Г. О. Козуб, О. О. Смагіна

ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ,
МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ
ДЕРЖАВНИЙ ЗАКЛАД
„ЛУГАНСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА"

Г. О. Козуб, О. О. Смагіна

ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ

Методичні рекомендації до виконання лабораторних робіт для студентів ІІІ курсу спеціальності 6.050103 „Програмна інженерія"

Луганськ
ДЗ „ЛНУ імені Тараса Шевченка"
2012

УДК 519.61/64(076)
ББК 22.192р3
Ч-66

Р е ц е н з е н т и :

Адаменко О. В. – доктор педагогічних наук, професор, декан факультету довузівської підготовки Луганського національного університету імені Тараса Шевченка.

Стативка Ю. І. – кандидат технічних наук, доцент, декан факультету математики та інформатики Східноукраїнського національного університету імені Володимира Даля.

Істомін Л. Ф. – кандидат технічних наук, доцент кафедри економічної кібернетики Східноукраїнського національного університету імені Володимира Даля.

Козуб Г. О.

Ч66 Чисельні методи : метод. рек. до виконання лабораторних робіт для студ. спец. 6.050103 „Програмна інженерія” / Г. О. Козуб, О. О. Смагіна ; Держ. закл. „Луган. нац. ун-т імені Тараса Шевченка”. – Луганськ : ДЗ „ЛНУ імені Тараса Шевченка”, 2012. – 111 с.

Методичні рекомендації до виконання лабораторних робіт з дисципліни „Чисельні методи” структуровано відповідно до розділів робочої програми курсу „Чисельні методи” кафедри інформаційних технологій та систем ЛНУ імені Тараса Шевченка. Методичні рекомендації складаються з двох модулів. У першому модулі розглянуто наближене рішення рівнянь методом ітерацій, апроксимація експериментальних даних, прямі методи розв’язання систем лінійних рівнянь, ітераційні методи рішення систем лінійних алгебраїчних рівнянь, власні значення і власні вектори матриць. У другому – розглянуто питання інтерполяції і функції форми, методу скінченних різниць вирішення звичайних диференціальних рівнянь, варіаційних методів рішення крайових задач та їх рішення методом скінченних елементів.

Методичні рекомендації до виконання лабораторних робіт призначено для студентів спеціальності „Програмна інженерія”, але можуть бути використані для навчання студентів будь-яких спеціальностей фізико-математичного та технічного профілю.

УДК 519.61/64(076)
ББК 22.192р3

Рекомендовано до друку навчально-методичною радою
Луганського національного університету імені Тараса Шевченка
(протокол № 8 від 14 березня 2012 р.)

ЗМІСТ

Передмова 5
МОДУЛЬ 1 8
Лабораторна робота №1. Наближене рішення рівнянь методом ітерацій 8
1.1. Зміст та порядок виконання роботи 8
1.2. Находження грубо наближеного значення кореня 9
1.3. Метод ітерацій (метод послідовних наближень) 10
1.4. Питання до самоперевірки 15
1.5. Варіанти індивідуальних завдань 16
Лабораторна робота №2. Апроксимація експериментальних даних 18
2.1. Зміст та порядок виконання роботи 18
2.2. Метод найменших квадратів 18
2.2.1. Лінійна функція $y = ax + b$ 19
2.2.2. Квадратична функція $y = ax^2 + bx + c$ 20
2.2.3. Логарифмічна функція $y = \ln(ax + b)$ 21
2.2.4. Показова функція $y = e^{ax+b}$ 21
2.2.5. Дробово-лінійна функція $y = \dfrac{x}{ax + b}$ 22
2.3. Питання до самоперевірки 22
2.4. Варіанти індивідуальних завдань 23
Лабораторна робота 3-4. Прямі методи розв’язання систем лінійних рівнянь 30
3.1. Розв’язання систем лінійних рівнянь методом Гауса 30
3.2. Обчислення елементів зворотної матриці методом Гауса 35
3.3. Питання до самоперевірки 38
3.4. Варіанти індивідуальних завдань 39
Лабораторна робота 5-6. Ітераційні методи рішення систем лінійних алгебраїчних рівнянь 42
5.1. Метод простих ітерацій 42
5.2. Метод Зейделя 45
5.3. Питання до самоперевірки 46
5.4. Варіанти індивідуальних завдань 46
Лабораторна робота 7. Власні значення та власні вектори матриць 49
7.1. Проблема власних значень 49
7.2. Питання до самоперевірки 51
7.3. Варіанти індивідуальних завдань 51
МОДУЛЬ 2 54
Лабораторна робота 8-9. Інтерполяція та функції форми 54
8.1. Інтерполяція функцій 54
8.2. Інтерполяційні формули центральних різниць 59

8.3. Інтерполяційні поліноми з нерівномірно розташованими проміжками зміни аргументу 60
8.4. Функції форми 65
8.5. Питання до самоперевірки 67
8.6. Варіанти індивідуальних завдань 67
Лабораторна робота 10-11. Метод скінченних різниць розв'язання звичайних диференціальних рівнянь 76
10.1. Загальні положення 76
10.2. Метод скінченних різниць 77
10.3. Алгоритм методу скінченних різниць 78
10.4. Чисельне рішення крайової задачі 79
10.5. Питання до самоперевірки 81
10.6. Варіанти індивідуальних завдань 81
Лабораторна робота 12-13. Варіаційні методи рішення крайових задач 84
12.1. Метод Бубнова-Гальоркіна 84
12.2. Метод Рітца 87
12.3. Питання до самоперевірки 91
12.4. Варіанти індивідуальних завдань 92
Лабораторна робота 14-15. Рішення крайових задач методом скінченних елементів (МСЕ) 94
14.1. Теоретичні положення МСЕ 94
14.2. Питання до самоперевірки 100
14.3. Варіанти індивідуального завдання 102
14.4. Розрахунок конструкцій методом скінченних елементів за програмою МІРЕЛА+ 104
Питання до модульної роботи №1 107
Питання до модульної роботи №2 107
Література 109

Передмова

Проведення багатьох наукових та інженерних розрахунків приводить до необхідності вирішення математичних обчислювальних задач. Розділ математики, що вивчає та розроблює методи вирішення задач отримав назву чисельні методи, або обчислювальна математика.

Обчислювальна техніка та математичні методи рішення задач дозволяють замінити дорогі та трудомісткі натуральні експерименти більш точними, швидкими та дешевими обчислювальними експериментами на математичних моделях з використанням ЕОМ. В основі обчислювального експерименту лежить рішення рівнянь математичної моделі чисельними методами. Чисельні методи – методи наближеного або точного рішення задачі, що засновані на побудові скінченої послідовності дій над скінченою множиною чисел, результатами яких є числові значення. Для рішення конкретних практичних задач необхідно виконувати мільйони, а то й мільярди математичних операцій, що під силу тільки ЕОМ.

Серед чисельних методів розрізняють прямі та ітераційні. Прямі, або точні, методи дають рішення за скінчене число дій, прості та найбільш універсальні, забезпечують обчислення за точними формулами. Однак отримані рішення в результаті округлень втрачають точність та стають приблизними, при чому похибка в результаті дій над округленими, тобто наближеними, числами накопичується, з'являється похибка, яку не можна усунути.

Ітераційні (наближені) методи задаються у вигляді багатократних повторень деякої послідовності дій, похідними даними для яких є результати попереднього циклу обчислень, що називається ітерацією. Сама природа такого методу обумовлює наближеність отриманого рішення, похибка якого регулюється кількістю виконаних ітерацій: чим більше ітерацій, тим менша похибка.

Не можна забувати, що отримані результати тільки тоді будуть достатньо достовірні, тобто матимуть похибку в допустимих межах, якщо чисельний метод стійкий та такий, що сходиться. Точність та збіжність чисельного методу, що було застосовано, необхідно дослідити на рішенні задач, що мають аналітичне рішення чи експериментальні результати.

Для важких задач розроблюються чисельні методи та складаються обчислювальні програми, які утворюють бібліотеки стандартних та пакети прикладних програм, а також програмні комплекси.

Характер роботи інженера визначає перелік математичних задач, які частіше всього доводиться вирішувати на практиці. В методичних рекомендаціях розглядаються ці задачі та методи їх вирішення.

Методичні рекомендації складаються з двох модулів, до яких входять 15 лабораторних робіт, які складаються з теоретичних відомостей, прикладів розв’язання та завдань до виконання лабораторних робіт за варіантами, питань до самоперевірки, на які студенти дають відповіді письмово, перелік питань до модульних робіт та рекомендована література.

Зміст методичних рекомендацій відповідає типовим вимогам освітніх програм і розрахований на студентів ВНЗ напрямку підготовки 6.050103 - “Програмна інженерія”. Крім того вони можуть бути використані студентами технічних спеціальностей, а також для самоосвіти.

Оцінюється якість підготовки, повнота виконання роботи, вміст збережених файлів, зміст відповідей та оформлення звітів.

Вимоги до виконання й захисту лабораторних робіт

Щоб успішно виконати лабораторну роботу, необхідно:

– ознайомитися з теоретичними відомостями наданими у скороченому виді в описі роботи та використовуючи лекції, підручники, наведені у списку рекомендованої літератури, чи будь-які інші джерела;

– письмово дати відповіді на контрольні питання;

– ознайомитися з ходом роботи та одержати допуск до виконання;

– занотувати у зошит результати обчислень одержаних при виконанні лабораторної роботи;

– захистити лабораторну роботу.

Кожна лабораторна робота оцінюється на:

10 балів – при відмінному виконанні всіх розрахунків та вимог по оформленню лабораторних робіт, відповіді на контрольні запитання та досконалому захисті;

8 балів – при виконанні всіх розрахунків та вимог по оформленню лабораторних робіт, відповіді на контрольні запитання та кілька помилок при захисті роботи;

6 балів – при виконанні всіх розрахунків та вимог по оформленню лабораторних робіт, відповіді на контрольні запитання та значна кількість недоліків при захисті роботи;

4 бали – при виконанні всіх розрахунків і вимог по оформленню лабораторних робіт, та якщо при захисті роботи, відповіді студента на контрольні запитання задовольняють мінімальному критерію;

0–3 бали – при виконанні не всіх розрахунків і недотриманню вимог по оформленню лабораторних робіт, потрібне доопрацювання роботи перед повторним захистом.

Формула розрахунку основної загальної кількості балів одержаних студентом за виконання та захист лабораторних робіт:

$$N = (15a) \cdot k;$$

де a – загальна кількість набраних студентом балів за виконання та захист лабораторних робіт;

k – коефіцієнт основного загального критерію оцінювання, який дорівнює 0,66.

N – основна загальна кількість балів.

Основна загальна кількість балів – 100.

Кількість балів та відповідність оцінок:

A - “5” – 90 – 100;
B - “4” – 83 – 89;
C - “4” – 72 – 82;
D - “3” – 63 – 74;
E - “3” – 50 – 62;
FX - “2” – 21 – 49;
F - “2” – 0 – 20.

МОДУЛЬ 1

Лабораторна робота №1. НАБЛИЖЕНЕ РІШЕННЯ РІВНЯНЬ МЕТОДОМ ІТЕРАЦІЙ

1.1. Зміст та порядок виконання роботи

Дано два рівняння $f_1(x)=0$ та $f_2(x)=0$. Необхідно знайти всі дійсні корні цих рівнянь з точністю до трьох значущих цифр, тобто $e=\frac{1}{2}\cdot 10^{-2}$.

Порядок виконання роботи.

1. Знайти грубо наближені значення коренів: для рівняння $f_1(x)=0$ графічним способом, а для рівняння $f_2(x)=0$ аналітичним.
2. Уточнення корнів даних рівнянь провести методом ітерацій, представивши кожне з даних рівнянь у вигляді $x=j\,(x)$.
3. Перевірити для кожного кореня даних рівнянь умову $\left|j'(x)\right|\le g<1$.
4. Вибрати нульове наближення x_0 для кожного кореня і окремо для кожного із даних рівнянь.
5. Будувати послідовні наближення по формулі $x_{n+1}=j\left(x_n\right)$ $\left(n=0,1,2,\mathbf{K}\right)$ до тих пір, доки два сусідніх наближення x_{n-1} та x_n не співпадуть один з одним в межах точності, що дорівнює $\frac{1-q}{q}\cdot e$, тобто доки не буде забезпечено виконання нерівності $\left|x_n-x_{n-1}\right|\le\frac{1-q}{q}\cdot e$, де e - гранична абсолютна похибка кореня, що задана.
6. Всі розрахунки оформити у вигляді таблиці.

1.2. Находження грубо наближеного значення кореня

Це засноване на відомій з математичного аналізу теореми: якщо функція $f(x)$, яка є безперервною на відрізку $[a,b]$, приймає на кінцях відрізка значення різних знаків, а $f'(x)$ зберігає знак, то на цьому відрізку існує корінь рівняння $f(x)=0$ і при тому єдиний.

Грубо наближене значення кореня рівняння $f(x)=0$ можна знайти аналітично та графічно. Аналітичний засіб заключається в наступному: знаходимо область визначення функції $f(x)$. Якщо область визначення - відрізок $[a,b]$, то знаходимо $f(a)$ та $f(b)$, якщо ж відрізок $(-\infty,\infty)$, то знаходимо $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$. Після цього визначаємо знак функції $f(x)$ в проміжних точках (можна використовувати критичні точки функції $f(x)$, а також брати точки ділення області визначення функції $f(x)$ на 2, 4, 8 і т.д. рівних частин).

Відомо, що рівняння $n-oї$ степені має не більше n корнів, то зміна знака значень функції $f(x)$ $(n+1)$ разів дає підставу стверджувати, що всі корні віддалені.

Графічний спосіб заключається в знаходженні точки перетину графіка функції $y=f(x)$ з віссю OX. Абсциси цих точок є коренями рівняння $f(x)=0$. Якщо графік функції $f(x)$ побудувати важко, то можна розбити її на дві більш прості функції $f_1(x)$ та $f_2(x)$, графіки яких побудувати легше. Тоді абсциси точок перетину цих графіків будуть коренями рівняння $f(x)=0$.

Зауваження. Можна знайти корінь рівняння $f(x)=0$ грубою прикидкою. Наприклад, для рівняння $x^3+x-1000=0$ грубо наближеним значенням найменшого позитивного кореня є число 10, при чому точне значення кореня буде <10.

1.3. Метод ітерацій (метод послідовних наближень)

Цей метод є одним із найбільш важливих методів чисельного рішення рівнянь $f(x)=0$ і використовується для уточнення знайденого грубо наближеного значення корня. Його сутність заключається в наступному.

Нехай дано рівняння $f(x)=0$, де $f(x)$ - безперервна функція , і необхідно визначити його дійсні корні.

Замінимо рівняння $f(x)=0$ рівнозначним рівнянням $x=j\left(x\right)$. Це можна зробити багатьма способами.

Наприклад, рівняння $2x^3-25x+1=0$ можна замінити наступними еквівалентними рівняннями: $x=x+\left(2x^3-25x+1\right)$ або $x=\sqrt[3]{\dfrac{25x-1}{2}}$ або $x=\dfrac{2x^3+1}{25}$ і т.д.

Тоді в першому випадку $j_1\left(x\right)=2x^3-24x+1$, в другому - $j_2\left(x\right)=\sqrt[3]{\dfrac{25x-2}{2}}$, а в третьому - $j_3\left(x\right)=\dfrac{2x^3+1}{25}$ і т.д.

Потім обираємо деяке нульове наближення $x_0\in\left[a_0,b_0\right]$. Це можна зробити аналітично або графічно, про що говорилося вище.

Подальші наближення обчислимо по формулам $x_{n+1}=j\left(x_n\right)$ $n=0,1,2,\mathbf{K}$.

Очевидно, якщо x_n прагне до деякої границі a , то ця границя є коренем вихідного рівняння $f(x)=0$.

Дослідимо умови збіжності. Якщо функція $j\left(x\right)$ має безперервну похідну, тоді $x_{n+1}-a=j\left(x_n\right)-j\left(a\right)=\left(x_n-a\right)j'(c)$, де точка C лежить між точками x_n і a . Тому, якщо усюди $\left|j'(x)\right|\le q<1$, тоді відрізки $\left(x_n-a\right)$ зменшуються не повільніше членів геометричної прогресії і послідовність x_n сходиться за будь-якого нульового наближення. У випадку ж, якщо $\left|j'(x)>1\right|$, ітерації не можуть сходитися.

Зазначимо, якщо $\left|j'(x)<1\right|$ близько кореня, а далеко від нього $\left|j'(x)>1\right|$, то ітерації сходяться, якщо нульове наближення обрано достатньо близько до кореня.

Очевидно, що чим менше q, тим швидша збіжність. Близько кореня збіжність визначається величиною $\left|j'(a)\right|$ і буде особливо швидкою, якщо $j'(a)=0$.

Звідси ясно, що успіх методу залежить від того наскільки вдало обрано $j(x)$.

Розглянемо приклад. Грубо наближене значення кореня для рівняння $2x^3-25x+1=0$ належить до $[0{,}1]$. З'ясуємо, чи можна користуватися функцією $j_1(x)=2x^3-24x+1$ для обчислення послідовності наближень. Оскільки $j_1'(x)=6x^2-24$, то $\left|j_1'(x)\right|>1$ при $0\le x\le 1$, тому функцією користуватися не можна. Перевіримо, чи виконується умова $\left|j_2'(x)\right|<1$ для функції $j_3(x)=\dfrac{2x^3+1}{25}$. Знаходимо $j_3'(x)=\dfrac{6x^2}{25}$. Якщо $0\le x\le 1$, то $j_3'(x)=\dfrac{6x^2}{25}$ не більше $\dfrac{6}{25}$, тобто $\left|j_3'(x)\right|\le\dfrac{6}{25}=q<1$. Тому цією функцією можна користуватися для обчислення, послідовних наближень кореня.

Який практичний критерій збіжності, тобто коли треба припиняти ітерації?

З рівності $x_{n+1}-a=j(x_n)-f(a)=(x_n-a)j'(c)$ видно, що якщо $j'(x)<0$, то ітерації поперемінно виявляються то з одного, то з другого боку кореня, так що корінь знаходиться в інтервалі (x_n,x_{n-1}). Це надійна, але дещо груба оцінка, яку не можна застосовувати, коли $j'(x)>0$, тобто коли ітерації сходяться до кореня монотонно з одного боку.

Близько кореня ітерації сходяться приблизно як геометрична прогресія зі знаменником $q=\dfrac{x_n-x_{n-1}}{x_{n-1}-x_{n-2}}$.

Для того, щоб сума подальших її членів не перевищувала e, повинен виконуватися критерій збіжності $|x_n - x_{n-1}| < \frac{1-q}{q} \cdot e$, де e - гранична абсолютна погрішність кореня, що задана. При виконанні цієї умови ітерації можна припиняти.

Зауваження. Метод ітерації має важливу перевагу: в ньому не накопичуються помилки обчислень. Помилка обчислень еквівалентна деякому погіршенню чергового наближення. Але це відобразиться лише на кількості ітерацій, а не на точності остаточного результату.

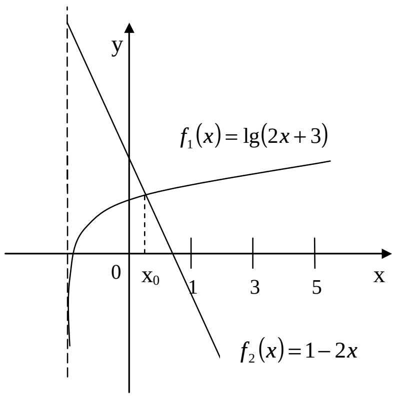
Приклад рішення та оформлення одного з варіанту

Дано рівняння

1) $2x + \lg(2x+3) = 1$ 2) $x^3 - 2x^2 + 7x + 3 = 0$

Необхідно знайти всі дійсні корені цих рівнянь з точністю до трьох значущих цифр, тобто $e = \frac{1}{2} \cdot 10^{-2}$.

1. Знайдемо грубо наближені значення коренів рівняння $2x + \lg(2x+3) = 1$ графічно. Для цього рівняння зручно представити у вигляді: $\lg(2x+3) = 1 - 2x$. Побудуємо графіки функцій $f_1(x) = \lg(2x+3)$ та $f_2(x) = 1 - 2x$.



З графіків видно, що рівняння має один корінь, що лежить на відрізку $[0; 0{,}5]$.

Для уточнення кореня представимо дане рівняння у вигляді: $x = \frac{1}{2}\left(1 - \lg(2x+3)\right)$, звідки видно, що $j\,(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\lg(2x+3)$.

Перевіримо виконання умови $\left| j\,'(x) < 1 \right|$, якщо $0 \le x \le 0{,}5$.

Знайдемо $j\,'(x) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2x+3} \cdot 2\frac{1}{\ln 10} = -\frac{1}{2x+3} \cdot \frac{1}{2{,}3026} = -\frac{0{,}4347}{2x+3}$

Якщо $0 \le x \le 0{,}5$, то $\left| j\,'(x) \right| \le \frac{0{,}4347}{3} = 0{,}1449 = q < 1$. Умова $\left| j\,'(x) < 1 \right|$ виконана.

За початкове наближення візьмемо $x_0 = 0$, а всі інші наближення будемо визначати з рівності $x_{n+1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\lg(2x_n + 3) \quad (n = 0{,}1{,}2\,\mathbf{K})$.

Будуємо послідовні наближення до тих пір, доки два сусідніх наближення x_{n-1} та x_n не співпадуть один з одним в межах точності, що дорівнює

$$\frac{1-q}{q}e = \frac{1-0{,}1449}{0{,}1449} \cdot 0{,}005 = 5{,}9 \cdot 0{,}005 = 0{,}0295.$$

Обчислення зручно розташувати у таблиці:

n	x_n	$2x_n + 3$	$\lg(2x_n + 3)$	$\frac{1}{2}\lg(2x_n + 3)$
0	0	3	0,4771	0,2386
1	0,2614	3,5228	0,5469	0,2734
2	0,2266	3,4532	0,5382	0,2691
3	0,2309	3,4618	0,5394	0,2697
4	0,2303	3,4606	0,5392	0,2696
5	0,2304	3,4608	0,5392	0,2696

П’яте і шосте наближення співпали з точністю до чотирьох значущих цифр. Маємо $\left| x_3 - x_4 = 0{,}0001 \right|$, що значно менше ніж

$\frac{1-q}{q}\cdot e = 0{,}0295$. На цьому ітераційний процес закінчується. Можна прийняти $a = 0{,}230 \pm 0{,}005$.

2. Відділяємо корені рівняння $x^3 - 2x^2 + 7x + 3 = 0$ аналітично.

Позначимо $f(x) = x^3 - 2x^2 + 7x + 3$. Область визначення цієї функції $]-\infty, \infty[$, тому $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Складемо таблицю

x	$-\infty$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	1	∞
$sign\ \ f(x)$	-	-	-	+	+	+

Рівняння має дійсний корінь, що лежить на відрізку $[-0{,}5;0]$.

Приведемо дане рівняння до виду $x = j(x)$ та перевіримо виконання умови $|j'(x)| < 1$.

Рівняння запишемо у вигляді: $x = -\frac{1}{7}\left(x^3 - 2x^2 + 3\right)$. Тоді $j(x) = -\frac{1}{7}\left(x^3 - 2x^2 + 3\right)$ та $j'(x) = -\frac{1}{7}\left(3x^2 - 4x\right)$. Якщо $-0{,}5 \le x \le 0$, то $|j'(x)| \le \frac{5}{28} \approx 0{,}1786 = q < 1$. Умова $|j'(x)| < 1$ виконується.

За початкове наближення візьмемо $x_0 = 0$, тоді $x_{n+1} = -\frac{1}{7}\left(x_n^3 - 2x_n^2 + 3\right)$. Будуємо послідовні наближення до тих пір, доки x_{n-1} та x_n не співпадуть один з одним в межах точності $\frac{1-q}{q}\cdot e = \frac{1-0{,}1786}{0{,}1786}\cdot 0{,}005 = \frac{0{,}8214}{0{,}1786}\cdot 0{,}005 = 0{,}0232$.

Обчислення розташуємо у таблиці:

n	x_n	x_n^2	x_n^3	$j(x_n) = -\frac{1}{7}\left(x_n^3 - 2x_n^2 + 3\right)$
0	0	0	0	-0,4286
1	-0,4286	0,1837	0,0787	-0,3873
2	-0,3873	0,1500	0,0581	-0,3940
3	-0,3940	0,1552	0,0612	-0,3930
4	-0,3930	0,1544	0,0607	-0,3931
5	-0,3931	0,1545	0,0607	-0,3931
6	-0,3931			

П'яте і шосте наближення співпали з точністю до чотирьох значущих цифр. Маємо $\left|x_5 - x_4 = 0{,}0001 < 0{,}0232\right|$.

На цьому ітераційний процес закінчується. Можна прийняти $a = -0{,}393 \pm 0{,}005$.

1.4. Питання до самоперевірки

1. Находження грубо наближеного значення кореня графічним способом?
2. Находження грубо наближеного значення кореня аналітичним способом?
3. Що таке нульове наближення x_0 ?
4. Що таке гранична абсолютна похибка кореня?
5. Сутність методу ітерацій (метод послідовних наближень)?

1.5. Варіанти індивідуальних завдань

№ варіанта	$f_1(x)=0$	$f_2(x)=0$
1	$\ln x+(x+1)^3=0$	$x^3+2x^2+2=0$
2	$x\cdot 2^x-1=0$	$x^3-3x^2+9x-10=0$
3	$\sqrt{x+1}-\frac{1}{x}=0$	$x^3-2x+2=0$
4	$x-\cos x=0$	$x^3+3x-1=0$
5	$3x+\cos x+1=0$	$x^3+x-3=0$
6	$x+\lg x-0{,}5=0$	$x^3+0{,}4x^2+0{,}6x-1{,}6=0$
7	$\lg x+x-2=0$	$x^3-0{,}2x^2+0{,}4x-1{,}4=0$
8	$(x-1)^2-\frac{1}{2}e^x=0$	$x^3-0{,}1x^2+0{,}4x+2=0$
9	$2-x+e^x=0$	$x^3+3x^2+12x+3=0$
10	$2{,}3x-2^x=0$	$x^3-0{,}2x^2+0{,}5x-1=0$
11	$x^2+4\sin x=0$	$x^3-0{,}1x^2+0{,}4x+1{,}2=0$
12	$2x-\lg x-7=0$	$x^3-3x^2+6x-5=0$
13	$5x-8-8\ln x=0$	$x^3-0{,}2x^2+0{,}5x-1{,}4=0$

14	$3x - e^x = 0$	$x^3 + 2x + 4 = 0$
15	$x(x+1)^2 - 1 = 0$	$x^3 - 3x^2 + 12x - 12 = 0$
16	$(x+1)^3 - x = 0$	$x^3 + 0{,}2x^2 + 0{,}5x + 0{,}8 = 0$
17	$x^2 - \sin x = 0$	$x^3 + 4x - 6 = 0$
18	$x^3 - \sin x = 0$	$x^3 + 0{,}1x^2 + 0{,}4x - 1{,}2 = 0$
19	$x^2 - \lg(x+2) = 0$	$x^3 + 3x^2 + 6x - 1 = 0$
20	$x^2 - \ln(x+1) = 0$	$x^3 - 0{,}1x^2 + 0{,}4x - 1{,}5 = 0$
21	$2x + \lg x + 0{,}5 = 0$	$x^3 - 0{,}2x^2 + 0{,}3x - 1{,}2 = 0$
22	$2x + \cos x - 0{,}5 = 0$	$x^3 - 3x^2 + 6x - 2 = 0$
23	$0{,}5x - 0{,}5 + \lg(x-1) = 0$	$x^3 + 0{,}2x^2 + 0{,}5x - 2 = 0$
24	$\lg(x+2) + 2x - 3 = 0$	$x^3 + 0{,}2x^2 + 0{,}5x - 1{,}2 = 0$
25	$\lg(2x+1) + x - 2 = 0$	$x^3 - 3x^2 + 9x + 2 = 0$
26	$\lg(x+1) + x - 1{,}5 = 0$	$x^3 - 3x^2 + 6x + 3 = 0$
27	$\cos x + x - 1 = 0$	$x^3 - 0{,}1x^2 + 0{,}3x - 0{,}6 = 0$
28	$2x + \cos x - 0{,}5 = 0$	$x^3 - 3x^2 + 6x - 2 = 0$
29	$x^2 - \sin x = 0$	$x^3 + 4x - 6 = 0$
30	$\lg(2x+1) + x - 2 = 0$	$x^3 - 3x^2 + 9x + 2 = 0$

Лабораторна робота №2. АПРОКСИМАЦІЯ ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНИХ ДАНИХ

2.1. Зміст та порядок виконання роботи

1. За заданою таблицею значень (експериментальних даних) побудувати графік та встановити загальний вид апроксимуючої функції в залежності від розташування точок у площині.
2. Скласти та реалізувати на ЕОМ програму розрахунку параметрів апроксимуючої функції.
3. Проаналізувати результати розрахунку.
4. Оформити звіт згідно з порядком виконання роботи.

Короткі теоретичні відомості

Величину y прийнято вважати функцією від аргументу x, якщо кожному значенню x відповідає значення y $(y = f(x))$. Проте функція може бути задана таблично, у вигляді значень функції y для дискретної скінченої множини значень аргументу x. З таблицями доводиться мати справу при обробці експериментальних даних та коли залежність $f(x)$
настільки складна, що використовувати її для практичних розрахунків нераціонально.

Значення функції $f(x)$, що визначаються експериментально, містять погрішність вимірів. В такому випадку виникає задача про таке наближення функції $f(x)$ деякою функцією $j(x)$, при якому відхилення $j(x)$ від $f(x)$ на відрізку, що розглядається, в цілому було б обмежено, тобто щоб відхилення функції $j(x)$ від функції $f(x)$ було б мінімальним.

Одним з видів апроксимації є метод найменших квадратів.

2.2. Метод найменших квадратів

Нехай є набір експериментально отриманих значень функції в даних точках $\begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 \mathbf{K}\, x_n \\ y_1 & y_2 & y_3 \mathbf{K}\, y_n \end{matrix}$.

Необхідно знайти таку аналітичну залежність y від x, графік якої проходить як можна більш близько до заданих точок $A_i(x_i; y_i)$.

У випадку середньоквадратичної апроксимації серед елементарних аналітичних функцій необхідно знайти таку, для якої мінімізується міра відхилення $j(x)$ від $f(x)$:

$$S = \sum_{i=1}^{n} \left[j(x_i) - y_i \right]^2 \to \min$$

Вид аналітичної функції обирається на підставі вивчення графічного зображення функції $f(x)$, побудованого згідно табличних даних.

Розглянемо приклади використання деяких елементарних функцій.

2.2.1. Лінійна функція $y = ax + b$

В цьому випадку $S = \sum_{i=1}^{n} \left[ax_i + b - y_i \right]^2$

Необхідно підібрати такі значення a і b, щоб значення S було б мінімальним. Для відшукування мінімуму функції S можна скористатися необхідною умовою існування екстремуму функції декількох змінних:

$$\frac{\partial S}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial b} = 0.$$

$$\frac{\partial S}{\partial a} = \sum_{i=1}^{n} 2\left(ax_i^2 + bx_i - y_i x_i\right) = 0$$

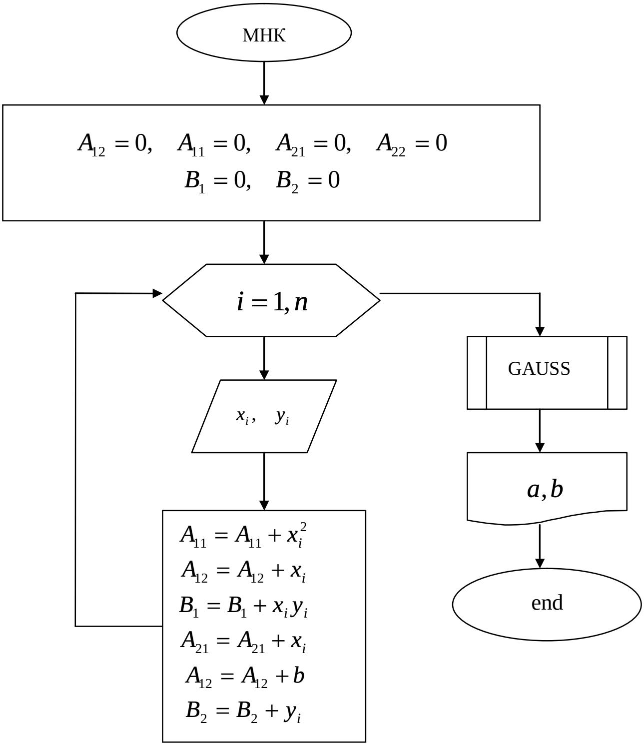
$$\frac{\partial S}{\partial b} = \sum_{i=1}^{n} 2\left(ax_i + b - y_i\right) = 0$$

Отримуємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i + nb = \sum_{i=1}^{n} y_i \end{cases}.$$

Для вирішення отриманої системи рівнянь використовуємо метод Гауса. Використання ЕОМ дозволяє автоматизувати вирішення задачі у випадку обробки великого об’єму експериментальних даних.

Блок-схема алгоритму виглядає наступним чином:



Для оцінки відповідності між обраною лінійною функцією та експериментальною залежністю, що дана, використовується коефіцієнт кореляції.

$$r_{xy} = \frac{\overline{xy} - \overline{x} \cdot \overline{y}}{\sqrt{D_x D_y}}, \text{ де } D_y = \frac{1}{n} \sum \left(y_i^2 - n\overline{y}^2 \right)$$

Для нелінійної функції використовується кореляційне співвідношення

$$h = \sqrt{1 - \frac{\sum \left(j^T(x_i) - y_i \right)^2}{nD_y^2}} .$$

2.2.2. Квадратична функція $y = ax^2 + bx + c$

В даному випадку отримуємо міру відхилення

$$S = \sum_{i=1}^{n} \left[ax_i^2 + bx_i + c - y_i \right]^2$$

Згідно вимоги існування мінімуму функції S запишемо систему рівнянь

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial a}=0 \\ \frac{\partial S}{\partial b}=0 \\ \frac{\partial S}{\partial c}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\sum_{i=1}^{n} x_i^4 + b\sum_{i=1}^{n} x_i^3 + c\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i^3 + b\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + c\sum_{i=1}^{n} x_i = a\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i + cn = \sum_{i=1}^{n} y_i \end{cases}$$

Рішення системи рівнянь проводиться за допомогою методу Гауса.

2.2.3. Логарифмічна функція $y=\ln(ax+b)$

Пропотенцируємо обидві частини рівняння. Отримаємо $e^y = ax+b$. В цьому випадку міру відхилення можна записати у вигляді

$$S=\sum_{i=1}^{n}\left[ax_i + b - e^{y_i}\right]^2$$

Складемо систему рівнянь для визначення коефіцієнтів a та b.

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial a}=0 \\ \frac{\partial S}{\partial b}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} 2\left[ax_i + b - e^{y_i}\right]x_i = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} 2\left[ax_i + b - e^{y_i}\right] = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} e^{y_i} x_i \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i + nb = \sum_{i=1}^{n} e^{y_i} \end{cases}$$

2.2.4. Показова функція $y=e^{ax+b}$

Прологарифмуємо обидві частини виразу

$$\ln y = ax+b$$

Запишемо міру відхилення

$$S=\sum_{i=1}^{n}\left[ax_i + b - \ln y_i\right]^2$$

Складемо систему рівнянь для визначення коефіцієнтів a та b.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial a} = 0 \\ \dfrac{\partial S}{\partial b} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} 2\left[ax_i + b - \ln y_i\right]x_i = 0 \\ \sum\limits_{i=1}^{n} 2\left[ax_i + b - \ln y_i\right] = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} a\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \ln y_i \\ a\sum\limits_{i=1}^{n} x_i + nb = \sum\limits_{i=1}^{n} \ln y_i \end{cases}$$

2.2.5. Дробово-лінійна функція $y = \dfrac{x}{ax+b}$

В даному випадку зручніше розглядати зворотні величини $\dfrac{1}{y} = a + \dfrac{b}{x}$

Тоді функція S буде мати вигляд

$$S = \sum_{i=1}^{n}\left[a + \frac{b}{x_i} - \frac{1}{y_i}\right]^2$$

Система рівнянь відносно a та b має вигляд:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial a} = 0 \\ \dfrac{\partial S}{\partial b} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} na + b\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{1}{x_i} = \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{1}{y_i} \\ a\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{1}{x_i} + \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{1}{x_i^2} = \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{1}{x_i y_i} \end{cases}$$

2.3. Питання до самоперевірки

1. Що таке апроксимація експериментальних даних?
2. Сутність методу найменших квадратів як одного з видів апроксимації?
3. Сутність методу Гауса для вирішення системи рівнянь?
4. Для чого використовується коефіцієнт кореляції?

2.4. Варіанти індивідуальних завдань

У всіх варіантах завдань необхідно підібрати апроксимуючу функцію методом найменших квадратів.

1. В результаті експерименту отримано таблицю значень подовження l еластичного шнура від підвішеного до нього вантажу P:

P, H	0,5	1,0	2,0	4,0	6,0	8,0
l, см	0,005	0,01	0,021	0,0401	0,0605	0,080

2. В результаті експерименту отримано таблицю залежності тиску маси газу від об'єму, що він займає, при постійній температурі:

P, см.рт.ст.	76	91	114	152	228
V, см^3	600	500	400	300	200

3. При таруванні термопари отримані наступні значення температурі T та електрорушійної сили E:

T, ^{0}С	490	840	1003	1283
l, мВ	3,152	5,036	5,773	10,382

4. Задано таблицю максимально допустимої сили току I у трамвайному дроті в залежності від його перерізу S:

S, см^2	10	50	90	130	170	210
I, А	40	100	160	210	260	300

5. Акомодацією ока називається пристосування ока до ясного бачення предметів, що знаходяться на різних відстанях від нього. Залежність акомодації ока (в діоптріях) від віку (в роках) наступна:

Вік	10	15	20	25	30	35	40
Акомодація	14	12	10	8,5	7	5,5	4,5

6. Задано таблицю залежності об'ємної ваги g при вологості 10% та модуля пружності E при стискуванні вздовж волокон деревини ялини:

E 10^{-2}, Н/см^2	74	88	102	116	130	144	158	172
g 10, Н/см^2	325	355	385	415	445	475	505	535

7. Досліджуючи витикання рідини через щілину, отримали таблицю залежності коефіцієнта витрат m від напору H :

m	0,448	0,432	0,421	0,417	0,414	0,412
H	0,164	0,328	0,636	0,984	1,312	1,640

8. Результати дослідів з визначення опору, що робить повітря автомобіля, який рухається, дано в таблиці (A - площа лобової поверхні автомобіля, що випробовує опір; v - швидкість руху):

A	46	38	34	32	28	24	22	18	16	12
v	47,9	52,9	54	55,5	62,5	64,2	70,3	75	77	81,6

9. При випробуванні літака визначався загальний тиск P на крилі за різних швидкостей польоту v :

v км/г	50	100	150	200	250
P, H	350	2000	5400	11300	19700

10. Залежність між стискуванням X пружини та навантаженням, що йому відповідає, задана таблицею:

X , мм	15	20	25	30	35	40
P, H	500	950	3120	7250	13580	22320

11. Дана таблиця залежності ударної в'язкості a та межі міцності при розриві s осьової сталі:

s, Н/мм^2	500	520	540	560	580	600	620	640
a, Нм/см^2	9,5	8,5	8,5	8,5	7,5	7,5	6,5	4,5

12. Залежність між швидкістю течії v та частотою обертання n гвинта гідрометричної вертушки у стоячій воді задана таблицею:

n, об/хв	21	32	45	55	57	64	77	80	90	96
v, м/с	0,39	0,55	0,64	0,76	0,81	0,91	1,05	1,05	1,16	1,22

13. Для ряду брусків різної довжини L безпосередньо були виміряні відносні подовження j, за яких відбувається розрив:

L, мм	50	70	100	150	200	250
j, %	62	53,7	46,3	39,3	35,2	31,9

14. Результати безпосереднього вимірювання швидкості течії ріки на її відносних глибинах представлені у таблиці. Відносна глибина – відношення глибини занурення даної точки до повної глибини ріки:

Н	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
v, м/с	0,95	0,96	0,97	0,97	0,97	0,96	0,95	0,93	0,91

15. Швидкість охолодження тіла, нагрітого до температури T^0C, в оточуючому середовищі з температурою 0^0C задана таблицею:

T^0C	220	200	180	160	140	120	100
v	8,81	7,40	6,10	4,89	3,88	3,02	2,30

16. За стійкості 60 хвилин залежність швидкості різання v від площі перерізу стружки для хромонікелевої сталі наведена у таблиці:

S, мм^2	1,1	1,4	1,7	2,1	2,6	4,7	6,1	7,0	10,0	12,8
v, м/с	25,0	22,7	22,1	19,8	17,0	12,3	10,7	10,0	8,2	6,7

17. В «Основах хімії» Менделєєв наводить дані розчинності азотно-натрієвої солі $NaNO_3$ на 100 г води в залежності від температури:

t_i	0	4	10	15	21	29	36	51	68
y_i	66,7	71	76,3	80,6	85,7	92,9	99,4	114	125,1

18. Задано таблицю відстаней L далекоміра і показників d, що відлічені по рейці за допомогою зорової труби:

L_i	125,67	119,684	107,604	95,704	83,714	71,214	59,734	47,744
d_i	1,266	1,209	1,083	0,966	0,843	0,719	0,600	0,481

19. Для вивчення залежності електричного опору міді від температури вимірювали опір мідного стержня діаметра 0,93 см та довжиною 77,6 см мікроомах. Результати вимірювання наведені у таблиці:

$T\,^0C$	19,1	25,0	30,1	36,0	40,0	45,1	50,0
R	76,30	77,80	79,75	80,80	82,35	83,90	85,10

20. Результати досліджень, що встановлюють залежність коефіцієнтів тертя ковзання між тормозними колодками та стальними бандажами від швидкості руху поїзда, записані в таблицю:

V, км/год	19,1	25,0	30,1	36,0	40,0	45,1	50,0

N	76,30	77,80	79,75	80,80	82,35	83,90	85,10

21. Залежність між межею міцності s_B та межею плинності s_T сталі 30ХГСА задана таблицею:

s_T, Н/мм^2	930	980	1030	1080	1130	1180	1230	1280
s_B, Н/мм^2	1030	1110	1150	1190	1230	1270	1310	1350

22. Для мартенівської сталі згідно з умовами завдання 16 отримана наступна таблиця значень:

S, мм^2	1,4	1,9	2,2	2,5	2,7	3,3	3,8	5,9	7,5	9,0
v, м/с	30,8	27,8	27,0	25,2	24,2	23,0	22,1	17,9	16,0	14,8

23. Залежність між часом горіння x_1 при нормальній напрузі та початковим значенням світового потоку в кінці терміни служби x_2 електричних ламп представлена таблицею:

x_2, %	57,5	62,2	67,5	72,5	77,5	82,5	87,5	92,5	97,5
x_1, ч	1800	1600	1200	1000	1000	1000	600	600	400

24. Залежність між літражем циліндра V та літровою вагою q авіаційних двигунів наведена в таблиці:

q, Н/л	125	175	225	275	325	375	425	475

V, л	3,25	2,25	1,25	0,75	0,75	0,75	0,25	0,25

25. Залежність між температурою та ударною в'язкістю вуглецевої сталі з 0,40% C задана таблицею:

a, Нм/см^2	10	30	50	70	90	110	130	150
$t, ^0 C$	-40	-20	-20	0	20	40	80	100

26. Залежність між межею міцності при стискуванні x_1 та межею міцності при розтягуванні x_2 цементного розчину 28-денного віку наведена у таблиці:

x_2, Н/см^2	165	175	185	195	205	215	225	235
x_1, Н/см^2	2900	2900	2700	3100	3100	3300	3300	3500

27. Таблиця залежності міцності x_1 від подовження x_2 бавовняної пряжі має вигляд:

x_2 %	5,5	6,0	6,5	7	7,5	8	8,5	9	9,5	10	10,5
x_1, Н	1,75	2,00	2,25	2,25	2,50	2,75	3,00	3,00	3,50	3,25	3,50

28. Залежність між літражем циліндра V та літровою вагою q авіаційних двигунів наведена в таблиці:

q, Н/л	125	175	225	275	325	375	425	475
V, л	3,25	2,25	1,25	0,75	0,75	0,75	0,25	0,25

29. Залежність між температурою та ударною в'язкістю вуглецевої сталі з 0,40% C задана таблицею:

a, Нм/см^2	10	30	50	70	90	110	130	150
$t,^0 C$	-40	-20	-20	0	20	40	80	100

30. Залежність між межею міцності при стискуванні x_1 та межею міцності при розтягуванні x_2 цементного розчину 28-денного віку наведена у таблиці:

x_2, Н/см^2	165	175	185	195	205	215	225	235
x_1, Н/см^2	2900	2900	2700	3100	3100	3300	3300	3500

Лабораторна робота 3-4. ПРЯМІ МЕТОДИ РОЗВ’ЯЗАННЯ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ

3.1. Розв’язання систем лінійних рівнянь методом Гауса

Методи розв’язання лінійних систем, що на даний час застосовуються можна розбити на дві групи: точні та наближені.

Точні методи представляють собою скінченні алгоритми для обчислення коренів системи (правило Крамера, метод Гауса, метод головних елементів, метод квадратних коренів та ін.) Внаслідок неминучих округлень, результати містять округлення, причому оцінка похибок коренів у загальному випадку є важкоздійсненною.

Наближені методи (ітераційні) дозволяють отримувати корені системи з заданою точністю шляхом збіжних нескінченних процесів (метод Зейделя, метод ітерацій, метод релаксації та ін.) Ефективне застосування ітераційних методів істотно залежить від вдалого вибору початкового наближення і швидкості збіжності процесу.

Найбільш поширеним методом розв’язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь є метод Гауса, в основі якого ідея послідовного виключення невідомих. Існують різні обчислювальні схеми, що реалізують цей метод. Розглянемо один з них – схему єдиного поділу.

Для простоти обмежимося розглядом системи 4-х рівнянь з 4-ма невідомими.

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 &= a_{15}\\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 &= a_{25}\\
a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 &= a_{35}\\
a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 &= a_{45}
\end{aligned} \qquad (3.1)$$

Нехай $a_{11} \neq 0$ (провідний елемент). Розділивши коефіцієнт 1-го рівняння системи (3.1) на a одержимо:

$$x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + a_{13}^{(1)}x_3 + a_{14}^{(1)}x_4 = a_{15}^{(1)} \qquad (3.2)$$

де $a_{1j}^{(1)} = a_{1j} / a_{11} \quad (j > 1)$

Користуючись рівнянням (3.2) можна виключити невідоме x, з другого, третього і четвертого рівнянь системи (3.1). У результаті отримаємо систему трьох рівнянь:

$$a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + a_{24}^{(1)}x_4 = a_{25}^{(1)}$$
$$a_{32}^{(1)}x_2 + a_{33}^{(1)}x_3 + a_{34}^{(1)}x_4 = a_{35}^{(1)} \qquad (3.3)$$
$$a_{42}^{(1)}x_2 + a_{43}^{(1)}x_3 + a_{44}^{(1)}x_4 = a_{45}^{(1)}$$

де коефіцієнт $a_{ij}^{(1)}(i, j > 2)$ обчислюється за формулою:

$$a_{ij}^{(1)} = a_{ij} - a_{i1}a_{ij}^{(1)} \quad (i, j > 2) \qquad (3.4)$$

Розділивши далі коефіцієнти першого рівняння системи (3.3) на «провідний елемент» $a_{22}^{(1)}$, отримаємо рівняння:

$$x_2 + a_{23}^{(2)}x_3 + a_{24}^{(2)}x_4 = a_{25}^{(2)} \qquad (3.5)$$

де $a_{2j}^{(2)} = a_{2j}^{(1)} / a_{22}^{(1)} \qquad j > 2$

Виключаючи тепер x таким же способом, прийдемо до наступних систем рівнянь:

$$a_{33}^{(2)}x_3 + a_{34}^{(2)}x_4 = a_{35}^{(2)}$$
$$a_{43}^{(2)}x_3 + a_{44}^{(2)}x_4 = a_{45}^{(2)} \qquad (3.6)$$

де $a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - a_{ij}^{(1)} \cdot a_{ij}^{(2)} \; (i, j > 3) \qquad (3.7)$

Розділивши коефіцієнти першого рівняння системи (3.6) на «провідний елемент» $a_{33}^{(1)}$, отримаємо:

$$x_3 + a_{34}^{(3)}x_4 = a_{35}^{(3)} \qquad (3.8)$$

де

$$a_{3j}^{(3)} = a_{3j}^{(2)} / a_{33}^{(2)} \qquad (j > 3)$$

Виключивши тепер x_3 аналогічним шляхом з системи (3.8) будемо мати:

$$a_{44}^{(3)}x_4 = a_{45}^{(3)} \qquad (3.9)$$

де

$$a_{ij}^{(3)} = a_{ij}^{(2)} - a_{ij}^{(2)} \cdot a_{3j}^{(3)} \quad (i, j > 4)$$

Звідси

$$x = \frac{a_{45}^{(3)}}{a_{44}^{3}} = a_{45}^{(4)} \qquad (3.10)$$

Решта невідомих визначаються з рівнянь (3.8), (3.6), (3.4):

$$x_3 = a_{35}^{(3)} - a_{34}^{(3)}x_4$$
$$x_2 = a_{25}^{(2)} - a_{24}^{(2)}x_4 - a_{23}^{(2)}x_3 \qquad (3.11)$$

$$x_1 = a_{15}^{(1)} - a_{14}^{(1)} x_4 - a_{13}^{(1)} x_3 - a_{12}^{(1)} x_2$$

Отже, розв'язання системи розпадається на два етапи:

Прямий хід

- приведення системи (3.1) до трикутного виду.

$$\begin{aligned} x_1 + a_{12}^{(1)} x_2 + a_{13}^{(1)} x_3 + a_{14}^{(1)} x_4 &= a_{15}^{(1)} \\ x_2 + a_{23}^{(2)} x_3 + a_{24}^{(2)} x_4 &= a_{25}^{(2)} \\ x_3 + a_{34}^{(3)} x_4 &= a_{35}^{(3)} \\ a_{44}^{(4)} x_4 &= a_{45}^{(4)} \end{aligned} \qquad (3.12)$$

Зворотний хід

- визначення невідомих за формулами (3.12), за умови, що всі «провідні елементи» відмінні від 0. Якщо ж який-небудь з них звертається у 0, то у відповідній системі досить провести перестановку рівнянь, щоб зробити «провідний елемент» відмінним від 0.

Обчислення зручно розмістити в таблицю (табл. 3.1).

Порядок заповнення таблиці.

Прямий хід.

1. Записуємо коефіцієнти даної системи в чотирьох рядках і п'яти стовпцях розділу I табл. 3.1

2. Підсумовуємо всі коефіцієнти по рядку і записуємо суму в стовпцях (стовпець контролю), наприклад, $a_{16} = \sum_{j=1}^{5} a_{ij}$

3. Ділимо всі числа, які стоять в першому рядку, на a і результати $a_{1j}^{(1)} = a_{1j} / a_{11}$ записуємо у п'ятому рядку розділу I.

4. Обчислюємо і робимо перевірку. Якщо обчислення ведуться з постійним числом знаків після коми, то числа $a_{16}^{(1)}$ та $\sum a_{1j}$ не повинні відрізнятися більш ніж на одиницю останнього розряду. В іншому випадку слід перевірити дію пункту (3).

5. За формулами (3.4) обчислюємо коефіцієнти

$a_{ij}^{(1)}$ $(i = 2,3,4;\ j = 2,3,4,5,6)$.

Як правило, можливості клавішних обчислювальних машин дозволяють вести обчислення за формулами (3.4) без запису добутку $a_{i1} a_{1j}^{(1)}$.

Результати записуємо у перші три строки розділу II.

6. Робимо перевірку. Сума елементів кожного рядка $\sum_{j=2}^{5} a_{ij}$ $(i = 2,3,4)$ не повинна відрізнятися від $a_{16}^{(1)}$ більш ніж на одиницю останнього розряду (якщо всі обчислення ведуться з постійним числом знаків після коми).

7. Ділимо всі елементи першого рядка розділу II на a і результати записуємо в четвертому рядку розділу II.

Таблиця 3.1

	i	a_{i1}	a_{i2}	a_{i3}	a_{i4}	a_{i5}	$\Sigma = a_{i6}$
I	1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}	$\sum a_{1j} = a_{16}$
	2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	a_{25}	$\sum a_{2j} = a_{26}$
	3	a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}	a_{35}	$\sum a_{3j} = a_{36}$
	4	a_{41}	a_{42}	a_{43}	a_{44}	a_{45}	$\sum a_{4j} = a_{46}$
		1	$a_{12}^{(1)}$	$a_{13}^{(1)}$	$a_{14}^{(1)}$	$a_{15}^{(1)}$	$a_{16} / a_{11} = a_{16}^{(1)}$
II	2		$a_{22}^{(1)}$	$a_{23}^{(1)}$	$a_{24}^{(1)}$	$a_{25}^{(1)}$	$a_{26}^{(1)}$
	3		$a_{32}^{(1)}$	$a_{33}^{(1)}$	$a_{34}^{(1)}$	$a_{35}^{(1)}$	$a_{36}^{(1)}$
	4		$a_{42}^{(1)}$	$a_{43}^{(1)}$	$a_{44}^{(1)}$	$a_{45}^{(1)}$	$a_{46}^{(1)}$
			1	$a_{23}^{(2)}$	$a_{24}^{(2)}$	$a_{25}^{(2)}$	$a_{26}^{(1)} / a_{22}^{(1)} = a_{26}^{(2)}$
III	3			$a_{33}^{(2)}$	$a_{34}^{(2)}$	$a_{35}^{(2)}$	$a_{36}^{(2)}$
	4			$a_{43}^{(2)}$	$a_{44}^{(2)}$	$a_{45}^{(2)}$	$a_{46}^{(2)}$
				1	$a_{34}^{(3)}$	$a_{35}^{(3)}$	$a_{36}^{(2)} / a_{33}^{(2)} = a_{36}^{(3)}$
IV	4				$a_{44}^{(3)}$	$a_{45}^{(3)}$	$a_{46}^{(3)}$
V					1	x_4	$\bar{x}_4$
				1		x_3	$\bar{x}_3$
			1			x_2	$\bar{x}_2$
		1				x_1	$\bar{x}_1$

8. Робимо перевірку, як у пункті (4).

9. За формулою (3.7) обчислюємо a $(i = 3,4;\ j = 3,4,5)$. Результати записуємо в перші два рядки розділу III.

10. Робимо перевірку, як у пункті (6).

11. Ділимо елементи першого рядка розділу III на a і знаходимо числа $a_{3j}^{(3)} = a_{3j}^{(2)} / a_{33}^{(2)}$. Усі результати записуємо у третьому рядку розділу III.

12. Робимо перевірку.

13. Обчислюємо $a_{44}^{(3)} = a_{44}^{(2)} - a_{43}^{(2)} a_{34}^{(3)}$. Результати записуємо в розділі IV.

Зворотний хід.

1. У розділі V записуємо одиниці, як це зазначено в таблиці 3.1.

2. Обчислюємо $x_4 = a_{15}^{(3)} / a_{14}^{(3)}$.

3. Для обчислення значень x_3, x_2, x_1 використовуються лише рядки розділів I, II, III, що містять одиниці (зазначені рядки), починаючи з останнього. Так, для обчислення x_3 множимо x_4 на $a_{34}^{(3)}$ і результат віднімаємо від $a_{35}^{(3)}$. При цьому одиниці, що розміщені в розділі V, допомагають знаходити для x $(i = 3,2,1)$ відповідні коефіцієнти у зазначених рядках.

Таким чином

$$x_3 = a_{35}^{(3)} - a_{34}^{(3)} x_4 .$$

4. Обчислюємо x_2, для чого використовуємо елементи зазначеного рядка розділу II:

$$x_2 = a_{25}^{(2)} - a_{23}^{(2)} x_3 - a_{24}^{x(4)} x_4 .$$

5. Обчислюємо x_1, для чого використовуємо елементи зазначеної рядки розділу I:

$$x_1 = a_{15}^{(1)} - a_{12}^{(1)} x_2 - a_{13}^{(1)} x_3 - a_{14}^{(1)} x_4 .$$

Аналогічно проводиться зворотний хід у контрольній системі. Розв'язання цієї системи має відрізнятися від рішень даної системи на 1 (з точністю до одиниці останнього розряду):

$$\bar{x}_i = x_i + 1 \quad (i = 1,2,3,4)$$

Цей контроль здійснюється за допомогою стовпця суми.

Таким же чином реалізується компактна схема Гауса для систем з іншим числом невідомих. Компактна схема Гауса виявляється особливо вигідною при одночасному розв'язанні декількох систем, що відрізняються лише стовпцями вільних членів, що має місце, наприклад, при обчисленні елементів зворотної матриці.

Приклад 1: Розв'язати систему методом Гауса.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 0 \\ -x_1 + 3x_3 - 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases}$$

Складемо розрахункову таблицю:

Таблиця 3.2

	i	a_{i1}	a_{i2}	a_{i3}	a_{i4}	b_i	Σ
I	**1**	1	2	-1	1	1	4
	2	1	1	-3	1	0	0
	3	-1	0	3	-2	0	0
	4	2	1	2	-3	0	2
		1	2	-1	1	1	4
II	**2**		-1	-2	0	-1	-4
	3		2	2	-1	1	4
	4		3	4	-5	-2	6
			1	2	0	1	4
III	**3**			-2	-1	-1	-4
	4			10	-5	1	6
				1	0,5	0,5	2
IV	**4**			-10	-4	7	-7
				1	0,4		1,4
			1		0,3		1,3
		1			0,4		1,4
	1				0,1		1,1

Відповідь: $x_1 = 0{,}1; x_2 = 0{,}4; x_3 = 0{,}3; x_4 = 0{,}4$

3.2. Обчислення елементів зворотної матриці методом Гауса

Нехай дана матриця

$A = \lfloor a_{ij} \rfloor \qquad (i, j = 1,2,...n)$

Для знаходження її оберненої матриці $A^{-1} = [b_{ij}]$ використовуємо основне співвідношення

$A \cdot A^{-1} = E$, де E – одинична матриця.

Перемножуючи матриці A^{-1} та A будемо мати n систем рівнянь відповідно n невідомих X_{kj}

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_{kj} = d_{ij} \qquad (i, j = 1,2,...n)$$

де

$$d_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ якщо } i = j \\ 0, \text{ якщо } i \neq j \end{cases},$$

отримані n систем лінійних рівнянь для $j = 1,2,...n$, що мають одну і ту ж матрицю A і різні вільні члени, одночасно можна розв'язати методом Гауса.

Складемо схему з єдиним поділом. При цьому будемо мати чотири стовпці вільних членів. Причому, елементи рядків зворотної матриці виявляються у зворотному порядку.

Таблиця 3.3

a_{i1}	a_{i2}	a_{i3}	a_{i4}	$j=1$	$j=2$	$j=3$	$j=4$	Σ
a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	1	0	0	0	a_{1j}
a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	0	1	0	0	a_{2j}
a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}	0	0	1	0	a_{3j}
a_{41}	a_{42}	a_{43}	a_{44}	0	0	0	1	a_{4j}
1	b_{12}	b_{13}	b_{14}	b_{15}	0	0	0	b_{1j}
	$a_{22}^{(1)}$	$a_{23}^{(1)}$	$a_{24}^{(1)}$	$a_{25}^{(1)}$	1	0	0	$a_{2j}^{(1)}$
	$a_{32}^{(1)}$	$a_{33}^{(1)}$	$a_{34}^{(1)}$	$a_{35}^{(1)}$	0	1	0	$a_{3j}^{(1)}$
	$a_{42}^{(1)}$	$a_{43}^{(1)}$	$a_{44}^{(1)}$	$a_{45}^{(1)}$	0	0	1	$a_{4j}^{(1)}$
	1	b_{23}	b_{24}	b_{25}	b_{26}	0	0	b_{2j}
		$a_{33}^{(2)}$	$a_{34}^{(2)}$	$a_{35}^{(2)}$	$a_{36}^{(2)}$	1	0	$a_{3j}^{(2)}$
		$a_{43}^{(2)}$	$a_{44}^{(2)}$	$a_{45}^{(2)}$	$a_{46}^{(2)}$	0	1	$a_{4j}^{(2)}$
		1	b_{34}	b_{35}	b_{36}	b_{37}	0	b_{3j}
a_{i1}	a_{i2}	a_{i3}	a_{i4}	$j=1$	$j=2$	$j=3$	$j=4$	Σ
			$a_{44}^{(3)}$	$a_{45}^{(3)}$	$a_{46}^{(3)}$	$a_{47}^{(3)}$	1	$a_{4j}^{(3)}$
			1	b_{45}	b_{46}	b_{47}	b_{48}	b_{4j}
			1	x_{41}	x_{42}	x_{43}	x_{44}	$\bar{x}_4$
		1		x_{31}	x_{32}	x_{33}	x_{34}	$\bar{x}_3$
	1			x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{24}	$\bar{x}_2$
1				x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	$\bar{x}_1$

Приклад 2: Знайти зворотну матрицю

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

Складаємо розрахункову таблицю згідно вище наведеного алгоритму (табл. 3.4):

Таблиця 3.4

	a_{i1}	a_{i2}	a_{i3}	a_{i4}	$j=1$	$j=2$	$j=3$	$j=4$	Σ
I	1	2	-1	1	1	0	0	0	4
	1	1	-3	1	0	1	0	0	1
	-1	0	3	-2	0	0	1	0	1
	2	1	2	-3	0	0	0	1	3
	1	2	-1	1	1	0	0	0	4
II		-1	-2	0	-1	1	0	0	-3
		2	-2	-1	1	0	1	0	5
		-3	4	-5	-2	0	0	1	-5
		1	2	0	1	-1	0	0	3
III			-2	-1	-1	2	1	0	-1
			10	-5	1	-3	0	1	4
			1	0,5	0,5	-1	-0,5	0	-1
IV				-10	-4	7	5	1	-1
V				1	0,4	-0,7	-0,5	-0,1	0,1
			1		0,3	-0,65	-0,25	0,05	0,45
		1			0,4	0,3	1,5	-0,1	2,1
	1				0,1	-0,55	-0,75	0,35	0,15

Таким чином зворотна матриця A^{-1} буде дорівнювати:

$$A^{-1} = \left\{ \begin{matrix} 0,1 & -0,55 & -0,75 & 0,35 \\ 0,4 & 0,3 & 1,5 & -0,1 \\ 0,3 & -0,65 & -0,25 & 0,05 \\ 0,4 & -0,7 & 0,5 & -0,1 \end{matrix} \right.$$

3.3. Питання до самоперевірки

1. Правило множення і додавання матриць?
2. Що називається зворотною матрицею?
3. Суть методу Гауса?
4. Переваги та недоліки точних методів розв'язання?
5. Методи розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь?

3.4. Варіанти індивідуальних завдань

Завдання 1. Відповідно до номеру за журналом виконати звернення матриці методом Гауса.

Завдання 2. Відповідно до номеру за журналом розв'язати систему методом Гауса.

1. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = -4 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = -6 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = -4 \end{cases}$	2. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 8 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 4 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = -8 \end{cases}$
3. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 1 \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = -5 \end{cases}$	4. $\begin{cases} x_2 - 3x_3 + 4x_4 = -5 \\ x_1 - 2x_3 + 3x_4 = -4 \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_4 = 12 \\ 4x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 5 \end{cases}$
5. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 12 \\ 3x_1 + 5x_2 + 7x_3 + x_4 = 0 \\ 5x_1 + 7x_2 + x_3 + 3x_4 = 4 \\ 7x_1 + x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 16 \end{cases}$	6. $\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 20 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 9 \\ 5x_1 - 7x_2 + 10x_4 = -9 \\ 3x_2 - 5x_3 = 1 \end{cases}$
7. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 = 8 \\ x_1 - 3x_2 - 6x_4 = 9 \\ 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -5 \\ x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 6x_4 = 0 \end{cases}$	8. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4 \\ 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 6 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 6 \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 6 \end{cases}$
9. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 8 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = -1 \\ x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = 10 \end{cases}$	10. $\begin{cases} 4x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = -9 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 + 4x_4 = -7 \\ 3x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 12 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases}$
11. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_4 = 2 \\ 3x_1 - x_3 + x_4 = -3 \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 5x_4 = -6 \end{cases}$	12. $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ x_2 + 2x_3 - x_4 = 2 \\ x_1 - x_2 - x_4 = -1 \\ -x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$

13. $\begin{cases} 5x_1+x_2-x_4=-9 \\ 3x_1-3x_2+x_3+4x_4=-7 \\ 3x_1-2x_3+x_4=-16 \\ x_1-4x_2+x_4=0 \end{cases}$	14. $\begin{cases} 2x_1+x_3+4x_4=9 \\ x_1+2x_2-x_3+x_4=8 \\ 2x_1+x_2+x_3+x_4=5 \\ x_1-x_2+2x_3+x_4=-1 \end{cases}$
15. $\begin{cases} 2x_1-6x_2+2x_3+2x_4=12 \\ x_1+3x_2+5x_3+7x_4=12 \\ 3x_1+5x_2+7x_3+x_4=0 \\ 5x_1+7x_2+x_3+3x_4=4 \end{cases}$	16. $\begin{cases} x_1+5x_2=2 \\ 2x_1-x_2+3x_3+2x_4=4 \\ 3x_1-x_2-x_3+2x_4=6 \\ 3x_1-x_2+3x_3-4x_4=6 \end{cases}$
17. $\begin{cases} x_1-4x_2-x_4=2 \\ x_1+x_2+2x_3+3x_4=1 \\ 2x_1+3x_2-x_3-x_4=-6 \\ x_1+2x_2+3x_3-x_4=-4 \end{cases}$	18. $\begin{cases} 5x_1-x_2+x_3+3x_4=-4 \\ x_1+2x_2+3x_3-2x_4=6 \\ 2x_1-x_2-2x_3-3x_4=8 \\ 3x_1+2x_2-x_3+2x_4=4 \end{cases}$
19. $\begin{cases} 4x_1-2x_2+x_3-4x_4=3 \\ 2x_1-x_2+x_3-x_4=1 \\ 3x_1-x_3+x_4=-3 \\ 2x_1+2x_2-2x_3+5x_4=-6 \end{cases}$	20. $\begin{cases} 2x_1-x_3-2x_4=-1 \\ x_2+2x_3-x_4=2 \\ x_1-x_2-x_4=-1 \\ -x_1+3x_2-2x_3=0 \end{cases}$
21. $\begin{cases} -x_1+x_2+x_3+x_4=4 \\ 2x_1+x_2+2x_3+3x_4=1 \\ 3x_1+2x_2+x_3+2x_4=1 \\ 4x_1+3x_2+2x_3+x_4=-5 \end{cases}$	22. $\begin{cases} 5x_1+3x_2-7x_3+3x_4=1 \\ x_2-3x_3+4x_4=-5 \\ x_1-2x_3-3x_4=-4 \\ 4x_1+3x_2-5x_3=5 \end{cases}$
23. $\begin{cases} x_1+x_2-x_3-x_4=0 \\ x_1+2x_3-2x_4=1 \\ x_1-x_2-x_4=-1 \\ -x_1+3x_2-2x_3-2x_4=0 \end{cases}$	24. $\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3+3x_4=-6 \\ 3x_1-x_2+x_3+5x_4=3 \\ x_1+2x_2-x_3+2x_4=28 \\ 2x_1+3x_2+x_3-x_4=0 \end{cases}$
25. $\begin{cases} 2x_1-x_2+2x_3+2x_4=-3 \\ 3x_1+2x_2+x_3-x_4=3 \\ x_1-3x_2-x_3-3x_4=0 \\ 4x_1+2x_2+2x_3+5x_4=-15 \end{cases}$	26. $\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3-4x_4=-2 \\ 2x_1+3x_2+4x_3-5x_4=8 \\ 3x_1-x_2-x_3+7x_4=-2 \\ 2x_1-x_2+6x_3-3x_4=7 \end{cases}$

27. $\begin{cases} 3x_1+2x_2+5x_3-x_4=3 \\ 2x_1-3x_2-3x_3+4x_4=2 \\ 4x_1+x_2+3x_3+2x_4=3 \\ 5x_1-2x_2+x_3+3x_4=5 \end{cases}$	28. $\begin{cases} 2x_1+x_2+5x_3-x_4=1 \\ 3x_1+3x_2-2x_3-5x_4=2 \\ x_1-x_2+2x_3+3x_4=10 \\ 3x_1+2x_2+7x_3-2x_4=1 \end{cases}$
29. $\begin{cases} 3x_1+x_2+2x_3-x_4=8 \\ 2x_1-3x_2-3x_3+x_4=-3 \\ 4x_1+2x_2+5x_3+3x_4=6 \\ x_1+2x_2-4x_3-3x_4=-3 \end{cases}$	30. $\begin{cases} 2x_1+3x_2+5x_3+x_4=6 \\ 3x_1+x_2-x_3+5x_4=0 \\ 2x_1-x_2+3x_4=-5 \\ 2x_1+2x_2-x_3+7x_4=-3 \end{cases}$

Лабораторна робота 5-6. ІТЕРАЦІЙНІ МЕТОДИ РІШЕННЯ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ

5.1. Метод простих ітерацій

Нехай система лінійних рівнянь

$$bx = b \qquad (5.1)$$

яким-небудь чином приведена до вигляду

$$x = Cx + b\,, \qquad (5.2)$$

де C - деяка матриця, а b - вектор-стовпець.

Виходячи з довільного вектора $x^{(0)}$,

$$x^{(0)} = \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ \ldots \\ x_n^{(0)} \end{pmatrix},$$

будуємо ітераційний процес

$$x^{(k+1)} = Cx^{(k)} + b \qquad (k = 0,1,2,\ldots),$$

або у розгорнутій формі

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = c_{11}x_1^{(k)} + c_{12}x_2^{(k)} + \ldots + c_{1n}x_n^{(k)} + b_1 \\ \qquad\qquad \ldots \\ x_n^{(k+1)} = c_{n1}x_1^{(k)} + c_{n2}x_2^{(k)} + \ldots + c_{nn}x_n^{(k)} + b_n \end{cases} \qquad (5.3)$$

Виконуючи ітерації, отримаємо послідовність векторів

$x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(k)}, \ldots$

Доведено, що якщо елементи матриці C задовольняють одній з умов

$$\sum_{i=1}^{n} \left| C_{ij} \right| \le a < 1 \qquad (i = 1,2,\ldots,n) \qquad (5.4)$$

або

$$\sum_{i=1}^{n} \left| C_{ij} \right| \le b < 1 \qquad (i = 1,2,\ldots,n) \qquad (5.5)$$

то процес ітерації зводиться до точного розв’язання системи x при будь-якому початковому векторі $x^{(1)}$, тобто

$$x = \lim_{k\to\infty} x^{(k)}$$

Таким чином, точне розв’язання системи виходить лише в результаті нескінченного процесу і будь-який вектор $x^{(k)}$ з отриманої послідовності є наближеним рішенням. Оцінка похибки цього наближеного рішення здійснюється однією з наступних формул:

$$\left|x_i - x_i^{(k)}\right| \le \frac{a}{1-a} \max_{j=1,2,\mathbf{K},n} \left|x_j^{(k)} - x_j^{(k-1)}\right| \qquad (5.4')$$

якщо виконуються умови, або

$$\left|x_i - x_i^{(k)}\right| \le \frac{b}{1-b} \sum_{i=1}^{n} \left|x_j^{(k)} - x_j^{(k-1)}\right|, \qquad (5.5\ ')$$

якщо виконана умова. Ці оцінки ще можна підсилити відповідно так:

$$\max\left|x_i - x_i^{(n)}\right| \le \frac{a}{1-a} \max\left|x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)}\right|, \qquad (5.4'')$$

або

$$\sum_{i=1}^{n}\left|x_i - x_i^{(n)}\right| \le \frac{b}{1-b} \sum_{i=1}^{n}\left|x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)}\right|. \qquad (5.5'')$$

Процес ітерацій закінчують, коли зазначені оцінки свідчать про досягнення заданої точності.

Початковий вектор $x^{(0)}$ може бути обраний довільно. Іноді беруть $x^{(0)} = b$. Однак найбільш доцільно в якості компонент $x^{(0)}$ вектора взяти наближені значення невідомих, отримані грубою прикидкою.

Приведення системи до виду можна здійснити різними способами. Важливо тільки, щоб виконувалося одна з умов. Обмежимося розглядом двох таких способів.

Якщо діагональні елементи матриці A відмінні від нуля, тобто $a_{ii} \ne 0 \ (i = 1,2,\ldots n)$, то систему (3.1) можна записати у вигляді

$$\begin{cases} x_1 = (-a_{12}x_2 - \ldots - a_{1n}x_n + b_1)/a_{11} \\ x_2 = (-a_{21}x_1 - a_{23}x_3 - \ldots - a_{2n}x_n + b_2)/a_{22} \\ \mathbf{KK}\ldots\mathbf{KK}\ldots\mathbf{KK}\ldots\mathbf{KK}\ldots\mathbf{KK}\ldots\mathbf{KK}. \\ x_n = (-a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - \ldots - a_{nn-1}x_{n-1} + b_n)/a_{nn} \end{cases} \qquad (5.6)$$

У цьому випадку елементи матриці C визначаються наступним чином:

$$c_{ij} = -\frac{a_{ij}}{a_{ii}} \quad (i \ne j),\ c_{ii} = 0,$$

і тоді умови (5.4) і (5.5) відповідно набувають вигляду

$$\sum_{\substack{j=1 \\ i \ne j}}^{n} \left|c_{ij}\right| \le a < 1 \quad (i = 1,2,\ldots,n) \qquad (5.7)$$

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{n} \left|c_{ij}\right| \le b < 1 \quad (j = 1,2,...,n) \qquad (5.8)$$

Нерівності (3.7) і (3.8) будуть виконані, якщо діагональні елементи матриці A задовольняють умові

$$\left|a_{ii}\right| > \sum_{i\neq j} \left|a_{ij}\right| \quad (i = 1,2,...,n) \qquad (5.9)$$

тобто якщо модулі діагональних коефіцієнтів для кожного рівняння більші ніж суми модулів всіх інших коефіцієнтів (не рахуючи вільних членів) - умова збіжності.

Метод ітерацій має такі переваги порівняно з точними методами.

1) Якщо ітерації сходяться досить швидко, тобто якщо для вирішення системи потрібно менше n ітерацій, то отримуємо виграш у часі, тому що кількість арифметичних операцій, необхідних для однієї ітерації, пропорційно n, а загальне число арифметичних дій у методі Гауса пропорційно n.

2) Похибка округлення в методі ітерацій, впливає значно менше, ніж у методі Гауса. Крім того, метод ітерацій є таким, що самовиправляється, тобто окрема помилка, яка допущена в обчисленнях, не відбивається на остаточному результаті, тому що помилкове наближення можна розглядати як новий початковий вектор.

Остання обставина часто використовується для уточнення значень невідомих, отриманих за допомогою методу Гауса.

3) Метод ітерацій стає особливо вигідним при розв'язанні систем, у яких значення коефіцієнтів дорівнює нулю. Такі системи з'являються, наприклад, при розв'язанні рівнянь в частних похідних.

4) Процес ітерацій призводить до виконання одноманітних операцій і порівняно легко програмується на ЕОМ.

Приклад. Розв'язати систему ЛАР методом ітерацій

$$\begin{cases} 4{,}5x_1 - 1{,}8x_2 + 3{,}6x_3 = -1{,}7 & I \\ 3{,}1x_1 + 2{,}3x_2 - 1{,}2x_3 = 3{,}6 & II \\ 1{,}8x_1 + 2{,}5x_2 + 4{,}6x_3 = 2{,}2 & III \end{cases} \qquad (5.10)$$

Виконаємо перетворення для виконання умов збіжності

$$\begin{cases} 7{,}6x_1 + 0{,}5x_2 + 2{,}4x_3 = 1{,}9 & I + II \\ 2{,}2x_1 + 9{,}1x_2 + 4{,}4x_3 = 9{,}7 & 2 \cdot III + II - I \\ -1{,}3x_1 + 0{,}2x_2 + 5{,}8x_3 = -1{,}4 & III - II \end{cases}$$

З першого рівняння знайдемо x_1, з другого - x_2, з третього - x_3

$$\begin{cases} 7{,}6x_1 = -0{,}5x_2 - 2{,}4x_3 + 1{,}9 \\ 9{,}1x_2 = -2{,}2x_1 - 4{,}4x_3 + 9{,}7 \\ 5{,}8x_3 = 1{,}3x_1 - 0{,}2x_2 - 1{,}4 \end{cases}$$

$$x_1 = -(0{,}5x_2 + 2{,}4x_3 - 1{,}9)/7{,}6$$
$$x_2 = -(2{,}2x_1 + 4{,}4x_3 - 9{,}7)/9{,}1$$
$$x_3 = -(-1{,}3x_1 + 0{,}2x_2 + 1{,}4)/5{,}8$$

$$x_1 = -0{,}066x_2 - 0{,}316x_3 + 0{,}25$$
$$x_2 = -0{,}242x_1 - 0{,}483x_3 + 1{,}065$$
$$x_3 = 0{,}224x_1 - 0{,}034x_2 - 0{,}241$$

В якості початкового наближення приймаємо

$x_1^{(0)} = x_2^{(0)} = x_3^{(0)} = 0$

Далі знаходимо

$x_1^{(1)} = 0{,}25$ $\quad x_2^{(1)} = 1{,}065$ $\quad x_3^{(1)} = -0{,}241$

$x_1^{(2)} = 0{,}217$ $\quad x_2^{(2)} = 1{,}121$ $\quad x_3^{(2)} = -0{,}177$

$x_1^{(3)} = 0{,}23$ $\quad x_2^{(3)} = 1{,}095$ $\quad x_3^{(3)} = -0{,}154$

Для забезпечення заданої точності необхідно 7 ітерацій

$x_1^{(7)} = 0{,}2475$, $\quad x_2^{(7)} = 1{,}1146$, $\quad x_3^{(7)} = -0{,}2243$

5.2. Метод Зейделя

Метод Зейделя є модифікацією методу простої ітерації. Він полягає в тому, що при обчисленні $(k+1)$-го наближення невідомого x_i при $i > 1$ використовуються вже обчислені раніше $(k+1)$-ї наближення невідомих $x_1, x_2, ..., x_{i-1}$. Таким чином, для системи (5.1) обчислення за методом Зейделя ведуться за формулами

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = c_{11}x_1^{(k)} + c_{12}x_2^{(k)} + ... + c_{1n}x_n^{(k)} + b_1 \\ x_2^{(k+1)} = c_{21}x_1^{(k)} + c_{22}x_2^{(k)} + ... + c_{2n}x_n^{(k)} + b_2 \\ \qquad ... \\ x_n^{(k+1)} = c_{n1}x_1^{(k)} + c_{n2}x_2^{(k)} + ... + c_{nn-1}x_{n-1}^{(k)} + c_{nn}x_n^{(k)} + b_n \end{cases} \tag{5.11}$$

Зазначені в п. 5.1 умови збіжності для методу простої ітерації залишаються вірними і для методу Зейделя. Зазвичай метод Зейделя дає кращу збіжність, ніж метод простої ітерації. Крім того, метод Зейделя може виявитися більш зручним при програмуванні, тому що при обчисленні x немає необхідності зберігати значення x.

Приклад 5.2 Розв'язати методом Зейделя систему (5.10)

$$x_1 = -0{,}066x_2 - 0{,}316x_3 + 0{,}25$$

$$x_2 = -0{,}242x_1 - 0{,}483x_3 + 1{,}065$$

$$x_3 = 0{,}224x_1 - 0{,}034x_2 - 0{,}241$$

В якості початкового наближення приймаємо

$$x_1^{(0)} = x_2^{(0)} = x_3^{(0)} = 0$$

Далі знаходимо

$$x_1^{(1)} = 0{,}25 \qquad x_2^{(1)} = 1{,}004 \qquad x_3^{(1)} = -0{,}219$$

$$x_1^{(2)} = 0{,}256 \qquad x_2^{(2)} = 1{,}1207 \qquad x_3^{(2)} = -0{,}2226$$

$$x_1^{(3)} = 0{,}2476 \qquad x_2^{(3)} = 1{,}1146 \qquad x_3^{(3)} = -0{,}2243$$

Кількість ітерацій для забезпечення заданої точності визначається з формули

$$\frac{\|A\|^{k+1}}{1-\|A\|} \cdot \|B\| \le 0{,}001$$

5.3. Питання до самоперевірки

1. Сутність ітераційних методів розв'язання?
2. Відмінність методу Зейделя від ітерації?
3. Умова збіжності ітераційних методів?
4. Оцінка збіжності та точності рішень ітераційними методами?
5. Переваги ітераційних методів?

5.4. Варіанти індивідуальних завдань

Розв'язати систему лінійних рівнянь:

а) методом ітерацій;

б) методом Зейделя.

1. $\begin{cases} 2{,}7x_1 + 3{,}3x_2 + 1{,}3x_3 = 2{,}1; \\ 3{,}5x_1 - 1{,}7x_2 + 2{,}8x_3 = 1{,}7; \\ 4{,}1x_1 + 5{,}8x_2 - 1{,}7x_3 = 0{,}8. \end{cases}$	2. $\begin{cases} 1{,}7x_1 + 2{,}8x_2 + 1{,}9x_3 = 0{,}7; \\ 2{,}1x_1 + 3{,}4x_2 + 1{,}8x_3 = 1{,}1; \\ 4{,}2x_1 - 1{,}7x_2 + 1{,}3x_3 = 2{,}8. \end{cases}$

3. $\begin{cases} 3{,}1x_1 + 2{,}8x_2 + 1{,}9x_3 = 0{,}2; \\ 1{,}9x_1 + 3{,}1x_2 + 2{,}1x_3 = 2{,}1; \\ 7{,}5x_1 + 3{,}8x_2 + 4{,}8x_3 = 5{,}6. \end{cases}$	4. $\begin{cases} 9{,}1x_1 + 5{,}6x_2 + 7{,}8x_3 = 9{,}8; \\ 3{,}8x_1 + 5{,}1x_2 + 2{,}8x_3 = 6{,}7; \\ 4{,}1x_1 + 5{,}7x_2 + 1{,}2x_3 = 5{,}8. \end{cases}$
5. $\begin{cases} 3{,}3x_1 + 2{,}1x_2 + 2{,}8x_3 = 0{,}8; \\ 4{,}1x_1 + 3{,}7x_2 + 4{,}8x_3 = 5{,}7; \\ 2{,}7x_1 + 1{,}8x_2 + 1{,}1x_3 = 3{,}2. \end{cases}$	6. $\begin{cases} 7{,}6x_1 + 5{,}8x_2 + 4{,}7x_3 = 10{,}1; \\ 3{,}8x_1 + 4{,}1x_2 + 2{,}7x_3 = 9{,}7; \\ 2{,}9x_1 + 2{,}1x_2 + 3{,}8x_3 = 7{,}8. \end{cases}$
7. $\begin{cases} 3{,}2x_1 - 2{,}5x_2 + 3{,}7x_3 = 6{,}5; \\ 0{,}5x_1 + 0{,}3x_2 + 1{,}7x_3 = 0{,}2; \\ 1{,}6x_1 + 2{,}3x_2 - 1{,}5x_3 = 4{,}3. \end{cases}$	8. $\begin{cases} 5{,}4x_1 - 2{,}3x_2 + 3{,}4x_3 = -3{,}5; \\ 4{,}2x_1 + 1{,}7x_2 - 2{,}3x_3 = 2{,}7; \\ 3{,}4x_1 + 2{,}4x_2 + 7{,}4x_3 = 1{,}9. \end{cases}$
9. $\begin{cases} 3{,}6x_1 + 1{,}8x_2 - 4{,}7x_3 = 3{,}8; \\ 2{,}7x_1 - 3{,}6x_2 + 1{,}9x_3 = 0{,}4; \\ 1{,}5x_1 + 4{,}5x_2 + 3{,}3x_3 = -1{,}6. \end{cases}$	10. $\begin{cases} 5{,}6x_1 + 2{,}7x_2 - 1{,}7x_3 = 1{,}9; \\ 3{,}4x_1 - 3{,}6x_2 - 6{,}7x_3 = 2{,}4; \\ 0{,}8x_1 + 1{,}3x_2 + 3{,}7x_3 = 1{,}2. \end{cases}$
11. $\begin{cases} 2{,}7x_1 + 0{,}9x_2 - 1{,}5x_3 = 3{,}5; \\ 4{,}5x_1 - 2{,}8x_2 + 6{,}7x_3 = 2{,}6; \\ 5{,}1x_1 + 3{,}7x_2 -{,}14x_3 = -0{,}1. \end{cases}$	12. $\begin{cases} 4{,}5x_1 - 3{,}5x_2 + 7{,}5x_3 = 2{,}5; \\ 3{,}1x_1 - 0{,}6x_2 - 2{,}3x_3 = -1{,}5; \\ 0{,}8x_1 + 7{,}4x_2 - 0{,}5x_3 = 6{,}4. \end{cases}$
13. $\begin{cases} 3{,}8x_1 + 6{,}7x_2 - 1{,}2x_3 = 5{,}2; \\ 5{,}4x_1 + 1{,}3x_2 - 2{,}7x_3 = 3{,}8; \\ 2{,}4x_1 - 4{,}5x_2 + 3{,}5x_3 = -0{,}6. \end{cases}$	14. $\begin{cases} 5{,}4x_1 - 6{,}2x_2 - 0{,}5x_3 = 0{,}5; \\ 3{,}4x_1 + 2{,}3x_2 + 1{,}8x_3 = -0{,}8; \\ 2{,}4x_1 - 1{,}1x_2 + 3{,}8x_3 = 1{,}8. \end{cases}$
15. $\begin{cases} 7{,}8x_1 + 5{,}3x_2 + 4{,}8x_3 = 1{,}8; \\ 3{,}3x_1 + 1{,}1x_2 + 1{,}8x_3 = 2{,}3; \\ 4{,}5x_1 + 3{,}3x_2 + 2{,}8x_3 = 3{,}4. \end{cases}$	16. $\begin{cases} 3{,}8x_1 + 4{,}1x_2 - 2{,}3x_3 = 4{,}8; \\ -2{,}1x_1 + 3{,}9x_2 - 5{,}8x_3 = 3{,}3; \\ 1{,}8x_1 + 1{,}1x_2 - 2{,}1x_3 = 5{,}3. \end{cases}$
17. $\begin{cases} 1{,}7x_1 - 2{,}2x_2 + 3x_3 = 1{,}8; \\ 2{,}1x_1 + 1{,}9x_2 - 2{,}3x_3 = 2{,}8; \\ 4{,}2x_1 + 3{,}9x_2 - 3{,}1x_3 = 5{,}1. \end{cases}$	18. $\begin{cases} 2{,}8x_1 + 2{,}8x_2 - 3{,}2x_3 = 4{,}5; \\ 2{,}5x_1 - 2{,}8x_2 + 3{,}3x_3 = 7{,}1; \\ 6{,}5x_1 - 7{,}1x_2 + 4{,}8x_3 = 6{,}3. \end{cases}$

19. $\begin{cases} 3{,}3x_1 + 3{,}7x_2 + 4{,}7x_3 = 5{,}8; \\ 2{,}7x_1 + 2{,}3x_2 - 2{,}9x_3 = 6{,}1; \\ 4{,}1x_1 + 4{,}8x_2 - 5x_3 = 7. \end{cases}$	20. $\begin{cases} 7{,}1x_1 + 6{,}8x_2 + 6{,}1x_3 = 7; \\ 5x_1 + 4{,}8x_2 + 5{,}3x_3 = 6{,}1; \\ 8{,}2x_1 + 7{,}8x_2 + 7{,}1x_3 = 5{,}8. \end{cases}$
21. $\begin{cases} 3{,}7x_1 + 3{,}1x_2 + 4x_3 = 5; \\ 4{,}1x_1 + 4{,}5x_2 - 4{,}3x_3 = 4{,}9; \\ 2{,}1x_1 + 3{,}7x_2 - 1{,}8x_3 = -2{,}7. \end{cases}$	22. $\begin{cases} 4{,}1x_1 + 5{,}2x_2 - 5{,}8x_3 = 7; \\ 3{,}8x_1 - 3{,}1x_2 + 4x_3 = 5{,}3; \\ 7{,}8x_1 + 5{,}3x_2 - 6{,}3x_3 = 5{,}8. \end{cases}$
23. $\begin{cases} 6{,}7x_1 - 2{,}3x_2 + 4{,}5x_3 = 2{,}4; \\ 2{,}5x_1 + 4{,}7x_2 - 7{,}8x_3 = 3{,}5; \\ 1{,}6x_1 + 5{,}3x_2 + 1{,}3x_3 = -2{,}4. \end{cases}$	24. $\begin{cases} 6{,}3x_1 + 5{,}2x_2 - 0{,}6x_3 = 1{,}5; \\ 3{,}4x_1 - 2{,}3x_2 + 3{,}4x_3 = 2{,}7; \\ 0{,}8x_1 + 1{,}4x_2 + 3{,}5x_3 = -2{,}3. \end{cases}$
25. $\begin{cases} 1{,}5x_1 + 2{,}3x_2 - 3{,}7x_3 = 4{,}5; \\ 2{,}8x_1 + 3{,}4x_2 + 5{,}8x_3 = -3{,}2; \\ 1{,}2x_1 + 7{,}3x_2 - 2{,}3x_3 = 5{,}6. \end{cases}$	26. $\begin{cases} 0{,}9x_1 + 2{,}7x_2 - 3{,}8x_3 = 2{,}4; \\ 2{,}5x_1 + 5{,}8x_2 - 0{,}5x_3 = 3{,}5; \\ 4{,}5x_1 - 2{,}1x_2 + 3{,}2x_3 = -1{,}2. \end{cases}$
27. $\begin{cases} 2{,}4x_1 + 2{,}5x_2 - 2{,}9x_3 = 4{,}5; \\ 0{,}8x_1 + 3{,}5x_2 - 1{,}4x_3 = 3{,}2; \\ 1{,}5x_1 - 2{,}3x_2 + 8{,}6x_3 = -5{,}5. \end{cases}$	28. $\begin{cases} 5{,}4x_1 - 2{,}4x_2 + 3{,}8x_3 = 5{,}8; \\ 2{,}5x_1 + 6{,}8x_2 - 1{,}1x_3 = 4{,}3; \\ 2{,}7x_1 - 0{,}6x_2 + 1{,}5x_3 = -3{,}5. \end{cases}$
29. $\begin{cases} 2{,}4x_1 + 3{,}7x_2 - 8{,}3x_3 = 2{,}3; \\ 1{,}8x_1 + 4{,}3x_2 + 1{,}2x_3 = -1{,}2; \\ 3{,}4x_1 - 2{,}3x_2 + 2{,}5x_3 = 3{,}5. \end{cases}$	30. $\begin{cases} 3{,}2x_1 - 11{,}5x_2 + 3{,}8x_3 = 2{,}8; \\ 0{,}8x_1 + 1{,}3x_2 - 6{,}4x_3 = -6{,}5; \\ 2{,}4x_1 + 7{,}2x_2 - 1{,}2x_3 = 4{,}5. \end{cases}$

Лабораторна робота 7. ВЛАСНІ ЗНАЧЕННЯ ТА ВЛАСНІ ВЕКТОРИ МАТРИЦЬ

7.1. Проблема власних значень

При вирішенні теоретичних і практичних задач часто виникає потреба визначити власні значення даної матриці A.

Нехай дана квадратна матриця $A = [a_{ij}]$. Розглянемо лінійне перетворення

$$y = Ax \qquad (7.1)$$

де x та y – n-мірні вектори деякого n-мірного простору.

Вектор $x \neq 0$ називається власним вектором матриці A, якщо

$$Ax = lx \qquad (7.2)$$

Число називається власним значенням або характеристичним числом матриці A, що відповідає даному вектору X. Власні вектори матриці A є ненульовими рішеннями матричного рівняння

$$Ax = lx \quad \text{або} \quad (A - lE)x = 0 \qquad (7.3)$$

де матриця $(A - lE)$ називається характеристичною матрицею. Рівняння (3) являє собою лінійну однорідну систему, яка має ненульові рішення тоді і тільки тоді, коли визначник системи дорівнює 0, тобто

$$\det(A - lE) = 0 \qquad (7.4)$$

Визначник (4) називається характеристичним визначником матриці, а рівняння (4) називається характеристичним рівнянням матриці.

Для знаходження власних значень і власних векторів можна розгорнути характеристичний визначник (4) в рівнянні n-ї степені і вирішити це рівняння одним з чисельних методів; використовувати ітераційний метод для обчислення коренів характеристичного рівняння і власних векторів без попереднього розгортання характеристичного визначника.

Приклад: Обчислити власні числа і власні вектори матриці

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

Рішення: складемо характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix} 3-l & 2 & 0 \\ 2 & 4-l & -2 \\ 0 & -2 & 5-l \end{vmatrix} = 0$$

$l^3 - 12l^2 + 39l - 28 = 0$

Розв’язавши це рівняння, отримаємо:

$l_1 = 1; \quad l_2 = 4; \quad l_3 = 7$ – власні числа.

Знайдемо власні вектори.

Підставимо в рівняння (3) і розписавши його, отримаємо систему лінійних рівнянь при $l = 1$

$$\begin{cases} (3-1)x_1 + 2x_2 + 0 \cdot x_3 = 0 \\ 0 \cdot x_1 - 2x_2 + (5-1)x_3 = 0 \\ 2x_1 + (4-1)x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 = 0 \\ -2x_2 + 4x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ -2x_2 + 4x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$$

Нехай $x_1 = 1$, тоді $x_2 = -1$; $x_3 = -\frac{1}{2}$;

$$\overset{\mathbf{r}}{X}_1 = c \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1/2 \end{Bmatrix}$$

$l = 4$

$$\begin{cases} (3-4)x_1 + 2x_2 + 0 \cdot x_3 = 0 \\ 2x_1 + 0 \cdot x_2 - 2x_3 = 0 \\ 0 \cdot x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 = 0 \\ 2x_1 - 2x_3 = 0 \\ -2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

Нехай $x_1 = 1$, тоді $x_2 = \dfrac{1}{2}$; $x_3 = 1$;

$$\vec{X}_2 = c\begin{Bmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$l = 7$$

$$\begin{cases} (3-7)x_1 + 2x_2 + 0\cdot x_3 = 0 \\ 2x_1 + (4-7)x_2 - 2x_3 = 0 \\ 0\cdot x_1 - 2x_2 + (5-7)x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -4x_1 + 2x_2 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 0 \\ -2x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$$

$$x_1 = 1; \quad x_2 = -1; \quad x_3 = 2$$

$$\vec{X}_3 = c\begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{Bmatrix}$$

7.2. Питання до самоперевірки

1. Що називається власним значенням матриці?
2. Що називається власним вектором матриці?
3. Фізична і механічна сутність власних значень і векторів матриці?
4. Методи знаходження найменшого та найбільшого власного значення?
5. Основне рівняння проблеми власних значень?

7.3. Варіанти індивідуальних завдань

Знайти власні числа і власні вектори матриці:

1. $A = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{pmatrix}$	2. $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & -2 \end{pmatrix}$

3. $A=\begin{pmatrix}1 & -3 & 4\\ 4 & -7 & 8\\ 6 & -7 & 7\end{pmatrix}$	4. $A=\begin{pmatrix}0 & 7 & 4\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 13 & 0\end{pmatrix}$
5. $A=\begin{pmatrix}2 & 19 & 30\\ 0 & -5 & -12\\ 0 & 2 & 5\end{pmatrix}$	6. $A=\begin{pmatrix}-3 & 2 & 0\\ -2 & 1 & 0\\ -15 & -7 & 4\end{pmatrix}$
7. $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ -3 & 4 & 0\\ -2 & 1 & 2\end{pmatrix}$	8. $A=\begin{pmatrix}1 & -3 & 3\\ -2 & -6 & 13\\ -1 & -4 & 8\end{pmatrix}$
9. $A=\begin{pmatrix}4 & -5 & 7\\ 1 & -4 & 9\\ -4 & 0 & 5\end{pmatrix}$	10. $A=\begin{pmatrix}5 & 6 & 3\\ -1 & 0 & 1\\ 1 & 2 & -1\end{pmatrix}$
11. $A=\begin{pmatrix}4 & -5 & 2\\ 5 & -7 & 3\\ 6 & -9 & 4\end{pmatrix}$	12. $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 2\\ 5 & -3 & 3\\ 1 & 0 & -2\end{pmatrix}$
13. $A=\begin{pmatrix}-1 & -2 & 12\\ 0 & 4 & 3\\ 0 & 5 & 6\end{pmatrix}$	14. $A=\begin{pmatrix}5 & -7 & 0\\ -3 & 1 & 0\\ 12 & 6 & -3\end{pmatrix}$
15. $A=\begin{pmatrix}1 & 8 & 23\\ 0 & 5 & 7\\ 0 & 3 & 1\end{pmatrix}$	16. $A=\begin{pmatrix}4 & 0 & 5\\ 7 & -2 & 9\\ 3 & 0 & 6\end{pmatrix}$
17. $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 16\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 3\end{pmatrix}$	18. $A=\begin{pmatrix}-3 & 11 & 7\\ 0 & 5 & -4\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$

19. $A=\begin{pmatrix}5 & 9 & 7\\ 0 & 3 & -2\\ 0 & 2 & -1\end{pmatrix}$	20. $A=\begin{pmatrix}5 & 0 & 21\\ 21 & 2 & 16\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$
21. $A=\begin{pmatrix}4 & -5 & 2\\ 5 & -7 & 3\\ 6 & -9 & 4\end{pmatrix}$	22. $A=\begin{pmatrix}3 & 1 & 0\\ -1 & -1 & 0\\ 4 & 7 & 2\end{pmatrix}$
23. $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & -2\\ 1 & 2 & 1\\ -2 & 1 & 2\end{pmatrix}$	24. $A=\begin{pmatrix}3 & 1 & 0\\ -4 & -1 & 0\\ 4 & -8 & 2\end{pmatrix}$
25. $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 6 & 2 & -3\\ 0 & 2 & 3\end{pmatrix}$	26. $A=\begin{pmatrix}-3 & 1 & 0\\ 4 & -1 & 3\\ 6 & 2 & 3\end{pmatrix}$
27. $A=\begin{pmatrix}0 & 3 & 4\\ 7 & 1 & 4\\ 2 & 1 & -2\end{pmatrix}$	28. $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 9 & 1 & 2\\ 2 & -1 & 0\end{pmatrix}$
29. $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ 1 & 1 & 2\\ -1 & 2 & 0\end{pmatrix}$	30. $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 1 & 2 & 1\\ 2 & 0 & 3\end{pmatrix}$

МОДУЛЬ 2

Лабораторна робота 8-9. ІНТЕРПОЛЯЦІЯ ТА ФУНКЦІЇ ФОРМИ

У роботі розглядається можливість отримання методів апроксимації функції. У методі скінченних рівностей основна увага приділяється визначенню значень невідомої функції $f(x)$ в скінченному числі точок х. Проводячи процес апроксимації більш систематично і у загальних рисах, можна розвинути і інші методи чисельного рішення диференціальних рівнянь.

Теорія інтерполяції є добре розробленою для функцій однієї змінної і може бути використана для побудови апроксимуючих функцій методом скінченних елементів.

8.1. Інтерполяція функцій

1. *Постановка задачі.* Нехай на відрізку $[a,b]$ задані значення $f(x_0)=y_0, f(x_1)=y_1,\mathbf{K}\, f(x_n)=y_n$ деякої функції $f(x)$ в $n+1$ точках $x_0, x_1, \mathbf{K}, x_n$, а в процесі обчислення необхідно використовувати значення $f(x)$ для проміжних значень аргументу x.

Інколи на відрізку $[a,b]$ відоме аналітичне представлення функції $f(x)$, але обчислення кожного значення функції вимагає великого об'єму обчислень, тому доцільно обчислити значення $f(x_0)=y_0, f(x_1)=y_1,\mathbf{K}\, f(x_n)=y_n$ цієї функції $f(x)$ в $n+1$ точках $x_0, x_1, \mathbf{K}, x_n$, а для проміжних значень аргументу обчислення проводити за більш простими формулах. Як в першому так і в другому випадку, виникає задача інтерполяції. Це завдання полягає в побудові $f(x)$ (інтерполююча функція), що належить відомому класу функцій і таку, що набуває в точках $x_0, x_1, \mathbf{K}, x_n$ (вузлах інтерполяції) тих же значень, що і функція $f(x)$.

$F(x_0)=y_0,\ F(x_n)=y_n, ..., F(x_0)=y_n$, а в інших точках відрізку $[a,b]$, що наближено представляє функцію $f(x)$ з якоюсь мірою точності.

Зазвичай при інтерполяції припускаємо, що функція $f(x)$ безперервна на відрізку $[a,b]$ і має на ньому в кожній точці скінченні похідні будь-якого порядку, а також те, що інтерполяція відмінна одна від одної.

Як правило, в якості інтерполюючої функції використовуються поліноми P степені n. Поліноми є найбільш простими функціями, крім того, їх зручно досліджувати і по ним зручно проводити обчислення.

У задачах інтерполяції можна розглянути власну інтерполяцію, коли значення аргументу є проміжним між a і b, і екстраполяцію, коли значення x лежить поза відрізком $[a,b]$.

Екстраполяцію потрібно застосовувати з обережністю, але якщо відомо, що функція біля кінців даного ряду значень змінюється плавно і якщо $x_{i+1} - x_i = h \quad (i = 0,1,2,\mathbf{K},n)$ береться досить малим, то можна екстраполювати на відстані: $h/2$ за межами відрізання інтерполяції.

Існує декілька видів інтерполяційних поліномів. Перш ніж перейти до опису, введемо деякі необхідні поняття і позначення.

2. Скінченні різниці.

Передбачимо, що функція задана таблицею для значень $x_{0,} x_0 + h, x_0 + 2h, \mathbf{K}, x_0 + nh$ аргументу x.

Величина $y_{i+1} - y_i$ названа першою низхідною різницею функції $y_i = f(x_i)$ і позначена через Δy_i. Величина $\Delta y_{i+1} - \Delta y_i$ названа другою низхідною різницею функції y та позначена через $\Delta^2 y_i$ і ін.

Низхідні різниці визначено співвідношеннями:

$\Delta y_i = y_{i-1} - y_i;$

$\Delta^2 y = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i;$

$\Delta^3 y_i = \Delta^2 y_{i+1} - \Delta^2 y_i;$

....

$\Delta^n y_i = \Delta^{n+1} y_{i+1} - \Delta^{n+1} y_i.$

Таблицю низхідних різниць зазвичай розташовують таким чином:

Таблиця 8.1

X	y	Δ y	Δ^2 y	Δ^3 y
x_0	y_0			
		Δy_0		
x_1	y_1		$\Delta^2 y$	
		Δy_1		$\Delta^3 y$
x_2	y_2		$\Delta^2 y_1$	
x_3	y_3	Δy_2		

Перша висхідна різниця ∇y_i визначена формулою:

$\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$;

Висхідну різницю другого порядку отримаємо, якщо візьмемо першу різницю від ∇y_i, тобто

$\nabla^2 y_i - \nabla y_i - \nabla y_{i-1}$;

аналогічно

$\nabla^n y_i = \nabla(\nabla^{n-1} y_i) = \nabla^{n-1} y_i - \nabla^{n-1} y_{i-1}$.

Таблицю висхідних різниць зазвичай розташовано таким чином:

Таблиця 8.2

X	y	∇ y	∇^2 y	∇^3 y
x_0	y_0			
		∇y_1		
x_1	y_1		$\nabla^2 y^2$	
		∇y_2		$\nabla^3 y^3$
x_2	y_2		$\nabla^2 y_3$	
x_3	y_3	∇y_3		

Низхідні різниці вжито в основному на початку таблиці, а висхідні різниці в кінці її, де, не маючи аналітичного завдання функції, просто не можна побудувати низхідні різниці. Але потрібно пам'ятати, що по суті висхідні різниці нічим не відрізняються від відповідних величин в таблиці низхідних різниць.

Для значення функцій, розташованих в середині таблиці, вводять так звані центральні різниці, які визначають за наступною формулою:

$$d^n y_i = d^{n-1} y_{i-\frac{1}{2}}$$

Таблиця 8.3 центральних різниць має наступний вигляд:

Таблиця 8.3

X	y	dy	$d^2 y$	$d^3 y$
x_1	y_1			
		$d\,y_{-\frac{1}{2}}$		
x_0	y_0		$d^2 y_0$	
				$d^3 y_{\frac{1}{2}}$
		$d\,y_{\frac{1}{2}}$		
x_1	y_1		$d^2 y_1$	
x_2	y_2	$d\,y_{-\frac{3}{2}}$		

Фактично остання таблиця відрізняється від таблиць для висхідних та низхідних різниць лише записом, що використано для позначення різниць. Порівнюючи таблицю 8.3 з таблицею низхідних (8.1) і з таблицею висхідних різниць (8.2), бачимо, що $d^k y_i = \Delta^k y_{i-\frac{k}{2}} = \nabla^k y_{i+\frac{k}{2}}$

3. <u>Інтерполяційна формула. Грегорі-Ньютона для інтерполяції вперед або назад.</u> Нехай в точках $x_1 = x_0 + ih (i = 0,1,2.....,n)$, де h – крок інтерполяції, задані значення функції $y = f(x)$

$$y_i = f(x_i)$$

Інтерполяційна формула Ньютона для інтерполяції вперед має вигляд:

$$P(x) y_0 + t y_0 + \frac{t(t-1)}{2}\Delta^2 y_0 + ... + \frac{t(t-1)...(t-n+1)}{n}\Delta^n y_0 \ , \qquad (8.1)$$

де $t = \dfrac{x - x_0}{h}$ - число кроків, необхідне для досягнення точки x виходячи з точки $x_0, \Delta^n y$ - скінченна різниця k – го порядку.

Похибка формули Грегорі-Ньютона для інтерполяції вперед

$$R = \frac{f^{n+1}(x)}{(n+1)} \cdot t(t-1)...(t-n)h^{n=1}, \qquad (8.2)$$

де $x_0 \le x \le x$

Формулу (8.1) вигідно використовувати для інтерполяції функції $y = f(x)$ близько початкового значення $x \le x_0$, у якій t мало по абсолютній величині.

Якщо в інтерполяційній формулі Ньютона припустити, що $n = 1$, то отримаємо формулу лінійної інтерполяції

$$P_1(x) = y_0 + t\Delta y_0;$$

при $n = 2$ отримаємо формулу квадратної інтерполяції

$$P_2(x) = y_0 + t\Delta y_0 = \frac{t \cdot (t-1)}{2!} \Delta^2 y_0 .$$

Якщо дана необмежена таблиця значень функції y, то число n, в інтерполяційній формулі можна вибрати будь-яким. Практично в цьому випадку число n обирають так, щоб різниця $\Delta^n y$ була із заданою мірою точності постійною.

За початкове значення x можна прийняти будь-яке табличне значення аргументу. Тоді формула містить лише ті значення y, які йдуть після цього початкового значення.

Якщо таблиця значень кінцева, то n обмежене і не може бути більше числа значень функції, зменшеного на 1.

Інтерполяційна формула Ньютона для інтерполяції назад має вигляд

$$P_n(x) = y_n + t\Delta y_{n-1} + t \cdot \frac{t+1}{2!} \cdot \Delta^2 y_{n-1} + \mathbf{K} + \frac{t(t+1)\mathbf{K}(t+n-1)}{n!} \Delta^n y_0;$$

$$t = \frac{x - x_n}{h}.$$

Похибка формули

$$R = \frac{f^{(n+1)}(x)}{(n+1)!} \cdot t(t+1)\mathbf{K}(t+n)h^{(n+1)};$$

$$x \le x \le x_n .$$

Формулу (8.2) доцільно застосовувати поблизу кінця таблиці. Вона містить значення y, що розташовані назад, наліво від y_n, і жодного направо від y_n.

Як формулу (8.1), так і формулу (8.2) можна використовувати для знаходження значень функції y для значень аргументу, що лежать за межами таблиці.

Якщо $x < x_0$ та x близько до x_0, то вигідно застосовувати інтерполяційну формулу (8.1), причому $t = (x - n)/h < d$.

Якщо ж $x > x_n$ та x близько до x_n, то зручніше користуватися формулою (8.1), причому $t = (x - n)/h > 0$.

На обчислення значення функції $f(x)$ в одній точці x за формулою Грегорі-Ньютона необхідно n операцій ділення, $\frac{n^2 + 3n}{2} - 1$ операцій множення та $n^2 + 1$ операцій додавання.

8.2. Інтерполяційні формули центральних різниць

1. Постановка задачі.

Нехай функція $y = f(x)$ приймає у вузлах інтерполяції $x_i = x_0 + ih$, $i = 0,1,2,\mathbf{K},n$ значення $y_{-n}, y_{-(n-1)}\mathbf{K}, y_0, y_1,..., y_n$, де h – шаг інтерполяції. Вузли інтерполяція розміщені симетрично відносно x.

Потрібно знайти значення функції в точці $x = x_0 + th$, що не співпадає з вузлом інтерполяції.

Замінюємо функцію $f(x)$ інтерполяційним поліномом для центральних різниць $P(x)$. Цей поліном у вузлах інтерполяції набуває тих же значень, що і функція $f(x)$, а між вузлами інтерполяції наближає функцію $f(x)$ з деякою мірою точності.

2. Інтерполяційний поліном Стірлінга.

Поліном Стірлінга, що інтерполює функцію $f(x)$, має вигляд:

$$
\begin{aligned}
P_0(x_3+th) &= y_0 + \frac{t(\Delta y_1 + \Delta y_0)}{2} + \frac{t^2}{2!}\Delta^2 y_{-1} + \\
&+ \frac{t(t^2-1)}{3!}\cdot\frac{\Delta^3 y_{-2} + \Delta^3 y_{-1}}{2} + \frac{t^2(t^2-1)}{4!}\Delta^4 y_{-2} + \ldots. + \\
&\frac{t(t^2-1)(t^2-2^2)\ldots\left[t^2-(n-1)^2\right]}{(2n-1)!}\cdot\frac{\Delta^{2n-1}y_{-n} + \Delta^{2n-1}y_{-(n-1)}}{2n-2} + \\
&+ \frac{t^n(t^2-1)(t^2-2^2)\ldots\left[t^2-(n-1)^2\right]}{(2n)!}\Delta^{2n} y_n
\end{aligned},
$$

де $t\frac{x-x_0}{h}$, $\Delta^n y$ - центральні різниці.

Похибка формули Стірлінга

$$R = \frac{h^{2n+1} f^{(2n+1)}(x)}{(2n+1)!} t(t^2-1)\ldots(t^2-n^2)$$

Коли замінюють $f^{(2n+1)}(x)$ через $m_{2n+1} = \frac{\Delta^{2n+1}y_{-n-1} + \Delta^{2n+1}y_{-n}}{2}$, тоді

$$R_n = \frac{n_{2n+1} t\left(t^2-1\right)\mathbf{K}\left(t^2-n^2\right)}{\left(2n+1\right)!}.$$

Формула Стірлінга використовується для інтерполяції в середині інтервалу, біля кінця і на початку його. В останніх випадках вона дає точніший результат.

Чим менше значення t , тим швидше сходиться процес. Тому центральну точку потрібно вибирати так, щоб t було скільки завгодно малим. В більшості випадків вихідну точку обирають так, що $-0{,}5 < t < 0{,}5$.

8.3. Інтерполяційні поліноми з нерівномірно розташованими проміжками зміни аргументу

1. Розділені різниці. Нехай для деякої послідовності значень аргументу $x_0, x_1, \mathbf{K}, x_n$ (вузли інтерполяції, $x_i + x_j$ при $i \neq j$, $x_i \in [a,b]$ функції $y = f(x)$ задані значення $y_0, y, \mathbf{K}, y_n$ відповідно Знайдемо значення функції $y = f(x)$ в точці, що лежить між вузлами.

Заздалегідь введемо нове поняття – розділені різниці.

Співвідношення вигляду:

$$\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}=f(x_0,x_1);$$

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f(x_1,x_2);$$

$$\frac{f(x_n)-f(x_{n-1})}{x_n-x_{n-1}}=f(x_{n-1},x_n).$$

називають розділеними різницями першого порядку.

Отримавши розділені різниці першого порядку, ми можемо створити відношення:

$$\frac{f(x_1,x_2)-f(x_0,x_1)}{x_2-x_0}=f(x_0,x_1,x_2);$$

$$\frac{f(x_2,x_3)-f(x_1,x_2)}{x_3-x_1}=f(x_1,x_2,x_3);$$

$$\frac{f(x_{n-1},x_n)-f(x_{n-2},x_{n-1})}{x_n-x_{n-2}}=f(x_{n-2},x_{n-1},x_n).$$

які називаються розділеними різницями другого порядку.

Якщо ми визначили розділені різниці $k-$го порядку $f\left(x_i,x_{i+1},\mathbf{K},x_{i+k}\right)$, то розділені різниці $(k+1)-$го порядку можна знайти за допомогою формули:

$$\frac{f\left(x_i,x_{i+1},\mathbf{K},x_{i+k}\right)-f\left(x_{i-1},x_j,\mathbf{K},x_{j+n-1}\right)}{x_{i+k}-x_{i-1}}=f\left(x_{i-1},\mathbf{K},x_{i+k}\right).$$

Таблицю розділених різниць розташовано таким чином:

$$\begin{array}{lllll}
x_0 & f(x_0) & & & \\
 & & f(x_0,x_1) & & \\
x_1 & f(x_1) & & f(x_0,x_1,x_2) & \\
 & & f(x_1,x_2) & & f(x_0,x_1,x_2) \\
x_2 & f(x_2) & & f(x_1,x_2,x_3) & \\
 & & f(x_2,x_3) & & \\
x_3 & f(x_3) & & &
\end{array}$$

2. Інтерполяційна формула Лагранжа. Інтерполяційну формулу Лагранжа для нерівних проміжків зміни аргументу застосовують, коли через які-небудь міркування незручно або навіть неможливо отримати таблицю значень функції для рівномірно розташованих значень аргументу або коли хочуть використовувати такі, що є в наявності, дані.

Якщо в точках $x_0, x_1, \mathbf{K}, x_n$ відомі значення функції: $y_i = f\left(x_i\right)$, $i = 0,1,2,\mathbf{K}, n$ і потрібно знайти значення y в точці x, що знаходиться між вузлами інтерполяції, то для вирішення цієї задачі можна використовувати інтерполяційний поліном Лагранжа:

$$P_n(x) = f(x_0)\frac{(x-x_1)(x-x_2)...(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)...(x_0-x_n)} +$$

$$+ f(x_1)\frac{(x-x_0)(x-x_1)...(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)...(x_1-x_n)} +$$

$$+ .... +$$

$$+ f(x_n)\frac{(x-x_0)(x-x_1)...(x-x_n)}{(x_x-x_0)(x_n-x_1)...(x_n-x_{n-1})}$$

похибка формули Лагранжа визначається виразом:

$$P = \frac{f^{n+1}\left(x\right)}{\left(n+1\right)!}\left(x-x_0\right)\mathbf{K}\left(x-x_n\right),$$

$x \in \left[\min x, \max x\right]$, $i = 0,1,2,\mathbf{K}, n$

Значення незалежної змінної у формулі (8.1) можуть бути як рівно, так і нерівномірно розташованими.

Використовуючи формулу(8.2), слід мати на увазі, що велику точність отримано для середніх відрізків $\left[x_i, x_{i+1}\right]$, менша точність для крайніх відрізків, особливо будуть великі похибки, якщо використано цю формулу у якості екстраполяційної формули.

Істотним недоліком інтерполяційної формули Лагранжа є, те, що для побудови інтерполяційного поліному Лагранжа по його значеннях в n точках $x_0, x_1, \mathbf{K}, x_n$ не використано поліном Лагранжа, який побудовано по точкам $x_0, x_1, \mathbf{K}, x_n$. Таким чином, тиск однієї точки x призводить до того, що всю роботу по побудові полінома Лагранжа доводиться проводити заново.

На обчислення значення функції $f\left(x\right)$ в одній точці x по формулі Лагранжа потрібно $2n^2 + n - 1$ операцій множення, $n+1$ операцій ділення.

3. Інтерполяційна формула Ньютона для нерівних інтервалів зміни аргументу має вигляд:

$$
\begin{aligned}
P_n(x) = {} & f(x_0) + (x - x_0) f(x_0 - x_1) + \\
& + (x - x_0)(x - x_1) f(x_0, x_1, x_2) + \\
& + (x - x_0)(x - x_1) f(x_0, x_1, x_2) f(x_0, x_1, x_2, x_3) + \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \\
& + (x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1}) f(x_0, x_1, \ldots, x_n)
\end{aligned},
$$

де $f(x_0, x_1)$, $f(x_0, x_1, x_2), \ldots, f(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ - розділені різниці відповідно порядку $1,2,3,\ldots,n$.

Похибка інтерполяційної формули Ньютона визначена виразом:

$$
R_n = \frac{f^{n+1}(x)}{(n+1)!}(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_n),
$$

де $x \in [\min x, \max x]$ $i = 0,1,2,\ldots,n$

Інтерполяційна формула Ньютона зручніша для обчислень, чим інтерполяційна формула Лагранжа, оскільки додавання одного або декількох вузлів інтерполяції не вимагає повторення обчислень заново.

У якості x_0 та x_1 доцільно брати найближчі до x вузли інтерполяції та провести спочатку лінійну інтерполяцію по цих вузлах, а потім поступово вилучити наступні вузли так, щоб вони більш симетрично розташовувалися відносно точки x.

На обчислення значення функції $f(x)$ в одній точці x по формулі Ньютона потрібні $n^2 + n$ складань, $n^2 + n$ операцій множення.

Приклад 1. Скласти інтерполяційний поліном Ньютона і обчислити значення функції при x =2,718.

Таблиця 8.4

x	2,7	2,72	2,74
y	0,3704	0,3676	0,3650

Складемо таблицю горизонтальних різниць.

Таблиця 8.5

x	y	y	y
2,7 2,72 2,74	0,3704 0,3676 0,3650	-0,0028 -0,0026	0,0002

$$h = 2{,}72 - 2{,}7 = 0{,}02$$

$$N(x) = 0{,}3704 + (-0{,}0028)\,q + 0{,}0002q(q-1)/2!$$

де $q = (x - 2{,}7)/0{,}02 = 50(x - 2{,}7)$

при $x = 2{,}718$ $\quad q = 50(2{,}718 - 2{,}7) = 50 \cdot 0{,}018 = 0{,}9$

$y(2{,}718) = 0{,}3704 - 0{,}0028 + 0{,}0002 \cdot 0{,}9(0{,}9 - 1)/2 = 0{,}367091$

Приклад 2. Скласти другий інтерполяційний поліном Ньютона і обчислити значення функції при x =1044.

Таблиця 8.6

x	y
1000 1010 1020 1030 1040 1050	3,0000000 3,0043214 3,0086002 3,0128372 3,0170333 3,0211893

Таблиця 8.7

x	y	y	y	y
1000 1010 1020 1030 1040 1050	3,0000000 3,0043214 3,0086002 3,0128372 3,0170333 3,0211893	43214 42788 42370 41961 41560	-426 -418 -409 -401	2 9 8

Обчислюємо параметри інтерполяції x=1050, h=10,
q=(1044-1050) /10=-0,6

$$y(1044) = 3{,}0211893 + (-0{,}6)0{,}0041560 +$$

$$+ (-0{,}6)(-0{,}6 + 1)0{,}0000401/2! +$$

$$+ (-0{,}6)(-0{,}6 + 1)(-0{,}6 + 2)0{,}000008/3! = 3{,}0187005$$

Приклад 3. Скласти інтерполяційний поліном Лагранжа і обчислити значення функції при x=323,5

Таблиця 8.8

x	321,0	322,8	324,2	325,0
y	2,50651	2,50893	2,51081	2,51188

Запишемо поліном Лагранжа для чотирикутної (кубічної) інтерполяції:

$$L(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)}y_0+\frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}y_1+$$

$$+\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)}y_2+\frac{(x-x_o)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_o)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}y_3;$$

$$y(323{,}5)=\frac{(323{,}5+322{,}8)(323{,}5-324{,}2)(323{,}5-325)}{(321-322{,}8)(321-324{,}2)(321-325)}2{,}50651+$$

$$+\frac{(323{,}5-321)(323{,}5+324{,}2)(323{,}5-325)}{(322{,}8-321{,}0)(322{,}8-324{,}2)(322{,}8-325)}2{,}50893+$$

$$+\frac{(323{,}5-321)(323{,}5-322{,}8)(323{,}5-325)}{(324{,}2-321{,}0)(324{,}2-322{,}8)(324{,}2-325)}2{,}51081+$$

$$+\frac{(323{,}5-321)(323{,}5-322{,}8)(323{,}5-324{,}2)}{(325-321{,}0)(325-322{,}8)(325-324{,}2)}2{,}51188=$$

$$=-0{,}07996+1{,}18794+1{,}83897-0{,}43708=2{,}50987\,.$$

8.4. Функції форми

В теорії інтерполяції часто вирішується задача наближення деякої функції $f(x)$ системою функцій $j_0(x), j_1(x), j_2(x), \mathbf{K}, j_n(x)$, яка в заданих точках $x_0, x_1, x_2, \mathbf{K}, x_n$, набуває значення $f_0(x), f_1(x), f_2(x), \mathbf{K}, f_n(x)$. Система $(n+1)$ елементів з множини $\{j_i(x)\}$ з дійсними коефіцієнтами a_i називається узагальненим многочленом $j_0(x), j_1(x), ..., j_n(x)$ на відрізку від a до b.

$$P(x)=a_0 j_0(x)+a_1 j_1(x)+...+a_n j_n(x)\,. \qquad (8.3)$$

Доводиться, що при цьому інтерполяційний многочлен буде єдиним, тобто визначник w системи алгебраїчних рівнянь

$$\{f(x_j)\}=[j_j(x_j)]\cdot\{a_i\},\ \text{де}\ \ i, j=0,1,...,n\,, \qquad (8.4)$$

внаслідок лінійної незалежності функцій

$j_0(x), j_1(x), ..., j_n(x)$ не дорівнює 0

$$W=\det[j_i(x_j)]\neq 0\,. \qquad (8.5)$$

Будь-який перший коефіцієнт $a_i(i=0,1,2,...,n)$ може бути визначений заміною 1-го стовпця вільних членів. Його значення дорівнює:

$$a_i = \frac{w_i}{w};$$

Якщо розкласти визначник w_i по елементах і-го стовпця, тобто

$$w_i = \sum_{j=0}^{n} f(x_i) w_{ji}; \qquad (8.6)$$

або в матричній формі:

$$\{w_i\} = \begin{pmatrix} w_0 \\ w \\ : \\ w \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} w_{00} & w_{10} & w_{n0} \\ w_{01} & w_{11} & w_{n1} \\ : & : & : \\ w_{0n} & w_{1n} & w_{nn} \end{bmatrix} \left\{ \begin{matrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ : \\ f(x_n) \end{matrix} \right\} = [\tilde{w}]\{f(x_i)\} \qquad (8.7)$$

де $[\tilde{w}]$ - союзна матриця; w_{ji} - алгебраїчні доповнення елементів $i-го$ стовпця визначника w, і підставити результати в (1), отримаємо:

$$P(x) = [j_0(x) j_1(x) ... j_n(x)] \left\{ \begin{matrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ . \\ a_n \end{matrix} \right\} = [j_i(x)]\{a_i\} =$$

$$= [j_i(x)] \frac{1}{w}\{w_i\} = \{j_i(x)\} = \frac{[\tilde{w}]}{w}\{f(x_i)\} \qquad (8.8)$$

Якщо тепер позначити матрицю-рядок через

$$[f_i(x)] = \frac{1}{w}[f_i(x)][\tilde{w}]; \qquad (8.9)$$

то $P(x) = [f_i(x)]\{f(x_i)\}$. (8.10)

Многочлени $f_i(x_k)$ задовольняють наступним властивостям:

$$f_i(x_k) = \begin{cases} 0, & якщо \quad i \neq k \\ 1, & якщо \quad i = k \end{cases} \qquad (8.11)$$

Оскільки для будь-якої функції $f(x)$ виконується рівність:
$f(x_k)=[f_i(x_k)]\{f(x_i)\}, \quad (k=0,1,2,...,n)$

8.5. Питання до самоперевірки

1. Що називається інтерполяцією і екстраполяцією?
2. Що називається скінченими різницями?
3. Які бувають види скінченних різниць?
4. Інтерполяційні формули?
5. Відмінність I і II інтерполяційної формули?
6. Оцінки похибки інтерполяційних формул?
7. Які різниці називаються розділеними?
8. Інтерполяційна формула Ньютона для нерівномірно розподілених значень аргументу?

8.6. Варіанти індивідуальних завдань

I. Скласти інтерполяційний многочлен Лагранжа:

1.

x	1,0	1,1	1,2	1,3
y	1,04	1,05	1,09	1,12

$y(1{,}06)=?$

2.

x	1,8	1,9	2,0	2,1
y	1,96	2,11	2,27	2,44

$y(1{,}86)=?$

3.

x	0,6	0,65	0,7	0,75
y	0,69	0,79	0,87	0,98

$y(0{,}68)=?$

4.

x	1,7	1,75	1,8	1,85
y	1,23	1,21	1,18	1,14

$y(1{,}734)=?$

5.

x	1,4	1,5	1,6	1,7
y	1,16	1,21	1,26	1,3

$y(1{,}51) = ?$

6.

x	10	15	20	25
y	0,99	0,97	0,94	0,91

$y(23) = ?$

7.

x	20	25	30	35
y	0,94	0,91	0,87	0,82

$y(21) = ?$

8.

x	0,13	0,18	0,23	0,28
y	0,129	0,179	0,228	0,276

$y(0{,}25) = ?$

9.

x	2,0	2,1	2,2	2,3
y	1,09	1,12	1,16	1,21

$y(2{,}05) = ?$

10.

x	50	55	60	65
y	0,28	0,31	0,22	0,04

$y(58) = ?$

11.

x	0,05	0,15	0,25	0,35
y	0,05	0,16	0,27	0,37

$y(0{,}18) = ?$

12.

x	1,5	1,55	1,6	1,65
y	-1,1	-0,9	-0,7	-0,4

$y(1{,}64) = ?$

13.

x	1,8	1,9	2,0	2,1
y	1,44	1,55	1,67	1,82

$y(2{,}05) = ?$

14.

x	1,1	1,2	1,3	1,4
y	0,88	0,91	0,93	0,95

$y(1{,}16) = ?$

15.

x	0,75	0,8	0,85	0,9
y	0,28	0,319	0,359	0,402

$y(0{,}88) = ?$

16.

x	2,6	2,9	3,0	3,1
y	3,928	4,41	4,938	5,517

$y(2{,}75) = ?$

17.

x	1,0	1,1	1,2	1,3
y	1,008	1,113	1,221	1,331

$y(1{,}08) = ?$

18.

x	1,9	1,91	1,92	1,93
y	6,69	6,75	6,82	6,89

$y(1{,}917) = ?$

19.

x	0,0	0,1	0,2	0,3
y	2,74	2,75	2,80	2,88

$y(0{,}28) = ?$

20.

x	0,8	0,9	1,0	1,1
y	3,44	3,55	3,66	3,76

$y(1{,}07) = ?$

21.

x	0,5	0,55	0,6	0,65
y	1,05	0,99	0,93	0,86

$y(0{,}63) = ?$

22.

x	0,2	0,3	0,4	0,5
y	0,2	0,31	0,42	0,55

$y(0{,}27) = ?$

23.

x	0,5	0,52	0,54	0,56
y	1,63	1,68	1,72	1,75

$y(0{,}55) = ?$

24.

x	0,2	0,25	0,3	0,35
y	1,2	1,28	1,35	1,42

$y(0{,}29) = ?$

25.

x	0,7	0,72	0,74	0,76
y	0,84	0,88	0,91	0,95

$y(0{,}75) = ?$

26.

x	0,5	0,53	0,56	0,59
y	0,46	0,49	0,51	0,53

$y(0{,}54) = ?$

27.

x	0,85	0,9	0,95	1,0
y	0,359	0,402	0,447	0,495

$y(0{,}94) = ?$

28.

x	0,2	0,3	0,4	0,5
y	2,8	2,88	2,98	3,09

$y(0{,}45) = ?$

29.

x	0,4	0,5	0,6	0,7
y	0,53	0,56	0,58	0,61

$y(0{,}64) = ?$

30.

x	1,0	1,1	1,2	1,3
y	0,6	0,65	0,7	0,76

$y(1{,}16) = ?$

II. Скласти інтерполяційний поліном Ньютона і знайти значення функції при заданому значенні аргументу:

1.

x	3	4	5
y	1	-1	3

$y(3{,}1) = ?$

2.

x	0	1	2
y	0	-2,7	-4,8

$y(0{,}9) = ?$

3.

x	0	2	4
y	0	2,7	4,8

$y(0{,}5)=?$

4.

x	2	6	10
y	1	-1	3

$y(9{,}1)=?$

5.

x	2	3	4
y	-4,8	-6,4	-6,6

$y(3{,}1)=?$

6.

x	3,5	3,55	3,6	3,65
y	33,115	34,813	36,598	38,475

$y(3{,}51)=?$

7.

x	1,7	1,8	1,9	2,0
y	0,984	0,989	0,993	0,995

$y(1{,}72)=?$

8.

x	2	2,5	3	3,5
y	9	6	4	3

$y(2{,}1)=?$

9.

x	1,2	3,1	4	4,9
y	0,9	1,2	1,8	2,2

$y(1{,}25)=?$

10.

x	15	20	25
y	0,258	0,342	0,423

$y(17)=?$

11.

x	0,51	0,52	0,53
y	0,529	0,537	0,546

$y(0{,}516)=?$

12.

x	0	1	2	3
y	5,2	8	10,4	12,4

$y(2{,}7)=?$

13.

x	1,4	1,5	1,6
y	0,952	0,966	0,978

$y(1{,}56)=?$

14.

x	15	20	25
y	1,25	2,34	3,42

$y(24)=?$

15.

x	1,4	1,5	1,6
y	1,95	2,83	4,76

$y(1{,}47)=?$

16.

x	1,7	1,8	1,9	2,0
y	0,984	0,989	0,993	0,998

$y(1{,}98)=?$

17.

x	3	4	5
y	12,4	14	15,2

$y(3{,}4) = ?$

18.

x	15	18	21	24
y	18	19	21	22

$y(23) = ?$

19.

x	1,5	2,0	2,5	3,0
y	0,9	1,2	1,8	2,2

$y(1{,}9) = ?$

20.

x	4	6	8	10
y	4	6	9	14

$y(8{,}8) = ?$

21.

x	31	42	53	64
y	12	8	7	65

$y(61) = ?$

22.

x	1	3	5	7
y	6	4	5	8

$y(2{,}8) = ?$

23.

x	3,4	3,6	3,8	4,0
y	2,6	2,9	3,3	3,8

$y(3{,}5) = ?$

24.

x	2,6	2,9	3,3	3,8
y	1,2	1,28	1,35	1,42

$y(3{,}5) = ?$

25.

x	0	1	2	3
y	5,2	8,0	10,4	12,4

$y(1{,}6) = ?$

26.

x	2	6	10
y	1	-1	4

$y(9{,}2) = ?$

27.

x	1	4	7
y	-1	3	-2

$y(1{,}7) = ?$

28.

x	1	3	5	7
y	6	4	5	8

$y(6{,}4) = ?$

29.

x	2,6	2,9	3,3	3,8
y	9,6	11,8	14,5	18,7

$y(3{,}0) = ?$

30.

x	5	5,5	6,0	6,5
y	6	9,3	10	9,1

$y(6{,}3) = ?$

Лабораторна робота 10-11. МЕТОД СКІНЧЕННИХ РІЗНИЦЬ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

10.1. Загальні положення

Диференціальними називаються рівняння, що містять одну або декілька похідних. Інженерові дуже часто доводиться стикатися з ними при розробці нових виробів або технологічних процесів, тому що велика частина законів фізики, механіки, опору матеріалів, електротехніки формулюється саме у вигляді диференціальних рівнянь. Будь-яка програма проектування зводиться кінець кінцем до вирішення диференціальних рівнянь. Лише деякі з них удається вирішити аналітично. Поява ЕОМ зробила ефективнішим використання чисельних методів рішення диференціальних рівнянь.

Залежно від числа незалежних змінних, і, отже типа тих, що входять в них похідних диференціальних рівнянь діляться на звичайні, такі що містять одну незалежну змінну і похідні по ній, і рівняння у частних похідних, що містять декілька незалежних змінних і похідні по ним.

Чисельні методи не дозволяють знайти загальне рішення, але можуть дати лише якесь частне рішення. При вирішенні диференціального рівняння необхідно знати значення залежної змінної і її похідних при деяких значеннях залежної змінної.

Задача Коши для звичайних диференціальних рівнянь n-го порядку:

$$y^{(n)} = f(x, y, y' \ldots y^{(n-1)}) \qquad (10.1)$$

полягає у відшуканні функції $y(x)$, що задовольняє цьому рівнянню і початковим умовам $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0 \ldots y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$, що задані в одній (початковій) точці.

У крайовій задачі додаткові умови задаються при двох або більше значеннях незалежної змінної. Ці умови називаються граничними.

Для вирішення диференціальних рівнянь розроблено багато чисельних методів, що відрізняються один від одного алгоритмами і точністю обчислень, а зокрема: метод Ейлера, метод Рунге-Кутта, метод Мілна, метод Адамса-Башфорта, метод Хеммінга, методи «стрілянини» і кінцево-різницеві методи.

Перевага скінченно-різницевих методів в тому, що вони дозволяють звести рішення крайової задачі до вирішення системи алгебраїчних рівнянь.

10.2. Метод скінченних різниць

Рішення крайової задачі для рівняння

$$y'' + p(x)y' + g(x)y = f(x) \qquad (10.2)$$

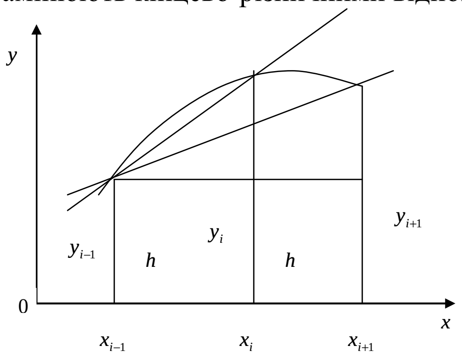
полягає у визначенні значень функції $y(x)$, що задовольняє даному рівнянню і крайовим умовам:

$$\begin{cases} a_0 y(x_0) + a_1 y'(x_0) = A; \\ b_0 y(x_n) + b_1 y'(x_n) = B; \end{cases} \qquad (10.3)$$

де $|a_0| + |a_1| \neq 0$ $та$ $|b_0| + |b_1| \neq 0$.

Розбиваємо відрізок $[a,b]$ на n рівних частин з шагом $h = (b-a)/n$ отримуємо точки $x_i = a + ih$ $(i = 1,2,\ldots,n)$, в яких потрібно знайти шукані значення $y_i = y(x_i)$.

Сутність методу скінченних різниць полягає в тому, що похідні замінюють кінцево-різничними відношеннями.



$$y' = \frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}$$

Для внутрішніх точок i похідні апроксимуються по трьом точкам $(i-1, \quad 1, \quad i+1)$ і обчислюються по формулах:

$$y_i' = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}; \qquad (10.4)$$

$$y_i'' = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h}. \qquad (10.5)$$

Ці різниці називаються центральні, точність яких пропорційна h^2.

Для крайових точок похідні можна обчислити по формулах:

$y_0' = \dfrac{y_1 - y_0}{h}$ - права різниця; (10.6)

$y_n' = \dfrac{y_n - y_{n-1}}{h}$ - ліва різниця. (10.7)

Точність скінченних різниць, апроксимуючих по двох точках пропорційна h і тому перевага надається різницям більш високого порядку точності:

$y_0' = \dfrac{-3y_0 + 4y_1 - y_2}{2h}$ - права; (10.8)

$y_n' = \dfrac{3y_n - 4y_{n-1} + y_{n-2}}{2h}$ - ліва. (10.9)

В результаті кінцево-різницевої апроксимації диференціального рівняння виходить система n рівнянь з невідомими $y_0, y_1, ..., y_n$.

10.3. Алгоритм методу скінченних різниць

Запишемо диференціальне рівняння (10.2) для i – тої точки з урахуванням виразів (10.4) і (10.5)

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h} + p(x_i)\frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + g(x_i)y_i = f(x_i)\,. \qquad (10.10)$$

Виконавши перетворення отримаємо наступні рівняння:

$$y_{i-1}\left[\frac{1}{h^2} - \frac{p(x_i)}{2h}\right] + y_i\left[g(x) - \frac{2}{h^2}\right] + y_{i+1}\left[\frac{1}{h^2} + \frac{p(x_i)}{2h}\right] = f(x_i)\,. \qquad (10.11)$$

Для граничних умов запишемо наступні кінечно-різницеві рівняння:

$$a_0 y_0 + a_1\frac{-3y_0 + 4y_1 - y_2}{2h} = A;$$

(10.12)

$$b_0 y_n + b_1\frac{3y_n + 4y_{n-1} - y_{n-2}}{2h} = B.$$

Виконаємо перетворення:

$$y_0\left(a_0 - \frac{3a_1}{2h}\right) + y_1\frac{2a_1}{h} - y_2\frac{a_1}{2h} = A;$$

(10.13)

$$y_{n-2}\frac{b_1}{2h}-y_{n-1}\frac{2b}{h}+y_n\left(b_0+\frac{3b_1}{2h}\right)=B\,.$$

Об'єднаємо рівняння (10.11) і (10.13) отримаємо систему:

$$\begin{cases} y_0\left(a_0-\dfrac{3a_1}{2h}\right)+y_1\dfrac{2a_1}{h}-y\dfrac{a_1}{2h} & =A \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ y_{i-1}\left[\dfrac{1}{h^2}-\dfrac{p(x_i)}{2h}\right]+y_i\left[g(x_i)-\dfrac{2}{h^2}\right]+y_{i+1}\left[\dfrac{1}{h^2}+\dfrac{p(x_i)}{2h}\right] & =f(x_i) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ y_{n-2}\dfrac{b_1}{2h}-y_{n-1}\dfrac{2b_1}{h}+y_n\left(b_0+\dfrac{3b_1}{2h}\right) & =B \end{cases} \qquad (10.14)$$

У матричному вигляді система записується у вигляді

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & & \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & & \\ & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \\ & . & . & . & \\ & & . & . & . \\ & & a_{nn-2} & a_{nn-1} & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ . \\ . \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ f_1 \\ f_2 \\ . \\ . \\ B \end{pmatrix},$$

де $\quad a_{11}=(a_0-3a_1/2h);\quad a_{12}=2a/h;\quad a_{13}=-a_1/2h;$

$a_{ij-1}=1/h^2-p(x_i)/2h;\quad a_{ij}=g(x_i-2/h^2);\quad a_{ij+1}=1/h^2-p(x_i)/2h;$

$(i=2,n-1;\quad j=i-1,i+1)$

$$a_{nn-2}=b^1/2h;\quad a_{nn-1}=-2b_1/h;\quad a_{nn}=b_0-3b_1/2h.$$

В даному випадку виходить трьохдіагональна матриця систем рівнянь для вирішення якої можна використовувати метод прогону або метод Гауса. В результаті рішенні систем визначаємо значення шуканої функції у вузлових точках $y_0=y(x_0),\quad y_1=y(x_1)\dots\quad y_n=y(x_n)$.

10.4. Чисельне рішення крайової задачі

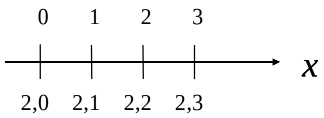
Скласти рішення крайової задачі для звичайного диференціального рівняння з шагом $h=0{,}1$ на інтервалі $[2;2{,}3]$

$y''+xy'\,-\,0{,}5\cdot y/x=1\,;$

$y(2)+2y'(2)=1;$

$y(2{,}3)=2{,}15.$

Розбивши відрізок $[2;2,3]$ на частини з шагом $h = 0,1$, отримаємо чотири вузлові точки з абсцисами $x = 2;\quad x = 2,1;\quad x = 2,2;\quad x = 2,3.$ Дві точки $x = 2;\quad x = 2,3$ є скінченими, а дві інші – внутрішні.



У внутрішніх точках замінимо дане рівняння кінцево-різницевим рівнянням:

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + 0,5\frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} - 0,5\frac{y_i}{x_i} = 1 \qquad (i = 1,2).$$

Для крайових умов складемо кінцево-різницеве рівняння в скінченних точках:

$$y_0 + 2\frac{-3y_0 + 4y_1 - y_2}{2h} = 1 (i = 0);$$

$$y_3 = 2,5 \qquad (i = 3).$$

Записуючи рівняння для всіх точок інтервалу приходимо до системи рівнянь:

$$\begin{cases} y_0 + \dfrac{-3y_0 + 4y_1 - y_2}{0,1} = 1; \\ \dfrac{y_2 - 2y_1 + y_0}{0,001} + 2,1\dfrac{y_2 - y_0}{0,2} - 0,5\dfrac{y_1}{2,1} = 1; \\ \dfrac{y_3 - 2y_1 - y_3}{0,001} + 2,2\dfrac{y_3 - y_2}{0,2} - 0,5\dfrac{y_2}{2,2} = 1; \\ y_3 = 2,15. \end{cases}$$

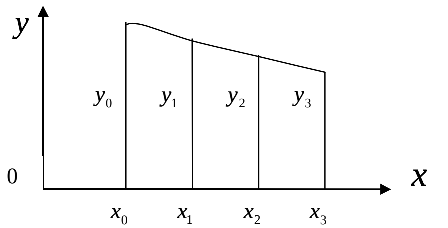
Виконавши перетворення, отримаємо:

$$\begin{cases} -2,9y_0 + 4y_1 - y_2 = 0,1; \\ 375,9y_0 - 841y_1 + 464,1y_2 = 4,2; \\ 391,6y_1 + 881y_2 + 488,4y_3 = 4,4; \\ y_3 = 2,15. \end{cases}$$

Вирішуючи дану систему методом Гауса знаходимо значення функції у вузлових точках

$y_0(2{,}0) = 2{,}235;\ \ y_1(2{,}1) = 2{,}185;\ \ y_2(2{,}2) = 2{,}158;\ \ y_3(2{,}3) = 2{,}150$

Графічно рішення представитися таким чином:



10.5. Питання до самоперевірки

1. Що називається диференціальним рівнянням та його рішенням?
2. Як називаються диференціальні рівняння залежно від кількості незалежних змінних?
3. Завдання Коши та крайова задача для звичайних диференціальних рівнянь?
4. Види скінченних різниць, що використовуються для апроксимації похідних?
5. Від чого залежить точність рішення методом скінченних різниць?

10.6. Варіанти індивідуальних завдань

Використовуючи метод скінченних різниць вирішити крайову задачу звичайного диференціального рівняння; шаг $h = 0{,}1$.

1. $y'' + y'/x + 2y = x$; $y(0{,}7) = 0{,}5;$ $2y(1) + 3y'(1) = 1{,}2.$	2. $y'' - x/y' + 2y = x + 1$; $y(1{,}2) = 1;$ $y(0{,}9) - 0{,}5y'(0{,}9) = 2.$
3. $y'' + xy' + y = x + 1$; $y'(0{,}8) = 1{,}2;$ $y(0{,}5) + 2y'(0{,}5) = 1.$	4. $y'' + 2y' - y/x = 3$; $y(0{,}2) = 2;$ $0{,}5y(0{,}5) - y(0{,}5) = 1.$

5. $y'' + 2y' - xy = x$; $y'(0{,}6) = 0{,}7;$ $y(0{,}9) - 0{,}5y'(0{,}9) = 1.$	6. $y'' - y' + 2y/x = x + 0{,}4$; $y'(1{,}4) = 4;$ $y(1{,}1) - 0{,}5y'(1{,}1) = 2.$
7. $y'' - 3y' + y/x = 1$; $y(0{,}4) = 2;$ $y(0{,}7) + 2y'(0{,}7) = 0{,}7.$	8. $y'' + 3y' - y/x = x + 1$; $y'(1{,}2) = 1;$ $2y(1{,}5) - y'(1{,}5) = 0{,}5.$
9. $y'' - y'/2 + 3y = 2x$; $y(1{,}3) = 1;$ $y(1) + 2y'(1) = 0{,}6.$	10. $y'' + 1{,}5y' - xy = 0{,}5$; $y(1{,}6) = 3;$ $2y(1{,}3) - y'(1{,}3) = 1.$
11. $y'' + 2xy' - y = 0{,}4$; $y'(0{,}6) = 2;$ $2y(0{,}3) + y'(0{,}3) = 1.$	12. $y'' - 0{,}5xy' + y = 2$; $y(0{,}4) = 1{,}2;$ $y(0{,}7) + 2y'(0{,}7) = 1{,}4.$
13. $y'' + 2y'/x - 3y = 2$; $y'(0{,}8) = 1{,}5;$ $2y(1{,}1) + y'(1{,}1) = 3.$	14. $y'' + 2x/y' + y = x$; $y(0{,}8) = 3;$ $2y(0{,}5) - y'(0{,}5) = 1.$
15. $y'' - 3xy' + 2y = 1{,}5$; $y'(0{,}7) = 1{,}3;$ $0{,}5y(1) + y'(1) = 2.$	16. $y'' + 2xy' - 2y = 0{,}6$; $y'(2) = 1;$ $0{,}4y(2{,}3) - y'(2{,}3) = 1.$
17. $y'' + y'/x - 0{,}4y = 2x$; $y'(0{,}9) = 1{,}7;$ $y(0{,}6) - 0{,}3y'(0{,}6) = 0{,}6.$	18. $y'' - y'/2x + 0{,}8y = x$; $y'(2) = 1;$ $y(1{,}7) + 1{,}2y'(1{,}7) = 2.$

19. $y'' - y'/3 + xy = 2$; $y(0{,}8) = 1{,}6;$ $3y(1{,}1) - 0{,}5y'(1{,}1) = 1.$	20. $y'' + 0{,}8y' - xy = 1{,}4$; $y(1{,}8) = 0{,}5;$ $2y(2{,}1) + y'(2{,}1) = 1{,}7.$
21. $y'' + 2y' - y/x = 1/x$; $y(1{,}2) = 0{,}8;$ $y(0{,}9) + y'(0{,}9) = 1.$	22. $y'' - y'/4 + 2y/x = x/2$; $2y(1{,}6) = 0{,}3;$ $1{,}5y(1{,}3) - y'(1{,}3) = 0{,}6.$
23. $y'' - 0{,}5y' + 0{,}5xy = 2x$; $y'(1) = 0{,}5;$ $2y(1{,}3) - y'(1{,}3) = 2.$	24. $y'' + 2y' - 1{,}5xy = 2/x$; $y'(0{,}8) = 1;$ $y(1{,}1) + 2y'(1{,}1) = 1.$
25. $y'' + 2xy' - 1{,}5 = x$; $y'(1{,}4) = 2{,}5;$ $1{,}4y(1{,}1) + 0{,}5y'(1{,}1) = 2.$	26. $y'' - xy'/2 + 0{,}5y = 2x$; $y'(0{,}5) = 0{,}4;$ $0{,}4y(0{,}2) - y'(0{,}2) = 1{,}5.$
27. $y'' + 0{,}6xy' - 2y = 1$; $y(1{,}5) = 0{,}6;$ $2y(1{,}8) - 0{,}8y'(1{,}8) = 3.$	28. $y'' + y'/2x - y = 2/x$; $y(0{,}6) = 1{,}3;$ $0{,}5y(0{,}9) - 1{,}2y'(0{,}9) = 1.$
29. $y'' - 0{,}5x/y' + 2y = x$; $y(1{,}9) = 0{,}8;$ $y(1{,}6) + 0{,}7y'(1{,}6) = 2.$	30. $y'' - xy' + 2xy = 0{,}8$; $y'(1{,}5) = 2;$ $y(1{,}2) - 0{,}5y'(1{,}2) = 1.$

Лабораторна робота 12-13. ВАРІАЦІЙНІ МЕТОДИ РІШЕННЯ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ

12.1. Метод Бубнова-Гальоркіна

Простим звичайним диференціальним рівнянням є рівняння 1-го порядку

$$y' = f(x,y). \qquad (12.1)$$

Основна задача, що відноситься до цього рівняння є задача Коши. Знайти вирішенні рівняння (12.1)

$$y = y(x), \qquad (12.2)$$

що задовольняє початковій умові $y(x_0) = y_0$, тобто треба знайти інтегральну криву $y = y(x)$, що проходить через задану точку $M_0(x_0; y_0)$. Для диференціального рівняння n-го порядку.

$$y^{(n)} = f(x, y, y' \dots y^{(n-1)}).$$

Задача Коши полягає в знаходженні рішення $y = y(x)$, що задовольняє початковим умовам:

$$y(x_0) = y_0; y'(x_0) = y_0'; \dots y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)},$$

де $x_0; y_0; y_0'; \dots y_0^{(n-1)}$ - задані числа. Метод скінченних різниць для рішення крайових задач носить чисельний характер і дозволяє отримати таблицю значень шуканої функції.

Метод Гальоркіна засновано на одній теоремі з теорії загальних рядів Фур'є.

Теорема. Нехай $\{U_n(x)\}$ - повна система функцій з ненульовою нормою ортогональних на відрізку $[a,b]$. Якщо безперервна функція $f(x)$ ортогональна на відрізку $[a,b]$ до всіх функцій $U_n(x)$, тобто

$$\int_a^b f(x) U_n(x) dx = 0, \qquad (n = 1,2,.......), \qquad (12.3)$$

то $f(x) = 0$ при $a \le x \le b$.

Для повної системи $\{U_n(x)\}$, по відношенню до будь-якої безперервної функції $f(x)$, виконана рівність повноти:

$$\int_a^b f^2(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \left\| U_n \right\|^2 C^2 n \qquad (12.4)$$

В силу умови (3) $Cn = 0$; (n=1,2,...), значить для повної системи $\{U_n(x)\}$, по відношенню до будь-якої безперервної функції $f(x)$, виконано рівність повноти (2), тобто

$$\int_a^b f^2(x)dx = 0 \qquad f(x) = 0, при\ a \le x \le b$$

Зауваження 1. З формули (12.4) витікає, що безперервна функція $f(x)$ ортогональна до скінченної системи функцій $U_1(x), U_2(x), ..., U_n(x)$, то

$$\int_a^b f^2(x)dx = \sum_{n+1}^{\infty} \left\| U_n \right\|^2 C^2 n < E,$$

при достатньо великому U. В цьому випадку функція $f(x)$ буде скільки завгодно мала в середньому на відрізку $[a,b]$.

Метод Бубнова-Гальоркіна дає можливість знайти приблизне значення крайової задачі у виді аналітичного виразу. Це один з аналітичних методів, що дає можливість знайти приблизне рішення лінійної крайової задачі у виді аналітичного виразу.

Нехай маємо лінійну крайову задачу:

$$L[y] = f(x), \qquad (12.5)$$

де $L[y]$ - диференційний оператор, наприклад, виду:

$$L[y] = y^n + P(x)y' + g(x)y, \qquad (12.6)$$

та лінійні крайові умови

$$\Gamma_a[y] = a_0 y(a) + a_1 y'(a) = A; \qquad (12.7)$$

$$\Gamma_b[y] = b_0 y(b) + b_1 y'(b) = B.$$

Вибираємо деяку сукупність лінійно незалежних функцій – базисних функцій (називаються лінійно незалежними, з котрих можна побудувати загальне рішення, якщо їх відносини не є const)

$$U_0(x); U_1(x); U_2(x)...U_n(x) \qquad (12.8)$$

з яких функція $U_0(x)$ задовольняє неоднорідним крайовим умовам:

$$\Gamma_a[u_0] = A, \qquad \Gamma_b[u_0] = B \quad . \qquad (12.9)$$

В інших випадках функції $u_i(x)$ (i=1,2,...n) задовольняють відповідним однорідним крайовим умовам

$$\Gamma_a[u_i] = \Gamma_b[u_i] = 0 \, (i = 1,2,3,...,n)$$

Приблизне рішення крайової задачі шукаємо у вигляді лінійної комбінації базисних рішень

$$y = u_0(x) + \sum_{i=1}^{n} c_i u_i(x) \qquad (12.10)$$

Тоді функція y задовольняє крайовим умовам (12.7)

$$\Gamma_a[y] = \Gamma_a[u_0] + \sum_{i=1}^{n} c_i \Gamma_a[u_i] = A + \sum_{i=1}^{n} c_i 0 = A.$$

Аналогічно $\Gamma_b[y] = B$.

Підставивши вираз (12.10) у рівняння будемо мати

$$R(x, c_1, c_2 ... c_n) = \Gamma[y] - f(x) = L[u_0] - f(x) + \sum_{i-1}^{n} c_i L[u_i] \qquad (12.11)$$

Для отримання приблизного рішення, близького до точного, нам знадобиться підібрати c_i так, щоб функція R була мала.

За методом Бубнова-Галеркіна для цього потрібно, щоб нев'язка R була ортогональна до базисних функцій $u(x), (i = 1,2,...,n)$, що при великому числі цих функцій забезпечує малість нев'язки у середньому. (Див. зауваження 1)

Для знаходження коефіцієнтів c запишемо умову ортогональності:

$$\int_a^b u_i(x) R(x; c_1; c_2; c_3 ... c_n) dx, \qquad (i = 1,2,...,n) \qquad (12.12)$$

чи більш докладно

$$\sum c_i \int_a^b u_k(x) L[u_i] dx = \int_a^b u_k(x) [f(x) - L[u_0]] dx. \qquad (12.13)$$

Ми отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно коефіцієнтів c_i.

Приклад: знайти наближене рішення рівняння методом Бубнова-Гальоркіна

$$y'' + (1 + x) y + 1 = 0, \qquad (12.14)$$

що задовольняє крайовим умовам

$$y(-1) = 0; \quad y(1) = 0.$$

Рішення: В якості системи базисних функцій $u(x)$ $(i = 0,1,2,...,n)$ обираємо наступну функцію:

$$u_0(x) = 0 \quad \textit{оскільки} \quad \Gamma_a(u_0) = \Gamma_b(u_0) = 0$$

$$u_1(x) = 1 - x^2 \quad \textit{оскільки} \quad \Gamma_a(u_1) = 0; \quad \Gamma_b(u_1) = 0$$

$$u_2(x) = 1 - x^4 \quad \textit{оскільки} \quad \Gamma_a(u_2) = 0; \quad \Gamma_b(u_2) = 0$$

Вони лінійно незалежні та задовольняють нульовим крайовим умовам.

Наближене рішення задачі шукаємо у вигляді:

$$y = c_1(1-x^2) + c_2(1-x^4)\ .$$

Підставляючи y в ліву частину рівняння (12.1) отримуємо нев'язку.

$$R_1(x, c_1, c_2) = c_1(-1-x^4) + c_2(1-11x^2-x^4-x^6)+1;$$

$$\int_{-1}^{1}(1-x^2)\ R(x,c_1,c_2)dx = 0;$$

$$\int_{-1}^{1}(1-x^4)\ R(x,c_1,c_2)dx = 0;$$

$$\int_{-1}^{1}[c_1(-1-x^2)+c_2(1-11x^2-x^4-x^6)+1-c_1(-x^2-x^6)- \\ -c_2(x^2-11x^4-x^6-x^8)-x^4]dx =$$

$$= \int_{-1}^{1}[c_1(-1-x^4+x^2+x^6)+ \\ +c_2(1-11x^2-x^4-x^6-x^2+11x^4+x^6+x^8+1-x^2)+1-x^2]dx =$$

$$= 2c[c_1(-1-1/5+1/3+1/7)+ \\ +c_2(1-11/3+10/5-1/3+1/9)+1-1/3] = 0;$$

$$\int_{-1}^{1}[c_1(-1-x^4)+c_2(1-11x^2-x^4-x^6)+1- \\ -c_1(-x^4-x^8)+c_2(x^4-11x^6-x^8-x^{10})-x^4]dx =$$

$$= \int_{-1}^{1}[c_1(-1+x^2)+c_2(1-11x^2-2x^6+10x^6+x^8+x^{10})+1-x^4]dx =$$

$$= 2[c_1(-1+1/9)+c_2(1-11/3-2/5+10/7+1/9+1/11)+1-1/5]dx = 0.$$

$$\begin{cases} -76/105c_1 - 8/9c_2 = -2/3; \\ -8/9c_1 - 4976/3465c_2 = -4/5. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 38/105c_1 + 4/3c_2 = 2/3; \\ 4/9c_1 + 2488/3465c\ \ = 2/5; \end{cases} \qquad c_1 = 0{,}988;\ c_2 = -0{,}054.$$

Відповідь:

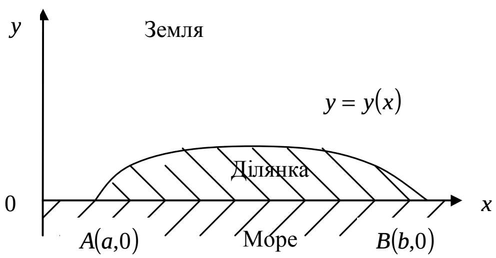
$$y(x) = 0{,}988(1-x^2) - 0{,}054(1-x^4);$$

$$y(x) = 0{,}934 - 0{,}988x^2 + 0{,}054x^4.$$

12.2. Метод Рітца

Історично першою задачею, що відома з давнини і віднесена надалі до задач варіаційного числення, є так звана задача Дідо. Легенда свідчить, що Дідо – цариця одного з держав древньої Греції, переслідувана царем сусідньої держави, бігла до Північної Африки і просила в місцевого населення ділянку землі, яку можна охопити шкурою вола. Отримавши згоду на таке прохання, вона на очах у здивованих глядачів розрізала шкуру на тонкі ремінці і, зв'язавши їх один з одним, охопила отриманою ниткою неабияку на ті часи ділянку, розвернувши на нім будівництво. Вона заснувала на цій ділянці знамените в давнину місто Карфаген. Вже античні вченні зацікавились математичною стороною цієї легенди. Допустимо, що нитка вже зв'язана; як тоді треба розташувати її, аби охоплена нею ділянка мала найбільшу площу?

Це задача має ряд варіантів. Розглянемо, наприклад, такий: хай кінці нитки розташовані в заданих точках A і B на березі моря. Якщо вибрати осі координат, то завдання зводитися до максимізації площі, тобто інтеграла $S=\int_a^b y(x)dx$, при заданому значенні довжини нитки, тобто інтеграла $L=\int_a^b \sqrt{1+y^2dx}$ і заданих крайових значеннях $y(a)=0$; $y(b)=0$.



Вже в давнину було виявлено, що похідною формою нитки служить дуга кола.

Інше знаменита задача, яка привела до зародження методів варіаційного числення, була запропонована в 1696 році І.Бернуллі і вирішене різними способами А. Бернуллі, Р. Лейбніцом, Р. Лопіталем, І. Ньютоном. Це задача про вибір шляху скачування під впливом тяжіння матеріальної точки без початкової швидкості і без тертя за час T.

Загальним в цих прикладах є те, що ці задачі на екстремум, в яких шуканою є лінія, або, на аналітичній мові, функція від якої вимагається лише, аби вона задовольняла заданим граничним умовам.

У розглянутих задачах шуканою є функція, від якої вимагається лише, аби вона задовольняла заданим граничним умовам. Але при довільному виборі такої функції є безконечне число степенів свободи (кількість змінних). Таким чином, можна сказати, що варіаційне числення вивчає екстремуми в завданнях з безконечним числом степенів свободи. Закон, за яким кожній функції з деякого класу функцій ставиться у відповідність певне число називається функціоналом.

Метод Рітца, запропонований в 1908 р. німецьким фізиком і математиком В. Рітцем є метод звуження числа степенів свободи, тобто незалежні змінні в принципі залишаються безперервними, але функція шукається в тому або іншому спеціальному вигляді, що включає декілька параметрів, які потім підбираються з вимоги: щонайкраще задовольнити умовам задачі.

Метод Рітца полягає у відшуканні екстремуму функціонала за граничних умов. Наближене значення для шуканої функції будується у вигляді

$$y(x) = u_0(x) + \sum_{i=1}^{n} c_i u_i(x), \qquad (12.15)$$

де $u_0(x), u_1(x), \ldots, u_n(x)$ - деякі базисні функції, тоді як параметри c_i будуть вибиратися з умови стаціонарності значення функціонала.

Базисні (координатні) функції $u_i(x)$ $(i = 1,2,3,\ldots,n)$ вибираються так же, як і в методі Гальоркіна.

Розглянемо звичайне диференційне рівняння:

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = \Phi(x)\,; \qquad (12.16)$$

з лінійним крайовими умовами:

$$\begin{cases} a_0 y'(a) + a_1 y(a) = A \\ b_0 y'(b) + b_0 y_1(b) = B \end{cases}, \qquad (12.17)$$

де функції $P(x), Q(x), \Phi(x)$ безперервні на відрізку $[a,b]$.

Приведемо рівняння (12.16) до спеціального, так званого самосопряженого виду. Для цього помножимо всі його члени на позитивний множник

$$\int_a^x \dot{P}(x)dx;$$

$$p(x) = e;$$

$$p(x)y'' + p(x)P(x)y' + p(x)Q(x)y' = p(x)\Phi(x)\,; \qquad (12.18)$$

оскільки $\int\limits_a^x P(x)dx$;

$$p(x) = e; \qquad P(x) = p(x)\cdot P(x);$$

то рівняння (12.18) запишеться у вигляді:

$$[P(x)y']' + q(x)y = f(x). \qquad (12.19)$$

Вводячи лінійний оператор

$$Ly = -\frac{d}{dx}[p(x)y'] - q(x)y;$$

або $Ly = -f(x)$ (12.20)

Крайова задача рівносильна задачі про мінімум функціонала

$$F(x) = (Ly; y) + 2(f; x); \qquad (12.21)$$

чи після перетворення

$$F[y] = \int\limits_a^b [p(x)(y')^2 - q(x)y^2 + 2f(x)y]dx. \qquad (12.22)$$

Для вирішення цієї варіаційної задачі застосуємо метод Рітца. Обираємо систему лінійно-незалежних функцій $u_0(x), u_1(x), u_2(x)..u_n(x)$ таких, що $u_0(a) = A,\ u_0(b) = B$, а інші $u(x)\ (i > 1)\ u_i(a) = u_i(b) = 0\ (i = 1,2,...,n)$.

Рішення варіаційної задачі будемо шукати у вигляді

$$y(x) = u_0(x) + \sum_{i=1}^{n} c_i u_i(x), \qquad (12.23)$$

де c_i $(i = 1,2,...,n)$ деякі постійні. Очевидно, що $y(a) = A$, $y(b) = B$. Коефіцієнти $c_1, c_2, c_3, ..., c_n$ підбираємо таким чином, щоб (12.23) давала екстремум функціонала (12.22).

Приклад: знайти рішення диференційного рівняння

$$y' + (1 + x^2)y + 1 = 0,$$

що задовольняє крайовим умовам: $y(-1) = y(1) = 0$.

В якості координатних функцій приймаємо функції:

$$u_0(x) = 0;$$
$$u_1(x) = 1 - x^2;$$
$$u_2(x) = 1 - x^4.$$

Тоді рішення буде мати вигляд:

$$y = c_1(1 - x^2) + c_2(1 - x^4).$$

Дане рівняння, де $P(x) = 1,\quad q(x) = 1 + x^2,\quad f(x) = -1$ є самосопряженим. Складемо для нього функціонал

$$F[y]=\int_{-1}^{1}\left\{\left(2c_1x+4c_2x^2\right)^2-\left(1+x^2\right)\left[c_1\left(1-x^2\right)+c_2\left(1-x^4\right)\right]^2\right\}dx\,.$$

Знаходимо частні похідні функціоналу $F[y]$ по параметрам c_1 та c_2:

$$\frac{\partial F}{\partial c_1}=\int_{-1}^{1}\left\{\begin{aligned}&4x\left(2c_1x+4c_2x^3\right)-\left(1+x^2\right)2(1-x^2)\cdot\\&\cdot\left[c_1\left(1-x^2\right)+c_2\left(1-x^4\right)\right]-2\left(1-x^2\right)\end{aligned}\right\}dx=$$

$$=8\left(\frac{38}{105}c_1+\frac{4}{9}c_2-\frac{1}{3}\right);$$

$$\frac{\partial F}{\partial c_2}=\int_{-1}^{1}\left\{\begin{aligned}&8x^3\left(2c_1x+4c_2x^3\right)-2\left(1+x^2\right)(1-x^4)\cdot\\&\cdot\left[c_1\left(1-x^2\right)+c_2\left(1-x^4\right)\right]-2\left(1-x^4\right)\end{aligned}\right\}dx=$$

$$=8\left(\frac{4}{9}c_1+\frac{2488}{3465}c_2-\frac{2}{5}\right).$$

Вирішуючи систему: $\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial c_1}=0;\\[2mm]\dfrac{\partial F}{\partial c_2}=0;\end{cases}$ або

$$\begin{cases}\dfrac{38}{105}c_1+\dfrac{4}{9}c_2=\dfrac{1}{3};\\[4mm]\dfrac{4}{9}c_1+\dfrac{2488}{3465}c_2=\dfrac{2}{5};\end{cases}$$

отримуємо $c_1=0{,}988,\quad c_2=-0{,}054$

Рішенням диференційного рівняння буде функція:

$$y=0{,}934-0{,}938x^2+0{,}054x^4\,.$$

12.3. Питання до самоперевірки

1. Що називається функціоналом I?
2. В чому заключається ідея варіаційного методу?
3. Які ви знаєте варіаційні методи?
4. Як привести рівняння до самосопряженого вигляду?
5. Що називається системою лінійно-незалежних функцій?
6. У якому вигляді шукаємо рішення варіаційної задачі?
7. Який функціонал застосовується для рішення крайової задачі методом Рітца?
8. Сутність методу Галеркіна.

9. Що називається нев’язкою R?

10. Система лінійних рівнянь для обчислення коефіцієнтів c_i ?

12.4. Варіанти індивідуальних завдань

Вирішити диференційне рівняння методами Рітца та Бубнова-Гальоркіна.

1.	$y'' - y + x = 0$	$y(0) = y(1) = 0$
2.	$y'' + 2xy + x = 0$	$y(0) = y(1) = 0$
3.	$y'' + y + x = 0$	$y(0) = y(1) = 0$
4.	$y'' - 2xy - 2x = 0$	$y(0) = y(1) = 0$
5.	$y'' + y = x$	$y(0) = y(1) = 0$
6.	$y'' - y' \cos x + y \sin x = \cos x + x = 0$	$y(-p) = y(p) = 2$
7.	$y'' - 2y - 3x = 0$	$y(0) = y(1) = 0$
8.	$y'' - 2xy' - 2y = 5x - x$	$y(0) = 0; y(1) = 1$
9.	$y'' - 3y - 2x = 0$	$y(0) = y(1) = 0$
10.	$y'' - 2xy - 3 = 0$	$y(-1) = y(1) = 0$
11.	$y'' + xy - xy = 0$	$y(0) = y(1) = 0$
12.	$y'' - 2xy' + 2x = 5x - 3x + 1$	$y(0) = 0; y(1) = 1$
13.	$y'' + xy' - 2y = x - 1$	$y(0) = y(1) = 0$
14.	$y'' + 2y' - 4y - 2x = 0$	$y(0) = 0; y(1) = 1$

15.	$y'' - 3y - 2x = 0$	$y(0) = 0; y(1) = 1$
16.	$y'' - 2xy' - 3y + 2x = 0$	$y(-1) = y(1) = 0$
17.	$y'' + y' - y / x = 8x - 3/2$	$y(0) = 0; y(1) = 1$
18.	$y'' - 3xy - 9x - 5x = 0$	$y(0) = 0; y(1) = 1$
19.	$y'' - 3y' + 5xy - x = 0$	$y(0) = 0; y(1) = 1$
20.	$y'' - 2xy' + 2y = 3x + x - 1$	$y(0) = 0; y(1) = 1$
21.	$y'' + y' - y / x = 0$	$y(0) = y(1) = 0$
22.	$y'' - 2x - 2y = 0$	$y(0) = y(1) = 0$
23.	$y'' - y - 5x = 0$	$y(0) = 1; y(1) = 1$
24.	$y'' + y - 2xy = x - 2$	$y(-1) = y(1) = 0$
25.	$y'' + 2y' / x + 3y = 2x$	$y(0) = y(1) = 0$
26.	$y'' - y' / x + 2xy = 3x - 5$	$y(0) = 0; y(1) = 1$
27.	$y'' - y' 2x / (x + 2) - xy = 5 - x$	$y(0) = 1; y(1) = 0$
28.	$y'' - 2y' + 2y = 3x - 1$	$y(0) = 0; y(1) = 1$
29.	$y'' + xy - e = 0$	$y(0) = y(1) = 0$
30.	$y'' + 3y' - 4y = 2x + 1$	$y(0) = 0; y(1) = 2$

Лабораторна робота 14-15. РІШЕННЯ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ МЕТОДОМ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ (МСЕ)

14.1. Теоретичні положення МСЕ

У МСЕ розрахунок виконується не первинної конструкції, а конструкції, що було отримано в результаті ідеалізації (апроксимації). Якщо для зчленування окремих СЕ використовувати метод переміщень, то результатом рішення задачі в цілому є матричне рівняння:

$$\Phi \cdot U = P\,, \qquad (14.1)$$

де Φ - матриці жорсткості зчленованої системи; U - вектор вузлових переміщень; P - вектор вузлових навантажень.

Вирішення системи алгебраїчних рівнянь (14.1) дає дискретні значення вектора переміщень досліджуваної конструкції.

Оскільки МСЕ призводить до рішення великих систем алгебраїчних рівнянь, для вирішення яких потрібне використання ЕОМ, всі подальші міркування, для наочності, проведемо для простої задачі – плоскої задачі теорії пружності.

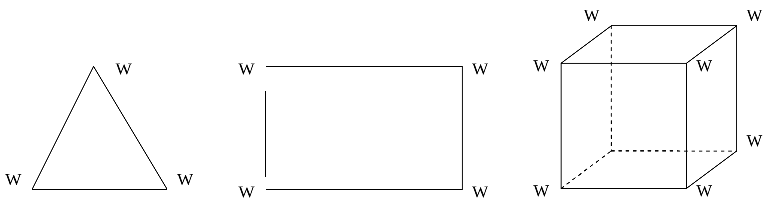
Точність рішення задачі за МСЕ залежить від форми прийнятих скінченних елементів та апроксимуючих функцій.

Розбиття континуального тіла проводимо плоскими елементами трикутної або чотирикутної форми. Якщо досліджуваний об'єкт має нерегулярності, закруглення і зазнає розриви в кривизнах, доцільно розбивати його викривленими СЕ.

У МСЕ задається вид розрішаючої функції. Така функція носить назву – апроксимуюча функція. Апроксимуючими функціями можуть бути – функції переміщень і напруги. Розглянемо лише функції переміщень. По вигляду апроксимуючої функції скінченні елементи розділемо на елементи різної складності.

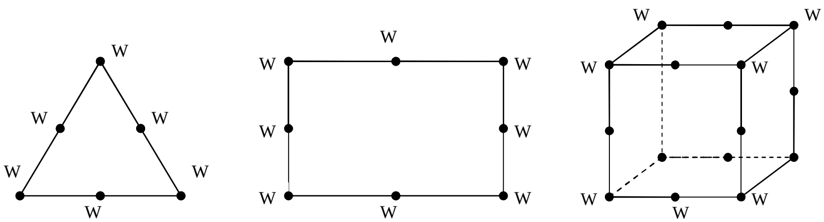
Скінченні елементи 1 ступеня складності – Лінійний розподіл апроксимуючої функції.

$W = k_1 x + k_2 y + k_3$ - на кожному ребрі.



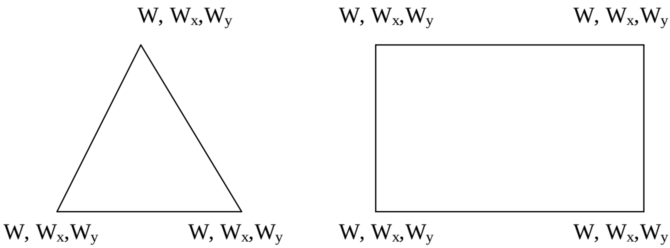
Скінченні елементи 2 ступеня складності – квадратичний розподіл апроксимуючої функції.

$W = k_1x + k_2y + k_3x + k_4xy + k_5y + k_6$ - на кожному ребрі.



Скінченні елементи 3 степені складності – кубічний розподіл апроксимуючої функції.

$W = k_1x + k_2y + k_3x + k_4xy + k_5y + k_6y$ - на кожному ребрі.



З математичної точки зору МСЕ можна трактувати як варіант методу Рітца. Головною відмінністю є вигляд координатних (апроксимуючих) функцій. Ці координатні функції у МСЕ задаються для одного елементу, а в методі Рітца для всієї області. Це дає можливість у МСЕ для малого елементу достовірніше задавати розподіл розрішаючої функції і при цьому ускладненні її (збільшення степені полінома) здійснювати наочним чином.

Перейдемо до реалізації вирішення задач за МСЕ. Послідовність проведення дослідження за МСЕ наступна:

1) призначення розрахункових вузлів, у яких буде визначено значення переміщень і розчленовування системи на скінченні елементи бажаної форми;

2) встановлення залежності між зусиллями та переміщеннями у вузлах елементів (побудова матриці жорсткості);

3) складання системи алгебраїчних рівнянь, що виражають статичну спільність набору скінченних елементів (побудова матриці жорсткості (МЖ) зчленованої конструкції);

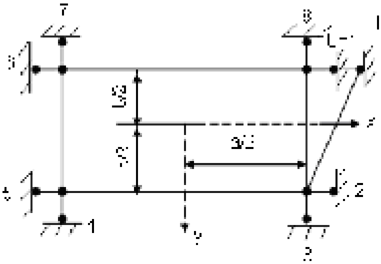
4) вирішення отриманої системи алгебраїчних рівнянь (обчислення значень переміщень в розрахункових вузлах);

5) визначення компонентів деформівного і напруженого стану за знайденими значеннями вузлових переміщень.

Така послідовність дослідження за МСЕ однакова для всіх задач пружності та будівельної механіки, за винятком складних конструкцій, при вирішенні яких послідовність декілька видозмінюється. Реалізація МСЕ нерозривно зв'язана з експлуатацією обчислювальних машин. Тому для простоти і наочності розглянемо плоску задачу теорії пружності.

1. Нехай задана прямокутна область. Нанесемо на область сітку. Таким чином, ця область розбита на систему скінченних елементів. Розрахуємо конструкцію, що складається з скінченних елементів сполучених між собою у вузлових точках. В результаті розчленовування вийшли СЕ у вигляді прямокутників. (Можна було б нанести сітку так, щоб утворилися трикутні елементи.)

2. Побудова матриці жорсткості елементів. Досліджуємо об'єкт з нанесеною сіткою, який може бути розчленований на СЕ різної геометрії. В цьому випадку потрібна побудова МЖ всіх складових елементів. У нашому випадку конструкція розбита на елементи однакової геометрії і розмірів. Тому розглянемо побудову матриці жорсткості одного елементу – прямокутника.



Введемо в кожен вузол вирізаного скінченного елементу два стержні, що перешкоджають горизонтальному та вертикальному зсуву (тобто на кожен вузол дві степні свободи).

Послідовність побудови матриці жорсткості така:

1) задається закон розподілу переміщень по області СЕ для 1 вузла;

2) відповідно до ухваленого закону розподілу переміщень, переміщення по області СЕ виражаються через одиничні переміщення вузлових точок;

3) на підставі геометричних та фізичних співвідношень теорії пружності деформації і напруги виражають через переміщення вузлових точок;

4) за допомогою варіаційного або інших принципів визначаються жорсткісні характеристики СЕ.

1. Для даного елементу задамо лінійним законом розподілу переміщень по області СЕ:

$$U(x,y)=\left(\frac{1}{2}+\frac{x}{a}\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{y}{b}\right) \text{ при } V(x,y)=0\,;$$

(14.2)

$$V(x,y)=\left(\frac{1}{2}+\frac{x}{a}\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{y}{b}\right) \text{ при } U(x,y)=0\,.$$

2. Виразимо переміщення по області СЕ через одиничні переміщення вузлових точок. Для цього складемо наступну таблицю.

При складанні таблиці враховано геометричні рівняння для плоскої задачі:

$$d_x=\frac{\partial U}{\partial x}\,; \quad d_y=\frac{\partial V}{\partial y}\,;$$

(14.3)

$$g_{xy}=\frac{\partial U}{\partial y}+\frac{\partial V}{\partial x}\,.$$

Таблиця 14.1

№ зсуву	U	V	$\dfrac{\partial U}{\partial x}$	$\dfrac{\partial V}{\partial y}$	$\dfrac{\partial U}{\partial y}+\dfrac{\partial V}{\partial x}$
			d_x	d_y	g_{xy}
1	$\left(\frac{1}{2}+\frac{x}{a}\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{y}{b}\right)$	0	$\frac{1}{a}\left(\frac{1}{2}-\frac{y}{b}\right)$	0	$-\frac{1}{b}\left(\frac{1}{2}+\frac{x}{a}\right)$
2	$\left(\frac{1}{2}+\frac{x}{a}\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{y}{b}\right)$	0	$\frac{1}{a}\left(\frac{1}{2}+\frac{y}{b}\right)$	0	$\frac{1}{b}\left(\frac{1}{2}+\frac{x}{a}\right)$
3	0	$\left(\frac{1}{2}+\frac{x}{a}\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{y}{b}\right)$	0	$\frac{1}{b}\left(\frac{1}{2}+\frac{x}{a}\right)$	$\frac{1}{a}\left(\frac{1}{2}+\frac{y}{b}\right)$
4	0	$\left(\frac{1}{2}-\frac{x}{a}\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{y}{b}\right)$	0	$\frac{1}{b}\left(\frac{1}{2}-\frac{x}{a}\right)$	$-\frac{1}{a}\left(\frac{1}{2}+\frac{y}{b}\right)$
5	$\left(\frac{1}{2}-\frac{x}{a}\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{y}{b}\right)$	0	$-\frac{1}{a}\left(\frac{1}{2}+\frac{y}{b}\right)$	0	$\frac{1}{b}\left(\frac{1}{2}-\frac{x}{a}\right)$
6	$\left(\frac{1}{2}-\frac{x}{a}\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{y}{b}\right)$	0	$-\frac{1}{a}\left(\frac{1}{2}-\frac{y}{b}\right)$	0	$-\frac{1}{b}\left(\frac{1}{2}-\frac{x}{a}\right)$
7	0	$\left(\frac{1}{2}-\frac{x}{a}\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{y}{b}\right)$	0	$-\frac{1}{b}\left(\frac{1}{2}-\frac{x}{a}\right)$	$\frac{1}{a}\left(\frac{1}{2}-\frac{y}{b}\right)$
8	0	$\left(\frac{1}{2}+\frac{x}{a}\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{y}{b}\right)$	0	$-\frac{1}{b}\left(\frac{1}{2}+\frac{x}{a}\right)$	$\frac{1}{a}\left(\frac{1}{2}-\frac{y}{b}\right)$

На підставі принципу можливих переміщень, який полягає в наступному: робота внутрішніх сил дорівнює роботі зовнішніх сил на можливих переміщеннях (можливими переміщеннями є одиничні переміщення вузлових точок), можна записати:

$$r_{ij}\cdot 1 = h\int_{-b/2}^{b/2}\int_{-a/2}^{a/2}(x_x^i s_x^j + x_y^i s_y^j + g_{xy}^i t_{xy}^j)\,dxdy\,, \qquad (14.4)$$

де h - товщина пластинки;

x_x^i, x_y^i, g_{xy}^i - компоненти деформації при зсуві $i-$того зв'язку на одиницю;

s_x^j, s_y^j, t_{xy}^j - компоненти напруги при зсуві $j-$того зв'язку на одиницю;

t_{xy} - реакція у зв'язку з номером i від одиничного переміщення з номером j.

Для здобуття коефіцієнтів матриці жорсткості випишемо фізичні рівняння:

$$s_x = \frac{E}{1-v^2}\ (x_x + vx_y)\,;$$

$$s_y = \frac{E}{1-v^2}\ (x_y + vx_x)\,; \qquad (14.5)$$

$$t_{xy} = \frac{E}{2(1+v)}\ g_{xy}\,.$$

Визначимо реакції в першій при зсуві цієї ж точки на одиницю.

$$x_x^1 = \frac{1}{a}\left(\frac{1}{2} - \frac{y}{b}\right);\ x_н^1 = 0\,;$$

$$s'_x = \frac{E}{1-v^2}\frac{1}{a}\left(\frac{1}{2} - \frac{y}{b}\right);$$

$$s'_y = \frac{E}{1-v^2}\frac{1}{a}\left(\frac{1}{2} - \frac{y}{b}\right);$$

$$t'_{xy} = \frac{-E}{2(1+v)}\frac{1}{b}\left(\frac{1}{2} + \frac{x}{a}\right);$$

$$r_{11} = h\int_{-b/2}^{b/2}\int_{-a/2}^{a/2}\left\{\begin{matrix}\frac{1}{a}\left(\frac{1}{2} - \frac{y}{b}\right)\frac{1}{a}\left(\frac{1}{2} - \frac{y}{b}\right)\frac{E}{1-v^2} + \\ + \frac{1}{b}\left(\frac{1}{2} + \frac{x}{a}\right)\frac{1}{b}\left(\frac{1}{2} + \frac{x}{a}\right)\frac{E}{1+v}\end{matrix}\right\}dxdy =$$

$$= \frac{-hEb}{(1-v^2)a^2}\cdot\int_{-b/2}^{b/2}\int_{-a/2}^{a/2}\left(\frac{1}{2} - \frac{y}{b}\right)d\left(\frac{1}{2} - \frac{y}{b}\right) +$$

$$+ \frac{Ehab}{(1+v)2b}\cdot\int_{-b/2}^{b/2}\int_{-a/2}^{a/2}\left(\frac{1}{2} + \frac{x}{a}\right)d\left(\frac{1}{2} + \frac{x}{a}\right)dxdy =$$

$$= \frac{Eh}{(1-v)^2}\cdot\left(\frac{2}{3}\frac{b}{a} + \frac{1-v}{3}\frac{a}{b}\right);$$

Аналогічно отримуємо всі жорсткосні характеристики скінченного елементу, зведені в таблицю 1.

Таким чином, отримано МЖ всієї конструкції на основі канонічного рівняння методу переміщень

$$\sum_{j=1}^{2n} r_{ij} \cdot U_j + R_i = 0 .$$

Вирішуючи цю систему, наприклад методом Гауса, отримуємо переміщення у вузлах сітки і по ним деформований та напружений стан.

14.2. Питання до самоперевірки

1. Сутність методу скінченних елементів?
2. Відмінність МСЕ від методу Рітца?
3. Від чого залежить точність рішення МСЕ?
4. Принцип можливих переміщень?
5. Види скінченних елементів та апроксимуючих поліномів?
6. Матриця жорсткості СЕ?
7. Нормальна та дотична напруга?

МАТРИЦЯ ЖОРСТКОСТІ ДЛЯ ЕЛЕМЕНТАРНОГО ПРЯМОКУТНИКА

$\frac{2}{3}\frac{b}{a}+\frac{1-\nu}{3}\frac{a}{b}$	$\frac{1}{3}\frac{b}{a}-\frac{1-\nu}{3}\frac{a}{b}$	$\frac{3\nu-1}{4}$	$\frac{1+\nu}{4}$	$-\frac{1}{3}\frac{b}{a}-\frac{1-\nu}{6}\frac{a}{b}$	$-\frac{2}{3}\frac{b}{a}+\frac{1-\nu}{6}\frac{a}{b}$	$-\frac{3\nu-1}{4}$	$-\frac{1+\nu}{4}$
	$\frac{2}{3}\frac{b}{a}+\frac{1-\nu}{3}\frac{a}{b}$	$\frac{1+\nu}{4}$	$\frac{3\nu-1}{4}$	$-\frac{2}{3}\frac{b}{a}+\frac{1-\nu}{6}\frac{a}{b}$	$-\frac{1}{3}\frac{b}{a}-\frac{1-\nu}{6}\frac{a}{b}$	$-\frac{1+\nu}{4}$	$-\frac{3\nu-1}{4}$
		$\frac{2}{3}\frac{a}{b}+\frac{1-\nu}{3}\frac{b}{a}$	$\frac{1}{3}\frac{a}{b}-\frac{1-\nu}{3}\frac{b}{a}$	$-\frac{3\nu-1}{4}$	$-\frac{1+\nu}{4}$	$-\frac{1}{3}\frac{a}{b}-\frac{1-\nu}{3}\frac{b}{a}$	$-\frac{2}{3}\frac{a}{b}+\frac{1-\nu}{3}\frac{b}{a}$
			$\frac{2}{3}\frac{a}{b}+\frac{1-\nu}{3}\frac{b}{a}$	$-\frac{1+\nu}{4}$	$-\frac{3\nu-1}{4}$	$-\frac{2}{3}\frac{a}{b}+\frac{1-\nu}{6}\frac{b}{a}$	$-\frac{1}{3}\frac{a}{b}-\frac{1-\nu}{6}\frac{b}{a}$
				$\frac{2}{3}\frac{b}{a}+\frac{1-\nu}{3}\frac{a}{b}$	$-\frac{1+\nu}{4}$	$\frac{3\nu-1}{4}$	$\frac{1+\nu}{4}$
					$\frac{2}{3}\frac{b}{a}+\frac{1-\nu}{3}\frac{a}{b}$	$\frac{1+\nu}{4}$	$\frac{3\nu-1}{4}$
						$\frac{2}{3}\frac{a}{b}+\frac{1-\nu}{3}\frac{b}{a}$	$\frac{1}{3}\frac{a}{b}-\frac{1-\nu}{3}\frac{b}{a}$
							$\frac{2}{3}\frac{a}{b}+\frac{1-\nu}{3}\frac{b}{a}$

Примітка: матриця симетрична; всі елементи матриці жорсткості помножити на величину $E\gamma/(2(1+\nu))$, де γ - товщина пластини, E - модуль пружності, ν - коефіцієнт Пуассона.

14.3. Варіанти індивідуального завдання

Завдання. Використовуючи стандартну програму вирішення завдань будівельної механіки і теорії пружності МІРЕЛА+ виконати розрахунок наступних конструкцій. По отриманих результатах розрахунку побудувати епюри полів переміщень та напруги в перерізах конструкції.

Таблиця 14.2

№ варіанта	Вигляд задачі	Сітка розбиття	Розміри		Пружні пост.		Навантаження
			$R, (A \cdot B)$	H	$E \cdot 10^{-6}$	V	
1	Сфера	2 x 5 x 5	30	1	2,1	0,2	1
2	Сфера	2 x 5 x 5	35	2	1,4	0,25	2
3	Сфера	2 x 5 x 5	30	3	1,6	0,3	3
4	Сфера	2 x 5 x 5	45	4	2,0	0,35	4
5	Сфера	2 x 5 x 5	35	2	1,8	0,4	5
6	Сфера	2 x 5 x 5	55	3	1,5	0,49	7
7	Циліндр	2 x 5 x 5	20	5	1,2	0,28	8
8	Циліндр	2 x 5 x 5	30	6	1,9	0,3	9
9	Циліндр	2 x 5 x 5	40	8	1,8	0,33	10
10	Циліндр	2 x 5 x 5	50	10	1,6	0,4	11
11	Циліндр	2 x 5 x 5	55	10	1,5	0,41	12
12	Циліндр	2 x 5 x 5	60	12	2,1	0,49	13
13	Циліндр	2 x 5 x 5	25	4	2,0	0,3	15
14	Циліндр	2 x 5 x 5	4	8	1,6	0,2	16

15	Циліндр	2 x 5 x 5	30	8	1,4	0,25	18
16	Кругла плита	2 x 5 x 5	30	2	1,3	0,44	19
17	Кругла плита	2 x 5 x 5	35	3	1,8	0,25	20
18	Кругла плита	2 x 5 x 5	40	4	1,6	0,3	25
19	Кругла плита	2 x 5 x 5	45	2	1,4	0,49	30
20	Кругла плита	2 x 5 x 5	50	4	1,2	0,46	10
21	Кругла плита	2 x 5 x 5	60	5	2,1	0,28	15
22	Кругла плита	2 x 5 x 5	40	1	2,0	0,32	14
23	Кругла плита	2 x 5 x 5	45	3	1,8	0,4	16
24	Прямокутна плита	2 x 5 x 5	10 x 10	1	1,5	0,2	18
25	Прямокутна плита	2 x 5 x 5	10 x 20	2	1,8	0,49	1
26	Прямокутна плита	2 x 5 x 5	20 x 30	3	1,9	0,25	2
27	Прямокутна плита	2 x 5 x 5	25 x 10	2	1,7	0,28	3
28	Прямокутна плита	2 x 5 x 5	20 x 40	4	2,0	0,31	4
29	Прямокутна плита	2 x 5 x 5	5 x 10	1	1,4	0,35	5
30	Прямокутна плита	2 x 5 x 5	30 x 50	5	1,3	0,44	6

14.4. Розрахунок конструкцій методом скінченних елементів за програмою МІРЕЛА+

1. Кругла плита, затиснена по контуру під дією рівномірно розподіленого навантаження – програма plita.exe (рис.2).

Для розрахунку задається наступна інформація:

а) текстова інформація прізвище і номер варіанту;

б) сітка розбиття на СЕ – M1 M2 M3;

в) розміри плити – радіус і товщина;

г) пружні постійні матеріали і навантаження - E, V, Q .

2. Порожнистий циліндр під внутрішнім тиском (задача Ляме) – програма lame.exe (рис.3).

Для розрахунку задається наступна інформація:

а) текстова інформація прізвище і номер варіанту;

б) сітка розбиття на СЕ – M1 M2 M3;

в) розміри циліндра – внутрішній радіус, товщина і довга циліндра;

г) пружні постійні матеріали і навантаження - E, V, Q .

Довжину циліндра приймати рівною 1.

3. Порожниста сфера під внутрішнім тиском – програма sfera.exe (рис.4).

Для розрахунку задається наступна інформація:

а) текстова інформація прізвище і номер варіанту;

б) сітка розбиття на СЕ – M1 M2 M3;

в) розміри сфери – внутрішній радіус і товщина;

г) пружні постійні матеріали і навантаження - E, V, Q .

4. Прямокутна плита, затиснена по контуру під дією рівномірно розподіленого навантаження, – програма plate.exe (рис.5).

Для розрахунку задається наступна інформація:

а) текстова інформація прізвище і номер варіанту;

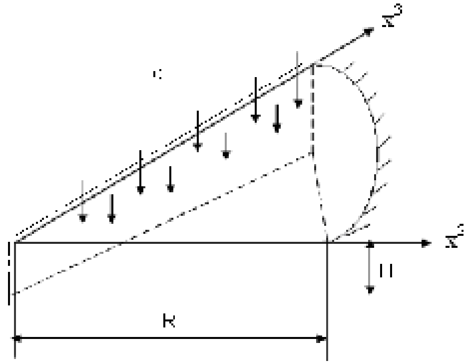
б) сітка розбиття на СЕ – M1 M2 M3;

в) розміри плити – довжина, ширина і товщина;

г) пружні постійні матеріали і навантаження - E, V, Q .

В результаті розрахунків на друк виводиться таблиця вузлових переміщень і напруг в центрах СЕ.

Кругла плита



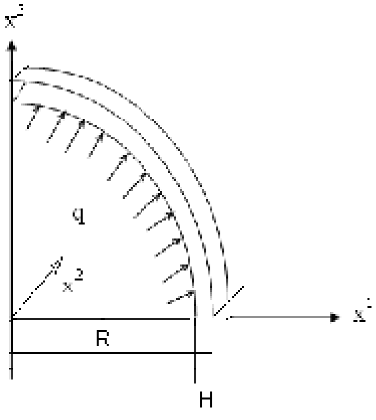
$$W = \frac{q}{4D}(6^2 - R^2)\ ;$$

$$D = \frac{Eh^3}{12(1 - y^2)}\ ;$$

$$G_r^{\max} = \frac{3}{4} \cdot \frac{qR^2}{h^2}\ .$$

Рис. 2. до задач 16-23

Циліндр

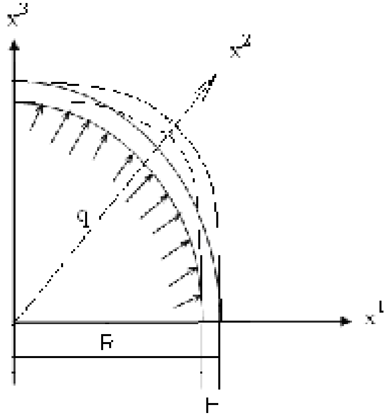


$$W = \frac{qR^2}{Eh}\ ;$$

$$G_{\max} = \frac{qR}{h}\ .$$

Рис. 3. до задач 7-15

Сфера

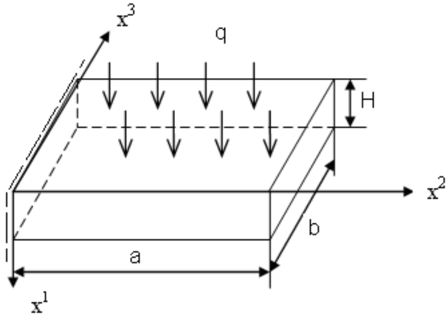


$$W = \frac{1-V}{2}\frac{qR^2}{Eh};$$

$$G_{qj}^{\max} = \frac{qR}{2h}.$$

Рис. 4. до задач 1-6

Прямокутна плита



$$W = 0{,}00124qa^4 / D;$$

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-y^3)};$$

$$G_{\max} = \frac{6M_x}{h^2};$$

$$M_x = 0{,}2234q.$$

Рис. 5. до задач 24-30

Питання до модульної роботи №1

1. Находження грубо наближеного значення кореня графічним та аналітичним способом.
2. Гранична абсолютна похибка кореня.
3. Сутність методу ітерацій (метод послідовних наближень).
4. Апроксимація експериментальних даних.
5. Сутність методу найменших квадратів як одного з видів апроксимації.
6. Сутність методу Гауса для вирішення системи рівнянь.
7. Для чого використовується коефіцієнт кореляції?
8. Правило множення та додавання матриць.
9. Зворотна матриця.
10. Суть методу Гауса.
11. Переваги та недоліки точних методів розв’язання.
12. Методи розв’язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь.
13. Сутність ітераційних методів розв’язання.
14. Відмінність методу Зейделя від ітерації.
15. Умова збіжності ітераційних методів.
16. Оцінка збіжності та точності рішень ітераційними методами.
17. Переваги ітераційних методів.
18. Що називається власним значенням матриці?
19. Що називається власним вектором матриці?
20. Фізична та механічна сутність власних значень і векторів матриці.
21. Методи знаходження найменшого та найбільшого власного значення.
22. Основне рівняння проблеми власних значень.

Питання до модульної роботи №2

1. Що називається інтерполяцією і екстраполяцією?
2. Що називається скінченними різницями?
3. Які бувають види скінченних різниць?
4. Інтерполяційні формули?
5. Відмінність I і II інтерполяційної формули?
6. Оцінки похибки інтерполяційних формул?
7. Які різниці називаються розділеними?

8. Інтерполяційна формула Ньютона для нерівномірно розподілених значень аргументу?
9. Що називається диференціальним рівнянням та його рішенням?
10. Як називаються диференціальні рівняння залежно від кількості незалежних змінних?
11. Задача Коши та крайова задача для звичайних диференціальних рівнянь?
12. Види скінченних різниць, що використовуються для апроксимації похідних?
13. Від чого залежить точність рішення методом скінченних різниць?
14. Що називається функціоналом I?
15. В чому заключається ідея варіаційного методу?
16. Які ви знаєте варіаційні методи?
17. Як привести рівняння до самосопряженого вигляду?
18. Що називається системою лінійно-незалежних функцій?
19. У якому вигляді шукаємо рішення варіаційної задачі?
20. Який функціонал застосовується для рішення крайової задачі методом Рітца?
21. Сутність методу Гальоркіна.
22. Що називається нев'язкою R?
23. Сутність методу скінченних елементів.
24. Відмінність МСЕ від методу Рітца.
25. Від чого залежить точність рішення МСЕ?
26. Принцип можливих переміщень.
27. Види скінченних елементів та апроксимуючих поліномів.
28. Матриця жорсткості СЕ.
29. Нормальна та дотична напруга.

Література

1. Амосов А.А. Вычислительные методы для инженеров / А.А. Амосов, Ю.А. Дубинский, Н.В. Копченова. – М.: «Высшая школа»,1994.–544с.
2. Бабенко К. И. Основы численного анализа / К.И. Бабенко – М.: Наука, 1986.
3. Бате К. Численные методы анализа и метод конечных элементов / К. Бате,Е. Вильсон. – М.: Стройиздат, 1982. – 447с.
4. Воробьева Г.Н. Практикум по численным методам / Г.Н. Воробьева, А.Н. Данилова – М.: Высшая школа, 1979.
5. Воробьева Г.Н. Практикум по вычислительной математике / Г.Н. Воробьева. – М.: Высшая школа., 1990. – 206 с.
6. Демидович Б.П. Основы вычислительной математики / Б.П. Демидович,И.А. Марон. – М., 1963.
7. Заварыкин В.М. Численные методы / В.М. Заварыкин, В.Г. Житомирский, М.П. Лапчик. – М.: Просвещение,1990.–176с.
8. Калиткин Н.Н. Численные методы / Н.Н. Калиткин. – М., 1978.
9. Киричевский В.В. Метод конечных элементов в вычислительном комплексе «Мирела+» / В.В. Киричевский, Б.М. Дохняк, Ю.Г. Козуб и др. – К.: Наукова думка, 2005. – 403с.
10. Киричевский В.В. Нелинейные задачи термомеханики, конструкций из слабосжимаемых эластомеров / В.В. Киричевский, А.О. Сахаров. – К.: Будівельник, 1992. – 215 с.
11. Михельсон В.С. Элементы вычислительной математики / В.С. Михельсон. – М., 1963.
12. Турчак Л.И. Основы численных методов / Л.И. Турчак. – М.: Наука, 1987. – 320 с.
13. Метод конечных элементов в механике твердых тел / [Сахаров А.С., Кисловский В.Н., Киричевский В.В. и др.]. – К.: Вища школа, 1982. – 480 с.

Навчально-методичне видання

КОЗУБ Галина Олександрівна
СМАГІНА Ольга Олександрівна

ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ

Методичні рекомендації до виконання лабораторних робіт
для студентів III курсу спеціальності
6.050103 „Програмна інженерія”

Редактор – Г. О. Козуб, О. О. Смагіна
Комп’ютерний макет – О. О. Смагіна
Коректор – Г. О. Козуб

Здано до склад. 14.02.2012 р. Підп. до друку 14.03.2012 р.
Формат 60x84 1/16. Папір офсет. Гарнітура Times New Roman.
Друк ризографічний. Ум. друк. арк. 6,45. Наклад 200 прим. Зам. № 83.

Видавець і виготовлювач
Видавництво Державного закладу
„Луганський національний університет імені Тараса Шевченка”
вул. Оборонна, 2, м. Луганськ, 91011. Тел./факс: (0642) 58-03-20.
e-mail: alma-mater@list.ru
Свідоцтво суб’єкта видавничої справи ДК № 3459 від 09.04.2009 р.