилятора і яким було його кутове прискорення, якщо рух вентилятора можна вважати рівносповільненим?
Відповідь: t = 12 с, ε = 5,23 рад/с^2.

8.19. Чому дорівнює початкова кутова швидкість шківа і його кутове прискорення, якщо обертаючись рівносповільнено, він зупинився через 8 с, зробивши при цьому 24 оберти?
Відповідь: ω_0 = 37,7 рад/с, ε = 4,7 рад/с^2.

8.20. Шків коливається навколо своєї осі згідно рівняння

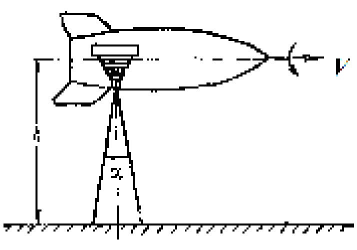
$$j = 2\sin pt \text{ рад.}$$

Визначити максимальну величину повного прискорення точки шківа, яка відстоїть від осі обертання на відстані 10 см.
Відповідь: a_{max} = 4,41 м/с^2.

8.21. Вантаж підіймається за допомогою мотузки, намотаної на блок радіуса r = 15 см без початкової швидкості з прискоренням a = 0,3 м/с^2 = const. Визначити кутове прискорення блока і нормальне прискорення точки на його поверхні через 5 с після початку руху.
Відповідь: ε = 2 рад/с^2, a_n = 15 м/с^2.

8.22. Штучний супутник обертається навколо Землі на висоті h = 500 км по коловій орбіті. Визначити час одного повного обертання і його швидкість, якщо його доцентрове прискорення дорівнює прискоренню вільного падіння на даній висоті (g = 8,5 м/с^2). Радіус Землі R = 6 370 км.
Відповідь: t = 5 616 с, υ = 7 640 м/с.

8.23. Пристрій для фотографування хмарного покрову Землі рухається горизонтально зі швидкістю 7 550 м/с на висоті 800 км і при цьому рівномірно обертається навколо власної осі. Оптична вісь перпендикулярна до осі апарату, знімок робиться кожен раз, коли об’єктив займає найнижче положення. З якою кутовою швидкістю має обертатися пристрій навколо своєї осі, аби при фотографуванні не перекривалися сусідні кадри, якщо кут зйомки α = 1°?
Відповідь: ω = 3,4 рад/с.



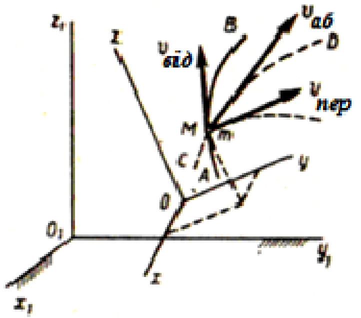
До задачі 8.23.

Глава 9. Складний рух матеріальної точки

9.1. Загальні визначення складного руху

Для дослідження найпростіших видів руху твердого тіла або точки достатньо однієї системи координат (декартової, полярної, циліндричної або сферичної). Але у ряді випадків для розв'язання задач є зручним розглядати рух точки або тіла по відношенню одночасно до двох систем координат, одна з яких нерухома, а друга рухається певним чином по відношенню до першої.

Розглянемо точку *M*, яка довільним чином рухається по відношенню до системи відліку *Oxyz*. Ця система, у свою чергу, рухається відносно нерухомої системи відліку $O_1x_1y_1z_1$ (рис. 9.1).



Відносний рух - рух, що здійснює точка *M* по відношенню до рухомої системи координат *Oxyz*. Такий рух бачить спостерігач, який переміщається разом з цією системою. Швидкість і прискорення точки *M* по відношенню до системи відліку *Oxyz* будуть відносною швидкістю і відносним прискоренням відповідно. При обчисленні відносної швидкості і прискорення рух осей *Oxyz* до уваги не беруть.

Рис. 9.1. Складний рух точки.

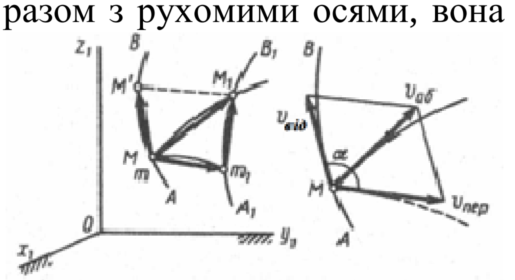
Переносний рух – рух рухомої системи *Oxyz* (або незмінно пов'язаного з нею тіла) відносно нерухомої системи відліку $O_1x_1y_1z_1$. Тоді переносні швидкість і прискорення – це швидкість і прискорення довільної точки *M*, незмінно зв'язаної з рухомою системою *Oxyz*, відносно нерухомої системи.

Абсолютний (складний) рух – рух, що здійснюється точкою *M* по відношенню до нерухомої системи відліку $O_1x_1y_1z_1$. Траєкторія *CD* цього руху буде абсолютною траєкторією, швидкість і прискорення точки *M* по відношенню до нерухомої системи – це абсолютні швидкість і прискорення.

Основна задача складного руху точки: визначення залежностей між кінематичними характеристиками абсолютного, переносного і відносного рухів.

9.2. Теорема про додавання швидкостей

Нехай точка *M* при русі здійснила відносне переміщення уздовж траєкторії *AB*, визначуване вектором *MM'* (рис. 9.2). Крім того, рухаючись разом з рухомими осями, вона перейшла в нове положення A_1B_1. В результаті



точка отримала абсолютне переміщення MM_1.

Теорема про додавання швидкостей: при складному русі абсолютна швидкість точки дорівнює геометричній сумі відносної і переносної швидкостей:

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_{від} + \boldsymbol{v}_{пер}. \tag{9.1}$$

Рис. 9.2. Теорема про додавання швидкостей.

Вектори відносної і переносної швидкостей спрямовані по дотичних до своїх траєкторій, а абсолютна швидкість визначається за правилом паралелограма. У аналітичному виді модуль абсолютної швидкості визначається по формулі:

$$u = \sqrt{u_{від}^2 + u_{пер}^2 + 2u_{від}u_{пер}\cos\alpha}\ , \quad (9.2)$$

де α - кут між векторами відносної і переносної швидкостей.

9.3. Теорема про додавання прискорень (Коріоліса)

Для знаходження абсолютного прискорення точки при складному русі диференціюємо рівняння (9.1)

$$\boldsymbol{a} = \frac{d\boldsymbol{v}_{від}}{dt} + \frac{d\boldsymbol{v}_{пер}}{dt} = \boldsymbol{a}_{від} + \boldsymbol{a}_{пер} + 2\boldsymbol{\omega}_{пер} \times \boldsymbol{v}_{від}\,. \quad (9.3)$$

Відносне прискорення $\boldsymbol{a}_{від}$ характеризує зміну відносної швидкості тільки при відносному русі. Рух осей *Oxyz*, тобто переносний рух, при цьому до уваги не беруть.

Переносне прискорення $\boldsymbol{a}_{пер}$ характеризує зміну переносної швидкості тіла, незмінно зв'язаного з рухомою системою відліку *Oxyz*, в процесі його переносного руху. Відносний рух при цьому до уваги не беруть.

Коріолісове (поворотне) прискорення – подвоєний векторний добуток переносної кутової швидкості рухомої системи на відносну швидкість точки

$$\boldsymbol{a}_{кор} = 2(\boldsymbol{\omega}_{пер} \times \boldsymbol{v}_{від}). \quad (9.4)$$

Прискорення Коріоліса характеризує зміну відносної швидкості точки при її переносному русі і зміну переносної швидкості точки при її відносному русі.

Теорема Коріоліса: абсолютне прискорення точки при складному русі дорівнює геометричній сумі відносного, переносного і коріолісова прискорень.

9.4. Визначення модуля і напрямку прискорення Коріоліса

Модуль коріолісова прискорення згідно властивостей векторного добутку буде дорівнювати

$$a_{кор} = 2|\omega_{пер}|\cdot|\upsilon_{від}|\cdot sin\alpha, \quad (9.5)$$

де α – кут між векторами $\boldsymbol{\omega}_{пер}$ і $\boldsymbol{v}_{від}$.

Вектор коріолісова прискорення перпендикулярний площині, яка проходить через вектори $\boldsymbol{\omega}$ і $\boldsymbol{v}_{від}$ (рис. 9.3). Напрям прискорення Коріоліса зручніше знаходити за **правилом Жуковського**: щоб знайти напрям коріолісова прискорення, слід спроектувати відносну швидкість точки $\boldsymbol{v}_{від}$ на площину, перпендикулярну осі переносного обертання, і повернути цю проекцію на 90° у бік переносного обертання.

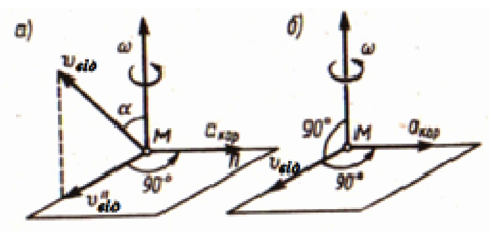


Рис. 9.3. Визначення напряму $a_{кор}$ за правилом Жуковського.

Якщо відносна траєкторія – це плоска крива, яка переміщується увесь час у своїй площині, то кут α = 90°, і тоді модуль коріолісова прискорення

$$a_{кор} = 2|\omega_{пер}|\cdot|\upsilon_{від}|.$$

В такому випадку напрям вектора коріолісова прискорення можна знайти, повернувши вектор відносної швидкості на 90° у напрямк0443 переносного обертання.

Випадки **перетворення в нуль** прискорення Коріоліса:
1. Коли переносний рух рухомої системи координат *Oxyz* є поступальним, тобто

$$\boldsymbol{\omega}_{пер} = 0.$$

2. Коли відносна швидкість в даний момент перетворюється на нуль, тобто

$$\boldsymbol{\upsilon}_{від} = 0.$$

3. Коли відносний рух відбувається по напряму, паралельному до осі обертання переносного руху, тобто вектори $\boldsymbol{\omega}_{пер}$ і $\boldsymbol{\upsilon}_{від}$ є колінеарними

$$\alpha = 0 \text{ або } \alpha = 180°.$$

В усіх цих випадках абсолютне прискорення визначається по формулі:

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_{від} + \boldsymbol{a}_{пер}.$$

Коріолісове прискорення характеризує зміну відносної швидкості точки через переносний непоступальний рух і зміну модуля і напряму переносної швидкості через її відносний рух.

Коріолісове прискорення отримують усі точки і тіла, які рухаються по поверхні Землі, оскільки обертання Землі є для них переносним рухом. Так кориолисове прискорення викликає додаткові рухи часток води: до правого берега в північній півкулі і до лівого берега в південній (закон Бера). Тому в північній півкулі лівий берег є крутим, а правий – пологим незалежно від напрямку течії ріки.

Коріолісовим прискоренням також обумовлене переважне стирання правої рейки залізничних колій у північній півкулі і лівої – у південній. Але таке явище можна фіксувати лише у двоколійних залізних дорогах, де рух потягів по даній колії завжди в одному напрямку. Переважне стирання рейки має місце незалежно від напряму прокладання дороги.

Оскільки кутова швидкість переносного руху (обертання Землі) невелика

$$w = \frac{j}{t} = \frac{2p}{24 \cdot 60 \cdot 60} = 0{,}000073\left(\frac{рад}{с}\right),$$

то дію прискорення Коріоліса можна визначити або за великих відносних швидкостей руху, або коли ця дія має місце протягом тривалого часу.

В північній півкулі поворотне прискорення викликає відхилення тіл, які вільно падають, до сходу. Приміром, при падінні на широті 45° з висоти у 80 м тіло зміститься на схід приблизно на 3 см.

Наявність поворотної сили, викликаної обертанням Землі, призводить до того, що сила тяжіння тіла і сила його ваги відрізняються саме на величину сили Коріоліса. Крім того, виникає поворотна сила, викликана обертанням Землі навколо Сонця, але вона значно менша за поворотну силу від добового обертання, тому її до уваги не беруть.

Питання для самоконтролю

1. У яких випадках необхідно розглядати рух точки як складний?
2. У чому полягає основна задача складного руху?
3. Як визначається абсолютна швидкість точки при складному русі?
4. Назвіть фізичні причини виникнення коріолісова прискорення.
5. В яких випадках прискорення Коріоліса дорівнює нулю?

Завдання № 9. «Складний рух матеріальної точки»

Рекомендації до розв'язання задач

А. Розв'язання задач на теорему про складання швидкостей.

1. Розкласти рух на складові, визначити абсолютний, переносний і відносний рухи.
2. Обрати дві системи координат – абсолютну, яка вважається умовно нерухомою, і рухому.
3. Подумки зупинити переносний рух і знайти швидкість відносного руху точки.
4. Не звертаючи уваги на відносний рух знайти швидкість переносного руху точки.
5. Визначити абсолютну швидкість точки за допомогою теореми (9.1).

Б. Розв'язання задач на теорему про складання прискорень.

1. Розкласти рух на складові, визначити абсолютний, переносний і відносний рухи.
2. Обрати дві системи координат – абсолютну, яка вважається умовно нерухомою, і рухому.
3. Подумки зупинити переносний рух і знайти швидкість і прискорення відносного руху точки.
4. Не звертаючи уваги на відносний рух знайти кутову швидкість і прискорення переносного руху точки.
5. Визначити прискорення Коріоліса по формулі (9.5).
6. За допомогою метода проекцій визначити проекції абсолютного прискорення точки на координатні осі.
7. Визначити абсолютну швидкість точки та її напрямок за допомогою знайдених проекцій на координатні осі.

Приклад розв'язання задачі

Задача 1. Круглий циліндр радіуса R = 30 см обертається навколо вертикальної осі $0z$ з кутовою швидкістю, які змінюється по закону

$$w = 0{,}5t^2 \ \ (\frac{рад}{c}).$$

По гвинтовому пазу на поверхні циліндра рухається точка M, причому довжина її траєкторії MM_0 змінюється по закону

$$s = 0{,}2t^2 \ \ (м).$$

Дотична до гвинтової лінії складає кут γ = 30° з твірною циліндра. Визначити абсолютну швидкість і абсолютне прискорення точки в момент часу t = 5 с.

Розв'язання

1. Визначення модуля і напрямку абсолютної швидкості.

Визначимо складові руху точки M в даній задачі. Переносним рухом буде обертання точки разом з циліндром навколо осі z з кутовою швидкістю ω. Для описання переносного руху оберемо рухому систему координат Ox_1y_1z.

Переносна швидкість при обертальному русі завжди направлена по дотичній до траєкторії в сторону обертання і знаходиться по формулі

$$u_{пер} = wR = 0{,}5t^2 \cdot R = 0{,}5 \cdot 25 \cdot 0{,}3 = 3{,}8 \left(\frac{м}{с^2} \right).$$

Подумки зупиняємо переносний рух системи. Відносним рухом буде рух точки *M* по гвинтовому пазу умовно нерухомого циліндра. Відносну швидкість визначимо як першу похідну від дугової координати

$$u_{від} = \frac{ds}{dt} = \frac{d\left(0{,}2t^2\right)}{dt} = 0{,}4t = 0{,}4 \cdot 5 = 2 \left(\frac{м}{с} \right).$$

Відносна швидкість спрямована по дотичній до гвинтової лінії (рис. 9.4).

Напрямок абсолютної швидкості знайдемо за правилом паралелограма, а її модуль визначимо по формулі

$$u = \sqrt{u_{пер}^2 + u_{від}^2 + 2u_{пер}u_{від}\cos a} =$$

$$= \sqrt{3{,}8^2 + 2^2 + 2 \cdot 3{,}8 \cdot 2 \cdot \cos 60°} = 5{,}1 \,(м/с),$$

де $\alpha = 90° - \gamma = 60°$ – кут між векторами відносної і переносної швидкості.

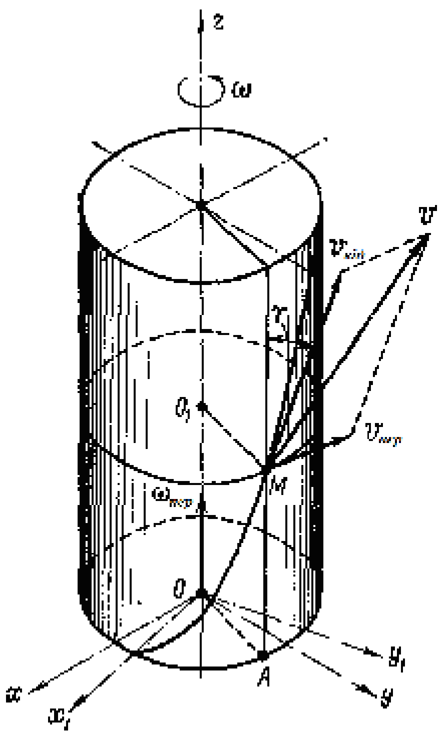


Рис. 9.4. До визначення абсолютної швидкості.

2. Визначення модуля і напрямку абсолютного прискорення.

Визначимо модуль кутового прискорення переносного руху точки *M* (обертання навколо осі *z*) в заданий момент часу

$$e = \frac{dw}{dt} = \frac{d\left(0{,}5t^2\right)}{dt} = t = 5 \left(\frac{рад}{с^2} \right).$$

При нерівномірному обертанні матеріальної точки навколо нерухомої осі її прискорення має дві складові – дотичну і нормальну

$$\boldsymbol{a}_{пер} = \boldsymbol{a}_{пер}^{t} + \boldsymbol{a}_{пер}^{n}.$$

Дотична складова переносного прискорення характеризує зміну переносної швидкості за величиною, вона спрямована по дотичній до кругового перерізу циліндра, а її модуль визначається по формулі

$$a_{пер}^{t} = eR = 5 \cdot 0{,}3 = 1{,}5 \,\left(м/с^2\right).$$

Нормальна складова переносного прискорення характеризує зміну переносної швидкості за напрямом, вона спрямована по радіусу до центра циліндра, а її модуль визначається по формулі

$$a_{пер}^{n} = \frac{u_{пер}^2}{R} = \frac{3{,}8^2}{0{,}3} = 48{,}1 \,\left(м/с^2\right).$$

Відносне прискорення матеріальної точки також має дві складові – дотичну і нормальну

$$\boldsymbol{a}_{від} = \boldsymbol{a}_{від}^{t} + \boldsymbol{a}_{від}^{\boldsymbol{n}}.$$

Дотична складова відносного прискорення характеризує зміну величини відносної швидкості точки при русі по гвинтовому пазу, вона спрямована по дотичній до гвинтової лінії, а її модуль визначається по формулі

$$a_{від}^{t} = \frac{du_{від}}{dt} = \frac{d(0{,}4t)}{dt} = 0{,}4 \ (\text{м/с}^2).$$

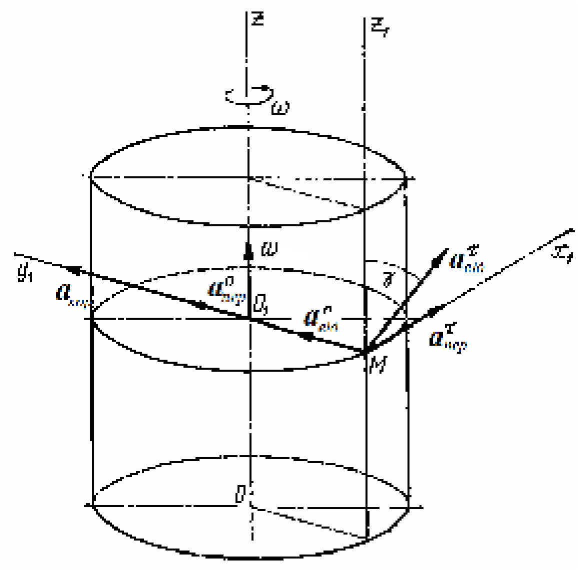


Рис. 9.5. До визначення абсолютного прискорення.

Нормальна складова відносного прискорення характеризує зміну відносної швидкості за напрямом, вона спрямована по радіусу до центра циліндра, а її модуль визначається по формулі

$$a_{від}^{n} = \frac{u_{від}^{2}}{r} = \frac{u_{від}^{2}}{4R} = \frac{2^2}{4 \cdot 0{,}3} = 0{,}33 \left(\frac{\text{м}}{\text{с}^2}\right),$$

де ρ – радіус кривини гвинтової лінії, який визначається по формулі

$$r = \frac{R}{\sin^2 g} = \frac{R}{\sin^2 30°} = \frac{R}{(1/2)^2} = 4R.$$

Оскільки вектори переносної кутової швидкості і відносної швидкості не паралельні, а утворюють кут γ, то буде мати місце коріолісове прискорення, модуль якого визначається по формулі (9.7)

$$a_{кор} = 2wu_{від}\sin g = 2 \cdot 0{,}5t^2 \cdot 2\sin 30° = 2 \cdot 0{,}5 \cdot 25 \cdot 2 \cdot 1/2 = 25 \ (\text{м/с}^2).$$

Аби визначити напрям прискорення Коріоліса, треба спроектувати вектор відносної швидкості на горизонтальну площину, після чого повернути на 90° проти годинникової стрілки. Прискорення Коріоліса буде спрямоване по радіусу циліндра у тому ж напрямку, що й два нормальні прискорення.

Згідно теореми Коріоліса про складання прискорень маємо

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_{від} + \boldsymbol{a}_{пер} + \boldsymbol{a}_{кор} = \boldsymbol{a}_{від}^{n} + \boldsymbol{a}_{від}^{t} + \boldsymbol{a}_{пер}^{n} + \boldsymbol{a}_{пер}^{t} + \boldsymbol{a}_{кор}.$$

Для знаходження модуля абсолютного прискорення спроектуємо всі складові прискорень на осі системи координат Ox_1y_1z:

$$a_x = a_{від}^{t}\cos(90° - g) + a_{пер}^{t} = 0{,}4 \cdot \cos 60^0 + 1{,}5 = 1{,}7 \ (\text{м/с}^2);$$

$$a_y = a_{від}^{n} + a_{пер}^{n} + a_{кор} = 0{,}33 + 48{,}1 + 25 = 73{,}43 \ (\text{м/с}^2);$$

$$a_z = a_{від}^{t}\cos g = 0{,}4 \cdot \cos 30^0 = 0{,}35 \ (\text{м/с}^2).$$

Модуль абсолютного прискорення знайдемо по теоремі Піфагора

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{1{,}7^2 + 73{,}43^2 + 0{,}35^2} = 73{,}45 \ (\text{м/с}^2).$$

Задачу розв'язано.

Завдання № 9 до РГР

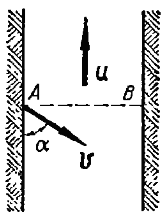
9.1. Вниз за течією ріки рухається човен із власною швидкістю 4 км/год. Швидкість течії ріки 2 км/год. Визначити швидкість човна відносно берега і відстань, яку пройде човен вздовж берега за 20 хвилин.
Відповідь: υ = 6 км/год, s = 2 км.

9.2. Відстань у 60 км між двома портами на річці корабель проходить без зупинки за течією за t_1 = 2 години, проти течії – за t_2 = 4 години. Визначити швидкість течії річки і власну швидкість корабля.
Відповідь: $\upsilon_{теч}$ = 7,5 км/год, $\upsilon_{кор}$ = 22,5 км/год.

9.3. Каплі дощу при вертикальному падінні залишають на склі вагона потяга сліди під кутом α = 30° до вертикалі. Визначити, з якою швидкістю падають каплі, якщо швидкість потяга в даний момент $\upsilon_{пот}$ = 11 м/с.
Відповідь: υ = 18,5 м/с.

9.4. Пасажир потягу, який рухається зі швидкістю 140 км/год, протягом 6 с спостерігав зустрічний потяг довжиною 400 м. Визначити швидкість зустрічного потягу.
Відповідь: υ = 100 км/год.

9.5. Човен перепливає річку шириною 235 м, тримаючи курс під кутом α відносно берега. Через 150 с він пристає до точки B, яка лежить на прямій AB, перпендикулярній до берега. Визначити кут α і швидкість човна відносно води, якщо швидкість течії 3,25 м/с постійна по всій ширині річки.
Відповідь: α = 60°, υ = 1,8м/с.

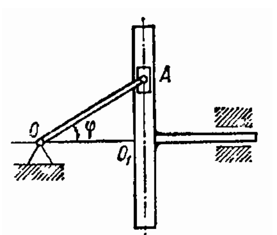


До задачі 9.5.

9.6. Кривошип *OA* довжиною 12 см обертається по закону

$$j = \frac{pt^2}{3} \ (рад),$$

чим приводить до руху кулісу. Визначити швидкість куліси і швидкість повзуна *A* відносно куліси в момент часу t = 5 с.
Відповідь: $\upsilon_к$ = 1,09 м/с, υ_A = 0,63 м/с.

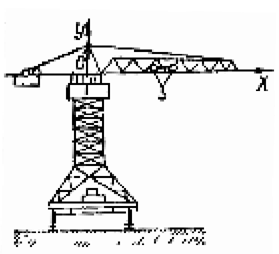


До задачі 9.6.

9.7. Візок рухається по стрілі крану згідно рівняння

$$x = 20\sin^2 0{,}08t \ (м).$$

Визначити абсолютну швидкість візка в момент часу t = 10 с, якщо стріла крану обертається навколо вертикальної осі з кутовою швидкістю ω = 0,08 рад/с.
Відповідь: υ = 1,76 м/с.



До задачі 9.7.

9.8. Обертання диску навколо власної осі відбувається по закону

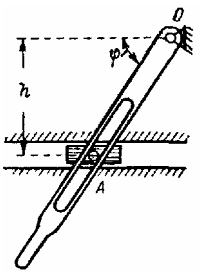
$$j = 1{,}5t^2 \ \ (рад).$$

В той же час, уздовж радіуса диску по напрямку від центру до ободу рухається матеріальна точка *M*, причому її рух відносно диску задається рівнянням

$$s = \left(1 + t^2\right) \ (см).$$

Визначити абсолютну швидкість цієї точки в момент часу t = 1 с.
Відповідь: v = 6,32 см/с.

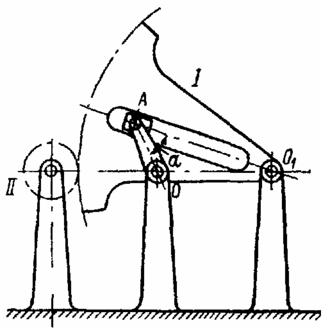
9.9. Повзун *A* переміщується по прямолінійним напрямним за допомогою важеля, який обертається навколо нерухомої осі *O*. Визначити швидкість повзуна, як функцію кута повороту важеля φ, якщо в даний момент його кутова швидкість ω, а відстань від осі *O* до напрямних дорівнює h.



Відповідь: $u = \dfrac{wh}{\sin^2 j}$.

До задачі 9.9.

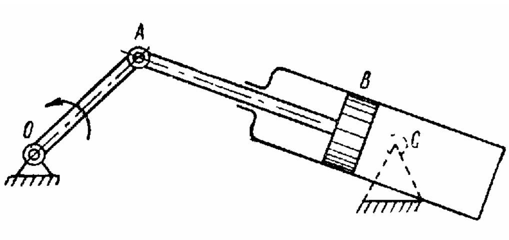
9.10. Реверсивна передача з зубчастим сектором радіуса R = 60 см приводиться до руху кривошипом *OA*, який обертається навколо нерухомої осі *O* з постійною кутовою швидкістю ω = 5 рад/с. Цапфа *A* кривошипу ковзає по коливній кулісі. Визначити кутову швидкість колеса *II* радіуса r = 10 см в момент, коли $\alpha = 30°$, якщо OO_1 = 1,5 *OA*.



Відповідь: ω = 11,4 рад/с.

До задачі 9.10.

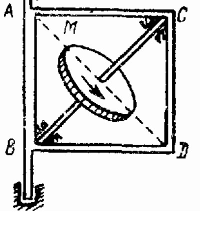
9.11. В поршневому двигуні з коливним циліндром кривошип *OA* обертається з частотою 300 об/хв. Визначити величину прискорення Коріоліса в той момент, коли кривошип і циліндр утворюють з горизонталлю кути 30° і 15° відповідно. Рухому систему координат зв'язати з циліндром.



Відповідь: $a_{кор}$ = 51,1 м/с^2.

До задачі 9.11.

9.12. Квадратна рама із стороною a = 10 см обертається навколо осі *AB* с постійною кутовою швидкістю ω_1 = 5 рад/с. Навколо осі *BC*, яка співпадає з діагоналлю рами, обертається диск радіуса R = 3,5 см з постійною кутовою швидкістю ω_2 = 7 рад/с. Визначити абсолютне прискорення точки *M*, яка в даний момент часу знаходиться на диску в площині рами.



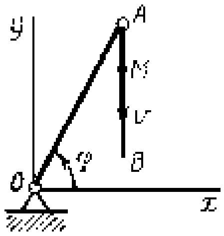
Відповідь: a = 3,36 м/с^2.

До задачі 9.12.

9.13. Кривошип *OA* = 15 см обертається навколо горизонтальної осі по закону

$$j = pt\ \left(рад\right).$$

По вертикальному стержню *AB*, шарнірно з’єднаному з кривошипом, рухається



точка *M*, швидкість якої змінюється по закону

$$u = 1{,}5t\ \left(м/с\right).$$

Визначити абсолютну швидкість, абсолютне і коріолісове прискорення точки *M* в момент часу t = 1 с.

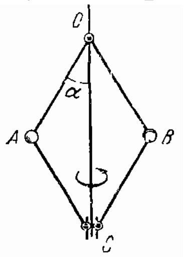
Відповідь: υ = 1,95 м/с, $a_{кор}$ = 0 м/с^2, a = 2,10 м/с^2.

До задачі 9.13.

9.14. При пуску головного корабельного двигуна кулі відцентрового регулятора Ватта розходяться на кут *α*, який змінюється по закону

$$a = 0{,}035t + 0{,}0017t^2\ \ \left(рад\right).$$

Кут повороту регулятора навколо власної осі також є функцією часу



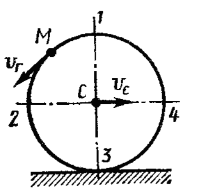
$$j = 0{,}3t^3\ \ (рад).$$

Визначити абсолютні швидкість і прискорення куль регулятора, вважаючи їх матеріальними точками, якщо довжина стержнів *OA* = *OB* = *AC* = *BC* = 0,9 м.

Відповідь: υ = 40,5 м/с, a = 3 646 м/с^2.

До задачі 9.14.

9.15. Колесо котиться без ковзання по прямолінійній рейці, швидкість його

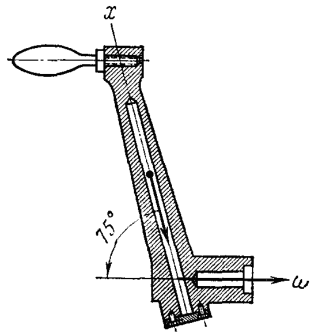


центру постійна і дорівнює υ_C = 2 м/с. По ободу колеса рухається матеріальна точка *M* з постійною по модулю швидкістю υ = 3 м/с. Знайти абсолютну швидкість точки *M* в чотирьох положеннях, вказаних на рисунку.

Відповідь: υ_1 = 1 м/с, υ_2 = 1 м/с, υ_3 = 3 м/с, υ_4 = 5 м/с.

До задачі 9.15.

9.16. По всій довжині ручки молочного сепаратора просвердлений циліндричний канал, в який поміщено сигнальну кульку. При недостатній



частоті обертання ручки кулька б’ється о дзвоник, який закриває канал знизу. Визначити прискорення Коріоліса кульки, якщо ручка нахилена до власної осі обертання під кутом 75° і має частоту обертання *n* = 45 об/хв. Кулька рухається по каналу по закону

$$x = 0{,}22\sin j + 0{,}36e^{-j}\ \ \left(м\right).$$

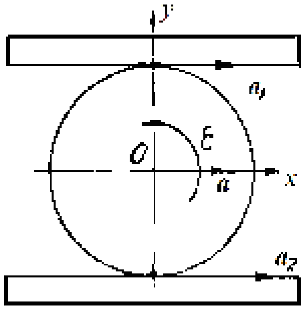
Відповідь: $a_{кор} = 9{,}42\cos j - 15{,}3e^{-j}\ \ \left(м\right).$

До задачі 9.16.

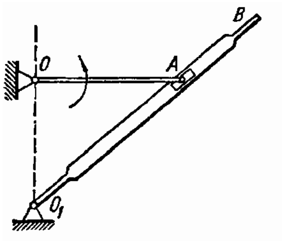
9.17. Залізничний потяг рухається рівномірно зі швидкістю 36 км/год. Під час руху зривається з кронштейна сигнальний ліхтар, підвішений до останнього вагону. Визначити траєкторію руху ліхтаря і відстань *s*, яку пройде потяг за час

його падіння, якщо ліхтар знаходився на висоті 4,9 м. Вісі координат провести через початкове положення ліхтаря: Оx – в напрямку руху потягу, Оy – вертикально вниз.
Відповідь: y = 0,049x^2, s = 10 м.

9.18. Зубчасте колесо радіуса R = 0,5 м затиснуте між двома паралельними рейками, які ковзають в один і той же бік з прискореннями a_1 = 1,5 м/с^2 і a_2 = 2,5 м/с^2. Знайти прискорення центра колеса O і його кутове прискорення. Прямолінійний рух системи координат разом із центром O вважати переносним.
Відповідь: a = 2 м/с^2, ε = 1 рад/с^2.


До задачі 9.18.

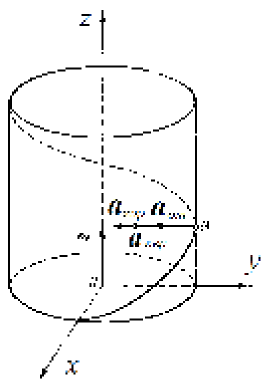
9.19. Кривошип OA кулісного механізму обертається з постійною кутовою швидкістю ω = 3,38 рад/с, приводячи до руху повзун A і кулісу O_1B. Визначити відносне прискорення повзуна і кутове прискорення куліси в момент, коли OA перпендикулярно до OO_1, якщо OA = 10 см, OO_1 = 24 см.
Відповідь: a = 0,37 м/с^2, ε = 2,86 рад/с^2.


До задачі 9.19.

9.20. Циліндр обертається навколо осі z с постійною кутовою швидкістю ω_z = 2 рад/с. По поверхні циліндра рухається точка M, рівняння руху якої задані координатним способом

$$x_1 = 3\cos 2t,\ \ y = 3\sin 2t,\ \ z = 3t$$

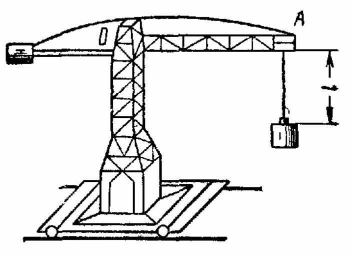
відносно осей рухомої системи координат, яка обертається разом з циліндром. Визначити абсолютну швидкість і абсолютне прискорення точки M, якщо вісь z_1 співпадає із віссю симетрії циліндра.
Відповідь: υ = 25,5 м/с, a = 206,5 м/с^2.


До задачі 9.20.

9.21. Кран рухається по прямолінійним рейкам із прискоренням a = 0,5 м/с^2 і одночасно обертається навколо власної осі з кутовою швидкістю ω = 0,5 рад/с. Довжина частини троса, що звисає з стріли крана, змінюється по закону

$$l = 15 - t^2\ \ (м).$$

Виліт крану OA дорівнює R = 8 м. Визначити абсолютне прискорення вантажу в момент, коли стріла крана паралельна рейкам.
Відповідь: a = 4,03 м/с^2.


До задачі 9.21.

Глава 10. Плоскопаралельний рух твердого тіла

10.1. Рівняння плоскопаралельного руху

Плоскопаралельний (плоский) – рух твердого тіла, при якому усі його точки рухаються паралельно деякій фіксованій площині *Oxy*. Плоский рух здійснюють багато частин машин (шатун в кривошипно-шатунному механізмі, колесо на прямолінійній ділянці і так далі). Обертання твердого тіла є частковим випадком плоскопаралельного руху.

Для вивчення руху усього тіла досить розглянути рух плоского перерізу *S*, паралельного фіксованій площині *Oxy*.

Положення усієї фігури *S* визначається положенням проведеного на ній відрізку *AB* (рис. 10.1). Положення самого відрізку можна визначити, знаючи координати x_A і y_A точки *A* і кут φ, утворений відрізком з віссю *x*. Точку *A*, яку обрали для визначення положення відрізку, називають *полюсом*.

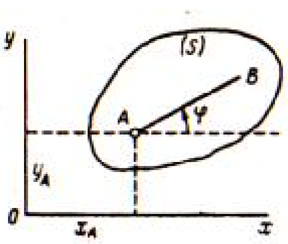


Рис. 10.1. Плоскопаралельний рух тіла.

При русі тіла координати точки *A* і кут φ змінюються, тому рівняння плоскопаралельного руху має вигляд

$$x_A = f(t), y_A = f(t), \varphi = f(t). \qquad (10.1)$$

Перші два рівняння описують поступальний рух точки *A* (φ = const), а третє рівняння описує обертання твердого тіла навколо нерухомого полюса *A* (x_A і y_A = const).

Висновок: плоскопаралельний рух довільної точки *M* можна розглядати як два одночасні рухи: поступальний зі швидкістю полюса *A*, і обертальний навколо цього полюса.

Кінематичними характеристиками плоского руху є швидкість $\boldsymbol{v}_A$ і прискорення $\boldsymbol{a}_A$ поступального руху полюса, а також кутова швидкість $\boldsymbol{\omega}$ і кутове прискорення $\boldsymbol{\varepsilon}$ обертального руху тіла навколо полюса. При вивченні руху за полюс можна приймати будь-яку точку фігури, оскільки обертова частина руху від вибору полюса не залежить.

10.2. Швидкості точок тіла при плоскопаралельному русі

Положення будь-якої точки *M* фігури визначається радіус-вектором $\boldsymbol{r}$

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_A + \boldsymbol{r}',$$

де $\boldsymbol{r}_A$ – радіус-вектор полюса *A*, $\boldsymbol{r}'$ - вектор, який визначає положення точки *M* в рухомій системі координат *Ox′y′*, незмінно пов'язаній із полюсом *A* (рис. 10.2).

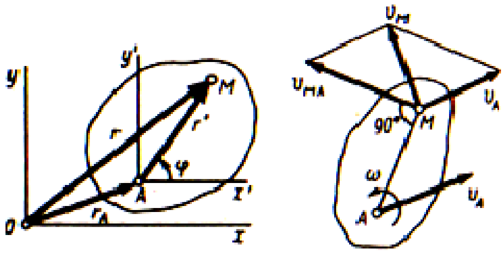


Рис. 10.2. Швидкість при плоскому русі.

Тоді швидкість точки *M*

$$\boldsymbol{v}_M = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{r}_A}{dt} + \frac{d\boldsymbol{r}'}{dt} \rightarrow \boldsymbol{v}_M = \boldsymbol{v}_A + \boldsymbol{v}_{MA}. \qquad (10.2)$$

Висновок: швидкість будь-якої точки M плоскої фігури дорівнює геометричній сумі швидкості $\boldsymbol{v}_A$ поступального руху полюса A і швидкості $\boldsymbol{v}_{MA}$, яку отримує точка M при обертанні всієї фігури навколо цього полюса.

Швидкість, яку отримує точка M при обертанні фігури

$$\boldsymbol{v}_{MA} = \boldsymbol{\omega} \cdot MA, \tag{10.3}$$

де ω – кутова швидкість обертання фігури навколо полюса A, перпендикулярна до радіус-вектора $\boldsymbol{r}$. Модуль і напрям швидкості v_M знаходяться за правилом паралелограма (рис. 10.2).

Теорема про швидкості двох точок: при плоскопаралельному русі проекції швидкостей будь-яких двох точок твердого тіла на пряму, яка проходить через ці точки, дорівнюють одна одній.

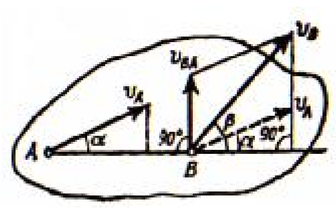
Доведення.

Нехай A і B – довільні точки плоскої фігури, яка здійснює плоскопаралельний рух (рис. 10.3). Приймемо точку A за полюс, тоді швидкість точки B

$$\boldsymbol{v}_B = \boldsymbol{v}_A + \boldsymbol{v}_{BA}. \tag{10.4}$$

Проектуємо цей вираз на пряму AB (вектор швидкості $\boldsymbol{v}_{\mathrm{BA}}$ перпендикулярний прямій AB, тому його проекція дорівнює нулю). Остаточно отримуємо:

$$u_A \cdot \cos a = u_B \cdot \cos b.$$



Якби теорема не виконувалася, то відстань між точками A і B в процесі руху змінювалася, що неможливо для абсолютно твердого тіла. Тому теорема справедлива за будь-якого руху твердого тіла.

Рис. 10.3. Теорема про швидкості двох точок.

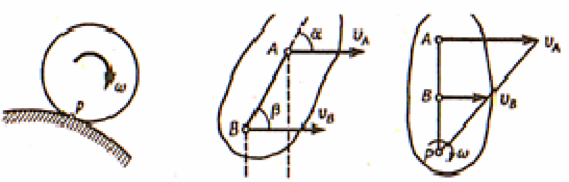
10.3. Миттєвий центр швидкостей, його знаходження

Миттєвий центр швидкостей - точка плоскої фігури, швидкість якої в даний момент дорівнює нулю. Ця точка знаходиться на перетині миттєвої осі обертання з площиною руху. Якщо фігура рухається непоступально, то така точка існує, притому єдина.

Окремі випадки визначення миттєвого центру швидкостей:

а) Кочення одного циліндричного тіла по поверхні іншого (рис. 10.4, зліва). В даному випадку миттєвим центром швидкостей є точка P контакту тіла, що котиться, і нерухомої поверхні. За відсутності ковзання її швидкість дорівнюватиме нулю.

б) Якщо швидкості точок A і B паралельні (рис. 10.4, справа), але лінія AB не перпендикулярна до напрямів цих швидкостей, то миттєвий центр швидкостей лежить в нескінченності. Швидкості усіх точок тіла однакові за величиною і напрямом, значить має місце випадок миттєвого поступального руху.



в) Якщо швидкості точок A і B паралельні, а лінія AB перпендикулярна до напрямків цих швидкостей, то положення миттєвого центра швидкостей визначається побудовою, як показаною на рис. 10.4.

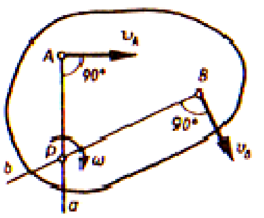
Рис. 10.4. Знаходження миттєвого центра швидкостей.

Висновок: для визначення миттєвого центру швидкостей необхідно знати напрями швидкостей будь-яких двох точок плоскої фігури.

Якщо відоме положення миттєвого центру швидкостей, то зручно прийняти його за полюс при визначенні швидкостей інших точок. Знаходимо швидкість точки *A* (рис. 10.5)

$$\boldsymbol{\upsilon}_A = \boldsymbol{\upsilon}_P + \boldsymbol{\upsilon}_{PA} = \boldsymbol{\upsilon}_{PA}, \tag{10.5}$$

оскільки швидкість полюса дорівнює нулю. Аналогічний результат виходить для будь-якої іншої точки фігури. Тому, швидкості точок плоскої фігури визначаються в даний момент так, якби рух фігури був обертанням навколо миттєвого центру швидкостей.



$$\boldsymbol{\upsilon}_A = \boldsymbol{\omega} \cdot PA; \;\; \boldsymbol{\upsilon}_B = \boldsymbol{\omega} \cdot PB \Rightarrow \frac{\boldsymbol{\upsilon}_A}{PA} = \frac{\boldsymbol{\upsilon}_B}{PB}.$$

Швидкості точок плоскої фігури пропорційні їх відстаням від миттєвого центру швидкостей.

Рис. 10.5. Визначення швидкостей точок за допомогою миттєвого центру швидкостей.

Висновки:

а) для визначення швидкості будь-якої точки плоскої фігури необхідно знати модуль і напрям швидкості однієї точки і напрям швидкості іншої точки.

б) кутова швидкість плоскої фігури у будь-який момент часу дорівнює відношенню швидкості точки до її відстані від миттєвого центру швидкостей.

в) в механізмі з декількох ланок, які рухаються непоступально, кожна ланка в даний момент часу має свій миттєвий центр швидкостей і свою кутову швидкість.

10.4. Визначення прискорень точок тіла при плоскопаралельному русі

Теорема: прискорення будь-якої точки *M* плоскої фігури геометрично складається з прискорення полюса *A* і прискорення, яке отримує точка *M* при обертанні навколо цього полюса

$$\boldsymbol{a}_M = \frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = \frac{d^2\boldsymbol{r}_A}{dt^2} + \frac{d^2\boldsymbol{r}^{`}}{dt^2} = \boldsymbol{a}_A + \boldsymbol{a}_{MA}. \tag{10.6}$$

Прискорення точки тіла при обертальному русі є геометричною сумою нормального і дотичного прискорень (рис. 10.6)

$$\boldsymbol{a}_{\mathrm{M}} = \boldsymbol{a}_{\mathrm{A}} + \boldsymbol{a}^{\tau}_{MA} + \boldsymbol{a}^{n}_{MA}.$$

Дотичне і нормальне прискорення визначаються по формулах

$$\boldsymbol{a}^{\tau}_{MA} = MA\cdot\boldsymbol{\varepsilon}, \qquad \boldsymbol{a}^{n}_{MA} = MA\cdot\boldsymbol{\omega}^2.$$

Модуль і напрям прискорення $\boldsymbol{a}_{MA}$ визначають по теоремі Піфагора

$$a_{MA} = \sqrt{\left(\boldsymbol{a}^{t}_{MA}\right)^2 + \left(\boldsymbol{a}^{n}_{MA}\right)^2} = MA\sqrt{e^2 + w^4}. \tag{10.7}$$

Якщо полюс *A* рухається не прямолінійно, то його прискорення теж можна представити як суму дотичної і нормальної складових

$$\boldsymbol{a}_{\mathrm{M}} = \boldsymbol{a}^{\tau}_{A} + \boldsymbol{a}^{n}_{A} + \boldsymbol{a}^{\tau}_{MA} + \boldsymbol{a}^{n}_{MA}. \tag{10.8}$$

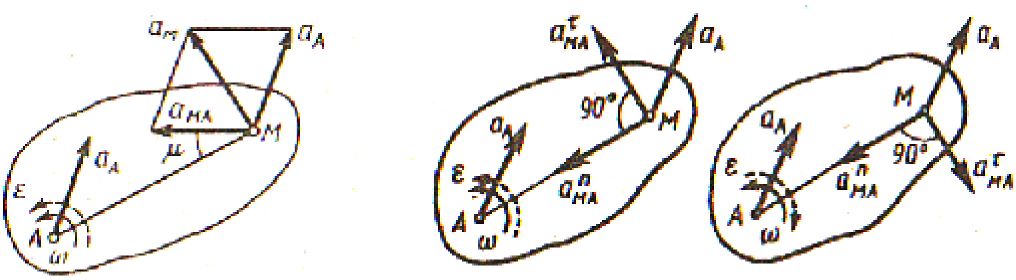


Рис. 10.6. Визначення прискорень точок при плоскопаралельному русі.

<u>10.5. Миттєвий центр прискорень, його знаходження</u>

Миттєвий центр прискорень - точка плоскої фігури, прискорення якої в даний момент дорівнює нулю. Якщо фігура рухається непоступально, то така точка існує, причому тільки одна. У загальному випадку руху миттєві центри швидкостей і прискорень не співпадають. Вони співпадають тільки тоді, коли фігура обертається навколо нерухомої осі.

Порядок знаходження миттєвого центра прискорень:

1. Визначити кут μ по формулі

$$tgm = \frac{e}{w^2}. \qquad (10.9)$$

2. З точки *A* під кутом μ до вектора прискорення $\boldsymbol{a}_{\mathrm{A}}$ провести пряму *AE*, яка відхилена у бік обертання фігури у разі прискореного обертання, і в протилежну сторону при сповільненому обертанні (тобто у бік кутового прискорення).

3. Відкласти уздовж лінії *AE* відрізок *AQ*, який дорівнює

$$AQ = \frac{a_A}{\sqrt{e^2 + w^4}}.$$

Прискорення точок плоскої фігури визначаються в даний момент так, якби рух фігури був обертанням навколо миттєвого центру прискорень *Q*

$$\frac{a_M}{MQ} = \frac{a_A}{AQ} = \sqrt{e^2 + w^4}.$$

Прискорення точок плоскої фігури пропорційні їх відстаням від миттєвого центру прискорень *Q*.

Питання для самоконтролю

1. Який рух тіла називається плоскопаралельним?
2. Скільки степенів вільності має тіло при плоскому русі?
3. Дайте визначення миттєвого центра швидкостей?
4. Як визначається швидкість будь-якої точки фігури при плоскому русі?
5. Яку точку плоскої фігури називають миттєвим центром прискорень?
6. Чому при розв’язанні задач в якості полюса вигідно обирати миттєвий центр швидкостей?
7. Сформулюйте теорему про швидкості двох точок.

Завдання № 10. «Плоскопаралельний рух тіла»

Рекомендації до розв'язання задач

А. Розв'язання задач через знаходження миттєвих центрів швидкостей і прискорень.

1. Знайти точку M тіла, швидкість і прискорення якої необхідно визначити.
2. Визначити положення миттєвого центру швидкостей P фігури.
3. Знайти миттєву кутову швидкість обертання ω плоскої фігури навколо миттєвого центру швидкостей.
4. Користуючись формулою (10.3) знайти швидкість точки M.
5. Визначити положення миттєвого центру прискорень π фігури за алгоритмом п. 10.5 лекції, знайти миттєве кутове прискорення ε даної фігури.
6. Користуючись формулами прискорення при обертальному русі знайти прискорення точки M.

Б. Розв'язання задач за допомогою теорем про швидкості і прискорення точок тіла при плоскопаралельному русі.

1. Знайти точку M тіла, швидкість і прискорення якої необхідно визначити.
2. Обрати полюс A – точку фігури, швидкість якої відома або може бути визначена з умов задачі.
3. Знайти вектор швидкості полюса $\boldsymbol{\upsilon}_A$.
4. Зобразити вектор швидкості полюса, приклавши його до точки, швидкість якої знаходиться.
5. Визначити швидкість $\boldsymbol{\upsilon}_{MA}$ обертання даної точки M навколо полюса A.
6. За допомогою теореми синусів або косинусів знайти модуль швидкості точки M, а її напрямок визначити графічно, побудувавши трикутник.
7. Обрати полюс A_1 – точку фігури, прискорення якої відоме або може бути визначене з умов задачі.
8. Знайти вектор прискорення полюса $\boldsymbol{a}_{A1}$.
9. Зобразити вектор швидкості полюса, приклавши його до точки, швидкість якої знаходиться.
10. Визначити прискорення $\boldsymbol{a}^n_{MA1}$, яке виникає при обертанні даної точки навколо полюса A_1 і побудувати вектор даного прискорення.
11. Визначити прискорення $\boldsymbol{a}^\tau_{MA1}$, яке виникає при обертанні всієї фігури навколо полюса A_1 і побудувати вектор даного прискорення.
12. Геометрично чи аналітично знайти модуль і напрям прискорення даної точки M.

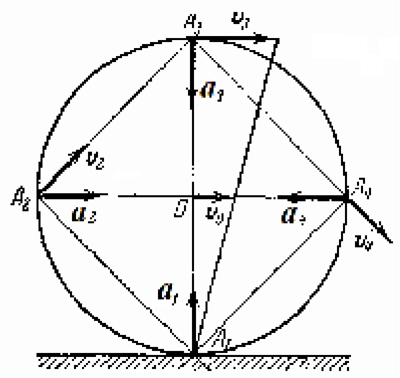
Приклад розв'язання задачі (знаходження миттєвих центрів)

Задача 1. Куля радіуса R = 0,5 м котиться без ковзання по горизонтальній прямій, причому рух її центра є рівномірним із швидкістю υ_O = 1 м/с. Визначити швидкості і прискорення точок A_1, A_2, A_3 і A_4 кінців вертикального і горизонтального діаметрів кулі (рис. 10.7).

Розв'язання

1. Визначення швидкостей точок кулі.

Оскільки кочення кулі відбувається без ковзання, то дану задачу зручно розв'язувати методом миттєвого центру швидкостей. Точка A_1 в даний момент знаходиться у контакті з землею, тому її швидкість дорівнює нулю і вона є миттєвим центром швидкостей $u_1 = 0$.



Інші три точки здійснюють обертальний рух навколо точки A_1. Знайдемо модулі й напрямки їх швидкостей, для чого спочатку визначимо кутову швидкість кулі через відому швидкість її центру.

Рис. 10.7. Миттєві центри швидкостей і прискорень.

Швидкість точки O в обертальному русі навколо точки A_1

$$u_O = w \cdot OA_1 = wR \Rightarrow w = \frac{u_O}{R} = \frac{1}{0,5} = 2\ (рад/с).$$

Для точки A_2 швидкість обертання навколо миттєвого центру швидкостей

$$u_2 = w \cdot A_1A_2 = w\sqrt{R^2 + R^2} = 2 \cdot \sqrt{0,25 + 0,25} = 1,41\ (м/с).$$

Швидкість точки A_2 спрямована перпендикулярно A_1A_2 в напрямку руху колеса.

Швидкість точки A_4 знаходиться аналогічно

$$u_4 = w \cdot A_1A_4 = w\sqrt{R^2 + R^2} = 2 \cdot \sqrt{0,25 + 0,25} = 1,41\ (м/с).$$

Швидкість точки A_4 спрямована перпендикулярно A_1A_4 в напрямку руху колеса.

Швидкість точки A_3 також знайдемо через миттєвий центр швидкостей

$$u_3 = w \cdot A_1A_3 = w \cdot 2R = 2 \cdot 2 \cdot 0,5 = 2\ (м/с).$$

2. Визначення прискорень точок кулі.

Оскільки точка O рухається з постійною швидкістю, то її прискорення

$$a_O = \frac{du_O}{dt} = \frac{d(1)}{dt} = 0\left(\frac{м}{с^2}\right).$$

Це означає, що точка O є миттєвим центром прискорень. В такому випадку прискорення точок A_1, A_2, A_3 і A_4 є доцентровими прискореннями при обертальному русі навколо точки O. Оскільки всі ці точки знаходяться на однаковій відстані R від центру прискорень, то їх прискорення будуть однакові

$$a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = w^2 R = 2^2 \cdot 0,5 = 2\ (м/с^2).$$

Всі прискорення спрямовані по відповідним радіусам до миттєвого центру прискорень. Задачу розв'язано.

<u>Приклад розв'язання задачі (теореми про швидкості і прискорення)</u>

Задача 2. Знайти швидкість повзуна B нецентрального кривошипного механізму, в момент коли повзун, який обертається з кутовою швидкістю ω = 1,5 рад/с навколо горизонтальної осі O, утворює кут α = 30° з горизонтом (рис. 10.8). Розміри ланок OA = 40 см, AB = 200 см, OC = 20 см.

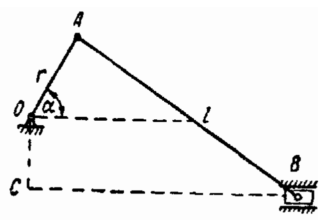


Рис. 10.8. Нецентральний кривошипний механізм.

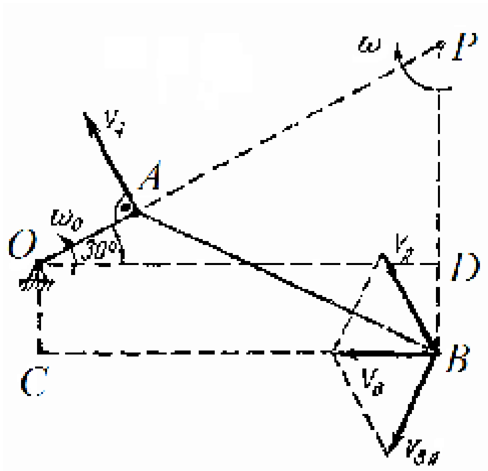
Розв'язання

Розв'язання задачі здійснюємо згідно пункту *Б* рекомендацій. Зображуємо на рисунку весь механізм і точку B на ньому в заданому положенні (рис. 10.9).

Точка *B* належить шатуну, який здійснює плоскопаралельний рух. За полюс оберемо точку *A*, яка одночасно належить і шатуну і кривошипу. Знайдемо швидкість точки *A* при обертальному русі

$$u_A = w \cdot OA = 1{,}5 \cdot 0{,}4 = 0{,}6 \ (м/с).$$

Вектор $\boldsymbol{\upsilon}_A$ прикладаємо в точці *B* перпендикулярно до положення кривошипа *OA* в даний момент часу.



Визначимо положення миттєвого центру швидкостей. Для цього необхідно знати напрями швидкостей двох точок шатуна. Напрямок швидкості $\boldsymbol{\upsilon}_A$ нам відомий, а швидкість точки *B* спрямована по горизонталі в напрямку руху кривошипа. Аби визначити положення точки *P*, проведемо перпендикуляри до векторів швидкостей точок *A* і *B*. Точка їх перетину і є миттєвим центром швидкостей.

Рис. 10.9. До задачі 2.

Визначимо кутову швидкість шатуна. Для цього необхідно знати величину швидкості якої-небудь точки та її відстань до миттєвого центру швидкостей. В даному випадку

$$w = u_A / AP. \tag{10.10}$$

Відстань *AP* знайдемо з умов задачі. Спочатку визначимо кут *ABP*

$$\sin\angle ABD = \frac{OA\sin 30^\circ + OC}{AB} = \frac{40 \cdot 0{,}5 + 20}{200} = 0{,}2.$$

$$\angle ABD = \arcsin 0{,}2 = 11{,}5^\circ \Rightarrow \angle ABP = 78{,}5^\circ.$$

Оскільки в трикутнику *ABP* нам відома лише сторона *AB*, то для застосування теореми синусів необхідно визначити кут *APB*. Розглянемо трикутник *OPE*

$$\angle APB = 180^\circ - 30^\circ - 90^\circ = 60^\circ.$$

За допомогою теореми синусів знаходимо

$$\frac{AP}{\sin\angle ABP} = \frac{AB}{\sin\angle APB} \Rightarrow AP = \frac{AB\sin\angle ABP}{\sin\angle APB} = \frac{0{,}2 \cdot \sin 78{,}5^\circ}{\sin 60^\circ} = 2{,}26 \ (м).$$

Підставляємо отримане значення в формулу (10.10)

$$w = \frac{u_A}{AP} = \frac{0{,}6}{2{,}26} = 0{,}265\left(\frac{рад}{с}\right).$$

Визначаємо відносну швидкість обертання точки *B* навколо полюса *A*

$$u_{BA} = w \cdot AB = 0{,}265 \cdot 0{,}2 = 0{,}53 \ (м/с).$$

Вектор швидкості $\boldsymbol{\upsilon}_{BA}$ перпендикулярний до шатуна *AB* і направлений убік обертання шатуна. Прикладаємо його в точці *B* і далі за правилом паралелограма визначаємо вектор швидкості точки *B*. Модуль швидкості даної точки знаходимо аналітично

$$u_B = \sqrt{u_A^2 + u_{BA}^2 + 2u_A u_{BA}\cos\angle OAB} = \sqrt{u_A^2 + u_{BA}^2 + 2u_A u_{BA}\cos(180^\circ - \angle PAB)} =$$

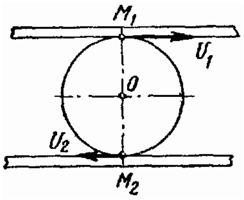
$$= \sqrt{0{,}6^2 + 0{,}53^2 + 2 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}53 \cdot \cos(180^\circ - (180^\circ - 78{,}5^\circ - 60^\circ))} = 0{,}41 \ (м/с).$$

Задачу розв’язано.

Завдання № 10 до РГР

10.1. Зубчасте колесо радіуса R = 0,5 м затиснуте між двома паралельними рейками, які рухаються в протилежні боки з постійними швидкостями υ_1 = 2,5 м/с і υ_2 = 1,5 м/с. Знайти швидкість центра колеса O і кутову швидкість колеса, якщо воно котиться по рейкам без ковзання.

Відповідь: υ_C = 0,5 м/с, ω = 4 рад/с.



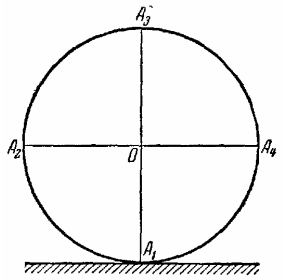
До задачі 10.1.

10.2. Куля радіуса R = 1 м котиться без ковзання по горизонтальній прямій, причому рух її центра є прискореним і описується рівнянням

$$s = t + \frac{t^2}{2}\ (м).$$

Визначити швидкості і прискорення точок A_1, A_2, A_3 і A_4 кінців вертикального і горизонтального діаметрів кулі.

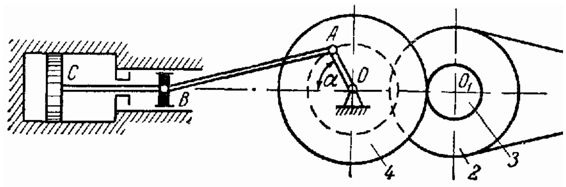
Відповідь: υ_1 = 0 м/с, υ_2 = 1,41 м/с, υ_3 = 2 м/с, υ_4 = 1,41 м/с, a_1 = 1 м/с^2, a_2 = 2,24 м/с^2, a_3 = 2,24 м/с^2, a_4 = 1 м/с^2.



До задачі 10.2.

10.3. Привод поршневого насосу складається з приводного шківа 2 і шестерні 3, жорстко закріплених на валу O_1, обертання якого передається на вал кривошипа O за допомогою за допомогою шестерень 3 і 4. Вал O приводить до руху шатун AB, шток BC и поршень C. Визначити кутову швидкість шатуна AB і швидкість точки B при вертикальному положенні кривошипа OA, якщо його частота обертання n = 60 об/хв, OA = 20 см, AB = 100 см, радіуси шестерень R_3 = 10 см, R_4 = 30 см.

Відповідь: υ_B = 0,42 м/с, ω = 0 рад/с.



До задачі 10.3.

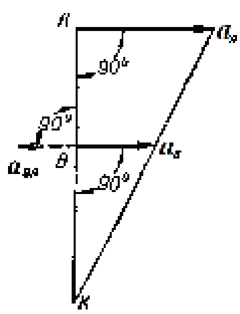
10.4. Кривошип OA обертається рівномірно навколо осі O з кутовою швидкістю ω = 4 рад/с. Визначити прискорення точки B в момент часу, коли кривошип утворює кут α = 60° з горизонтом, якщо довжина шатуна AB = 40 см.

Відповідь: a_{B} = 0,6 м/с^2.

До задачі 10.4.

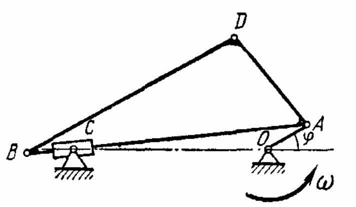
10.5. Визначити миттєвий центр швидкостей, кутову швидкість і кутове прискорення плоскої фігури, якщо в даний момент часу прискорення точки A a_A = 0,15 м/с^2, а прискорення точки B a_B = 0,10 м/с^2. Вектори прискорень точок A і B перпендикулярні до відрізку AB і спрямовані в один бік. Довжина відрізку AB = 10 см.

Відповідь:ω = 0 рад/с, ε = 0,5 рад/с^2.



До задачі 10.5.

10.6. Визначити швидкості точок A, B і D механізму в положенні, в якому кривошип, який обертається із кутовою швидкістю ω = 20 рад/с, утворює кут φ = 30° з горизонтальною лінією. Довжина кривошипа OA = 50 мм, відстань між осями OC = 200 мм, AB = 250 мм, BD = 200 мм.

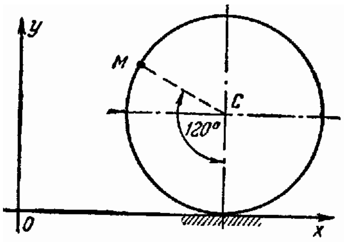


Відповідь: υ_A = 1,0 м/с, υ_B = 0,45 м/с, υ_D = 1,04 м/с,

До задачі 10.6.

10.7. Рівняння руху точки M обода колеса електровоза має вигляд

$$x = 3t - 0{,}33\sin 9{,}23t; \quad y = 0{,}33(1 - \cos 9{,}23t)\ м.$$

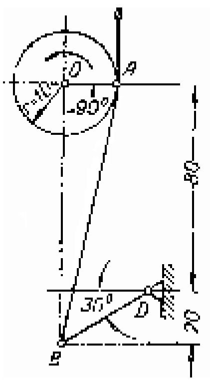


Початок координат співпадає з початковим положенням точки. Визначити положення миттєвого центра прискорень і прискорення миттєвого центра швидкостей в момент часу t, за який колесо повернулось на кут 120°.

Відповідь: a_P = 27,7 м/с^2.

До задачі 10.7.

10.8. Визначити швидкість і прискорення точки B чотириланкового механізму в момент часу, коли ланка OA горизонтальна, а ланка BD направлена під кутом 30° до горизонтальної лінії. Кривошип OA довжиною r = 10 см обертається проти ходу годинникової стрілки з постійною частотою n = 100 об/хв. Довжина ланки AB = 100 см, ланки BD = 40 см, інші необхідні розміри вказано на рисунку.



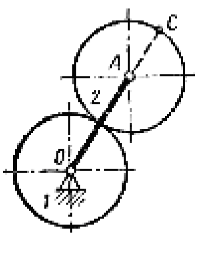
Відповідь: υ_B = 1,27 м/с, a_P = 0,3 м/с^2.

До задачі 10.8.

10.9. Електропоїзд при відході від станції рухається по прямолінійній ділянці колії з прискоренням a = 3 м/с^2, причому його колеса котяться без буксування та ковзання. Знайти прискорення миттєвого центра швидкостей колеса через 2 с після відходу потягу, якщо радіус колеса R = 0,5 м.

Відповідь: a_P = 72 м/с^2.

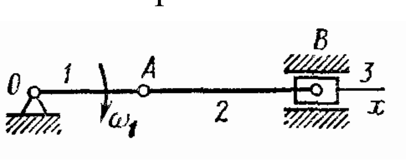
10.10. В диференціальному механізмі кривошип OA обертається навколо нерухомої осі O з кутовою швидкість ω_{OA} = 2 рад/с, а колесо 1 навколо тієї ж осі зі швидкістю ω_1 = 4 рад/с. Чому дорівнює швидкість точки C на верхньому кінці діаметра колеса 2, якщо радіуси колес $r_1 = r_2$ = 0,1 м? Кривошип і колесо 1 обертаються одному напрямку.



Відповідь: υ_C = 0,4 м/с.

До задачі 10.10.

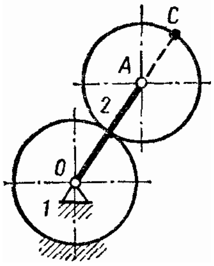
10.11. Кривошип OA кривошипно-шатунного механізму обертається з постійною кутовою швидкістю ω = 6 рад/с.



До задачі 10.11.

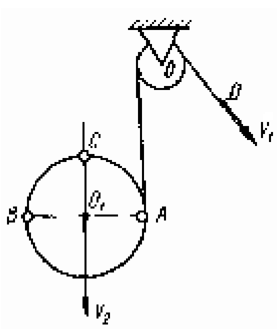
Визначити кутове прискорення ε і кутову швидкість ω_2 шатуна AB в положенні механізму, коли кривошип і шатун знаходяться на горизонтальній прямій. Довжина кривошипа OA = 0,2 м, довжина шатуна AB = 0,6 м.
Відповідь: ε = 0 рад/с^2, ω_2 = 2 рад/с.

10.12. В планетарному механізмі колесо 2 приводиться до руху кривошипом OA, який обертається навколо осі O нерухомого колеса 1. Чому дорівнює швидкість точки C на верхньому кінці діаметра колеса 2, якщо радіуси коліс r_1 = r_2 = 0,1 м, а кутова швидкість кривошипа ω_{OA} = 2 рад/с? Кривошип і колесо 1 обертаються в одному напрямку.
Відповідь: v_C = 0,8 м/с.



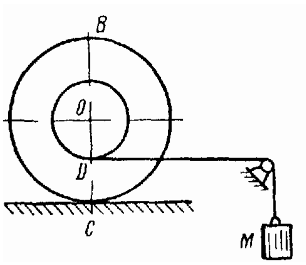
До задачі 10.12.

10.13. Циліндр радіусом R = 0,5 м обмотаний тросом, перекинутим через блок O. Кінець тросу рухається зі швидкістю v_1 = 2 м/с, в той час як центр циліндра має швидкість v_2 = 3 м/с. Визначити кутову швидкість циліндра, вважаючи ділянку троса від циліндра до блока вертикальною. Також знайти величини швидкостей точок B і C на горизонтальному і вертикальному діаметрах циліндра.
Відповідь: ω = 10 рад/с, v_B = 7 м/с, v_C = 5,8 м/с.



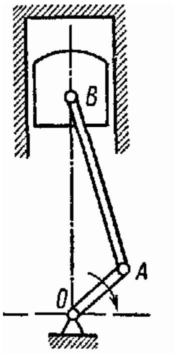
До задачі 10.13.

10.14. Котушка радіуса R = 0,5 м, яка котиться без ковзання по горизонтальній площині, приводиться до руху за допомогою вантажу M. Вантаж, прив’язаний до нитки, намотаної на барабан котушки, рухається вниз маючи в даний час швидкість v = 2 м/с і прискорення a = 1 м/с^2. Визначити прискорення точок B і C котушки, які в даний момент часу знаходяться на різних кінцях її вертикального діаметру. Відомо, що радіус барабану котушки r = 0,3 м.
Відповідь: a_B = 50,2 м/с^2, a_C = 50 м/с^2.



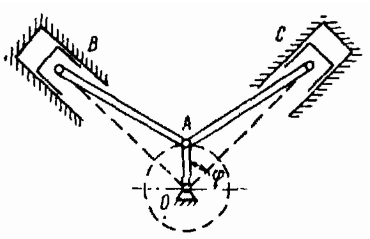
До задачі 10.14.

10.15. Колінчастий вал в період пуску двигуна обертається з кутовою швидкість ω = 2 рад/с і кутовим прискоренням ε = 1 рад/с^2. Визначити прискорення поршня B і кутове прискорення шатуна AB в крайньому правому положенні кривошипа OA. Довжина кривошипа OA = 20 см, довжина шатуна AB = 90 см.
Відповідь: a_B = 0,02 м/с^2, ε_{AB} = 0,91 рад/с^2.



До задачі 10.15.

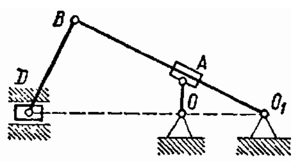
10.16. Визначити швидкості і прискорення поршнів двигуна з V - подібним розходженням циліндрів, в момент коли φ = 90°, якщо довжина кривошипа OA = 10 см, довжина шатунів AB = AC = 14 см. Кривошип обертається з постійною кутовою швидкістю ω_0 = 10 рад/с, а кут BAC між осями циліндрів складає 90°.



Відповідь: υ_B = 0 м/с, υ_C = 1 м/с, a_B = 17,1 м/с^2, a_C = 1,0 м/с^2.

До задачі 10.16.

10.17. Стержень O_1B проходить через трубку A, ось якої прикріплена до кінця кривошипа довжиною OA = 10 см, який обертається із частотою n = 90 об/хв. Визначити швидкість повзуна D та кутові швидкості ланок O_1B і BD в момент часу, коли кривошип займає вертикальне положення.



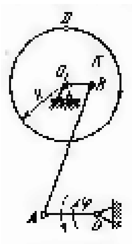
Відповідь: υ_D = 2,1 м/с, ω_{O1B} = 1,9 рад/с, ω_{BD} = 7,5 рад/с.

До задачі 10.17.

10.18. Точильний станок приводиться до руху педаллю OA = 24 см, яка коливається навколо осі O по закону

$$j = \frac{p}{6}\sin\frac{pt}{2},\ \textit{рад.}$$

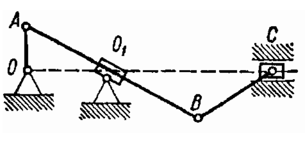
Точильний камінь обертається навколо осі O_1 за допомогою стержня AB, а осі O і O_1 перпендикулярні площині рисунка. Визначити швидкість точки D, яка лежить на ободі точильного каменя радіуса R = $2BO_1$ в момент, коли OA і O_1B розташовані горизонтально.



Відповідь: υ_D = 0,39 м/с.

До задачі 10.18.

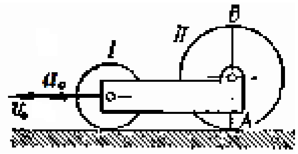
10.19. Кривошип довжиною OA = 14 см, який обертається із частотою n = 300 об/хв навколо нерухомої осі O, приводить до руху ланку AB = 1 м, яка проходить через поворотну трубку з нерухомою віссю O_1, і стержень BC з повзуном C на кінці. Визначити швидкість повзуна C в момент часу, коли кривошип займає вертикальне положення, якщо BC = 0,5 м, OO_1 = 0,48 м.



Відповідь: υ_C = 3,0 м/с.

До задачі 10.19.

10.20. Спарений каток рухається по прямолінійній ділянці дороги з прискоренням a_0 = 0,5 м/с^2 і має в даний момент швидкість υ_0 = 1 м/с^2. Визначити швидкість і прискорення протилежних кінців A і B вертикального діаметру циліндра II, якщо його радіус дорівнює R = 0,5 м.



Відповідь: υ_A = 0 м/с, υ_B = 2 м/с, a_A = 2 м/с^2, a_B = 2,24 м/с^2.

До задачі 10.20.

Глава 11. Складний рух твердого тіла

11.1. Складання поступальних рухів

Тверде тіло, як і матеріальна точка, може одночасно брати участь у кількох простих рухах, тому головним завданням кінематики складного руху є знаходження у кожен момент часу залежностей між лінійними та кутовими швидкостями. На тверде тіло також переносяться поняття про абсолютний, переносний та відносний рухи точки.

Теорема. При складанні поступальних рухів твердого тіла утворюється результуючий поступальний рух зі швидкістю, яка дорівнює векторній сумі швидкостей складових рухів

$$\boldsymbol{\upsilon} = \boldsymbol{\upsilon}_{від} + \boldsymbol{\upsilon}_{пер}. \tag{11.1}$$

В цьому випадку задача зводиться до складного руху матеріальної точки.

При складанні довільної кількості поступальних рухів результуючий рух також буде поступальним, тоді швидкість і прискорення тіла

$$\boldsymbol{\upsilon} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{\upsilon}_i; \qquad \boldsymbol{a} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{a}_i.$$

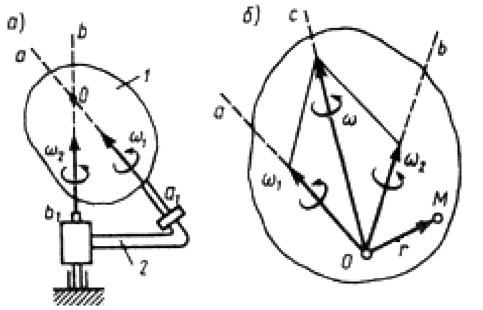
Миттєво-поступальний – рух, при якому швидкості усіх точок тіла рівні між собою лише у визначений проміжок часу. При такому русі прискорення точок різні, тому їх не можна підсумувати за наведеною вище формулою.

11.2. Складання обертань твердого тіла навколо перетинних осей

А) Складання кутових швидкостей

Теорема. При складанні двох миттєвих обертань твердого тіла навколо перетинних осей утворюється результуюче обертання навколо миттєвої осі з кутовою швидкістю, що дорівнює векторній сумі кутових швидкостей складових обертань.

Нехай відносний рух тіла є обертанням навколо осі a_1a з кутовою швидкістю $\boldsymbol{\omega}_1$, а переносний рух – теж обертанням із швидкістю $\boldsymbol{\omega}_2$ навколо осі $\boldsymbol{b_1b}$, яка перетинається з віссю a_1a в точці O (рис. 11.1). Визначимо абсолютну швидкість якої-небудь довільної точки M. Швидкість точки M при відносному русі і переносному рухах



$$\boldsymbol{\upsilon}_{від} = \boldsymbol{\omega}_1 \times \boldsymbol{r}, \qquad \boldsymbol{\upsilon}_{пер} = \boldsymbol{\omega}_2 \times \boldsymbol{r}.$$

Та оскільки результуючий рух є обертанням з деякою кутовою швидкістю $\boldsymbol{\omega}$, то

$$\boldsymbol{\upsilon} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r} \rightarrow \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2.$$

Рис. 11.1. Складання обертань навколо перетинних осей.

Якщо тіло бере участь в n миттєвих обертаннях навколо декількох осей, перетинних в точці O, то абсолютний рух буде обертанням навколо осі, що проходить через точку O, з миттєвою кутовою швидкістю

$$\boldsymbol{\omega} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{\omega}_i. \tag{11.2}$$

Б) Складання кутових прискорень

Нехай обертання тіла навколо кожної з двох перетинних осей відбувається з кутовим прискоренням, причому ε_1 – переносне прискорення обертання навколо власної осі OA, ε_2 – відносне прискорення обертального руху навколо осі нерухомого колеса (рис. 11.2). Згідно (11.2) абсолютно кутова швидкість ω рухомої шестерні

$$\boldsymbol{\omega} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{\omega}_i = \boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2.$$

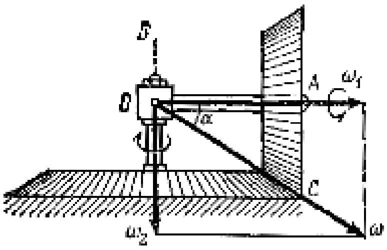


Рис. 11.2. Додавання прискорень при обертанні навколо перетинних осей.

Диференціюємо за часом останнє співвідношення і отримуємо формулу для складання кутових прискорень

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{\omega}_1}{dt} + \frac{d\boldsymbol{\omega}_2}{dt} = \boldsymbol{\varepsilon}_1 + \boldsymbol{\varepsilon}_2 + (\boldsymbol{\omega}_2 \times \boldsymbol{\omega}_1), \tag{11.3}$$

де ε_1 – зміна переносної кутової швидкості при переносному русі, ε_2 – зміна відносної кутової швидкості при відносному русі, третій доданок характеризує зміну переносної кутової швидкості при відносному русі та зміну відносної кутової швидкості при переносному русі.

В техніці складання обертань навколо перетинних осей має широке застосування: конічні передачі в редукторах, карданна передача (шарнір Гука) в тракторах і автомобілях, маніпуляційних роботах, зовнішній карданний підвіс в гіроскопічних приладах.

11.3. Пара обертань

Пара обертань – сукупність двох обертань твердого тіла навколо паралельних осей з рівними за величиною, але протилежними за напрямком кутовими швидкостями.

Теорема. Пара обертань еквівалентна миттєво-поступальному руху зі швидкістю, що дорівнює моменту пари кутових швидкостей.

Нехай переносним рухом тіла є обертання з кутовою швидкістю $\boldsymbol{\omega}_1$ навколо вісі OO_1, а відносним рухом – обертання зі швидкістю $\boldsymbol{\omega}_2 = -\boldsymbol{\omega}_1$ навколо вісі OO_2. В такому випадку абсолютна швидкість довільної точки M згідно теореми про складання швидкостей

$$\boldsymbol{v}_M = \boldsymbol{v}_{пер} + \boldsymbol{v}_{від} = \boldsymbol{\omega}_1 \times \boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{\omega}_2 \times \boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{\omega}_1 \times (\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2).$$

Оскільки відстань між осями обертання

$$\boldsymbol{O}_1\boldsymbol{O}_2 = \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2,$$

то абсолютна швидкість точки M

$$\boldsymbol{v}_M = \boldsymbol{\omega}_1 \times \boldsymbol{O}_1\boldsymbol{O}_2.$$

Оскільки вектори $\boldsymbol{\omega}_1$ і $\boldsymbol{O}_1\boldsymbol{O}_2$ не залежать від положення точки M, то абсолютний рух буде миттєво-поступальним.

Момент пари обертань – векторний добуток $\boldsymbol{\omega}_1 \times \boldsymbol{O}_1\boldsymbol{O}_2$, який є вільним вектором, оскільки не залежить від вибору точки M. Сукупність n пар обертань еквівалентна одній парі, тобто миттєво-поступальному руху.

Теорема. Не змінюючи руху твердого тіла, вектор кутової швидкості його обертання можна перенести паралельно самому собі в будь-яку точку тіла, приєднуючи при цьому відповідний момент пари обертань.

Прикладом пари обертань слугують педалі велосипеда, також вона зустрічається при русі кліщів маніпуляційного робота.

11.4. Складання обертань навколо паралельних осей

Нехай відносний рух тіла є обертанням навколо осі aa' з кутовою швидкістю $\boldsymbol{\omega}_1$, а переносний рух – теж обертанням зі швидкістю $\boldsymbol{\omega}_2$ навколо осі bb', причому кутові швидкості не утворюють пару обертань.

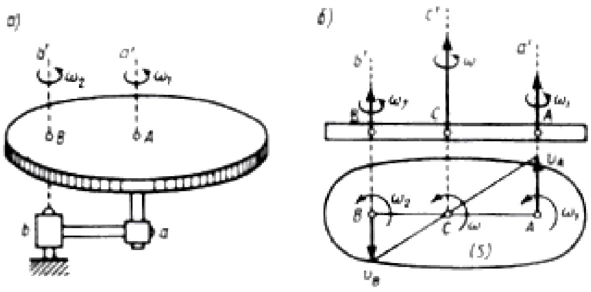


Рис. 11.3. Складання обертань одного напряму.

Розглянемо два окремі випадки:

А) Обертання спрямовані в один бік

Швидкості точок A і B паралельні одна одній, спрямовані в протилежні напрямки і визначаються за формулами:

$$\upsilon_A = \omega_2 \cdot AB, \quad \upsilon_B = \omega_1 \cdot AB.$$

Вісь cc' є миттєвою віссю обертання, а C – миттєвим центром швидкостей, тому

$$\omega = \frac{\upsilon_B}{BC} = \frac{\upsilon_A}{AC} \Rightarrow \omega = \frac{\upsilon_A + \upsilon_B}{AB}.$$

Підставивши перше рівняння до другого отримуємо

$$\omega = \omega_1 + \omega_2; \ \frac{\omega_1}{BC} = \frac{\omega_2}{AC} = \frac{\omega}{AB}. \qquad (11.4)$$

Теорема: якщо тіло бере участь одночасно в двох спрямованих в один бік обертаннях, то його абсолютний рух буде обертанням навколо миттєвої осі, положення якої визначається за пропорцією. Кутова швидкість дорівнює алгебричній сумі кутових швидкостей переносного і відносного рухів.

Б) Обертання спрямовані в різні боки

В такому випадку швидкості точок A і B паралельні одна одній (рис. 11.4), мають однакові напрямки і визначаються за формулами:

$$\upsilon_A = \omega_2 \cdot AB, \upsilon_B = \omega_1 \cdot AB.$$

Вісь cc' є миттєвою віссю обертання, а точка C – миттєвим центром швидкостей, тому

$$w = \frac{u_B}{BC} = \frac{u_A}{AC} \Rightarrow w = \frac{u_B - u_A}{AB}.$$

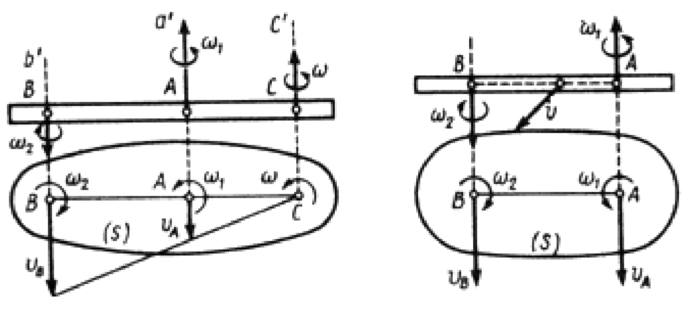


Рис. 11.4. Складання обертань, направлених в різні боки.

Підставляючи перше рівняння до другого, отримуємо

$$w = w_1 - w_2; \frac{w_1}{BC} = \frac{w_2}{AC} = \frac{w}{AB}. \qquad (11.5)$$

Теорема: якщо тіло бере участь одночасно в двох спрямованих в протилежні боки обертаннях, то його абсолютний рух буде обертанням навколо миттєвої осі, положення якої визначається за пропорцією. Кутова швидкість абсолютного руху дорівнює різниці кутових швидкостей переносного і відносного рухів.

11.5. Метод зупинення

Використовується в задачах руху планетарних механізмів зовнішнього і внутрішнього зачеплень, тобто коли відбувається складання обертань навколо паралельних або перетинних осей.

Планетарний (епіциклічний) механізм – зачеплення двох або декількох коліс, із яких одне колесо нерухоме або рухається навколо нерухомої осі, а інші обертаються навколо осей, закріплених на рухомому водилі. На рис. 11.5 показана схема планетарного механізму з нерухомим колесом *I*, водилом *OB* і рухомими колесами *II* і *III*, осі яких переміщуються в просторі. Нерухоме колесо *I* називають сонячним, а колеса *II* і *III* – сателітами.

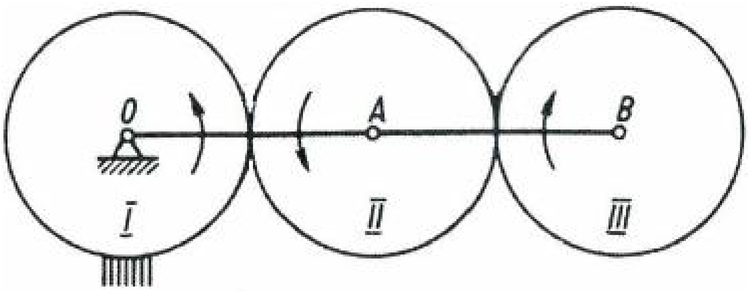


Рис. 11.5. Планетарний механізм.

Суть метода зупинення полягає в тому, що системі уявно надають додатковий рух, при якому водило стає нерухомим. Тоді колеса *II* і *III*, які до цього здійснювали складний рух навколо двох паралельних осей, будуть обертатися навколо нерухомих осей *A* і *B*. У даному випадку необхідно задати уявне обертання площині рисунка за годинниковою стрілкою із кутовою швидкістю ω_{OB}.

Для зручності складають таблицю значень кутових швидкостей усіх ланок механізму до і після зупинення ведучої ланки. Для механізму на рис. 11.5 таблиця має наступний вигляд

Ланки механізму	**OB**	**I**	**II**	**III**
До зупинення	ω_{OB}	0	ω_2	ω_3
Після зупинення	0	$-\omega_{OB}$	$\omega_2 - \omega_{OB}$	$\omega_3 - \omega_{OB}$

Після побудови таблиці знаходять залежності між кутовими швидкостями кожних двох суміжних коліс після зупинення. При цьому слід пам’ятати, що у разі зовнішнього зачеплення відношення кутових швидкостей від’ємне, а у разі внутрішнього – додатне.

Відношення кутових швидкостей після зупинення для коліс *I* і *II*

$$\frac{w_{II}}{w_I} = -\frac{r_1}{r_2} \Rightarrow \frac{w_2 - w_{OB}}{-w_{OB}} = -\frac{r_1}{r_2}. \tag{11.6}$$

Аналогічно для коліс *II* і *III* маємо

$$\frac{w_{III}}{w_{II}} = -\frac{r_2}{r_3} \Rightarrow \frac{w_3 - w_{OB}}{w_2 - w_{OB}} = -\frac{r_2}{r_3}. \tag{11.7}$$

Із одержаних відношень визначають шукані абсолютні кутові швидкості ω_2 і ω_3. Формули виду (11.6) і (11.7) називаються формулами Вілліса, вони широко застосовуються в ТММ при розрахунку багатьох механізмів.

Питання для самоконтролю

1. Як визначаються миттєво-поступальний та миттєво-обертальний рухи?
2. Що називають парою обертань?
3. Коли доцільно застосовувати метод зупинення?
4. До чого у загальному випадку зводиться просторовий рух твердого тіла?
5. Коли має місце пара кутових прискорень твердого тіла?

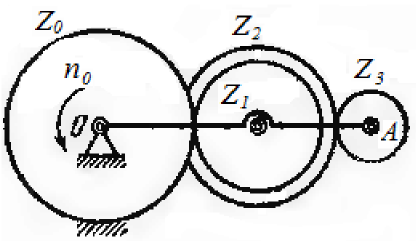
Завдання № 11. «Складний рух твердого тіла»

Рекомендації до розв'язання задач

1. Подумки закріплюємо всі колеса на водилі (кривошипі) і надаємо йому обертання з кутовою швидкістю водила відносно його власної нерухомої вісі. Це є перший рух.
2. Звільняємо колеса від водила, подумки закріпивши його. Таким чином отримуємо звичайну рядову передачу з нерухомими осями.
3. Подумки провертаємо центральне колесо з кутовою швидкістю, яка дорівнює різниці кутових швидкостей водила та центрального колеса і спрямована в бік, протилежний напряму обертання водила.
4. За допомогою передаточних відношень визначаємо кутові швидкості усіх інших коліс, які вони отримали при обертанні центрального колеса. Це буде другим рухом.
5. Додаємо кутові швидкості всіх складових передачі, отримані ними в першому і другому рухах.
6. Із отриманих в результаті складання залежностей між кутовими швидкостями знаходимо необхідні величини.
7. За необхідності визначаємо кутові прискорення по формулі (11.3).

Приклад розв'язання задачі

Задача 1. Кривошип *OA* обертається навколо осі *O* нерухомої шестірні з



числом зубців Z_0 = 60 з частотою n_0 = 30 об/хв і несе на собі вісь подвійної шестерні з числами зубців Z_1 = 40 і Z_2 = 50 (рис. 11.5). Визначити частоту обертання шестерні 3 з кількістю зубців Z_3 = 25.

Рис. 11.5. До задачі 1.

Розв'язання

При розв'язанні задачі використаємо метод зупинення. Надамо усій системі миттєвий переносний рух, при якому кривошип *OA* стає нерухомим. Тепер всі ланки здійснюють простий обертальний рух навколо нерухомих осей. Будуємо таблицю миттєвих частот обертання усіх ланок до і після зупинення кривошипу.

Ланки механізму	**OB**	**0**	**1**	**2**	**3**
До зупинення	n_0	0	n_1	n_1	n_3
Після зупинення	0	$- n_0$	$n_1 - n_0$	$n_1 - n_0$	$n_3 - n_0$

Далі за допомогою формул Вілліса почергово знайдемо частоти обертання кожного з коліс. Для першого колеса маємо

$$\frac{Z_0}{Z_1}=-\frac{n_1-n_0}{-n_0}=\frac{n_1-n_0}{n_0}=\frac{n_1}{n_0}-1\Rightarrow\frac{n_1}{n_0}=\frac{Z_0}{Z_1}+1\Rightarrow n_1=n_0\left(1+\frac{Z_0}{Z_1}\right).$$

Колеса 1 і 2 утворюють подвійну шестірню, тому обертаються вони в одному напрямку і з однією частотою n_1. Для зачеплення другого і третього коліс маємо

$$\frac{Z_3}{Z_2}=-\frac{n_1-n_0}{n_3-n_0}=-\frac{n_0\left(1+\frac{Z_0}{Z_1}\right)-n_0}{n_3-n_0}=-\frac{n_0+n_0\frac{Z_0}{Z_1}-n_0}{n_3-n_0}=\frac{n_0\frac{Z_0}{Z_1}}{n_0-n_3}.$$

$$n_0-n_3=n_0\frac{Z_0}{Z_1}\cdot\frac{Z_2}{Z_3}\Rightarrow n_3=n_0-n_0\left(\frac{Z_0Z_2}{Z_1Z_3}\right)=n_0\left(1-\frac{Z_0Z_2}{Z_1Z_3}\right);$$

$$n_3=30\cdot\left(1-\frac{60\cdot 50}{40\cdot 25}\right)=-60\left(\frac{\text{об}}{\text{хв}}\right).$$

Знак мінус у відповіді вказує на те, що частота обертання третього колеса спрямована в протилежний по відношенню до напрямку обертання кривошипа *OA* бік. Задачу розв'язано.

Приклад розв'язання задачі

Задача 2. Квадратна рама обертається навколо осі *AB* з частотою n_1 = 30 об/хв. Навколо осі *BC*, яка співпадає з діагоналлю квадрата, обертається диск з частотою n_2 = 40 об/хв. (рис. 11.6). Визначити абсолютну кутову швидкість і абсолютне кутове прискорення диска.

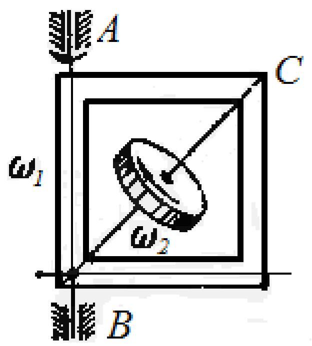


Рис. 11.6. До задачі 2.

Розв'язання

Переносним рухом буде обертання рамки навколо осі *AB*. Модуль кутової швидкості переносного руху

$$w_1=\frac{pn_1}{30}=\frac{3{,}14\cdot 30}{30}=3{,}14\left(\frac{\text{рад}}{\text{с}}\right)=const,$$

а її вектор спрямований вниз по прямій *AB*.

Відносним рухом буде обертання рамки навколо власної осі *BC*. Модуль кутової швидкості відносного руху

$$w_2=\frac{pn_2}{30}=\frac{3{,}14\cdot 40}{30}=4{,}19\left(\frac{\text{рад}}{\text{с}}\right)=const,$$

а її вектор спрямований вниз по діагоналі *BC*.

Оскільки кутові швидкості є константами, то кутові прискорення переносного і відносного рухів будуть дорівнювати нулю

$$e_1=\frac{dw_1}{dt}=\frac{d(3{,}14)}{dt}=0,\quad e_2=\frac{dw_2}{dt}=\frac{d(4{,}19)}{dt}=0.$$

Абсолютну кутову швидкість знайдемо по формулі (11.3)

$$\boldsymbol{\varepsilon}=\boldsymbol{\varepsilon_1}+\boldsymbol{\varepsilon_2}+(\boldsymbol{\omega}_2\times\boldsymbol{\omega}_1)\Rightarrow e=0+0+w_1w_2\sin a=3{,}14\cdot 4{,}19\cdot\sin 45°=9{,}3\left(\text{рад/с}^2\right),$$

де α = 45° – кут між векторами кутових швидкостей $\boldsymbol{\omega}_1$ і $\boldsymbol{\omega}_2$. Задачу розв'язано.

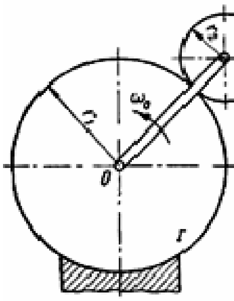
<u>**Завдання № 11 до РГР**</u>

11.1. Кривошип *OA* епіциклічного механізму рівномірно обертається з кутовою швидкістю ω_0 = 4 рад/с проти руху годинникової стрілки і приводить до руху колесо *II*. Визначити абсолютну кутову швидкість ω_2 колеса *II*, якщо відомо, що радіуси коліс r_1 = 50 см і r_2 = 20 см.

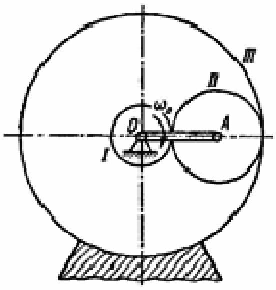
Відповідь: ω_2 = 14 рад/с.

11.2. Кривошип *OA* рівномірно обертається з кутовою швидкістю ω_0 = 5 рад/с за рухом годинникової стрілки і приводить до руху колесо *II*, яке котиться всередині нерухомого колеса *III*. Колесо *II* приводить до руху колесо *I*, яке знаходиться з ним в зачепленні і обертається навколо осі *O*. Визначити кутову швидкість ω_1 колеса *I*, якщо кількість зубців коліс Z_1 = 20 і Z_2 = 30.

Відповідь: ω_1 = 25 рад/с.



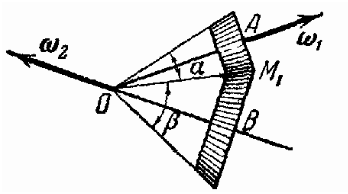
До задачі 11.1.



До задачі 11.2.

11.3. Два конічні зубчасті колеса обертаються навколо нерухомих осей, перетинних в точці *O*. Отвори обох конусів дорівнюють α = 30° і β = 60° відповідно. Перше колесо обертається з кутовою швидкістю ω_1 = 5 рад/с. Визначити кутову швидкість ω_2 другого колеса.

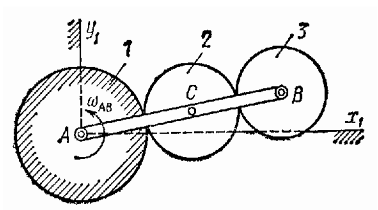
Відповідь: ω_2 = 2,59 рад/с.



До задачі 11.3.

11.4. В планетарному механізмі радіус нерухомої шестірні 1 r_1 = 40 см, а рухомі шестерні 2 і 3 мають однаковий радіус $r_2 = r_3$ = 30 см. Визначити кутову швидкість шестерні 3, якщо відомо, що кривошип *AB* обертається з кутовою швидкістю ω_{AB} = 6 рад/с.

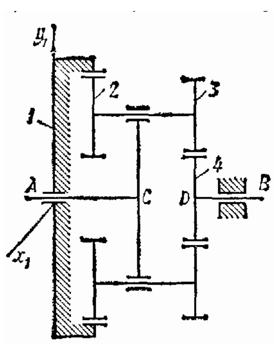
Відповідь: ω_3 = - 2 рад/с.



До задачі 11.4.

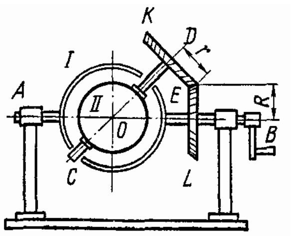
11.5. Редуктор швидкостей складається з нерухомої шестерні 1 з числом зубців Z_1 = 100, спарених шестерень 2 і 3 на кривошипі з числом зубців Z_2 = 30 і Z_3 = 20 відповідно, та шестерні 4 з числом зубців Z_4 = 60 на вихідному валу *BD*. Ведучий вал обертається з частотою n_{AC} = 1 420 об/хв. Визначити частоту обертання веденого вала *BD*.

Відповідь: n_{BD} = 1 578 об/хв.



До задачі 11.5.

11.6. Дробарка складається з кулі *II*, в якій знаходяться важкі подрібнювальні кульки і речовина, що подрібнюється. Куля *II* сидить на осі CD, на якій також заклинене конічне зубчасте колесо K радіуса r = 30 см. Вісь CD знаходиться в підшипниках рами I, яка складає одне ціле з віссю AB і

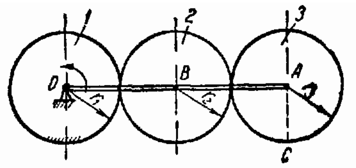


приводиться до обертання за допомогою рукоятки з кутовою швидкістю ω_1 = 10 рад/с. Колесо K находиться в зачепленні з нерухомим колесом L радіуса R = 50 см. Визначити абсолютну кутову швидкість ω_2 дробарки.

Відповідь: ω_2 = 16,7 рад/с.

До задачі 11.6.

11.7. Кривошип OA обертається з кутовою швидкістю ω_{OA} = 2 рад/с навколо нерухомої осі O. Диск 2 на пальці кривошипа котиться без ковзання по нерухомому диску 1 і приводить до руху диск 3, який вільно закріплений на

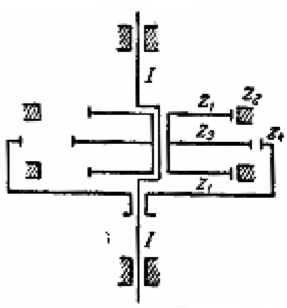


пальці A кривошипу. Визначити швидкість точки C диска 3 в момент, коли кут OAC = 90°, якщо радіуси коліс r_1 = r_2 = r_3 = 30 см.

Відповідь: v_C = 2,4 м/с.

До задачі 11.7.

11.8. Для передачі обертання від двигуна до канатного барабану машини використовується планетарний механізм. При обертанні колінчастого вала I



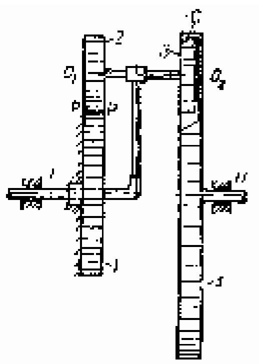
потрійна шестерня 1 – 3 котиться по нерухомій шестерні 2 і приводить до руху барабан 4. Визначити кутову швидкість барабана ω_4, якщо кутова швидкість колінчастого вала ω_1 = 10 рад/с, а число зубців шестерень відповідно дорівнює Z_1 = 30, Z_2 = 35, Z_3 = 32 і Z_4 = 40.

Відповідь: ω_4 = 0,08 рад/с.

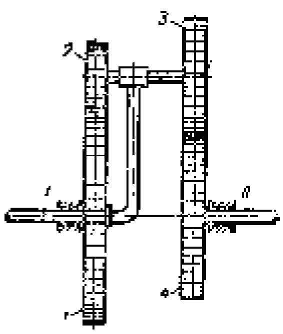
До задачі 11.8.

11.9. Редуктор швидкостей з диференціальною передачею складається з нерухомої шестерні 1 радіусом r_1 = 40 см, двох спарених шестерень 2 і 3 з радіусами r_2 = 20 см і r_3 = 30 см відповідно, та шестерні 4 радіусом r_4 = 90 см з внутрішнім зачепленням, яка знаходиться на вихідному валу II. Вхідний вал I та кривошип, який несе осі шестерень, обертаються з частотою n_I = 1 800 об/хв. Визначити частоту обертання веденого вала II.

Відповідь: n_{II} = 3 000 об/хв.



До задачі 11.9.

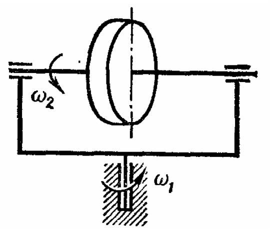


До задачі 11.10.

11.10. Редуктор з диференціальною передачею складається із шестерні 1 з числом зубців Z_1 = 80, двох спарених передатних шестерень 2 і 3 з числом зубців Z_2 = 20 і Z_3 = 40 відповідно, та шестерні 4 з числом зубців Z_4 = 60, яка

знаходиться на вихідному валу *II*. Вхідний вал *I* і кривошип, який несе осі шестерень 2 і 3, обертаються з кутовою швидкістю ω_I = 120 рад/с, а шестерня 1 обертається з кутовою швидкістю ω_1 = 180 рад/с, причому вал *I* та шестерня 1 обертаються в одному напрямку. Визначити кутову швидкість обертання веденого вала *II*.
Відповідь: ω_{II} = 280 рад/с.

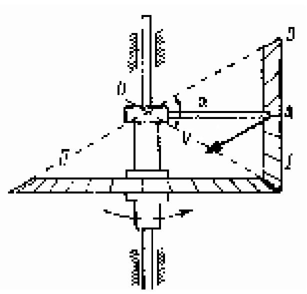
11.11. Диск обертається навколо вертикальної осі з кутовою швидкістю ω_1 = 4 рад/с і навколо горизонтальної осі з кутовою швидкістю ω_2 = 3 рад/с. Знайти абсолютну кутову швидкість і абсолютне кутове прискорення диску.



Відповідь: ω = 5 рад/с, ε = 12 рад/с^2.
До задачі 11.11.

11.12. Конічний каток *I* з кутом при вершині α = 60° котиться без ковзання по конічній поверхні *II*, яка обертається навколо нерухомої осі по закону

$$j = 2t^2,\ рад.$$

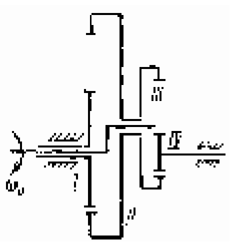


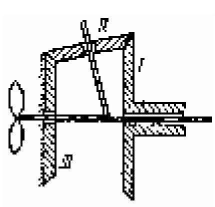
Визначити в момент t = 1 с величину швидкості точки *B* катка *I*, яка найбільш віддалена від поверхні *II*, якщо швидкість центра катка *A* по відношенню до поверхні *II* υ_A = 0,02t м/с і має напрям, показаний на рисунку. Також відомо, що *OA* = 16 см.
Відповідь: υ_B = 0,6 м/с.

До задачі 11.12.

11.13. В диференціальному механізмі водило обертається з частотою n_0 = 160 об/хв. Визначити частоту і напрям обертання колеса *I*, при якому вал колеса *IV* буде залишатись нерухомим. Радіуси колес відповідно дорівнюють r_1 = 10 см, r_2 = 15 см, r_3 = 8 см.
Відповідь: n_I = 70 об/хв.

11.14. Планетарний редуктор авіаційного двигуна складається з двох рухомих коліс *I* і *II* з числами зубців Z_1 = 40 і Z_2 = 20 відповідно, та нерухомого колеса *III* з числом зубців Z_2 = 35. Визначити число обертів *n* гвинта літака, якщо шестерня *I* обертається з частотою n_I = 2 420 об/хв.
Відповідь: *n* = 1 760 об/хв.

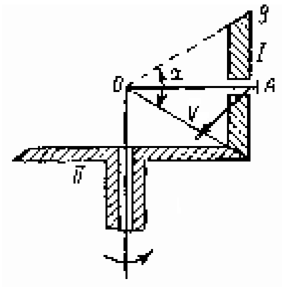




До задачі 11.13. До задачі 11.14.

11.15. Конічна шестерня з величиною початкового конусу *OA* = 8 см і кутом при вершині α = 60° знаходиться в зачепленні з конічним колесом *II*, яке обертається навколо нерухомої осі по закону

$$j = 0{,}25t^2,\ рад.$$



Визначити в момент t = 1 с величину прискорення точки B катка I, яка найбільш віддалена від колеса II, якщо швидкість центра катка A по відношенню до поверхні II υ_A = 0,02t м/с і має напрям, показаний на рисунку.
Відповідь: a_B = 0,017 м/с^2.
До задачі 11.15.

11.16. Зубчасте колесо I редуктора швидкостей нерухоме, а спарені зубчасті колеса II і III, вільно насаджені на вісь, приводяться до руху за допомогою вала A, який обертається з частотою n_A = 80 об/хв. Визначити частоту обертання n_B вала B, скріпленого з зубчастим колесом IV, якщо число зубців коліс Z_1 = 120, Z_2 = 20, Z_3 = 60 і Z_4 = 40.
Відповідь: n_B = 0,017 об/хв.

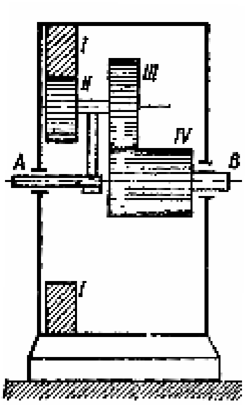
11.17. Диск A обертається навколо осі z_1 згідно рівняння

$$j_1 = 0{,}25t^2\,рад,$$

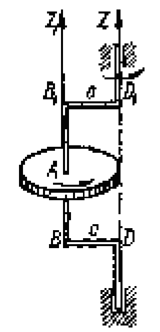
а вісь z_1 обертається навколо нерухомої осі z по закону

$$j_1 = 0{,}5t^2\,рад.$$

Визначити відстань d від миттєвої осі обертання диска до нерухомої осі z, якщо BD = B_1D_1 = 30 см.
Відповідь: d = 0,1 м.

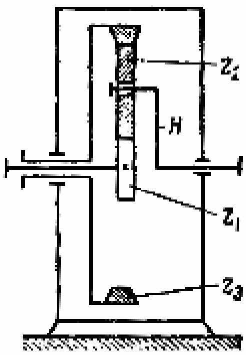


До задачі 11.16.

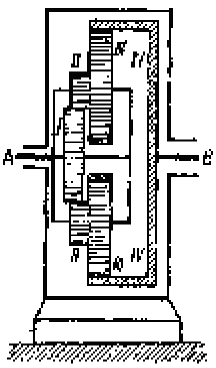


До задачі 11.17.

11.18. Визначити кутову швидкість водила H і колеса 2 диференціального зубчастого механізму, якщо числа зубців коліс Z_1 = 18, Z_3 = 54. Частота обертання колеса 1 n_1 = 120 об/хв, а частота обертання колеса 3 n_3 = 60 об/хв, причому напрям обертання даного колеса протилежний до напряму обертання колеса 1.
Відповідь: n_H = - 15 об/хв, n_2 = - 150 об/хв.



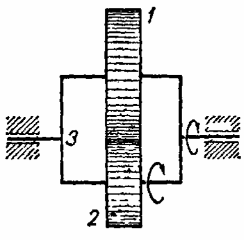
До задачі 11.18.



До задачі 11.19.

11.19. Шестерня I і спарені шестерні II і III редуктора швидкостей вільно насаджені на осі, причому шестерня III має внутрішнє зачеплення з колесом IV, яке жорстко закріплене на валу B. Ведучий вал A разом з рамою обертається з частотою n_A = 600 об/хв, а шестерня I обертається в протилежному напрямі з частотою n_I = 300 об/хв. Визначити частоту обертання веденого вала B, якщо числа зубців Z_I = 40, Z_{II} = 20, Z_{III} = 30 і Z_{IV} = 90.
Відповідь: n_B = 1 200 об/хв.

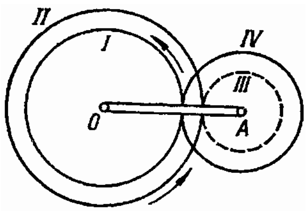
11.20. На раму 3 вільно насаджені шестерні 1 і 2, число зубців яких Z_1 = 65 і Z_2 = 45 відповідно. Рама 3 обертається з частотою 142 об/хв, а шестерня 2 при обертанні навколо власної осі в тому ж напрямку, що і рама, має частоту 78 об/хв. Визначити частоту обертання шестерні 1.



Відповідь: n_1 = 88 об/хв.

До задачі 11.20.

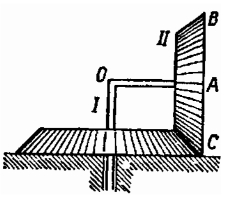
11.21. Зубчасті колеса *I* і *II* та кривошип *OA*, який несе вісь обертання спарених шестерень *III* і *IV*, вільно насаджені на вісь обертання *O*. Числа зубців коліс Z_I = 75, Z_{II} = 100, Z_{III} = 25 і Z_{IV} = 50. Визначити частоту обертання кривошипа *OA*, якщо колеса *I* і *II* обертаються проти годинникової стрілки з частотою n_I = 120 об/хв і n_{II} = 90 об/хв.



Відповідь: n_{OA} = 72 об/хв.

До задачі 11.21.

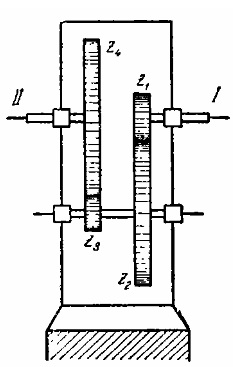
11.22. Конічна шестерня *II*, яка знаходиться в зачепленні з нерухомою шестернею *I*, приводиться до руху за допомогою кривошипа *OA*. Кривошип обертається навколо вертикальної осі з частотою n_{OA} = 90 об/хв. Визначити швидкість і прискорення кінців вертикального діаметра *BC*, якщо *OA* = *OC* = 5 см.



Відповідь: υ_B = 0,94 м/с, υ_C = 0 м/с, a_B = 1,40 м/с^2, a_C = 0,63 м/с^2.

До задачі 11.22.

11.23. Редуктор швидкостей, призначений для зміни величини кутової швидкості при передачі обертання від вала *I* до вала *II*, складається з чотирьох зубчастих коліс, які обертаються навколо нерухомих осей. Зубчасті колеса мають числа зубців Z_1 = 12, Z_2 = 72, Z_3 = 10. Вал *I* обертається з частотою n_I = 5400 об/хв. Знайти число зубців шестерні 4, при якому вал *II* буде обертатися з частотою n_{II} = 100 об/хв.

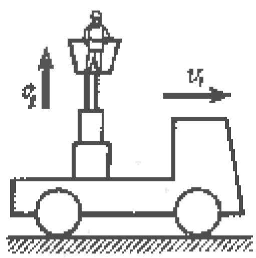


Відповідь: Z_4 = 90.

До задачі 11.23.

11.24. Автомобіль рухається зі швидкістю υ_1 = 3,6 км/год, а монтажна вишка підіймається зі швидкістю υ_2 = 0,5 м/с. Визначити абсолютну швидкість працівника, який нерухомо стоїть у вишці.

Відповідь: υ = 1,12 м/с.



До задачі 11.24.

Глава 12. Сферичний рух твердого тіла

12.1. Рівняння сферичного руху твердого тіла

Сферичний – рух твердого тіла, при якому тільки одна з його точок увесь час залишається нерухомою. Траєкторії інших точок розміщуються на поверхнях сфер з центром у нерухомій точці.

Для визначення сферичного руху тіла використовують дві системи координат: *Oxyz* – нерухому з початком координат в точці *O*, *Oξηζ* – рухому систему, незмінно пов'язану з тілом, яке обертається, і теж має початок в точці *O* (рис. 12.1). *Лінія кутів* – лінія *OJ* перетину нерухомої площини *xOy* з рухомою площиною *ξOη*.

Положення твердого тіла однозначно визначається трьома кутами Ейлера, назви яких узяті з небесної механіки: $(x \wedge J) = \psi$ – кут прецесії; $(z \wedge \zeta) = \theta$ – кут нутації; $(J \wedge \xi) = \varphi$ – кут власного обертання. Додатні напрямки кутів показані на рис. 12.1 стрілкою.

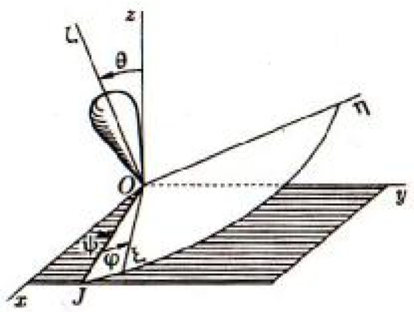


Рис. 12.1. Сферичний рух твердого тіла.

Оскільки для описання руху достатньо трьох кутів, то таке тіло має три ступені вільності. Під час руху всі Ейлерові кути можуть змінюватися, тому однозначно описують рух тіла **рівняння сферичного руху твердого тіла**

$$\psi = f_1(t),\ \theta = f_2(t),\ \varphi = f_3(t). \qquad (12.1)$$

12.2. Кутова швидкість твердого тіла при сферичному русі

При зміні кута φ тіло здійснює власне обертання навколо осі ζ з кутовою швидкістю

$$\omega_1 = \dot{\varphi}.$$

При зміні кута ψ тіло здійснює обертання (прецесію) навколо осі *z* з кутовою швидкістю

$$\omega_2 = \dot{\psi}.$$

При зміні кута θ тіло здійснює обертання (нутацію) навколо лінії кутів *OJ* з кутовою швидкістю

$$\omega_3 = \dot{\theta}.$$

Вектори кутових швидкостей направлені уздовж осей Oζ, *Oz* і *OJ*, тому тіло бере участь в 3 миттєвих обертаннях навколо осей, які перетинаються в точці *O*. Згідно (11.2), абсолютний рух буде обертанням навколо осі, що проходить через точку О, з миттєвою кутовою швидкістю

$$\boldsymbol{\omega} = \sum_{i=1}^{3} \boldsymbol{\omega}_i = \boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2 + \boldsymbol{\omega}_3. \qquad (12.2)$$

Модуль вектора миттєвої кутової швидкості визначається по формулі

$$\omega = \sqrt{\dot{\psi}^2 + \dot{\varphi}^2 + \dot{\theta}^2 + 2\dot{\psi}\dot{\varphi}\cos\theta}. \qquad (12.3)$$

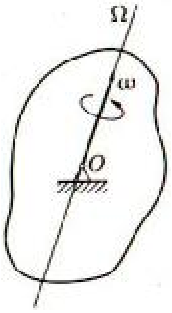
Проекції вектора кутової швидкості на осі координат нерухомої системи знаходяться по формулам

$$\omega_x = \dot{\varphi}\sin\psi\,\sin\theta + \dot{\theta}\cos\psi\,;\ \omega_y = -\dot{\varphi}\cos\psi\,\sin\theta - \dot{\theta}\sin\psi\,;\ \omega_z = \dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi}. \quad (12.4)$$

Проекції вектора кутової швидкості на осі координат рухомої системи знаходяться по формулам

$$\omega_\xi = \dot{\psi}\sin\varphi\,\sin\theta + \dot{\theta}\cos\varphi\,;\ \omega_\eta = \dot{\psi}\cos\varphi\,\sin\theta - \dot{\theta}\sin\varphi\,;\ \omega_\zeta = \dot{\psi}\cos\theta + \dot{\varphi}. \quad (12.5)$$

Теорема Ейлера-Даламбера: тверде тіло, яке має одну нерухому точку O, можна перемістити з одного положення в будь-яке інше поворотом навколо деякої осі, що проходить через нерухому точку *O* (рис. 12.2). Цю вісь називають миттєвою віссю обертання твердого тіла.



Миттєва вісь обертання OΩ – геометричне місце точок тіла, швидкості яких в даний момент дорівнюють нулю. Напрямок даної вісі у просторі і в самому тілі безперервно змінюється.

Вектор кутової швидкості направлений від нерухомої точки *O* вздовж миттєвій осі так, щоб дивлячись назустріч осі, бачити тіло таким, що обертається проти годинникової стрілки.

Рис. 12.2. Миттєва вісь обертання твердого тіла.

<u>12.3. Кутове прискорення твердого тіла при сферичному русі</u>

Миттєве кутове прискорення – векторна величина, яка характеризує зміну з часом кутової швидкості за модулем та напрямком і визначається, як перша похідна від вектора кутової швидкості

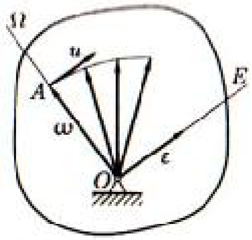
$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}. \quad (12.6)$$

Розглядаючи вектор $\boldsymbol{\omega}$ як радіус вектор точки *A*, можна знайти кутове прискорення тіла як швидкість кінця вектора кутової швидкості при русі по його годографу

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{u}. \quad (12.7)$$

Позначимо через $\boldsymbol{\omega}_0$ орт миттєвої осі *Ω*, тоді вектор кутового прискорення визначиться по формулі

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{d(w\boldsymbol{\omega_0})}{dt} = \frac{dw}{dt}\boldsymbol{\omega_0} + w\frac{d\boldsymbol{\omega_0}}{dt} = \boldsymbol{\varepsilon_1} + \boldsymbol{\varepsilon_2}.$$



Перша складова кутового прискорення у формулі (12.8) характеризує зміну кутової швидкості за величиною, а друга складова – за напрямом.

Напрям вектора кутового прискорення *OE* збігається з напрямом дотичної до траєкторії вектора $\boldsymbol{u}$ у відповідній точці (рис. 12.3). Тому за сферичного руху напрямок вектора $\boldsymbol{\varepsilon}$ не збігається з напрямом вектора $\boldsymbol{\omega}$.

Рис. 12.3. Визначення напрямку кутового прискорення.

Існує також інший спосіб визначення кутового прискорення. Проекції кутового прискорення на осі нерухомої системи координат можна одержати диференціюванням за часом формул (12.4)

$$e_x = \frac{dw_x}{dt};\ e_y = \frac{dw_y}{dt};\ e_z = \frac{dw_z}{dt}.$$

Модуль миттєвого кутового прискорення в нерухомій системі координат визначається по теоремі Піфагора

$$e = \sqrt{e_x^2 + e_y^2 + e_z^2}.$$

Проекції кутового прискорення на осі рухомої системи координат можна одержати диференціюванням за часом формул (12.5)

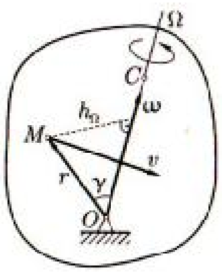
$$e_x = \frac{dw_x}{dt};\ e_h = \frac{dw_h}{dt};\ e_z = \frac{dw_z}{dt},$$

А модуль миттєвого кутового прискорення

$$e = \sqrt{e_x^2 + e_h^2 + e_z^2}.$$

12.4. Швидкості точок тіла при сферичному русі

Оскільки при сферичному русі тіло обертається навколо миттєвої осі $O\Omega$, то знаючи її положення і кутову швидкість тіла, можна знайти швидкість будь-якої точки M твердого тіла за формулою Ейлера



$$\boldsymbol{\upsilon} = \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}, \qquad (12.8)$$

де $\boldsymbol{r}$ – радіус-вектор, проведений з нерухомого центру O до даної точки M (рис. 12.4).

Рис. 12.4. Швидкість точки при сферичному русі.

Модуль швидкості точки

$$\upsilon = \omega r\cdot\sin\gamma = \omega h_\Omega, \qquad (12.9)$$

де h_Ω - відстань до миттєвої осі обертання.

Розподіл швидкостей точок твердого тіла при сферичному русі такий же, як і при обертанні тіла навколо нерухомої осі. Проекції швидкості точки на нерухомі і рухливі осі координат визначаються з формули Ейлера

$$\upsilon_x = \omega_y z - \omega_z y,\quad \upsilon_y = \omega_z x - \omega_x z,\ \upsilon_z = \omega_x y - \omega_y x.$$
$$\upsilon_\xi = \omega_\eta\zeta - \omega_\zeta\eta,\quad \upsilon_\eta = \omega_\zeta\xi - \omega_\xi\zeta,\ \upsilon_\zeta = \omega_\xi\eta - \omega_\eta\xi. \qquad (12.10)$$

12.5. Прискорення точок тіла при сферичному русі

Оскільки прискорення є перша похідна від швидкості за часом, то абсолютне прискорення довільної точки тіла M при сферичному русі

$$\boldsymbol{a}_M = \dot{\boldsymbol{\upsilon}}_M = (\dot{\boldsymbol{\omega}}\times\boldsymbol{r}) + (\boldsymbol{\omega}\times\dot{\boldsymbol{r}}) = (\boldsymbol{\varepsilon}\times\boldsymbol{r}) + (\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\upsilon}). \qquad (12.11)$$

Теорема Ривальса: прискорення точки твердого тіла, яке здійснює сферичний рух, дорівнює геометричній сумі обертового і доосьового прискорень

$$\boldsymbol{a}_M = \boldsymbol{a}_{об} + \boldsymbol{a}_{ос}.$$

Вектор *обертового* прискорення

$$\boldsymbol{a}_{об} = (\boldsymbol{\varepsilon}\times\boldsymbol{r})$$

направлений перпендикулярно площині, що проходить через точку M і вектор $\boldsymbol{\varepsilon}$ (рис. 12.5), а його модуль визначається по формулі

$$a_{об} = er\sin b = eh_1,$$

де h_1 – відстань від точки M до вектора $\boldsymbol{\varepsilon}$.

Вектор *доосьового* прискорення

$$\boldsymbol{a}_{oc} = (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v})$$

направлений вздовж лінії MC (рис. 12.5), його модуль визначається по формулі

$$a_{oc} = wu \sin 90^\circ = w^2 h.$$

Обертова складова абсолютного прискорення $a_{об}$ може мати будь-який напрямок, перпендикулярний до вектора $\boldsymbol{r}$, оскільки на напрям вектора кутового прискорення $\boldsymbol{\varepsilon}$ не накладено жодних обмежень. В цьому є відмінність від випадку обертання тіла навколо нерухомої осі, де доцентрове і дотичне прискорення завжди взаємно перпендикулярні і лежать в площині, перпендикулярній до осі обертання.

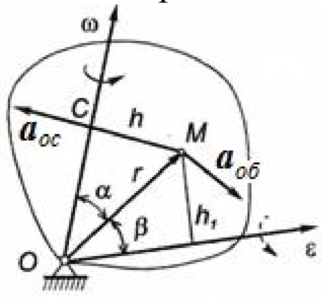


Рис. 12.5. Прискорення точки при сферичному русі.

Модуль прискорення точки визначається по формулі

$$a_M = \sqrt{a_{oc}^2 + a_{об}^2 + 2a_{oc}a_{об}\cos\left(a_{oc}{}^\wedge a_{об}\right)}.$$

Проекції прискорення точки на осі нерухомої системи координат

$$a_x = e_y z - e_z y + w_x\left(w_x x + w_y y + w_z z\right) - w^2 x;$$

$$a_y = e_z x - e_x z + w_y\left(w_x x + w_y y + w_z z\right) - w^2 y;$$

$$a_z = e_x y - e_y x + w_z\left(w_x x + w_y y + w_z z\right) - w^2 z.$$

Проекції прискорення точки на осі рухомої системи координат

$$a_x = e_h z - e_z h + w_x\left(w_x x + w_h h + w_z z\right) - w^2 x;$$

$$a_h = e_z x - e_x z + w_h\left(w_x x + w_h h + w_z z\right) - w^2 h;$$

$$a_z = e_x h - e_h x + w_z\left(w_x x + w_h h + w_z z\right) - w^2 z.$$

Питання для самоконтролю

1. Дайте визначення сферичного руху твердого тіла.
2. Скільки ступеней вільності має тіло при сферичному русі?
3. Яким чином задаються кути Ейлера при сферичному русі?
4. Запишіть рівняння сферичного руху твердого тіла.
5. Що називається миттєвою віссю обертання, яку роль вона відіграє у описанні сферичного руху?

Завдання № 12. «Сферичний рух твердого тіла»

Рекомендації до розв'язання задач

А. *Відомі рівняння руху тіла у вигляді кутів Ейлера, необхідно визначити кутові швидкість і прискорення тіла, лінійні швидкість і прискорення довільної точки тіла М.*

1. Визначити похідні від кутів Ейлера за часом.

2. Знайти проекції кутової швидкості на осі рухомої і нерухомої систем координат по формулам (12.4) – (12.5).
3. Визначити величину миттєвої кутової швидкості по формулі (12.3).
4. Визначити положення миттєвої осі, знайти миттєве кутове прискорення.
5. Визначити модуль і напрямок швидкості точки *M*.
6. Визначити обертову і доосьову складові прискорення точки *M*, через них знайти модуль і напрямок повного прискорення точки *M*.
Б. *Відомі швидкість довільної точки тіла M і положення миттєвої осі обертання, необхідно визначити миттєві кутові швидкість і прискорення тіла, лінійні швидкість і прискорення будь-яких точок тіла.*
1. Обрати рухому і нерухому системи координат, визначити миттєву кутову швидкість твердого тіла.
2. Визначити шукані швидкості точок твердого тіла.
3. Знайти миттєве кутове прискорення твердого тіла як швидкість кінця вектора миттєвої кутової швидкості.
4. Визначити обертову і доосьову складові прискорення точок твердого тіла, потім через них знайти абсолютні прискорення даних точок.

<u>Приклад розв’язання задачі</u>

Задача 1. Тверде тіло обертається навколо нерухомої точки згідно закону

$$\psi = 0{,}5t \text{ рад},\ \varphi = 6t \text{ рад},\ \theta = \frac{\pi}{4} \text{ рад}.$$

Визначити миттєву кутову швидкість тіла, а також швидкість точки тіла *M* (2, 3, 5), координати якої задано в сантиметрах в рухомій системі координат, жорстко зв’язаній з тілом.

Розв’язання

Розглядаємо рух тіла одночасно в двох системах координат з центрами в точці *O*: рухомій $Ox_1y_1z_1$, жорстко зв’язаній з тілом, і нерухомій $Oxyz$. Знайдемо похідні за часом від кутів Ейлера

$$\dot\psi = \frac{d\psi}{dt} = \frac{d(0{,}5t)}{dt} = 0{,}5\left(\frac{\text{рад}}{\text{с}}\right),\ \dot\varphi = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d(6t)}{dt} = 6\left(\frac{\text{рад}}{\text{с}}\right),\ \dot\theta = 0.$$

Миттєва кутова швидкість твердого тіла

$$\boldsymbol{\omega} = 0{,}5\boldsymbol{k} + 6\boldsymbol{k}_1 \text{ (рад/с)}.$$

Знаходимо проекції кутової швидкості на осі координат нерухомої системи

$$\omega_x = \dot\varphi \sin\psi \sin\theta + \dot\theta \cos\psi = 4{,}2\sin 0{,}5t \ \text{(рад/с)};$$

$$\omega_y = -\dot\varphi \cos\psi \sin\theta - \dot\theta \sin\psi = -4{,}2\cos 0{,}5t \ \text{(рад/с)};$$

$$\omega_z = \dot\varphi \cos\theta + \dot\psi = 4{,}7 \ \text{(рад/с)}.$$

Знаходимо проекції кутової швидкості на осі координат рухомої системи

$$\omega_{x1} = \dot\psi \sin\varphi \sin\theta + \dot\theta \cos\varphi = 0{,}35\sin 6t \ \text{(рад/с)};$$

$$\omega_{y1} = \dot\psi \cos\varphi \sin\theta - \dot\theta \sin\varphi = 0{,}35\cos 6t \ \text{(рад/с)};$$

$$\omega_{z1} = \dot\psi \cos\theta + \dot\varphi = 6{,}35 \ \text{(рад/с)}.$$

Знаходимо величину миттєвої кутової швидкості

$$\omega = \sqrt{\dot\psi^2 + \dot\varphi^2 + \dot\theta^2 + 2\dot\psi\dot\varphi\cos\theta} = \sqrt{0{,}5^2 + 6^2 + 0 + 2\cdot 0{,}5\cdot 6\cdot\cos 45^\circ} = 6{,}4\,(\text{рад/с}).$$

Проекції швидкості точки M на осі рухомої системи координат

$$\upsilon_{x1} = \omega_{y1}z_1 - \omega_{z1}y_1 = 0{,}35\cos 6t\cdot 5 - 6{,}35\cdot 3 = 1{,}75\cos 6t - 19{,}05\ (\text{см/с});$$

$$\upsilon_{y1} = \omega_{z1}x_1 - \omega_{x1}z_1 = 6{,}35\cdot 2 - 0{,}35\sin 6t\cdot 5 = 12{,}7 - 1{,}75\sin 6t\ (\text{см/с});$$

$$\upsilon_{z1} = \omega_{x1}y_1 - \omega_{y1}x_1 = 0{,}35\sin 6t\cdot 3 - 0{,}35\cos 6t\cdot 2 = 1{,}05\sin 6t - 0{,}7\cos 6t\ (\text{см/с}).$$

Абсолютну швидкість точки M виразимо через її проекції

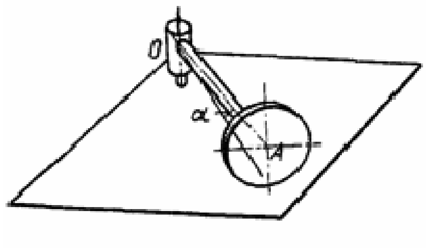
$$\boldsymbol{\upsilon}_M = (1{,}75\cos 6t - 19{,}05)\boldsymbol{i_1} + (12{,}7 - 1{,}75\sin 6t)\boldsymbol{j_1} + (1{,}05\sin 6t - 0{,}7\cos 6t)\boldsymbol{k_1}\ (\text{см/с}).$$

Задачу розв’язано.

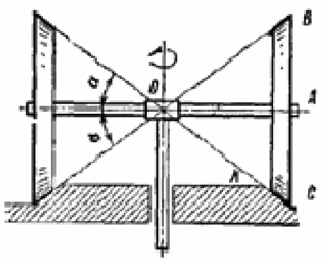
Завдання № 12 до РГР

12.1. Вісь OA млинового бігуна обертається рівномірно навколо вертикальної осі з кутовою швидкістю ω_1 = 2 рад/с. Довжина осі OA = 1,2 м, радіус бігуна r = 40 см. Нехтуючи ковзанням бігуна, визначити вектор його кутової швидкості.
Відповідь: ω = 8 рад/с.

12.2. Знайти швидкість і прискорення точки B конічного катка, який рівномірно котиться без ковзання по горизонтальній конічній кільцевій опорі. Діаметр катка BC = 30см, OA = 20 см, швидкість центру катка υ_A = 0,4 м/с перпендикулярна площині рисунка і направлена на спостерігача.
Відповідь: υ_B = 0,79 м/с, a_B = 2,57 м/с^2.



До задачі 12.1.

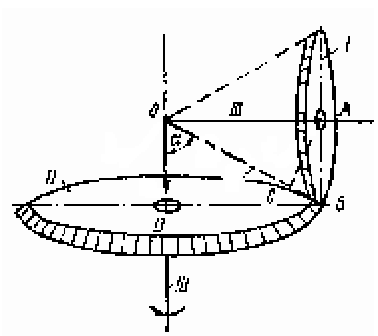


До задачі 12.2.

12.3. Конічна шестерня I радіуса r = 20 см знаходиться в зачепленні з нерухомим колесом II радіуса R = 40 см і приводиться до руху кривошипом III, який обертається по закону

$$\varphi = 1{,}5t^2\ (\text{рад}).$$

Визначити величину кутової швидкості ω і кутового прискорення ε в момент часу t = 1 с.
Відповідь: ω = 6,71 рад/с, ε = 19,21 рад/с^2.



До задачі 12.3.

12.4. Тверде тіло обертається навколо нерухомої точки згідно закону

$$\psi = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi t}{4}\ \text{рад},\ \varphi = \frac{\pi t}{4}\ \text{рад},\ \theta = \frac{\pi}{3}\ \text{рад}.$$

Визначити швидкість точки тіла M (0, 0, 32), координати якої задано в сантиметрах в нерухомій системі координат в даний момент часу.
Відповідь: υ_M = 21,8 см/с.

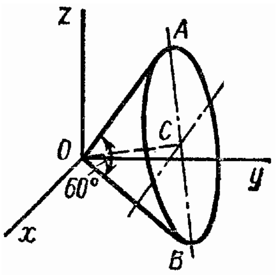
12.5. Тверде тіло обертається навколо нерухомої точки згідно закону

$$y = \frac{p}{2} - \frac{pt}{4}\ рад,\ j = \frac{pt}{4}\ рад,\ q = \frac{p}{3}\ рад.$$

Визначити прискорення точки тіла *M* (0, 0, 32), координати якої задано в сантиметрах в нерухомій системі координат в даний момент часу.
Відповідь: a_M = 29,6 см/с^2.

12.6. Тверде тіло обертається навколо нерухомої точки *O*, прийнятої за початок відліку нерухомої системи координат *Oxyz*. Визначити в даний момент часу швидкість точки *N* (0,5; 1,7; 2) тіла, якщо миттєва вісь проходить в цей момент через точку *M* (2; 1,73; 3), утворюючи з осями координат гострі кути, а миттєва кутова швидкість дорівнює 8 рад/с.
Відповідь: υ_N = 8 см/с.

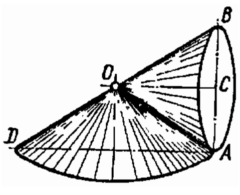
12.7. Коловий конус висотою *OC* = 20 см і кутом при вершині *AOB* = 60° рівномірно котиться без ковзання по площині *xOy*, причому точка *O* залишається нерухомою, а конус здійснює за 1 секунду 2 оберти навколо осі *Oz*. Визначити кутову швидкість ω обертання конуса навколо миттєвої осі.
Відповідь: ω = 21,75 рад/с.



До задачі 12.7.

12.8. Коловий конус висотою *OC* = 20 см і кутом при вершині *AOB* = 60° рівномірно котиться без ковзання по площині *xOy*, причому точка *O* залишається нерухомою, а конус здійснює за 1 секунду 2 оберти навколо осі *Oz* (рис. до задачі 12.7). Визначити кутове прискорення ε конуса.
Відповідь: ε = 273,2 рад/с^2.

12.9. Прямий коловий конус *OAB* з кутом при вершині 2α = 60° котиться без ковзання по нерухомому конусу *OAD* так, що його вершина залишається нерухомою, а швидкість центра *C* основи дорівнює $\upsilon_C = 6t$ см/с. Визначити швидкості і прискорення кінців вертикального діаметра *AB* в момент часу *t* = 2 с, якщо *OC* = 6 см.
Відповідь: υ_A = 0 м/с, a_A = 0,48 м/с^2, υ_B = 0,24 м/с, a_B = 0,84 м/с^2.



До задачі 12.9.

12.10. Прямий коловий конус висотою *OC* = 20 см і кутом при вершині 2α = 60° рівномірно котиться без ковзання по горизонтальній площині так, що швидкість центра *C* основи постійна і дорівнює υ = 0,3 м/с. Визначити швидкості і прискорення кінців діаметра *A* і *B*.
Відповідь: υ_A = 0 м/с, a_A = 1,2 м/с^2, υ_B = 0,6 м/с, a_B = 1,6 м/с^2.

12.11. Тверде тіло обертається навколо нерухомої точки по закону

$$y = \frac{p}{2} - 2t\ рад,\ j = 2t\ рад,\ q = \frac{p}{6}\ рад.$$

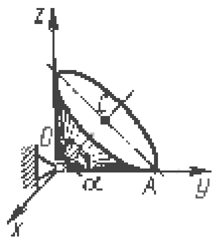
Визначити швидкість і прискорення точки тіла M, координати якої в момент часу $t = \pi/2$ с дорівнюють відповідно x = 4 см, y = 5 см, z = 6 см.
Відповідь: υ_M = 0,07 м/с, a_M = 0,18 м/с^2.

12.12. При сферичному русі твердого тіла вектор його миттєвої кутової швидкості має вигляд

$$\boldsymbol{\omega} = 2^t \boldsymbol{i} + 2t\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k},\ \text{рад}/\text{с}.$$

Визначити в момент часу t = 1 с швидкість точки M з координатами x = 0 м, y = 1 м, z = 1 м.
Відповідь: υ_M = 3 м/с.

12.13. Конус з кутом при вершині α = 90° і висотою OC = 10 см котиться по горизонтальній площині, обертаючись навколо точки O, причому швидкість центра основи υ_C = 0,1 м/с. Визначити модуль доосьового прискорення точки A.
Відповідь: a_{oc} = 0 м/с^2.



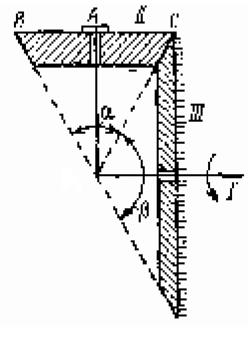
До задачі 12.13.

12.14. Проекції кутової швидкості твердого тіла, яке обертається навколо нерухомої точки O, на осі нерухомої координатної системи $Oxyz$ виражаються формулами

$$w_x = 2t,\ w_y = t^2,\ w_z = t^3,$$

де кутова швидкість виражена в радіанах за секунду, а час в секундах. Визначити в момент часу t = 1 с швидкість і прискорення точки тіла M (1, 0, 0), координати якої задано в сантиметрах.
Відповідь: υ_M = 1,41 см/с, a_M = 6,71 см/с^2.

12.15. Вал I, який обертається рівноприскорено з кутовим прискоренням ε_0 = 0,5 рад/с^2, приводячи до руху шестерню II радіуса r = 4 см, яка знаходиться в зачепленні з нерухомою шестернею III. Визначити в момент часу t = 1 с прискорення точок B і C рухомої шестерні, якщо кути при вершинах початкових конусів рухомої і нерухомої шестерень дорівнюють α = 60° і β = 120° відповідно. Кутова швидкість вала I в початковий момент часу ω_0 = 1 рад/с.
Відповідь: a_B = 0,54 м/с^2, a_C = 0,31 м/с^2.



До задачі 12.15.

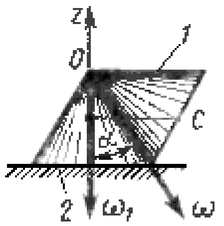
12.16. При сферичному русі твердого тіла вектор його миттєвої кутової швидкості має вигляд

$$\boldsymbol{\omega} = 2^t \boldsymbol{i} + t^2 \boldsymbol{j} + t\boldsymbol{k},\ \text{рад}/\text{с}.$$

Визначити модуль миттєвого кутового прискорення ε твердого тіла в момент часу t = 1 с.
Відповідь: ε = 2,63 рад/с^2.

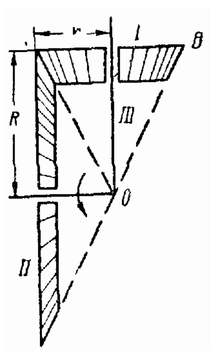
12.17. Кутова швидкість обертання тіла, яке здійснює сферичний рух, дорівнює 14 рад/с, а миттєва вісь в цей момент часу складає з координатними осями нерухомої системи кути $\alpha = 65°$, $\beta = 31°$, $\gamma = 73°$. Для точки M (10, 0, 20), координати якої задано в сантиметрах, знайти модуль швидкості υ та проекції швидкості υ_x, υ_y і υ_z на координатні осі.
Відповідь: υ = 2,8 м/с, υ_x = 2,4 м/с, υ_y = 0,8 м/с, υ_z = 1,2 м/с.

12.18. Конус 1 котиться по нерухомому конусу 2 з постійною кутовою швидкістю ω = 3,1 рад/с. Перпендикуляр CN, опущений з центру C основи конуса 1, обертається навколо осі Oz з кутовою швидкістю ω = 1,8 рад/с. Визначити кутове прискорення конуса 1, якщо кут $\alpha = 30°$.
Відповідь: ε = 2,83 рад/с^2.



До задачі 12.18.

12.19. Конічна шестерня I радіуса r = 25 см знаходиться в зачепленні з нерухомим колесом II радіуса R = 50 см і приводиться до руху валом III, який обертається рівноприскорено з кутовим прискоренням ε_0 = 1,57 рад/с^2 і має в початковий момент часу кутову швидкість ω_0 = 1,57 рад/с. Визначити величину кутової швидкості ω і кутового прискорення ε тіла, а також лінійну швидкість точки B рухомої шестерні в момент часу t = 1 с.
Відповідь: ω = 10,5 рад/с, ε = 44,5 рад/с^2, υ_B = 4,71 м/с.



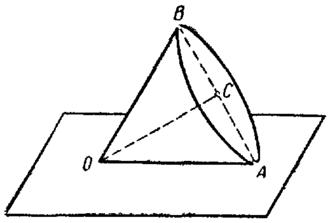
До задачі 12.19.

12.20. Тверде тіло обертається навколо нерухомої точки O згідно закону

$$y = \frac{pt}{2}\ \text{рад},\ j = pt\ \text{рад},\ q = \frac{p}{3}\ \text{рад}.$$

Визначити прискорення точки тіла M, яка в даний момент часу лежить на миттєвій осі обертання на відстані OM = 3,5 см від нерухомої точки O.
Відповідь: a_M = 0,15 м/с^2.

12.21. Конус з кутом при вершині $2\alpha = 60°$ і радіусом основи r = 20 см котиться по нерухомій горизонтальній площині без ковзання, причому швидкість центра основи C постійна і дорівнює υ_C = 0,6 м/с. Визначити кутову швидкість ω і кутове прискорення ε конуса.
Відповідь: ω = 3,46 рад/с, ε = 6,93 рад/с^2.



До задачі 12.21.

12.22. Конус з кутом при вершині $2\alpha = 60°$ і радіусом основи r = 20 см котиться по нерухомій горизонтальній площині без ковзання (рис. до задачі 12.21), причому швидкість центра основи C постійна і дорівнює υ_C = 0,6 м/с. Визначити швидкості і прискорення найвищої та найнижчої точок A і B основи конуса. *Відповідь:* υ_A = 0 м/с, a_A = 2,77 м/с^2, υ_B = 1,2 м/с, a_B = 3,66 м/с^2.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ І РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Павловський М.А. Теоретична механіка. – К.: Техніка, 2002. – 512 с.
2. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики: Учеб. для втузов/С.М. Тарг. – 17-е изд., стер. – М.: Высш. шк., 2007. – 416 с.
3. Яблонский А.А., Никифорова В.М. Курс теоретической механики: Учебник для вузов. – изд. 13-е, испр. – М.: Интеграл-Пресс, 2006. – 608 с.
4. Цасюк В.В. Теоретична механіка: Навчальний посібник. – К.: Центр навчальної літератури, 2004. – 402 с.
5. Лачуга Ю.Ф., Ксендзов В.А. Теоретическая механика. – 2-е изд., перераб. И доп. – М.: КолосС, 2005. – 576 с.
6. Лойцянский Л.Г., Лурье А.И. Курс теоретической механики. Т. 1: Статика и кинематика : учеб. пособие для вузов. – 9-е изд., испр. И доп. – 2006. – 447 с.
7. Бражниченко Н.А и др. Сборник задач по теоретической механике. – М.: Высш. шк., 1987. – 529 с.
8. Березова О.А., Друшляк Г.Е., Солодовников Р.В. Теоретическая механика. Сборник задач: Учеб. пособие для втузов. – Киев: Вища школа. Головное изд-во, 1980. – 400 с.
9. Будник Ф.Г., Зингерман Ю.М., Селенский Е.И. Сборник задач по теоретической механике: Учеб. пособие для втузов. – М: Высш. шк., 1987. – 176 с.
10. Мещерский И.В. Сборник задач по теоретической механике: Учеб. пособие. – 36-е изд., исправл./ Под. Ред. Н.В. Бутенина, А.И. Лурье, Д.Р. Меркина. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. Лит., 1986. – 448 с.
11. Стрелков С.П. Механика. 4-е изд., стер. – СПб.: Издательство «Лань», 2005 – 560 с.
12. Яблонский Б.М. Детлаф А.А., Лебедев А.К. Справочник по физике для инженеров и студентов вузов. – 8-е изд., перераб. И испр. – М.: ООО «Издательство Оникс», 2006. – 1056 с.
13. Выгодский М.Я. Справочник по высшей математике. – М.: АСТ: Астрель, 2006. – 991 с.
14. Бушок Г.Ф., Венгер Є.Ф. Курс фізики: У 3 кн. Кн. 1. Фізичні основи механіки. Молекулярна фізика і термодинаміка: Навч. Посіб. – К: Вища к.., 2002. – 375 с.
15. Гернет М.М. Курс теоретической механики. Изд. 3-е, перераб. И доп. Учебник для вузов. – М: Высш. шк., 1973. – 464 с.
16. Кабальський М.М. и др. Типовые задачи по теоретической механике и методы их решения. – Киев: Гос. Изд-во тех. Лит-ры УССР, 1956. – 511 с.
17. Бать М.И., Джанелидзе Г.Ю., Кельзон А.С. Теоретическая механика в примерах и задачах. Т. 1 (статика и кинематика). – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. Лит., 1967. – 512 с.
18. Мисюрев М.А. Методика решения задач по теоретической механике. – М: Высш. шк., 1963. – 307 с.
19. Сборник коротких задач по теоретической механике: Учеб. пособие для втузов/ Под ред. О.Э. Кепе. – М.: Высш. шк., 1989. – 368 с.

ДОДАТКИ

Додаток А

Грецький алфавіт

Α, α – альфа	Ι, ι – йота	Ρ, ρ – ро
Β, β – бета	Κ, κ – каппа	Σ, σ – сігма
Γ, γ – гамма	Λ, λ – лямбда	Τ, τ – тау
Δ, δ – дельта	Μ, μ – мю	Υ, υ – іпсилон
Ε, ε – епсилон	Ν, ν – ню	Φ, φ – фі
Ζ, ζ – дзета	Ξ, ξ – ксі	Χ, χ – хі
Η, η – ета	Ο, ο – омікрон	Ψ, ψ – псі
Θ, θ – тета	Π, π – пі	Ω, ω – омега

Додаток Б

Кратні та часткові одиниці

Множник	**Назва**	**Позначення**	**Множник**	**Назва**	**Позначення**
10^{18}	екса	Е	10^{-1}	деци	д
10^{15}	пета	П	10^{-2}	санті	с
10^{12}	тера	Т	10^{-3}	мілі	м
10^{9}	гіга	Г	10^{-6}	мікро	мк
10^{6}	мега	М	10^{-9}	нано	н
10^{3}	кіло	к	10^{-12}	піко	п
10^{2}	гекто	г	10^{-15}	фемто	ф
10	дека	да	10^{-18}	атто	а

Додаток В

Одиниці вимірювання основних величин в системі СІ

Величина	**Одиниця виміру**	**Позначення**
Довжина	Метр	м
Маса	Кілограм	кг
Час	Секунда	с
Кут	Радіан	рад
Площа	Квадратний метр	$м^2$
Об’єм	Кубічний метр	$м^3$
Швидкість	Метр за секунду	м/с
Кутова швидкість	Радіан за секунду	рад/с
Прискорення	Метр за секунду в квадраті	$м/с^2$
Кутове прискорення	Радіан за секунду в квадраті	$рад/с^2$
Сила	Ньютон	Н
Тиск (напруження)	Паскаль	$Па = Н/м^2$
Робота і енергія	Джоуль	Дж = Н·м
Момент сили	Ньютон на метр	Н·м
Момент інерції	Кілограм на метр в квадраті	$кг·м^2$
Кількість руху	Ньютон на секунду	Н·с = кг·м/с

Додаток Г

Спеціальні значення тригонометричних функцій

Кут	**0°**	**30°**	**45°**	**60°**	**90°**	**180°**	**270°**
sin α	0	0,5	0,707	0,866	1	0	-1
cos α	1	0,866	0,707	0,5	0	-1	0
tg α	0	0,577	1	1,732	±∞	0	±∞
ctg α	±∞	1,732	1	0,577	0	±∞	0

Додаток Д

Похідні елементарних функцій

1. $(a)' = 0$, де $a = \text{const}$	2. $(x)' = 1$
3. $(x^n)' = nx^{n-1}$	4. $(e^x)' = e^x$
5. $(e^{nx})' = ne^{nx}$	6. $(\ln x)' = 1/x$
7. $(\lg x)' = 0{,}4343/x$	8. $(\log_a x)' = \log_a e/x$
9. $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$	10. $(\sin x)' = \cos x$
11. $(\cos x)' = -\sin x$,	12. $(\operatorname{tg} x)' = 1/\cos^2 x$
13. $(\operatorname{ctg} x)' = -1/\sin^2 x$	14. $(\arcsin x)' = 1/(1-x^2)^{1/2}$
15. $(\arccos x)' = -1/(1-x^2)^{1/2}$	16. $(\operatorname{arctg} x)' = 1/(1+x^2)$
17. $(\operatorname{arcctg} x)' = -1/(1+x^2)$	18. $(\sec x)' = \operatorname{tg} x \cdot \sec x$
19. $(\operatorname{cosec} x)' = -\operatorname{ctg} x \cdot \operatorname{cosec} x$	20. $(\operatorname{arcsec} x)' = -1/[x \cdot (x^2-1)^{1/2}]$

Додаток Є

Інтеграли елементарних функцій

$$1.\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, (n \neq -1); \qquad 2.\int e^x dx = e^x + C;$$

$$3.\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C; \qquad 4.\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C;$$

$$5.\int \sin x\, dx = -\cos x + C; \qquad 6.\int \cos x\, dx = \sin x + C;$$

$$7.\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctg\, x + C; \qquad 8.\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tg\, x + C;$$

$$9.\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C; \qquad 10.\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C;$$

$$11.\int \frac{dx}{1+x^2} = arctg\, x + C; \qquad 12.\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C;$$

$$13.\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C; \qquad 14.\int tg\, x\, dx = -\ln|\cos x| + C;$$

$$15.\int ctg\, x\, dx = \ln|\sin x| + C; \qquad 16.\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|tg\frac{x}{2}\right| + C;$$

$$17.\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|tg\left(\frac{x}{2} + \frac{p}{4}\right)\right| + C; \qquad 18.\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C.$$

Навчальне видання

КОЗУБ Юрій Гордійович
КАЛАЙДО Олександр Віталійович

Теоретична механіка

Частина І.
Статика і кінематика

Навчальний посібник з варіантами завдань
до розрахунково-графічної роботи
для студентів спеціальності «Професійна освіта»
напряму підготовки «Транспорт» усіх форм навчання

За редакцією авторів
Комп'ютерний макет – Калайдо О. В.

Здано до склад. 03.10.2011 р. Підп. до друку 02.11.2011 р.
Формат 60x84 1/16. Папір офсет. Гарнітура Times New Roman.
Друк ризографічний. Ум. друк. арк. 8,02. Наклад 300 прим. Зам. № 185.

Видавець і виготовлювач
Видавництво Державного закладу
«Луганський національний університет імені Тараса Шевченка»
вул. Оборонна, 2, м. Луганськ, 91011. т/ф: (0642) 58-03-20.
e-mail: alma-mater@list.ru
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК №3459 від 09.04.2009 р.