МЕХАНИКА

Министерство образования и науки,
молодежи и спорта Украины
Государственное учреждение
«Луганский национальный университет
имени Тараса Шевченко»

МЕХАНИКА

Учебное пособие
для самостоятельной работы студентов
специальности 6.040203 «Физика»

Луганск
ГУ «ЛНУ имени Тараса Шевченко»
2012

УДК 531(075.8)
ББК 22.2я73
М55

Р е ц е н з е н т ы:

Юрченко В. М. – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий отделом электронных свойств металлов Донецкого физико-технического института имени А. А. Галкина НАН Украины.

Тарасенко С. В. – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий отделом теории магнетизма и фазовых переходов Донецкого физико-технического института имени А. А. Галкина НАН Украины.

Савченко С. В. – доктор педагогических наук, профессор, ректор Луганского национального университета имени Тараса Шевченко.

М55 **Механика** : учеб. пособие для самост. раб. студ. спец. 6.040203 «Физика» / сост. : Т. В. Краснякова, А. Н. Кравцов, И. В. Жихарев ; Гос. учрежд. «Луган. нац. ун-т имени Тараса Шевченко». – Луганск : Изд-во ГУ «ЛНУ имени Тараса Шевченко», 2012. – 222 с.

В пособии реализован единый методический подход к решению задач механики, приведены дидактические материалы, способствующие выработке обобщенных умений и навыков решения физических задач и организации результативной самостоятельной работы.

Предназначено для студентов специальности «Физика», а также студентов физических специальностей. Пособие будет полезно преподавателям высших учебных заведений, колледжей, лицеев, гимназий, учителей школ.

УДК 531(075.8)
ББК 22.2я73

Рекомендовано к печати учебно-методическим советом
Луганского национального университета имени Тараса Шевченко
(протокол № 3 от 03 октября 2012 года)

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Решение физических задач является одним из способов приобретения умений и навыков практического применения научных знаний; одновременно это способ развития мышления, формирования воли и характера личности. Это один из способов подготовки квалифицированного учителя физики. В приобретении умений и навыков, а также упомянутых психических качеств решающее значение имеет самостоятельная работа студентов. Успех приходит не сразу; только на определенной стадии вложенного труда количество переходит в качество.

Цель настоящего пособия – помочь студентам организовать результативную, планомерную самостоятельную работу по овладению механикой – одним из первых разделов курса общей физики. При разработке структуры и содержания пособия использованы исследования психологов, методистов и личный опыт.

Решение физических задач является одной из эффективнейших форм изучения физики, потому что для решения задач недостаточно формального знания законов физики, а необходимо глубокое понимание их сути.

В пособии реализован единый подход к решению задач механики. В его основе лежит общий план решения физической задачи:

1. Изучение условия задачи.
2. Запись условия задачи с помощью символов.
3. Выполнение рисунка, схемы.
4. Анализ физических явлений, происходящих в ситуации, описанной в условии задачи, и выявление тех законов, которым подчиняются эти явления.
5. Запись уравнений, описывающих выявленные закономерности, и решение полученной системы уравнений с целью получения ответа в общем виде.

6. Исследование полученного решения в общем виде.

7. Выражение всех величин в единицах СИ.

8. Проверка ответа путем действий над единицами измерения физических величин.

9. Подстановка значений величин в ответ в общем виде и нахождение искомой величины.

10. Оценка разумности и достоверности полученного результата.

Выполнение этого плана позволяет вырабатывать обобщенные навыки решения физических задач. Специфика решения задач по определенной теме проявляется в основном при выполнении пунктов 4 и 5, поэтому им в пособии уделено основное внимание.

В пособии представлены разделы механики: кинематика и динамика. Статика не рассматривается, т.к. решение ее задач в какой-то мере можно осуществить как частный случай задач динамики.

В кинематике основное внимание уделено простейшей модели – материальной точке – и широкому спектру ее движений: прямолинейному и криволинейному, равномерному, равноускоренному и колебательному.

В динамике рассматриваются две модели тел: материальная точка и твердое тело. Внимание уделено как динамике движения этих моделей, так и законам изменения и сохранения импульса, момента импульса, энергии.

По всем разделам предусмотрены семинарские занятия. Вопросы семинарских занятий составлены так, чтобы студент получил информацию о круге тех проблем, решением которых ему предстоит заниматься на последующих практических и внеаудиторных занятиях; на что нужно акцентировать внимание и на чем сосредоточить свою работу.

В пособии сделана попытка реализации единого подхода к решению задач механики и в пределах каждой темы. В связи с этим структура занятий по всем темам одинакова.

В начале каждой темы приводятся основные понятия и физические величины, модели объектов и движений, задания для самоконтроля. Этот первый блок должен помочь осознать, какие понятия и физические величины являются важными в данной теме, и проконтролировать понимание предназначения каждого понятия, каждой физической величины: какими свойствами она наделена, какое определение дает ей государственный стандарт; как выглядит определяющая формула, каковы критерии для выбора моделей и каковы следствия принятия той или иной модели.

Второй блок способствует ознакомлению с методами и приемами решения задач по теме. В нем даются методические рекомендации по решению задач, относящихся к данной теме. Рекомендации носят алгоритмический характер и по своей сути представляют детализацию пунктов 4 и 5 общего плана решения физической задачи. В этом же блоке приводятся образцы решения задач. Они иллюстрируют применение рекомендаций для решения конкретных задач по рассматриваемой теме. Во многих случаях приводится несколько (из возможных) вариантов решения одной и той же задачи. Это сделано для того, чтобы на конкретных примерах показать, что предлагаемые алгоритмы не "сковывают" действий решающего. Возможность выбора варианта решения как раз и свидетельствует о наличии свободы, а получение правильного решения с использованием рекомендаций вселяет уверенность в своих силах.

Третий блок, состоящий из задач для самостоятельного решения, призван способствовать выработке и закреплению навыков решения задач по теме и проведению самоконтроля.

В пособии приводятся тексты многовариантных контрольных работ по каждому из разделов механики. Ознакомление с ними поможет студентам оценить степень усвоения материала по данному разделу и своевременно внести коррективы в организацию самостоятельной работы. Многовариантность контрольных работ позволяет сохранить их контролирующую функцию даже в том случае, когда текст заданий известен.

Большие надежде мы возлагаем на самоконтроль. Умения и навыки самоконтроля обязательно сделают работу результативной.

РАЗДЕЛ 1
КИНЕМАТИКА
ДВИЖЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

1.1. КИНЕМАТИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Кинематика - раздел механики, в котором изучается движение тел без рассмотрения причин, обусловливающих это движение.

Одним из идеализированных объектов рассмотрения кинематики является ***материальная точка*** – тело, размерами которого в данной задаче можно пренебречь. Движение материальной точки определено, если известен закон ее движения, т.е. закон, в соответствии с которым меняется положение точки в пространстве с течением времени. Положение движущейся точки может быть задано *векторным*, *координатным* или *естественным* способами описания движения.

1. ***Векторный способ задания движения.*** При векторном способе задания движения точки ее положение в любой момент времени определяют радиусом-вектором $\vec{r}$, проведенным из начала координат О в движущуюся точку М (рис. 1). Закон движения точки можно представить векторным уравнением:

$$\vec{r} = \vec{r}(t).$$

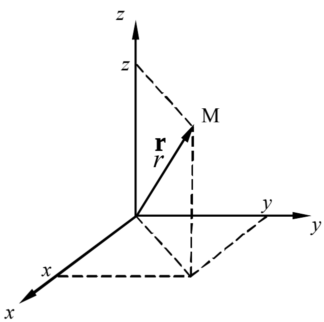


Рис. 1

Основными кинематическими характеристиками движения точки являются *скорость* и *ускорение*, которые являются векторными величинами.

Скоростью точки называют вектор $\vec{v}$, равный первой производной по времени t от ее радиуса-вектора $\vec{r}$:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}.$$

В системе СИ единицей измерения скорости является метр в секунду:

$$[v] = м/с.$$

Вектор скорости направлен по касательной к траектории точки в сторону ее движения.

Ускорением точки называется вектор $\vec{a}$, равный первой производной по времени t от ее скорости $\vec{v}$ или второй производной от ее радиуса-вектора $\vec{r}$:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}.$$

В системе СИ ускорение измеряется в метрах в секунду за секунду:

$$a = м/с^2.$$

При прямолинейном движении точки векторы скорости и ускорения направлены вдоль траектории в одну или противоположные стороны в зависимости от характера движения. При криволинейном движении точки, например, в плоскости Оxy, ускорение расположено в этой плоскости и отклонено от скорости в сторону вогнутости траектории.

2. ***Координатный способ задания движения***. При координатном способе задания движения положение точки в любой момент времени определяется зависимостями трех ее декартовых координат x, y, z (рис. 1) от времени t:

$$x = x(t); \quad y = y(t); \quad z = z(t).$$

Проекции скорости точки v_x, v_y, v_z равны первым производным по времени от соответствующих координат точки:

$$v_x = \frac{dx}{dt}; \quad v_y = \frac{dy}{dt}; \quad v_z = \frac{dz}{dt}.$$

Модуль скорости

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}.$$

Проекции ускорения точки a_x, a_y, a_z равны первым производным по времени от проекций скорости или вторым производным от соответствующих координат точки:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}; \quad a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}; \quad a_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2}.$$

Модуль ускорения

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

Задание положения точки радиус-вектором $\vec{r}$ эквивалентно заданию трех ее проекций x, y, z на оси координат. Если единичные векторы (орты) осей x, y и z есть $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ соответственно, то от векторного способа задания движения можно перейти к координатному и закон движения может быть представлен в виде:

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}.$$

3. ***Естественный способ задания движения***. Естественный (траекторный) способ задания движения точки используется в тех случаях, когда траектория ее движения заранее известна (рис. 2). Положение точки М на траектории можно однозначно определить криволинейной координатой s, которая отсчитывается от некоторого выбранного начало отсчета вдоль траектории и берется с соответствующим

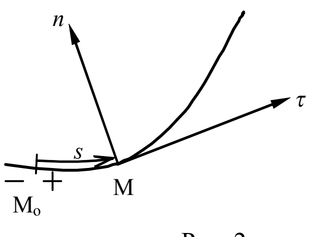


Рис. 2

знаком. Чтобы знать положение точки М на траектории в любой момент времени, надо задать зависимость криволинейной координаты от времени:

$$s = s(t).$$

В случае плоского движения скорость и ускорение точки при естественном способе его задания определяют по их проекциям на подвижные прямоугольные оси Мτn, имеющие начало в точке М и движущиеся вместе с нею. Ось Мτ направлена по касательной к траектории в сторону положительного отсчета координаты s, а ось Мn - по нормали к траектории в сторону ее вогнутости. Орты этих осей - соответственно $\vec{\tau}$ и $\vec{n}$.

Скорость точки $\vec{v}$ направленная по касательной к траектории и равна первой производной по времени t от криволинейной координаты s:

$$v_\tau = \frac{ds}{dt}.$$

Вектор полного ускорения складывается из двух составляющих – *тангенциальной* и *нормальной*:

$$\vec{a} = a_\tau \vec{\tau} + a_n \vec{n}.$$

Тангенциальная составляющая ускорения a_τ (проекция на касательную к траектории) отвечает за изменение скорости по модулю и равна первой производной по времени t от проекции скорости v_τ:

$$a_\tau = \frac{dv_\tau}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2};$$

нормальная составляющая ускорения a_n (проекция на нормаль к траектории) отвечает за изменение скорости по направлению и равна отношению квадрата скорости к радиусу кривизны траектории r в данной точке:

$$a_n = \frac{v^2}{r}.$$

Модуль ускорения

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}\ .$$

ВОПРОСЫ К СЕМИНАРУ

1. Описание движения материальной точки.

1.1. Понятие материальной точки. Роль абстракции в физике.

1.2. Задание положения материальной точки.

1.3. Описание движения материальной точки:

- что значит описать движение материальной точки?
- какие существуют для этого способы?
- естественный способ, его особенности,
- векторный способ,
- координатный способ,
- связь между этими способами.

1.4. Скорость материальной точки при различных способах описания движения:

- определение направления скорости,
- определение модуля скорости.

1.5. Нахождение ускорения при различных способах описания движения:

- можно ли определить полное ускорение, имея уравнение движения в естественной форме? как найти ускорение в этом случае?
- как определить ускорение при векторном способе описания движения?
- как определить ускорение при координатном способе описания движения?

ЛИТЕРАТУРА: [1], [2], [3], [4], [5], [6], [7], [8].

1.2. КИНЕМАТИКА ПРЯМОЛИНЕЙНОГО РАВНОМЕРНОГО ДВИЖЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Под ***механическим движением*** понимают изменение положения тела в пространстве с течением времени. Изменение положения точки рассматривается по отношению к некоторой *системе отсчета*, которая включает тело отсчета, систему координат и прибор для отсчета времени.

Движение точки можно классифицировать по виду траектории и характеру изменения скорости. По виду траектории различают *прямолинейное* и *криволинейное* движения, по характеру изменения скорости - *равномерное* и *неравномерное*.

Прямолинейное движение, при котором материальная точка за любые равные промежутки времени совершает одинаковые перемещения, называется ***равномерным прямолинейным***. При равномерном прямолинейном движении ускорение точки $\vec{a} = 0$, а ее скорость остается постоянной по величине и направлению, т.е. $\vec{v} = const$. Перемещение точки:

$$\vec{s} = \vec{r} - \vec{r}_0 = \vec{v}t ,$$

или в скалярной форме (в проекциях на оси Оx, Оy и Оz):

$$s_x = x - x_0 = v_x t;$$

$$s_y = y - y_0 = v_y t;$$

$$s_z = z - z_0 = v_z t.$$

Если скорость тела по отношению к некоторой подвижной системе отсчета равна $\vec{v}'$, а скорость движения подвижной системы отсчета относительно неподвижной

$\vec{u}$, то скорость тела $\vec{v}$ относительно неподвижной системы отсчета

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{u}.$$

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ФИЗИЧЕСКИЕ ВЕЛИЧИНЫ, ОТНОСЯЩИЕСЯ К ТЕМЕ ПРАКТИЧЕСКОГО ЗАНЯТИЯ: механическое движение, относительность движения, тело отсчета, система отсчета, траектория, способы описания движения, перемещение, путь, скорость, кинематическое уравнение движения.

МОДЕЛИ ФИЗИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ И МЕХАНИЧЕСКИХ ДВИЖЕНИЙ, РАССМАТРИВАЕМЫХ НА ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЯХ ПО ДАННОЙ ТЕМЕ: *материальная точка, прямолинейное движение, равномерное движение.*

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Объяснить, для чего введено каждое понятие, каждая физическая величина.
2. Перечислить, какими свойствами наделена каждая физическая величина.
3. Показать, что, обладая этими свойствами, физическая величина может выполнить свое предназначение.
4. Дать определение каждого понятия и каждой физической величины в соответствии с ГОСТом.
5. Привести определяющую формулу для каждой физической величины; проанализировать связь каждой физической величины с другими физическими величинами.
6. Указать, чем следует руководствоваться при выборе модели; объяснить, к чему приводит принятие той или иной модели.

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ ДЕЙСТВИЙ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ КИНЕМАТИКИ ПРЯМОЛИНЕЙНОГО ДВИЖЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

4.1. Выбрать тело отсчета.

4.2. Выбрать модель для движущегося тела.

4.3. Выбрать способ описания движения (естественный, координатный, векторный) и все необходимые для этого способа "атрибуты" (начало координат, начало отсчета времени и др.).

4.4. Классифицировать движения.

5.1. Записать кинематические уравнения движения; проверить правильность кинематических уравнений, используя начальные условия.

5.2. Выяснить, является ли система имеющихся уравнений полной. Если – нет, то попытаться дополнить ее, используя начальные или другие дополнительные неявно содержащиеся в условии задачи сведения.

5.3. Решить систему уравнений.

ПРИМЕЧАНИЯ.

4.1.1. В качестве тела отсчета не обязательно выбирать Землю. В ряде случаев задача решается проще, если в качестве тела отсчета взять тело, движущееся относительно Земли.

4.1.2. Систему отсчета надо выбирать так, чтобы наиболее простым образом можно было определить начальные условия.

5.1.1. Если вид движения на разных его этапах различен, то кинематические уравнения следует писать для каждого этапа.

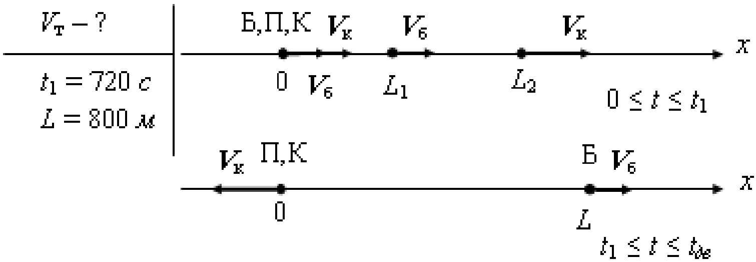
5.1.2. В задачах на движение системы материальных точек кинематические уравнения пишутся для каждой точки.

5.1.3. Для получения дополнительных уравнений могут быть использованы соотношения, вытекающие из определений физических величин.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задача 1. Катер, двигаясь против течения реки, проплывает около стоящего на якоре буя и встречает там плот. Через 12 *мин* после встречи катер повернул обратно и догнал плот на расстоянии 800 *м* ниже буя. Найти скорость течения реки.

1-й вариант



Выберем в качестве тела отсчета плот. Катер, плот и буй будем считать материальными точками. Воспользуемся координатным способом описания движения. Предполагая движение катера и буя прямолинейными, ограничимся одной координатной осью x (показанной на рисунке), за начало которой примем точку, совпадающую с плотом. За начало отсчета времени примем момент прохождения буя и катера мимо плота.

В выбранной системе отсчета движения буя и катера равномерные и прямолинейные со скоростями $\boldsymbol{V}_б$ и $\boldsymbol{V}_к$ соответственно.

Кинематическое уравнение движения буя для интервала времени $0 \le t \le t_{дв}$ имеет вид:

$$x = V_б t. \tag{1}$$

На основании принципа относительности движения модуль скорости буя равен модулю скорости течения:

$$V_б = V_т. \qquad (2)$$

С учетом этого уравнение (1) примет вид:

$$x = V_т t. \qquad (3)$$

Так как в системе отсчета, связанной с плотом, вода реки неподвижна, то время удаления катера от плота и время возвращения катера к плоту одинаково (в выбранной системе отсчета катер плавает как бы в стоячей воде), а следовательно, общее время движения катера $t_{дв}$ равно:

$$t_{дв} = 2t_1. \qquad (4)$$

Время движения буя равно времени движения катера.

При $t = t_{дв}$ $x_б = L$. С учетом этого, уравнение (3) примет вид:

$$L = V_т t_{дв}. \qquad (5)$$

Из (5) с учетом (4) получим:

$$L = V_т(2t_1). \qquad (6)$$

Из (6) скорость течения равна:

$$V_т = \frac{L}{2t_1}. \qquad (7)$$

Проверим полученный ответ по наименованию:

$[V_т] = м/с$.

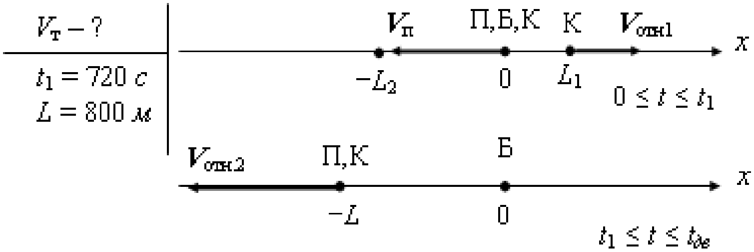
Полученное наименование для скорости согласуется с принятым в СИ.

Подставив числовые значения в уравнение (7) и проведя вычисления, получим:

$V_т = 0{,}56$ $м/с$.

Полученный результат не противоречит здравому смыслу.

2-й вариант



Выберем в качестве тела отсчета буй. Катер, плот и буй будем считать материальными точками. Воспользуемся координатным способом описания движения. Предполагая движение катера и плота прямолинейными, ограничимся одной координатной осью x (показанной на рисунке), за начало которой примем точку, совпадающую с буем. За начало отсчета времени примем момент прохождения плота и катера мимо буя.

В выбранной системе отсчета движение плота прямолинейное и равномерное со скоростью $V_п$, численно равной скорости течения реки $V_т$. Движение катера прямолинейное равномерное с относительной скоростью $V_{отн1}$ против течения и со скоростью $V_{отн2}$ за течением.

Кинематическое уравнение движения плота для интервала времени $0 \le t \le t_{дв}$ имеет вид:

$$x = -V_п t. \qquad (1)$$

Кинематическое уравнение движения катера против течения, т.е. для интервала $0 \le t \le t_1$:

$$x = V_{отн1} t. \qquad (2)$$

Относительная скорость катера $V_{отн1}$ против течения равна:

$$V_{отн1} = V_к - V_т, \qquad (3)$$

где $V_к$ – скорость катера по отношению к стоячей воде.

Кинематическое уравнение движения катера по течению, т. е. для интервала времени $t_1 \le t \le t_{дв}$:

$$x = L_1 - V_{отн2}(t - t_1), \qquad (4)$$

где

$$V_{\text{отн}2} = V_{\text{к}} + V_{\text{т}}. \quad (5)$$

При $t = t_1$ в уравнении (2) $x = L_1$ и, с учетом (3), будем иметь:

$$L_1 = (V_{\text{к}} - V_{\text{т}})t_1. \quad (6)$$

При $t = t_1$ в уравнении (4) $x = -L$ и, с учетом (5), будем иметь:

$$-L = L_1 - (V_{\text{к}} + V_{\text{т}})\,(t_{\text{дв}} - t_1). \quad (7)$$

При $t = t_{\text{дв}}$ в уравнении (1) $x = -L$ и, с учетом того, что $V_{\text{п}} = V_{\text{т}}$, оно примет вид:

$$-L = -V_{\text{т}}t_{\text{дв}}. \quad (8)$$

Решив систему уравнений (6), (7), (8), получим:

$$t_{\text{дв}} = 2t_1, \quad (9)$$

$$V_{\text{т}} = \frac{L}{2t_1}. \quad (10)$$

Проверим полученный ответ по наименованию:

$[V_{\text{т}}] = \text{м/с}$.

Полученное наименование для скорости согласуется с принятым в СИ.

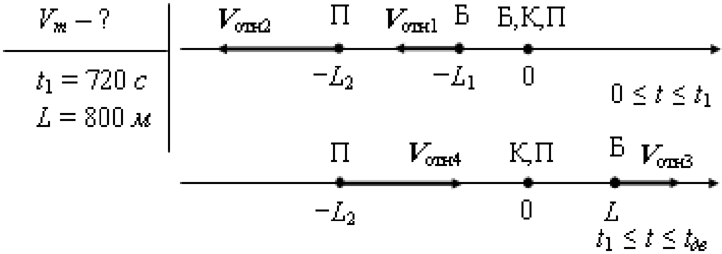
Подставив числовые значения в уравнение (10) и проведя вычисления, получим:

$V_{\text{т}} = 0{,}56$ *м/с*.

Полученный результат не противоречит здравому смыслу.

3-й вариант

Выберем в качестве тела отсчета катер. Катер, плот и буй будем считать материальными точками. Воспользуемся координатным способом описания движения. Предполагая движения буя и плота прямолинейными, ограничимся одной координатной осью x (показанной на рисунке), за начало которой примем точку, совпадающую с катером. За начало отсчета времени примем момент прохождения плота и буя мимо катера.



В выбранной системе отсчета движение буя в течение времени $0 \le t \le t_1$ будет прямолинейным и равномерным со скоростью $V_{отн1}$, а плота – прямолинейным и равномерным со скоростью $V_{отн2}$.

В течение времени $t_1 \le t \le t_{дв}$ движение буя прямолинейное и равномерное со скоростью $V_{отн3}$, а плота – прямолинейное и равномерное со скоростью $V_{отн4}$. Направление скоростей показано на рисунке.

Кинематические уравнения движения буя и плота имеют вид:

$$x = -V_{отн1}t \quad \text{для } 0 \le t \le t_1, \tag{1}$$

$$x = -V_{отн2}t \quad \text{для } 0 \le t \le t_1, \tag{2}$$

$$x = V_{отн3}(t - t_1) - L_1 \quad \text{для } 0 \le t \le t_1, \tag{3}$$

$$x = V_{отн4}(t - t_1) - L_2 \quad \text{для } 0 \le t \le t_1. \tag{4}$$

Относительные скорости буя:

$$V_{отн1} = V_к - V_т, \tag{5}$$

$$V_{отн3} = V_к + V_т. \tag{6}$$

Относительные скорости плота:

$$V_{отн2} = V_к, \tag{7}$$

$$V_{отн4} = V_к, \tag{8}$$

где $V_к$ – скорость катера относительно воды; $V_т$ – скорость течения.

Уравнения (1)–(4) с учетом (5)–(8) примут вид:

$$x = -(V_к - V_т)t, \tag{9}$$

$$x = -V_к t, \tag{10}$$

$$x = (V_к + V_т)(t - t_1) - L_1, \tag{11}$$

$$x = V_к(t - t_1) - L_2. \tag{12}$$

В момент времени $t = t_1$ буй находится в точке, координата которой $x = -L_1$, а плот – в точке с координатой $x = -L_2$.

В момент времени $t = t_{дв}$ буй находится в точке, координата которой $x = L$, а плот – в точке с координатой $x = 0$.

С учетом этого уравнения (9)–(12) примут вид:

$$-L_1 = -(V_к - V_т)t_1, \tag{13}$$

$$-L_2 = -V_к t_1, \tag{14}$$

$$L = (V_к + V_т)(t_{дв} - t_1) - L_1, \tag{15}$$

$$0 = V_к(t_{дв} - t_1) - L_2. \tag{16}$$

Из уравнений (13)–(16) вытекает, что

$$t_{дв} = 2t_1, \tag{17}$$

и

$$V_т = \frac{L}{2t_1}. \tag{18}$$

Проверим полученный ответ по наименованию:

$[V_т] = м/с$.

Полученное наименование для скорости согласуется с принятым в СИ.

После подстановки числовых значений и вычислений получим:

$V_т = 0{,}56$ *м/с*.

Полученное значение не противоречит здравому смыслу.

ПРИМЕЧАНИЯ.

Рассмотренные выше решения задачи свидетельствуют о том, что:

- каждая система отсчета определяет вариант решения задачи;
- все возможные варианты решения одной и той же задачи приводят к одинаковому ответу;
- сложность решения задачи зависит от выбора системы отсчета;

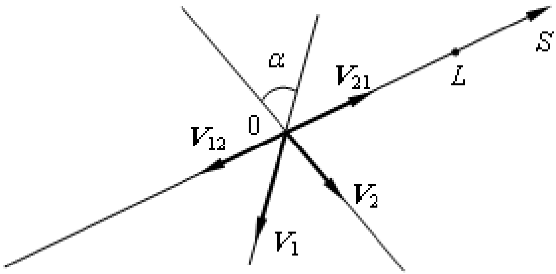
- из трех рассмотренных вариантов первый – самый простой: в нем равенство времен движения катера по течению и против течения – очевидно; в двух других вариантах это приходится доказывать, находя эти времена.

Попытайтесь указать признаки, пользуясь которыми можно сразу выбрать более простой вариант решения.

Задача 2. По пересекающимся под углом α дорогам движутся два автомобиля с постоянными скоростями $\boldsymbol{V}_1$ и $\boldsymbol{V}_2$. Определить модуль и направление скорости одного автомобиля относительно другого. Через какое время после встречи на перекрестке расстояние между автомобилями будет равно L?

V_{21} – ?
V_{12} – ?

V_1
V_2
α
L



В качестве тела отсчета примем первый автомобиль. Автомобили будем считать материальными точками. Воспользуемся координатным способом описания движения. Ограничимся одной координатной осью 0S, направление которой совпадает с направлением относительной скорости $\boldsymbol{V}_{21}$, а начало – с положением первого автомобиля. За начало отсчета времени примем момент прохождения второго автомобиля через перекресток.

Так как скорости V_1 и V_2 постоянны, то и V_{21} будет постоянной, т.е. в выбранной системе отсчета движение второго автомобиля будет равномерным и прямолинейным с относительной скоростью V_{21}. Кинематическое уравнение движения второго автомобиля имеет вид:

$$S = V_{21}t. \quad (1)$$

Согласно принципу относительности Галилея

$$\boldsymbol{V}_2 = \boldsymbol{V}_{21} + \boldsymbol{V}_1. \quad (2)$$

Откуда

$$\boldsymbol{V}_{21} = \boldsymbol{V}_2 - \boldsymbol{V}_1. \quad (3)$$

Модуль V_{21} найдем, воспользовавшись теоремой косинусов:

$$V_{21} = \sqrt{V_2^2 + V_1^2 - 2V_1V_2\cos\alpha}. \quad (4)$$

При $t = t_{\text{дв}}$ S = L. С учетом этого уравнение (1) примет вид:

$$L = V_{21}t_{\text{дв}}. \quad (5)$$

Откуда искомое время будет равно:

$$t_{\text{дв}} = \frac{L}{\sqrt{V_1^2 + V_2^2 - 2V_1V_2\cos\alpha}}. \quad (6)$$

Относительная скорость $\boldsymbol{V}_{12}$, на основании принципа относительности Галилея, равна:

$$\boldsymbol{V}_{12} = \boldsymbol{V}_1 - \boldsymbol{V}_2. \quad (7)$$

Модуль V_{12} по теореме косинусов равен:

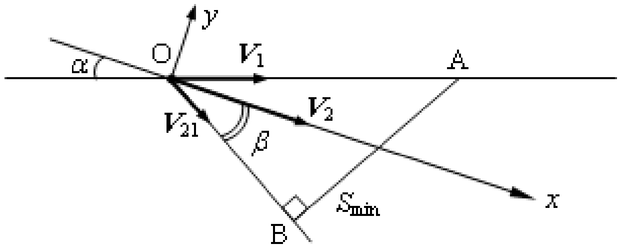
$$V_{12} = \sqrt{V_1^2 + V_2^2 - 2V_1V_2\cos\alpha}. \quad (8)$$

Проверка полученных ответов по наименованиям свидетельствует об их соответствии СИ.

Задача 3. По пересекающимся под углом α дорогам движутся два автомобиля с постоянными скоростями $\boldsymbol{V}_1$ и $\boldsymbol{V}_2$. Определить наименьшее расстояние между автомобилями, если второй автомобиль проехал перекресток на промежуток времени t_0 позже первого.

S_{min} – ?

V_1
V_2
α
t_0



В качестве тела отсчета примем первый автомобиль. Автомобили будем считать материальными точками. Воспользуемся координатным способом описания движения. Координатные оси x и y направим так, как показано на рисунке Начало системы координат совместим с начальным положением второго автомобиля. За начало отсчета времени примем момент прохождения перекрестка вторым автомобилем.

Согласно принципу относительности Галилея относительная скорость $\boldsymbol{V}_{21}$ второго автомобиля равна:

$$\boldsymbol{V}_{21} = \boldsymbol{V}_2 - \boldsymbol{V}_1. \qquad (1)$$

Модуль V_{21} равен:

$$V_{21} = \sqrt{V_{21x}^2 + V_{21y}^2}\ , \qquad (2)$$

где

$$V_{21x} = V_2 - V_1\cos\alpha, \qquad (3)$$

$$V_{21y} = V_1\sin\alpha. \qquad (4)$$

В выбранной системе отсчета первый автомобиль неподвижен, а второй – движется прямолинейно и равномерно со скоростью V_{21}. В данной ситуации очевидно, что кратчайшее расстояние S_{min} между автомобилями будет равно длине перпендикуляра, проведенного из точки, в которой находится первый автомобиль, к прямой, по которой движется второй автомобиль (ее направление совпадает с направлением скорости $\boldsymbol{V}_{21}$).

Как видно из прямоугольного треугольника OAB, $S_{\min}$ равно:

$$S_{\min} = \mathrm{OA}\sin(\alpha+\beta), \tag{5}$$

где

$$\mathrm{OA} = V_1 t_0. \tag{6}$$

Из косоугольного треугольника OBC угол β равен:

$$\beta = \arccos\frac{V_{21}^2 + V_2^2 - V_1^2}{2V_{21}V_2}. \tag{7}$$

Из уравнения (5) с учетом (6), (7), (2)–(4) получим:

$$S_{\min} = V_1 t_0 \sin\left(\alpha + \arccos\frac{(V_2 - V_1\cos\alpha)}{V_2\sqrt{V_1^2 + V_2^2 - 2V_1V_2\cos\alpha}}\right). \tag{8}$$

Проверим полученный ответ по наименованию: $[S_{\min}] = м$.

Это наименование согласуется с принятым в СИ.

ПРИМЕЧАНИЕ.

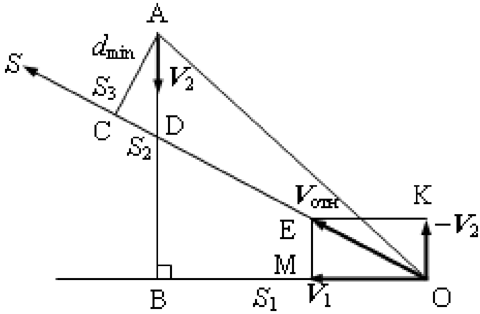
Эта задача имеет физический смысл для α, V_1 и V_2, удовлетворяющих соотношению:

$$\alpha + \arccos\frac{V_{21}^2 + V_2^2 - V_1^2}{2V_{21}V_1} > \pi.$$

Задача 4. Два автомобиля движутся с постоянными скоростями V_1 = 100 *км/ч* и V_2 = 50 *км/ч* по перпендикулярным дорогам, приближаясь к перекрестку. Первый автомобиль в начальный момент времени находился на расстоянии 50 *км* от перекрестка, а второй – на расстоянии 100 *км*. Спустя какое время расстояние между автомобилями будет минимальным.

t_{min} – ?

$V_1 = 100 \cdot 5/18$ *м/с*
$V_2 = 50 \cdot 5/18$ *м/с*
$S_1 = 50000$ *м*
$S_2 = 100000$ *м*



Выберем в качестве тела отсчета второй автомобиль. Оба автомобиля будем считать материальными точками. Воспользуемся координатным способом описания движения. Ограничимся одной координатной осью *S*, начало которой совпадает с положением первого автомобиля в момент начала движения. За начало отсчета времени примем момент начала движения первого автомобиля.

В выбранной системе отсчета первый автомобиль движется равномерно и прямолинейно вдоль оси *S* с относительной скоростью $\boldsymbol{V}_{отн}$, а второй – покоится.

Кинематическое уравнение движения первого автомобиля имеет вид:

$$S = V_{отн}t. \qquad (1)$$

Относительная скорость первого автомобиля равна:

$$\boldsymbol{V}_{отн} = \boldsymbol{V}_1 - \boldsymbol{V}_2. \qquad (2)$$

Модуль относительной скорости первого автомобиля равен:

$$V_{отн} = \sqrt{V_1^2 + V_2^2}. \qquad (3)$$

Как видно из рисунка, минимальное расстояние d_{min} между автомобилями будет равно длине перпендикуляра, опущенного из точки, соответствующей положению второго автомобиля, на направление движения первого автомобиля. Найдем это расстояние d_{min}.

Из подобия прямоугольных треугольников ACD и OME имеем:

$$d_{\min} = \mathrm{AD} \cdot \frac{V_1}{V_{\text{отн}}}. \qquad (4)$$

Из рисунка видно, что

$$\mathrm{AD} = S_2 - \mathrm{DB}. \qquad (5)$$

Из подобия прямоугольных треугольников OBD и OME имеем:

$$\mathrm{DB} = S_1 \frac{V_2}{V_1}. \qquad (6)$$

С учетом (5) и (6) для $d_{\min}$ получим:

$$d_{\min} = \left(S_2 - S_1 \frac{V_2}{V_1} \right) \cdot \frac{V_1}{V_{\text{отн}}}. \qquad (7)$$

После некоторых преобразований с учетом (3) получим:

$$d_{\min} = \frac{S_2 V_1 - S_1 V_2}{\sqrt{V_1^2 + V_2^2}}. \qquad (8)$$

К моменту времени, в который расстояние между автомобилями будет минимальным, первый автомобиль окажется в точке C, координату которой обозначим S_3. Из прямоугольного треугольника AOB найдем OA:

$$\mathrm{OA} = \sqrt{S_1^2 + S_2^2}, \qquad (9)$$

а потом из прямоугольного треугольника OAC, с учетом (9), найдем OC:

$$\mathrm{OC} = \sqrt{(S_1^2 + S_2^2) - d_{\min}^2} = S_3. \qquad (10)$$

Считая, что при $S = S_3$ $t = t_{\min}$, из уравнения (1) получим:

$$t_{\min} = \frac{S_3}{V_{\text{отн}}}. \qquad (11)$$

С учетом (3) и (10) получим:

$$t_{\min} = \frac{\sqrt{S_1^2 + S_2^2 - \left(\frac{S_2V_1 - S_1V_2}{\sqrt{V_1^2 + V_2^2}}\right)^2}}{\sqrt{V_1^2 + V_2^2}}. \qquad (12)$$

А после некоторых преобразований:

$$t_{\min} = \frac{S_1V_1 + S_2V_2}{V_1^2 + V_2^2}. \qquad (13)$$

Проверим полученный ответ по наименованию:

$[t_{\min}] = c$.

После подстановки числовых значений получим:

$t_{\min} = 2880$ c.

ПРИМЕЧАНИЯ.

- Как свидетельствует решение задач 1.2, 1.3 и 1.4, при координатном способе описания движения в зависимости от выбора системы координат можно описывать движение в плоскости или только вдоль одной прямой;

- выбор одного из двух движущихся тел в качестве тела отсчета позволяет решать задачи на нахождение экстремальных значений без привлечения методов высшей математики.

- при решении задачи начало отсчета времени выбирается один раз; то же относится и к началу координат;

- время, входящее в кинематическое уравнение, – текущее (нефиксированное);

- координата, входящая в кинематическое уравнение движения, – тоже текущая (нефиксированная);

- фиксация времени в кинематическом уравнении движения ведет к фиксации координаты и наоборот;

- в кинематическое уравнение движения при координатном способе описания входит проекция скорости и проекция ускорения (об этом следует помнить при написании знаков в уравнении);

- в кинематике имеет место принцип суперпозиции движений;
- кинематические уравнения проверяются с использованием начальных условий;
- ответы проверяются по наименованию и здравому смыслу.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Задача 1.1. Колонна военных грузовиков длиной 4,5 *км* движется по дороге со скоростью 18 *км/ч*. Командир посылает из головы колонны в ее хвост мотоциклиста с приказом. Мотоциклист движется со скоростью 54 *км/ч*, не останавливаясь, вручает приказ и возвращается назад. Сколько времени длилась поездка мотоциклиста?

Ответ: 675 *с*.

Задача 1.2. От пристани С к пристани Т по реке плывет со скоростью 3 *км/ч* относительно воды весельная лодка. От пристани Т по направлению к пристани С одновременно с лодкой отходит катер, скорость которого относительно воды 10 *км/ч*. За время движения лодки между пристанями катер успевает пройти это расстояние четыре раза и прибывает к Т одновременно с лодкой. Определить направление и скорость течения реки.

Ответ: 0,5 *м/с*.

Задача 1.3. Идущий против течения реки теплоход встречает сплавляемые по реке плоты. Через 45 *мин* после встречи с плотами теплоход причаливает к пристани, стоянка на которой продолжалась 1 *ч*. После этого теплоход поплыл по течению реки и через 1 *ч* обогнал те же плоты. Скорость теплохода относительно воды постоянна и равна 10 *км/ч*. Определить скорость течения реки, считая ее постоянной.

Ответ: 2,5 *км/ч*.

Задача 1.4. Утка летела по горизонтальной прямой с постоянной скоростью V. В нее бросил камень неопытный охотник, причем бросок был сделан без упреждения, т.е. в момент броска скорость камня V_0 была направлена как раз на утку под углом α к горизонту. На какой высоте летела утка, если камень все же попал в нее? Сопротивлением воздуха, размерами утки и ростом охотника пренебречь.

Ответ: $h = \dfrac{2V(V_0\cos\alpha - V)tg^2\alpha}{g}$.

Задача 1.5. Рыбак плывет вверх по реке. Проплывая под мостом, он теряет спасательный круг. Через 20 *мин* рыбак обнаружил потерю круга и, вернувшись назад, догнал круг на расстоянии 4 *км* от моста. Какова скорость течения, если рыбак, двигаясь вверх и вниз по реке, греб одинаково.

*Ответ:*1,4 *м/с*.

Задача 1.6. Вагон шириной 2,4 *м*, движущийся со скоростью 15 *м/с*, был пробит пулей, летевшей перпендикулярно к направлению движения вагона. Смещение отверстий в стенках вагона относительно друг друга равно 6 *см*. Какова скорость движения пули?

Ответ: 600 *м*.

Задача 1.7. Вертикальный прямой дождь оставляет на стекле трамвая, движущегося со скоростью 24 *км/ч*, линии под углом 30° к вертикали. Найти скорость падения капель дождя.

Ответ: 11,6 *м/с*.

Задача 1.8. По двум параллельным железнодорожным колеям в одном направлении идут товарный поезд длиной 630 *м* со скоростью 48,6 *км/ч* и электропоезд длиной 120 *м* со скоростью 102,6 *км/ч*. В течение какого времени электропоезд будет обгонять товарный?

Ответ: 50 *с*.

Задача 1.9. Между двумя пунктами, расположенными на реке на расстоянии 100 *км* один от другого, курсирует катер, который, идя по течению, проходит это расстояние за 4 часа, а идя против течения – за 10 часов. Определить скорость течения реки и скорость катера относительно воды.

Ответ: 2,1 *м/с*; 4,8 *м/с*.

Задача 1.10. Когда мимо пристани проходит плот, в деревню, находящуюся на расстоянии 15 *км* от пристани, вниз по реке отправилась моторная лодка. Она дошла до деревни за 3/4 *часа*, и, повернув обратно, встретила плот на расстоянии 9 *км* от деревни. Какова скорость течения реки и скорость лодки относительно воды?

Ответ: 4 *км/ч*; 16 *км/ч*.

Задача 1.11. Два поезда идут навстречу друг другу один со скоростью 36 *км/ч*, а другой – со скоростью 54 *км/ч*. Пассажир первого поезда замечает, что второй поезд проходит мимо него в течение 6 *с*. Какова длина второго поезда?

Ответ: 150 *м*.

Задача 1.12. Капли дождя на окне неподвижного трамвая оставляют полосы, наклоненные под углом 30^o к вертикали. Во время движения трамвая со скоростью

18 *км/ч* полосы от дождя вертикальны. Определить скорость капель, когда ветра нет, и скорость ветра.

Ответ: 8,7 *м/с*; 5 *м/с*.

Задача 1.13. Найти соотношение между временем проезда лодки вверх по реке и обратно и временем проезда такого же пути в неподвижной воде. Скорость движения лодки относительно воды в обоих случаях равна 5 *км/ч*, скорость течения реки 2 *км/ч*.

Ответ: 25/21.

1.3. КИНЕМАТИКА ПРЯМОЛИНЕЙНОГО РАВНОУСКОРЕННОГО ДВИЖЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Равнопеременным прямолинейным движением называется прямолинейное движение, при котором скорость точки за любые равные промежутки времени изменяется одинаково, т.е. на одинаковую величину.

Если направления скорости $\vec{v}$ и ускорения $\vec{a}$ совпадают по направлению, то движение является *равноускоренным*, если же противоположны – то *равнозамедленным*.

При равнопеременном движении ускорение точки постоянно по величине и направлению $\vec{a} = const$, скорость линейно зависит от времени:

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t\ ;$$

а перемещение точки определяется выражением:

$$\vec{s} = \vec{r} - \vec{r}_0 = \vec{v}_0 t + \frac{\vec{a}t^2}{2}\ .$$

Или в скалярной форме

$$v_x = v_{0x} + a_x t;$$

$$v_y = v_{0y} + a_y t;$$

$$v_z = v_{0z} + a_z t;$$

$$s_x = x - x_0 = v_{0x} t + \frac{a_x t^2}{2};$$

$$s_y = y - y_0 = v_{0y} t + \frac{a_y t^2}{2};$$

$$s_z = z - z_0 = v_{0z} t + \frac{a_z t^2}{2}.$$

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

Перечислить основные понятия и физические величины, относящиеся к данной теме, а также назвать модели тел и движений, используемых при решении задач по данной теме.

1. Объяснить, для чего введено каждое понятие, каждая физическая величина.

2. Перечислить, какими свойствами наделена каждая физическая величина.

3. Показать, что, обладая этими свойствами, физическая величина может выполнить свое предназначение.

4. Дать определение каждого понятия и каждой физической величины в соответствии с ГОСТом.

5. Привести определяющую формулу для каждой физической величины; проанализировать связь каждой физической величины с другими физическими величинами.

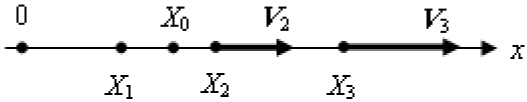
6. Указать, чем следует руководствоваться при выборе модели; объяснить, к чему приводит принятие той или иной модели.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задача 1. В некоторый момент времени тело начало двигаться из состояния покоя равноускоренно и имело в точке с координатой 2 *м* скорость 2 *м*/*с*, а в точке с координатой 3 *м* – скорость 3 *м*/*с*. Определить, было ли тело в процессе движения в точке с координатой 1 *м*.

X_0 – ?

$X_1 = 1$ *м*
$X_2 = 2$ *м*
$V_2 = 2$ *м/с*
$X_3 = 3$ *м*
$V_3 = 3$ *м/с*



Выберем в качестве тела отсчета землю. Движущееся тело будем считать материальной точкой. Воспользуемся координатным способом описания движения. Предполагая движение прямолинейным, ограничимся одной координатной осью x. За начало оси x примем точку 0, отстоящую от первой точки на X_1. За начало отсчета времени примем момент начала движения материальной точки, т.е. тот момент, когда ее скорость равнялась нулю. Положение материальной точки в этот момент характеризуется координатой X_0.

В выбранной системе отсчета материальная точка совершает прямолинейное равноускоренное движение без начальной скорости. Кинематическое уравнение этого движение будет иметь вид:

$$x = X_0 + \frac{at^2}{2}. \qquad (1)$$

Воспользуемся тем, что при координатном способе описания движения производная $\frac{dx}{dt}$ равна проекции скорости на ось x. Найдем производную $\frac{dx}{dt}$ из уравнения (1):

$$\frac{dx}{dt} = V = at. \qquad (2)$$

Исключим из уравнения (1) время, используя уравнение (2):

$$x = X_0 + \frac{V^2}{2a}. \quad (3)$$

Из условия задачи известно, что когда материальная точка находится в точке с координатой $x = X_2$, она имеет скорость $V = V_2$, а когда в точке с координатой $x = X_3$, то $V = V_3$.

С учетом этого из уравнения (3) будем иметь:

$$X_2 = X_0 + \frac{V_2^2}{2a}. \quad (4)$$

$$X_3 = X_0 + \frac{V_3^2}{2a}. \quad (5)$$

Система уравнений (4) и (5) содержит два неизвестных, X_0 и a, и является полной. Найдем из нее X_0:

$$X_0 = \frac{X_2 V_3^2 - X_3 V_2^2}{V_3^2 - V_2^2}. \quad (6)$$

Проверим по наименованию:

$[X_0] = м$.

Вычислим X_0:

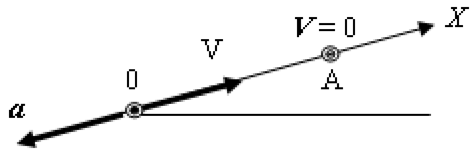
$X_0 = 1,2$ *м*.

На основании этого отвечаем на вопрос, поставленный в задаче. Поскольку материальная точка начала двигаться из точки с координатой $X_0 = 1,2$ *м*, что больше, чем $X_1 = 1$ *м*, то она не была и не сможет быть в точке с координатой $X_1 = 1$ *м*.

Задача 2. Тело начинает двигаться с начальной скоростью 0,2 *м/с* вверх по наклонному желобу с постоянным ускорением 0,1 *м/с*^{2}. Определить время движения до остановки и путь, который пройдет тело за это время. Через какое время тело вернется в начальное положение и какой путь пройдет к этому времени?

t_1 – ?, t_2 – ?,
S_1 – ?, S_2 – ?

$V_0 = 0{,}2$ м/с,
$a = 0{,}1$ м/с^2



Примем в качестве тела отсчета желоб. Тело будем считать материальной точкой. Воспользуемся координатным способом описания движения. Предполагая движение материальной точки прямолинейным, ограничимся одной координатной осью X, направленной вдоль желоба вверх. За начало оси X примем точку 0, из которой началось движение материальной точки. За начало отсчета времени примем момент начала движения материальной точки.

В выбранной системе отсчета движение материальной точки прямолинейное равноускоренное с начальной скоростью $\boldsymbol{V}_0$, направленной вдоль желоба вверх, с ускорением $\boldsymbol{a}$, направленным в сторону противоположную скорости (именно так должно быть направлено ускорение – в противном случае тело никогда не остановится).

Кинематическое уравнение движения материальной точки будет иметь вид:

$$X = V_0 t - \frac{at^2}{2}. \qquad (1)$$

При координатном способе описания движения производная $\frac{dX}{dt}$ равна проекции скорости на ось X. Продифференцировав уравнение (1) по времени, получим:

$$\frac{dX}{dt} = V = V_0 - at. \qquad (2)$$

При $t = t_1$ $V = 0$ (тело остановилось) и $X = X_A$. С учетом этого уравнение (2) примет вид:

$$0 = V_0 - at_1. \tag{3}$$

Откуда

$$t_1 = \frac{V_0}{a}. \tag{4}$$

Это и будет время движения тела до остановки.

Проверим полученный ответ по наименованию:

$[t_1] = c$.

Путь, пройденный материальной точкой за это время, будет равен:

$$S_1 = |X_A - X_0|. \tag{5}$$

Но так как координата точки 0 равна нулю, то

$$S_1 = X_A. \tag{6}$$

Координата X_A (точки А) может быть получена из кинематического уравнения (1) при $t = t_1$:

$$X_A = V_0 t_1 - \frac{at_1^2}{2}. \tag{7}$$

Таким образом, путь, пройденный материальной точкой до остановки:

$$S_1 = V_0 t_1 - \frac{at_1^2}{2}. \tag{8}$$

Проверим полученный ответ по наименованию:

$[S_1] = м$.

Это согласуется с принятым в СИ.

После вычислений получим:

$S_1 = 0{,}2\ м$.

Возвращение тела в начальное положение, т. е. в точку с координатой $X = 0$, произойдет в момент времени $t = t_2$. Используя это и кинематическое уравнение (1), получим:

$$0 = V_0 t_2 - \frac{at_2^2}{2}. \tag{9}$$

Второй корень $t_2 = 0$ соответствует началу движения.

Проверим полученный ответ по наименованию:

$[t_2] = c$.

Это согласуется с принятым в СИ. После вычислений получим:

$[t_2] = 4\ c$.

Путь, пройденный телом к моменту времени t_2, как величина положительная и неубывающая (по определению), равен:

$$S_2 = S_1 + S_1. \qquad (10)$$

После вычислений получим:

$S_2 = 0{,}4\ м$.

Полученный ответ не противоречит здравому смыслу.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Задача 1.14. С какой высоты упало тело, если последний метр своего пути оно прошло за 0,1 *с*.

Ответ: 5,6 *м*.

Задача 1.15. С балкона бросили мячик вертикально вверх с начальной скоростью 5 *м/с*. Через 2 *с* мячик упал на землю. Определить высоту балкона над землей и скорость мячика в момент удара о землю.

Ответ: 9,6 *м*; 14,6 *м/с*.

Задача 1.16. Рядом с поездом на одной линии с его передним краем стоит человек. В тот момент, когда поезд начал двигаться с ускорением 0,1 $м/с^2$, человек начал идти в том же направлении со скоростью 1,5 *м/с*. Через какое время поезд догонит человека? Определить скорость поезда в этот момент и путь, пройденный за это время человеком.

Ответ: 30 *с*; 45 *м*; 3 *м/с*.

Задача 1.17. Два автомобиля отъехали от остановки через 1 *мин* один после другого и ехали с ускорением 0,4 *м/с*^{2} каждый. Через какое время после отправления первого автомобиля расстояние между ними станет 4,2 *км*?

Ответ: 250 *с*.

Задача 1.18. Тело, брошенное вертикально вверх, находилось на одной и той же высоте 8,6 *м* два раза с интервалом в 3 *с*. Пренебрегая сопротивлением воздуха, вычислить начальную скорость брошенного тела.

Ответ: 19,6 *м/с*.

Задача 1.19. С высокой башни друг за другом бросают два тела с одинаковыми по величине скоростями. Первое тело бросают вертикально вверх, спустя время t_1 бросают второе – вертикально вниз. Определить скорость тел относительно друг друга и расстояние между ними в момент времени $t_2 > t_1$.

Ответ: $v = 2v_0 - gt_1; \quad S = (2v_0 - gt_1)t - v_0 t_1 + \frac{gt_1^2}{2}.$

Задача 1.20. Поезд, двигаясь под уклон длиной 7,5 *км* с ускорением 0,02 *м/с*^{2}, достиг скорости 20 *м/с*. Найти начальную скорость поезда и время его движения под уклон.

Ответ: 38,2 *с*; 19,2 *м/с*.

Задача 1.21. Наблюдатель, стоявший в момент начала движения электропоезда возле его переднего края, заметил, что первый вагон прошел мимо него за 4,5 *с*. Сколько времени будет двигаться мимо него 8-й вагон, если движение поезда равноускоренное?

Ответ: 0,82 *с*.

Задача 1.22. Камень брошен вертикально вверх с начальной скоростью 15 *м/с*. Через какое время он будет на высоте 10 *м*?

Ответ: 2 *с*.

Задача 1.23. Жонглер бросает вертикально вверх мячик. Когда мячик достиг высоты 4,9 *м* (верхней точки), жонглер бросает вверх другой мячик с той же начальной скоростью. На какой высоте мячики столкнутся?

Ответ: 3,675 *м*.

Задача 1.24. С каким промежутком времени оторвались от водосточной трубы две капли, если спустя 2 *с* после начала падения второй капли расстояние между каплями было равно 25 *м*?

Ответ: 1 *с*.

Задача 1.25. Тело, двигаясь с постоянным ускорением, проходит последовательно два одинаковых отрезка пути по 10 *м* каждый. Найти ускорение тела и скорость в начале первого отрезка, если первый отрезок пройден телом за 1,06 *с*, а второй – за 2,2 *с*.

Ответ: 3 $м/с^2$; 6,6 *м/с*.

Задача 1.26. С вышки одновременно брошены два тела с одинаковой начальной скоростью V_0, одно – вертикально вверх, другое – вертикально вниз. Как с течением времени будет меняться расстояние между этими телами. Сопротивлением воздуха пренебречь.

Ответ: $S = 2V_0t$.

Задача 1.27. При свободном падении средняя скорость движения тела за последнюю секунду оказалась вдвое большей, чем в предыдущую. С какой высоты падало тело?

Ответ: 19,6 *м*.

Задача 1.28. Шарик брошен вертикально вверх из точки, находящейся над полом, на высоте H. Определить начальную скорость шарика, время движения и скорость в момент падения, если известно, что за время движения он пролетел путь 3 H.

Ответ: $V_0 = \sqrt{2gH}$; $V = 2\sqrt{gH}$; $t = \sqrt{\frac{H}{g}}(\sqrt{2}+2)$.

Задача 1.29. Мячик, брошенный с балкона в вертикальном направлении, через 3,0 *с* упал на землю. Определить начальную скорость мячика, если высота балкона над землей равна 14,1 *м*. Сопротивлением воздуха пренебречь.

Ответ: 19,5 *м/с.*

1.4. КИНЕМАТИКА ДВИЖЕНИЯ ТЕЛ, БРОШЕННЫХ ГОРИЗОНТАЛЬНО И ПОД УГЛОМ К ГОРИЗОНТУ

КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Движение тел, брошенных горизонтально или под углом к горизонту, является сложным. При отсутствии сопротивления среды, его можно рассматривать как совокупность двух независимых движений: равномерного вдоль горизонтальной оси и равнопеременного с ускорением $\vec{a} = \vec{g}$ вдоль вертикальной.

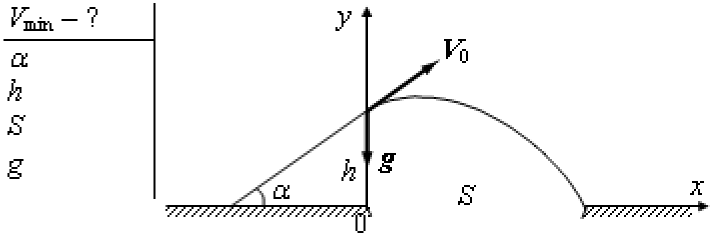
ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

Перечислить основные понятия и физические величины, относящиеся к данной теме, а также назвать модели тел и движений, используемых при решении задач по данной теме.

1. Объяснить, для чего введено каждое понятие, каждая физическая величина.
2. Перечислить, какими свойствами наделена каждая физическая величина.
3. Показать, что, обладая этими свойствами, физическая величина может выполнить свое предназначение.
4. Дать определение каждого понятия и каждой физической величины в соответствии с ГОСТом.
5. Привести определяющую формулу для каждой физической величины; проанализировать связь каждой физической вели чины с другими физическими величинами.
6. Указать, чем следует руководствоваться при выборе модели; объяснить к чему приводит принятие той или иной модели.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задача 1. Какую минимальную скорость должен иметь мотоциклист при отрыве от края трамплина с углом наклона α к горизонту, чтобы перепрыгнуть ров шириной S, если высота края трамплина h.



Выберем в качестве тела отсчета землю. Мотоциклиста будем считать материальной точкой. Воспользуемся координатным способом описания движения материальной точки. Систему координат $x0y$ расположим так, как показано на рисунке. За начало отсчета времени примем момент отрыва мотоциклиста от края трамплина.

На основании принципа независимости движений сложное (криволинейное) движение мотоциклиста можно представить состоящим из двух простых (прямолинейных) вдоль координатных осей x и y. Пренебрежем сопротивлением воздуха и будем считать, что ускорение свободного падения постоянно. При сделанных допущениях проекция ускорения мотоциклиста на ось x $a_x = 0$, т.е. движение вдоль оси x будет равномерным. Движение вдоль оси y будет равноускоренным (так как $a_y = -g$ = const) с начальной скоростью $V_{0y} = V_0 \sin \alpha$. В выбранной системе отсчета кинематические уравнения движения мотоциклиста будут иметь вид:

$$x = (V_0 \cos \alpha) t, \qquad (1)$$

$$y = h + (V_0 \sin\alpha)t - \frac{gt^2}{2}. \qquad (2)$$

Требование найти именно минимальную скорость означает, что мотоциклист попадет на самый край рва. Математически это выглядит так: при $t = t_{дв}$ $x = S$, $y = 0$, $V = V_{0\min}$.

С учетом этого уравнения (1) и (2) примут вид:

$$S = (V_{0\min}\cos\alpha)t_{дв}, \qquad (3)$$

$$0 = h + (V_{0\min}\sin\alpha)t_{дв} - \frac{gt_{дв}^2}{2}. \qquad (4)$$

Система уравнений (3)–(4) полная. Решив ее, найдем $V_{0\min}$:

$$V_{0\min} = \frac{S}{\cos\alpha}\sqrt{\frac{g}{2(h + S\,\mathrm{tg}\,\alpha)}}. \qquad (5)$$

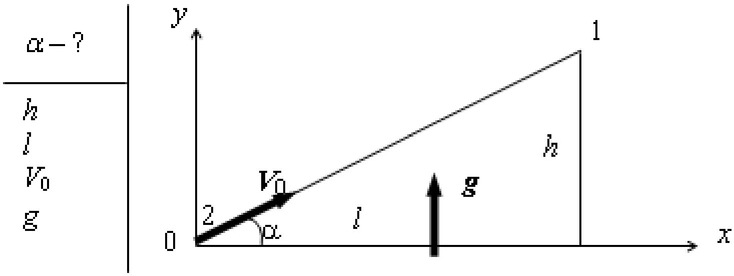
Проверим полученный ответ по наименованию:

$[V_{0\min}] = м/с$.

Полученное наименование совпадает с принятым в СИ.

Задача 3.2. С высоты h над землей падает тело. С земли из точки, находящейся на расстоянии l по горизонтали от линии падения тела, производится выстрел из винтовки так, что пуля вылетает под углом к горизонту со скоростью $\boldsymbol{V}_0$. Под каким углом должен располагаться ствол винтовки, чтобы пуля попала в тело, если выстрел производится одновременно с началом падения?

1-й вариант



Выберем в качестве тела отсчета падающее тело. Пулю будем считать материальной точкой, а Землю – твердым телом. Воспользуемся координатным способом описания движения. Систему координат расположим так, как показано на рисунке. За начало отсчета времени примем момент выстрела.

В выбранной системе отсчета пуля движется равномерно со скоростью $V_0\cos\alpha$ вдоль оси x и со скоростью $V_0\sin\alpha$ вдоль оси y, а горизонтальная поверхность Земли – равноускоренно с ускорением $+\boldsymbol{g}$ без начальной скорости только вдоль оси y.

Кинематические уравнения движения пули имеют вид:

$$x = (V_0\cos\alpha)t, \tag{1}$$

$$y = (V_0\sin\alpha)t. \tag{2}$$

Кинематическое уравнение движения поверхности Земли имеет вид:

$$y = \frac{gt^2}{2}. \tag{3}$$

Попадание пули в тело произойдет в момент времени $t = t_{\text{дв}}$ при $x = l$ и $y = h$.

С учетом этого уравнения (1) и (2) примут вид:

$$l = (V_0\cos\alpha)t_{\text{дв}}, \tag{4}$$

$$h = (V_0\sin\alpha)t_{\text{дв}}. \tag{5}$$

Решив систему уравнений (4)–(5), получим:

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{h}{l}. \qquad (6)$$

В полученный ответ не входит начальная скорость пули. Это можно было бы истолковать как независимость попадания пули в тело от начальной скорости V_0. Однако начальная скорость входит в кинематические уравнения движения наряду с углом α, т.е. в рассматриваемом случае зависимость начальной скорости V_0 от угла α имеет место. Эта кажущаяся противоречивость обусловлена тем, что на движение, рассматриваемое в задаче, наложено неявно заданное условие: за время $t_{дв}$ пуля должна пройти в горизонтальном направлении расстояние не меньшее l, а в вертикальном – не меньшее h, т.е.

$$l \le (V_0 \cos\alpha)t_{дв}, \qquad (7)$$

$$h \le (V_0 \sin\alpha)t_{дв}. \qquad (8)$$

Причем, как нетрудно увидеть из уравнения (7), начальная скорость будет минимальной в том случае, когда расстояние l будет пройдено за максимальное время $t_{дв max}$. Максимальное время движения пули $t_{дв max}$ определяется временем движения Земли до точки с координатой $x = l$ и $y = h$. Если время движения больше $t_{дв max}$, то пуля раньше столкнется с поверхностью Земли, чем долетит до тела.

Время $t_{дв max}$ можно найти из уравнения (3), положив $y = h$, а $t = t_{дв max}$:

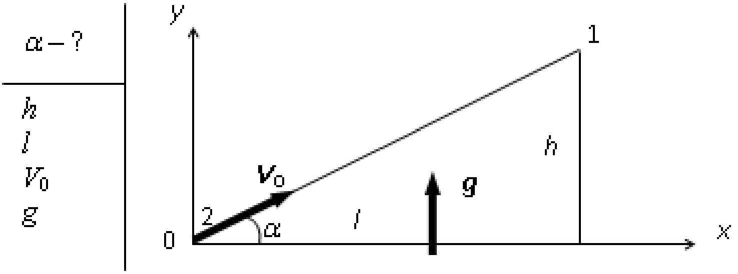
$$t_{дв max} = \sqrt{\frac{2h}{g}}. \qquad (9)$$

Из уравнения (7) с учетом (8) и (9) получим:

$$V_{0\min} = \sqrt{\frac{lg}{\sin 2\alpha}}. \qquad (10)$$

Таким образом, пуля попадет в тело, если винтовка будет расположена под углом α, определяемым соотношением (6) и начальная скорость пули будет не меньше значения, определяемого соотношением (10).

2-й вариант



Выберем в качестве тела отсчета Землю. Пулю и тело будем считать материальными точками. Сопротивлением воздуха пренебрежем. Воспользуемся координатным способом описания движения. Систему координат расположим так, как показано на рисунке. За начало отсчета времени примем момент выстрела.

В выбранной системе отсчета тело движется равноускоренно (с ускорением $\boldsymbol{g}$) только вдоль оси y, а пуля – равномерно вдоль оси x и равноускоренно (с ускорением $-\boldsymbol{g}$) вдоль оси y.

Кинематические уравнения движения тела 1 и пули 2 для интервала времени $0 \le t \le t_{\text{дв}}$ имеют вид:

$$x_1 = l, \tag{1}$$

$$y_1 = h - \frac{gt^2}{2}, \tag{2}$$

$$x_2 = (V_0 \cos\alpha)t, \tag{3}$$

$$y_2 = (V_0 \sin\alpha)t - \frac{gt^2}{2}. \tag{4}$$

С физической точки зрения попадание пули в тело означает, что пуля и тело должны оказаться в одной и той же точке пространства в один и тот же момент времени.

Математически это будет представлено так: $x_1 = x_2$; $y_1 = y_2$; $t = t_{дв}$, т.е.

$$l = (V_0 \cos\alpha) t_{дв}, \tag{5}$$

$$h - \frac{g t_{дв}^2}{2} = (V_0 \sin\alpha) t_{дв} - \frac{g t_{дв}^2}{2}. \tag{6}$$

Система уравнений (5), (6) содержит три неизвестные величины V_0, α, t и поэтому является неполной. Это не позволяет найти каждую из них. Однако из уравнений (5)–(6)

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{h}{l}. \tag{7}$$

В полученный ответ не входит начальная скорость пули. Это можно было бы истолковать как независимость попадания пули, выпущенной под углом α к горизонту, от начальной скорости V_0. Да, это было бы действительно так, если бы на движения тела и пули не было наложено никаких ограничений. Однако это не так, поскольку в рассматриваемой задаче есть одно неявно заданное условие: пуля может попасть в тело только тогда, когда она, обладая начальной скоростью V_0, направленной под углом α к горизонту, пройдет в горизонтальном направлении расстояние S не меньшее l за время, не превышающее времени падения тела. Минимальное значение скорости получим из условия, что расстояние S равно l. Так как дальность полета тела, брошенного под углом к горизонту, при заданном угле α определяется выражением: $S = \dfrac{V_0^2 \sin 2\alpha}{g}$, то минимальная скорость равна:

$$V_{0\min} = \sqrt{\frac{lg}{\sin 2\alpha}}. \tag{9}$$

Таким образом, пуля попадет в тело, если винтовка будет расположена под углом, определяемым соотношением (7) и начальная скорость пули будет больше или равна значению, определяемому уравнением (9).

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Задача 1.30. Определить скорость пули, если при выстреле из пистолета в горизонтальном направлении во втором из двух вертикально закрепленных тонких листов бумаги, находящихся на расстоянии 20 *м*, пробоина оказалась на 5 *см* ниже, чем в первом. Пуля пробивает первый лист, летя горизонтально.

Ответ: 198 *м/с.*

Задача 1.31. Ракета запущена под углом 60° к горизонту с начальной скоростью 90,4 *м/с*. Определить время горения запала ракеты, если известно, что она вспыхнула в наивысшей точке своей траектории.

Ответ: 8 *с*.

Задача 1.32. Под каким углом к горизонту нужно направить струю воды, чтобы высота ее подъема была равна расстоянию, на которое бьет струя воды?

Ответ: 76°.

Задача 1.33. Под каким углом к горизонту брошено тело, если известно, что максимальная высота подъема равна 1/4 части дальности полета? Сопротивление воздуха не учитывать.

Ответ: 45°.

Задача 1.34. С башни высотой 19,6 *м* в горизонтальном направлении брошено тело со скоростью 10 *м/с*. Записать уравнение траектории тела. Чему равна скорость тела в момент падения? Какой угол образует эта скорость с горизонтальным направлением? Сопротивлением воздуха пренебречь.

Ответ: 22 *м/с*; 63°.

Задача 1.35. Из одной точки одновременно брошены два тела с одинаковой скоростью под разными углами α_1 и α_2 к горизонту. Определить расстояние между телами спустя 2,0 *с* после начала движения, если $V_0 = 10$ *м/с*, а $\alpha_1 = 30°$ и $\alpha_2 = 60°$.

Ответ: 0,52 *м*.

Задача 1.36. На какой высоте вектор скорости тела, брошенного под углом 45° к горизонту с начальной скоростью 20 *м/с*, будет составлять с горизонтом угол 30°? Сопротивление воздуха не учитывать.

Ответ: 6,8 *м.*

Задача 1.37. Через какое время вектор скорости тела, брошенного под углом 60° к горизонту с начальной скоростью 20 *м/с*, будет составлять с горизонтом угол 30°? Сопротивление воздуха не учитывать.

Ответ: 1,18 *с.*

Задача 1.38. С вершины горы брошено тело в горизонтальном направлении со скоростью 19,6 *м/с*. Определить тангенциальное и нормальное ускорения тела спустя 2,0 *с* после начала движения. Какой угол образует вектор полного ускорения с вектором скорости?

Ответ: 6,9 $м/с^2$; 45°.

1.5. КИНЕМАТИКА КРИВОЛИНЕЙНОГО ДВИЖЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Любое криволинейное движение можно приближенно представить как движение по дугам окружностей. При движении по окружности за время t радиус-вектор $\vec{r}$, описывающий положение точки, повернется на угол φ. ***Угловой скоростью*** называется векторная величина, равная первой производной угла поворота φ точки по времени:

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}.$$

В системе СИ угловая скорость измеряется в радианах в секунду:

$$[\omega] = рад/с.$$

Линейная скорость точки связана с ее угловой скоростью соотношением:

$$v = \omega r.$$

При равномерном движении (вращении) по окружности $\omega = const$ и угол, описываемый радиус-вектором за время t:

$$\vec{\varphi} = \vec{\omega} t.$$

Равномерное вращение можно охарактеризовать ***периодом*** T — временем, за которое точка совершает один полный оборот, т.е. поворачивается на угол 2π. Число полных оборотов, совершаемых точкой при равномерном вращении, в единицу времени называется ***частотой*** n:

$$n = \frac{1}{T}.$$

В системе СИ единицей частоты является герц:

$$[n] = Гц.$$

Угловая скорость связана с частотой и периодом выражением:

$$\omega = 2\pi n = \frac{2\pi}{T}.$$

При равномерном движении точки по окружности модуль скорости остается постоянным и скорость меняется только по направлению. В этом случае ускорение направлено по радиусу к центру окружности и называется центростремительным:

$$a_n = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r.$$

При неравномерном движении точки по окружности угловая скорость меняется. Скорость ее изменения характеризуется ***угловым ускорением***, которое равно первой производной от угловой скорости $\vec{\omega}$ по времени *t*:

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}.$$

В системе СИ угловое ускорение измеряется в радианах в секунду за секунду:

$$[\varepsilon] = рад/с^2.$$

Если угловая скорость точки при движении по окружности за одинаковые промежутки времени меняется одинаково, то движение является ***равнопеременным***. При совпадении направлений угловой скорости $\vec{\omega}$ и углового ускорения $\vec{\varepsilon}$ вращение является *равноускоренным*; если их направления противоположны – то *равнозамедленным*.

При равнопеременном вращении угловое ускорение точки постоянно по величине и направлению $\vec{\varepsilon} = const$, угловая скорость линейно зависит от времени:

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_0 + \vec{\varepsilon} t;$$

а угол поворота точки определяется выражением:

$$\vec{\varphi} = \vec{\omega}_0 t + \frac{\vec{\varepsilon} t^2}{2}.$$

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

Перечислить основные понятия и физические величины, относящиеся к данной теме, а также назвать модели тел и движений, используемых при решении задач по данной теме.

1. Объяснить, для чего введено каждое понятие, каждая физическая величина.

2. Перечислить, какими свойствами наделена каждая физическая величина.

3. Показать, что, обладая этими свойствами, физическая величина может выполнить свое предназначение.

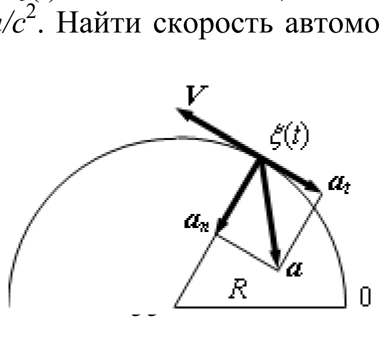
4. Дать определение каждого понятия и каждой физической величины в соответствии с ГОСТом.

5. Привести определяющую формулу для каждой физической величины; проанализировать связь каждой физической величины с другими физическими величинами.

6. Указать, чем следует руководствоваться при выборе модели; объяснить, к чему приводит принятие той или иной модели.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задача 1. Автомобиль движется по закруглению шоссе, имеющему радиус кривизны 50 *м*. Уравнение движения автомобиля $\xi(t) = A + Bt + Ct^2$, где $A = 10$ *м*; $B = 10$ *м/с*; $C = -0{,}5$ *м/с*^{2}. Найти скорость автомобиля, его тангенциальное, нормальное и полное ускорения в момент времени равный 5 *с*.



V_1 – ?; a_t – ?
a_n – ?; a – ?

$R = 50$ *м*
$t_1 = 5$ *с*

Воспользуемся системой отсчета и траекторным способом описания движения, предложенным автором.

Модуль скорости при траекторном способе описания движения равен:

$$V = \frac{d\xi}{dt} = B + 2Ct. \tag{1}$$

При $t = t_1$ $V = V_1$ и уравнение (1) примет вид:

$$V_1 = B + 2Ct_1. \tag{2}$$

Подставив числовые значения, получим:

$V_1 = 5$ *м/с*.

Тангенциальное ускорение, по определению, равно:

$$a_t = \frac{dV}{dt} = 2C. \tag{3}$$

Как видно из (3), a_t не зависит от времени. Подставив числовые значения, получим:

$a_t = -1$ *м/с*^{2}.

Знак "–" указывает на то, что направление тангенциального ускорения противоположно направлению скорости, а стало быть, и направлению движения автомобиля.

Нормальное ускорение автомобиля в момент времени $t_1 = 5$ *с* найдем по формуле:

$$a_n = \frac{V_1^2}{R}. \tag{4}$$

Так как скорость является функцией времени, то и нормальное ускорение будет функцией времени.

После вычислений получим:

$a_n = 0{,}5$ *м/с*^{2}.

Полное ускорение $\boldsymbol{a}$, как видно из рисунка, равно векторной сумме ускорений $\boldsymbol{a}_t$ и $\boldsymbol{a}_n$:

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_t + \boldsymbol{a}_n. \tag{5}$$

Модуль полного ускорения равен:

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}\ . \qquad (6)$$

Подставив в (6) найденные значения a_t и a_n, получим:

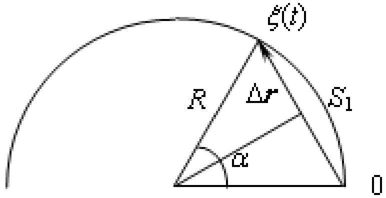
$a = 1{,}12$ *м/с*^{2}.

Полученные ответы не противоречат здравому смыслу.

Задача 2. Автомобиль движется по закруглению шоссе, имеющему радиус кривизны 50 *м*. Уравнение движения автомобиля $\xi(t) = A + Bt + Ct^2$, где $A = 10$ *м*; $B = 10$ *м/с*; $C = -0{,}5$ *м/с*^{2}. Найти путь и модуль перемещения автомобиля за интервал времени 10 *с*, отсчитанный от момента начала движения.

S_1 – ?
Δr – ?

$R = 50$ *м*
$t_1 = 10$ *с*



Воспользуемся системой отсчета и траекторным способом описания движения, предложенным автором.

Путь, пройденный автомобилем, при движении в одном направлении (а именно это имеет место в условиях данной задачи: проекция скорости в интервале времени 0-t_1 положительна) равен приращению криволинейной (дуговой) координаты, взятому по модулю:

$$S_1 = \xi_i(t_1) - \xi_i(t{=}0) = Bt_1 - Ct_1^2. \qquad (1)$$

Подставив в (1) B, C и t_1, получим:

$S_1 = 50$ *м*.

Перемещение $\Delta \boldsymbol{r}$ автомобиля, принимаемого автором задачи за материальную точку, показано на рисунке. Модуль перемещения, как видно из рисунка, равен:

$$\Delta r = 2R\sin\frac{\alpha}{2}. \qquad (2)$$

Угол α, как центральный угол, стягиваемый дугой S_1, равен:

$$\alpha = \frac{S_1}{R}. \qquad (3)$$

С учетом этого, получим:

$$\Delta r = 2R\sin\frac{S_1}{2R}. \qquad (4)$$

Проверив (4) по наименованию и подставив числовые значения, получим:

$\Delta r = 47{,}9$ *м*.

Из полученных результатов видим, что путь и модуль перемещения при криволинейном движении неодинаковы.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Задача 1.39. Какова траектория точки, если ее радиус-вектор относительно начала координат изменяется со временем по закону $\boldsymbol{r} = 2t\boldsymbol{i} + 8t^2\boldsymbol{j}$?

Задача 1.40. Радиус-вектор частицы определяется выражением $\boldsymbol{r} = 3t\boldsymbol{i} + 0{,}5t^2\boldsymbol{j}$. Определить модули скорости и ускорения частицы в момент $t = 5$ *с*.

Ответ: 5,83 *м/с*; 1 *м/с*^{2}.

Задача 1.41. Движение материальной точки задано уравнением $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{i}(A + Bt^2) + \boldsymbol{j}Ct$, где $A = 10$ *м*, $B = -5$ *м/с*^{2}, $C = 10$ *м/с*. Начертить траекторию точки. Найти выражения

$V(t)$ и $a(t)$. Для момента времени $t = 1$ *с* вычислить: 1) модуль скорости; 2) модуль ускорения; 3) модуль тангенциального ускорения; 4) модуль нормального ускорения.

Ответ: 14,18 *м/с*; 10 *м/с*^{2}; 0; 10 *м/с*^{2}.

Задача 1.42. Точка движется по кривой с постоянным тангенциальным ускорением 0,5 *м/с*^{2}. Определить полное ускорение точки на участке кривой с радиусом кривизны 3 *м*, если точка движется на этом участке со скоростью 2 *м/с*.

Ответ: 4,53 *м/с*^{2}.

Задача 1.43. По окружности радиусом 5 *м* равномерно движется материальная точка со скоростью 5 *м/с*. Построить графики зависимости пути и модуля перемещения от времени. В момент времени, принятый за начальный, путь и перемещение считать равными нулю.

Задача 1.44. За 6 *с* точка прошла путь, равный половине длины окружности радиусом 0,8 *м*. Определить среднюю путевую скорость за это время и модуль вектора средней скорости.

Ответ: 0,42 *м/с*; 0,27 *м/с*.

Задача 1.45. По дуге окружности радиусом 10 *м* движется точка. В некоторый момент времени нормальное ускорение точки 4,9 *м/с*^{2}. В этот момент векторы полного и нормального ускорений образуют угол 60°. Найти скорость и тангенциальное ускорение точки.

Ответ: 7 *м/с*; 8,5 *м/с*^{2}.

Задача 1.46. Точка движется по окружности радиусом 2 *м* согласно уравнению $x = At^3$, где $A = 2$ *м/с*^{3}. В какой момент времени нормальное ускорение точки будет равно тангенциальному? Определить полное ускорение в этот момент.

Ответ: 0,874 с; 14,83 *м/с*^{2}.

Задача 1.47. Движение точки по кривой задано уравнениями $x = A_1t^3$ и $y = A_2t$, где $A_1 = 1$ *м/с*^{3}; $A_2 = 2$ *м/с*. Найти уравнение траектории точки, ее скорость и полное ускорение в момент времени 0,8 *с*.

Ответ: 2,77 *м/с*; 4,8 *м/с*^{2}.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА 1

ВАРИАНТ 1

Задача 1. Из двух портов А и В, расстояние между которыми равно L, одновременно отправились в путь два теплохода со скоростями V_1 и V_2. Векторы скоростей образуют с отрезком АВ одинаковые углы 45°. Считая движение теплоходов равномерным и прямолинейным, а курсы теплоходов пересекающимися, определить минимальное расстояние между ними.

Задача 2. По прямолинейному участку шоссейной дороги движется со скоростью 4 *м/с* велосипедист. В определенный момент времени он проезжает пост ГАИ. Спустя 3 *мин* этот пост проезжает мотоциклист со скоростью 19 *м/с* и сразу после поста начинает тормозить, так что далее движется равнозамедленно с ускорением, модуль которого равен 0,15 $м/с^2$. Через какое время после начала торможения и на каком расстоянии от поста ГАИ мотоциклист догонит велосипедиста?

Задача 3. Тело брошено горизонтально. Через 5 *с* угол между направлением скорости и ускорения стал равным 45°. Определить скорость тела в этот момент.

Задача 4. Частица движется вдоль оси OX со скоростью V. Один под другим построить графики проекций ускорения $a_x(t)$ и перемещения $r_x(t)$, а также пути $S(t)$, пройденного частицей. Найти среднее значение модуля скорости V за время движения от нуля до 2τ.

ВАРИАНТ 2

Задача 1. Два автомобиля движутся к перекрестку по взаимно перпендикулярным дорогам со скоростями 50 *км/ч* и 100 *км/ч*. До начала движения первый автомобиль находился на расстоянии 100 *км* от перекрестка, второй – на расстоянии 50 *км*. Через сколько времени после начала движения расстояние между машинами будет минимальным?

Задача 2. Два автомобиля движутся в одном направлении с ускорением 0,4 $м/с^2$. Второй автомобиль выехал на 20 *с* позже первого. Через какое время от начала движения второго автомобиля расстояние между ними станет равным 240 *м*?

Задача 3. С башни высотой 25 *м* горизонтально брошен камень со скоростью 15 *м/с*. Найти: а) сколько времени камень был в движении; б) на каком расстоянии от основания башни упал на землю; в) с какой скоростью упал?

Задача 4. На рисунке приведены графики проекций скоростей двух тел, движущихся по одной прямой из одного и того же начального положения. Известны моменты времени t_1 и t_2. По истечении какого времени тела встретятся?

ВАРИАНТ 3

Задача 1. Два мотоциклиста движутся с постоянными скоростями 30 *м/с* и 20 *м/с* по взаимно перпендикулярным дорогам. В тот момент, когда расстояние между ними наименьшее, первый мотоциклист находился на расстоянии 500 *м* от перекрестка. На каком расстоянии от перекрестка находился в этот момент второй мотоциклист?

Задача 2. От станции A отправляется с постоянной скоростью V_1 электропоезд. Одновременно от станции B, находящейся на расстоянии L от A, отправляется другой поезд с начальной скоростью V_2 и ускорением a, причем движется по той же прямой и в том же направлении, что и первый. Записать уравнения движения поездов и определить время их встречи, если $V_1 > V_2$. Какому условию должно удовлетворять ускорение a, чтобы встреча могла состояться?

Задача 3. Ракету запустили под определенным углом α к поверхности земли со скоростью V_0. На какой высоте скорость ракеты будет равна $V_1 = \dfrac{V_0}{2}$? Сопротивлением воздуха пренебречь.

Задача 4. На рисунке приведен график проекции скорости точки, движущейся прямолинейно. На какое максимальное расстояние от начального положения удалится точка за время движения?

ВАРИАНТ 4

Задача 1. Два автомобиля движутся с одинаковой скоростью V = 60 *км/ч* по прямым, пересекающимся в точке О, дорогам. Определить минимальное расстояние между автомобилями, если в начальный момент времени АО = 1 *км*, ВО = 2 *км*, угол между дорогами 60°.

Задача 2. Два тела проходят мимо друг друга, двигаясь по одной прямой в одну сторону. Первое тело движется с постоянной скоростью V_1, второе тело в момент встречи двигалось со скоростью V_2 и ускорением a, причем ускорение направлено противоположно V_2. Определить, в какой момент времени тела снова встретятся и где произойдет встреча. Как изменяется со временем расстояние между телами?

Задача 3. Брошенный горизонтально с высоты 2 *м* над землей камень упал на расстоянии 8 *м* от точки бросания. Определить скорость камня в момент падения на землю.

Задача 4. Проекция скорости некоторого тела представлена на графике. Построить графики пути и проекции ускорения этого тела.

ВАРИАНТ 5

Задача 1. Два корабля движутся относительно берегов со скоростями V_1 = 9 *узлов* и V_2 = 12 *узлов* (1 *узел* = 0,514 *м/с*), направленными под углами 30° и 60° к меридиану. С какой скоростью второй корабль движется относительно первого?

Задача 2. Автомобиль, движущийся со скоростью 80 *км/ч*, обгоняет автомобиль, движущийся со скоростью 60 *км/ч*. Какое расстояние прошел первый автомобиль за время обгона, если обгон начался на расстоянии 50 *м* до второго автомобиля и закончился после того, как расстояние между автомобилями стало 50 *м*? Размерами автомобилей пренебречь.

Задача 3. Мяч бросили вертикально вверх со скоростью 50 *м/с*, а спустя 1 *с* из того же места, в том же направлении и с той же скоростью бросили второй мяч. Когда и где встретятся мячи? Какова будет их скорость в момент встречи? Как со временем изменяется расстояние между мячами и скорость второго мяча относительно первого?

Задача 4. Графики проекций скоростей точек представлены на рисунке. Построить графики путей и проекций ускорений точек, если в начальный момент времени они находились в начале координат.

ВАРИАНТ 6

Задача 1. Из точки А движется прямолинейно и равномерно со скоростью V_1 корабль. Наперерез курсу корабля из точки В отправляется катер с постоянной скоростью V_2. Под каким углом к прямой АВ должен двигаться катер, чтобы встретиться с кораблем? Через какое время произойдет встреча, если первоначальное расстояние между ними АВ = L? Линия АВ составляет угол α с перпендикуляром к курсу корабля.

Задача 2. Материальная точка движется равномерно и прямолинейно. На расстоянии 100 *м* от исходной точки она поворачивает и, пройдя в противоположном направлении 120 *м*, останавливается. Определить полное перемещение точки и пройденный ею путь.

Задача 3. Из летящего в горизонтальном направлении со скоростью V самолета выпустили в горизонтальном направлении вперед с интервалом времени τ две ракеты со скоростью V. Пренебрегая сопротивлением воздуха, определить: а) уравнение траектории первой ракеты относительно земли; б) уравнение траектории первой ракеты относительно самолета; в) как изменяется положение первой ракеты относительно второй (после запуска обеих ракет).

Задача 4. График модуля скорости одного тела изображается дугой полуокружности АМВ. За время t_1 это тело прошло такой же путь, как и второе тело, движущееся с постоянной скоростью 50 *м/с*. Определить начальную скорость V_0 первого тела.

РАЗДЕЛ 2
ДИНАМИКА ДВИЖЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

2.1. ДИНАМИКА ДВИЖЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ И СИСТЕМЫ МАТЕРИАЛЬНЫХ ТОЧЕК

КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Динамика – раздел механики, в котором изучаются законы движения тел и причины, которые вызывают или изменяют это движение. В основе динамики лежат три закона, сформулированные Ньютоном.

Первый закон Ньютона: всякая материальная точка (тело) сохраняет состояние покоя или равномерного прямолинейного движения до тех пор, пока воздействие со стороны других тел не заставит ее изменить это состояние. Первый закон Ньютона выполняется в ***инерциальных системах отсчета*** (ИСО) - таких системах отсчета, относительно которых материальная точка, свободная от внешних воздействий, покоится или движется равномерно и прямолинейно.

Основным законом динамики материальной точки является ***второй закон Ньютона*** – ускорение $\vec{a}$, приобретаемое точкой, прямо пропорционально вызывающей его силе $\vec{F}$, совпадает с нею по направлению и обратно пропорционально массе точки m:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}.$$

В таком виде второй закон Ньютона также справедлив только в ИСО.

Сила – векторная физическая величина, характеризующая воздействие на данное тело другого или других тел. Под действием сил тела приобретают ускорение или деформируются. Сила полностью определена, когда заданы точка приложения, направление и модуль (величина). В системе СИ сила измеряется в ньютонах:

$$\left[F\right] = H .$$

Силы складываются геометрически. ***Равнодействующая*** (результирующая) сила равна геометрической сумме всех действующих сил.

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}$$

Масса – физическая величина, являющаяся мерой инертных и гравитационных свойств тела. Масса величина скалярная, аддитивная, в замкнутой системе сохраняется. Единицей измерения массы в системе СИ является килограмм:

$$\left[m\right] = кг .$$

Если ввести векторную величину $\vec{p}$, равную произведению массы точки на ее скорость $\vec{v}$, и называемую ***импульсом***:

$$\vec{p} = m\vec{v} ,$$

то второй закон Ньютона запишется в более общей форме:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} .$$

Единица измерения импульса в СИ:

$$\left[p\right] = кг \cdot м / с .$$

Взаимодействие между материальными точками определяется ***третьим законом Ньютона***: всякое действие материальных точек носит характер взаимодействия:

$$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12} .$$

Силы, с которыми действуют друг на друга материальные точки, одинаковой природы, равны по модулю, противоположны по направлению и действуют вдоль прямой, соединяющей эти точки.

ВОПРОСЫ К СЕМИНАРУ

1. Законы динамики:
- первый закон Ньютона, ИСО;
- преобразования Галилея, сложение скоростей;
- второй закон Ньютона;
- третий закон Ньютона;
- принцип независимости действия сил.

2. Две основные задачи динамики.

3. Краткая характеристика различных сил.

4. Импульс. Импульс силы. Закон изменения и сохранения импульса:
- для одной точки;
- для двух точек;
- векторный характер импульса.

5. Система материальных точек
- центр масс системы, движение центра масс системы;
- закон изменения и сохранения импульса системы материальных точек.

6. Движение тел с переменной массой. Уравнение Мещерского. Формула Циолковского.

ЛИТЕРАТУРА: [1], [2], [3], [4], [5], [6], [7], [8].

2.2. ДИНАМИКА ПРЯМОЛИНЕЙНОГО ДВИЖЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

В динамике рассматривается два типа сил – электромагнитные (трения и упругости) и гравитационные (тяготения).

Сила трения скольжения определяется законом Амонтона-Кулона: сила трения скольжения $F_{тр}$ пропорциональна силе N нормального давления, с которой одно тело действует на другое:

$$F_{тр} = \mu N,$$

где μ — коэффициент трения скольжения, зависящий от материала и качества обработки соприкасающихся поверхностей.

Сила трения качения определяется по закону, установленному Кулоном:

$$F_{тр} = \mu_к \frac{N}{r},$$

где $\mu_к$ — коэффициент трения качения, r – радиус катящегося тела.

Сила упругости задается законом Гука, согласно которому удлинение Δl тела при упругой деформации пропорционально действующей на него силе:

$$F_{упр} = k\Delta l,$$

где k – коэффициент упругости, зависящий от материала и геометрических размеров тела.

Гравитационное взаимодействие материальных точек описывается всеобщим ***законом всемирного тяготения***: между любыми двумя материальными точками действует сила взаимного притяжения, прямо пропорциональная произведению масс m_1 и m_2 этих точек и обратно пропорциональная квадрату расстояния между ними r^2:

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2},$$

где G = 6.67·10^{-11} Н·м^2/кг^2 – гравитационная постоянная. На любое тело, находящееся вблизи поверхности Земли, действует сила тяготения, называемая ***силой тяжести***:

$$\vec{F} = m\vec{g},$$

где g = 9.8 м/с^2 – ускорение свободного падения.

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ФИЗИЧЕСКИЕ ВЕЛИЧИНЫ, ОТНОСЯЩИЕСЯ К ТЕМЕ ПРАКТИЧЕСКОГО ЗАНЯТИЯ: *динамика, инерциальная система отсчета, сила, масса, ускорение, уравнение динамики движения материальной точки, виды сил, траектория.*

МОДЕЛИ ФИЗИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ И МЕХАНИЧЕСКИХ ДВИЖЕНИЙ, РАССМАТРИВАЕМЫХ НА ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЯХ ПО ДАННОЙ ТЕМЕ: *материальная точка, прямолинейное движение, равноускоренное движение, система материальных точек.*

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Объяснить, для чего введено каждое понятие, каждая физическая величина.

2. Перечислить, какими свойствами наделена каждая физическая величина.

3. Показать, что, обладая этими свойствами, физическая величина может выполнить свое предназначение.

4. Дать определение каждого понятия и каждой физической вели чины в соответствии с ГОСТом.

5. Привести определяющую формулу для каждой физической вели чины; проанализировать связь каждой физической величины с другими физическими величинами.

6. Указать, чем следует руководствоваться при выборе модели; объяснить к чему приводит принятие той или иной модели.

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ ДЕЙСТВИЙ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ ДИНАМИКИ ДВИЖЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

4.1. Выбрать ИСО.

4.2. Выбрать модель для движущегося тела.

4.3. Выявить действующие на тело силы, изобразить их на рисунке, определить (или предположить) направление ускорения и тоже изобразить его на рисунке.

5.1. Записать основное уравнение динамики движения материальной точки в векторном виде и перейти к скалярной записи.

5.2. Исходя из физической природы сил, выразить силы через величины, от которых они зависят. В случае если система скалярных уравнений будет неполной, нужно попытаться дополнить ее, используя кинематические связи или дополнительные и неявно выраженные условия.

5.3. Решить систему уравнений.

ПРИМЕЧАНИЯ.

5.1.1. Если в задаче не требуется определить координату или скорость материальной точки, то начало системы координат можно помещать в любую точку; в противном случае его следует помещать в такую точку, которая позволяет удобно определять начальные условия.

5.1.1.1. В ряде задач можно выбирать несколько систем осей координат. Это облегчит нахождение проекций сил и ускорений для отдельных тел системы (или отдельных этапов движения).

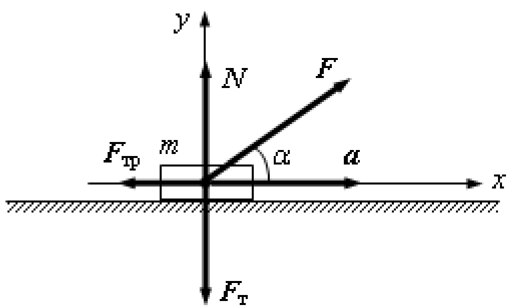
5.1.1.2. При рассмотрении движения материальной точки по окружности или по произвольной плоской кривой целесообразнее использовать составляющие ускорения в направлении нормали и касательной к окружности. По этому основное уравнение динамики движения материальной точки обычно проектируют именно на эти направления. В более сложных ситуациях (когда траектория – пространственная кривая) уравнение проектируют и на направление бинормали.

5.1.2. Если в условии задачи говорится о системе материальных точек, то основное уравнение динамики нужно записывать для каждого тела системы.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задача 1. Брусок движется по горизонтальной плоскости под действием силы $\boldsymbol{F}$, направленной под углом α к горизонту. Определить ускорение бруска, если его масса m, а коэффициент трения между бруском и плоскостью μ.

$a - ?$
F
α
m
μ
g



Выберем в качестве тела отсчета землю. Связанную с ней систему отсчета будем считать инерциальной, а брусок - материальной точкой. На брусок действуют четыре силы: сила тяжести $\boldsymbol{F}_т$, сила трения $\boldsymbol{F}_{тр}$, сила реакции $\boldsymbol{N}$ и сила $\boldsymbol{F}$, показанные на рисунке. Естественно предположить, что ускорение $\boldsymbol{a}$ бруска направлено параллельно горизонтальной плоскости в сторону действия силы $\boldsymbol{F}$.

Основное уравнение динамики движения груза будет иметь вид:

$$m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}_т + \boldsymbol{F}_{тр} + \boldsymbol{N} + \boldsymbol{F}. \qquad (1)$$

Спроектируем уравнение (1) на горизонтальное и вертикальное направления:

$$ma = -F_{тр} + F\cos\alpha, \qquad (2)$$

$$m\times 0 = -F_т + N\sin\alpha. \qquad (3)$$

Модуль силы тяжести в соответствии с определением равен:

$$F_т = mg. \qquad (4)$$

Модуль силы трения скольжения в соответствии с законом Кулона–Амонтона равен:

$$F_{тр} = \mu N. \qquad (5)$$

Система скалярных уравнений (2)–(4) – полная. Решив ее, получим:

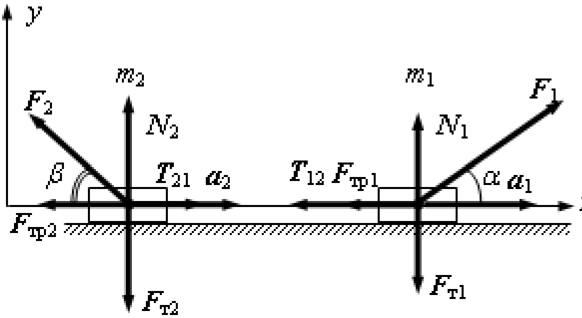
$$a = \frac{F(\cos\alpha + \mu\sin\alpha) - \mu g}{m}. \qquad (6)$$

Проверка полученного ответа по наименованию показывает, что он согласуется с принятым в СИ.

Задача 2. Два бруска массами m_1 и m_2 связаны нерастяжимой нитью и находятся на горизонтальной поверхности. К брускам приложены силы $\boldsymbol{F}_1$ и $\boldsymbol{F}_2$, составляющие с горизонтом углы α = const и β = const соответственно. Коэффициенты трения брусков о поверхность постоянны, одинаковы и равны μ. Определить ускорение системы и натяжение нити. Система движется в направлении действия силы $\boldsymbol{F}_1$.

a – ?
T – ?

m_1
m_2
F_1
F_2
α
β
μ
g



Выберем в качестве тела отсчета Землю. Связанную с ней систему отсчета будем считать инерциальной, а бруски - материальными точками.

На первый брусок действуют пять сил: сила $\boldsymbol{F}_1$, сила тяжести $\boldsymbol{F}_{т1}$, сила реакции поверхности $\boldsymbol{N}_1$, сила натяжения $\boldsymbol{T}_{12}$ и сила трения скольжения $\boldsymbol{F}_{тр1}$. На второй брусок – тоже пять сил: сила $\boldsymbol{F}_2$, сила тяжести $\boldsymbol{F}_{т2}$, сила реакции поверхности $\boldsymbol{N}_2$, сила натяжения $\boldsymbol{T}_{21}$ и сила трения скольжения $\boldsymbol{F}_{тр2}$. Ускорения грузов параллельны горизонтальной плоскости и показаны на рисунке.

Запишем в векторной форме уравнение динамики движения каждого бруска:

$$m_1\boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_{т1} + \boldsymbol{N}_1 + \boldsymbol{T}_{12} + \boldsymbol{F}_{тр1}, \qquad (1)$$

$$m_2\boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{F}_2 + \boldsymbol{F}_{т2} + \boldsymbol{N}_2 + \boldsymbol{T}_{21} + \mathbf{F}_{тр2}. \qquad (2)$$

Спроектируем уравнения (1) и (2) на горизонтальное и вертикальное направления:

$$m_1a_1 = F_1\cos\alpha - T_{12} - F_{тр1}, \qquad (3)$$

$$m_2a_2 = -F_2\cos\beta + T_{21} - F_{тр2}, \qquad (4)$$

$$0 = F_1\sin\alpha - F_{т1} + N_1, \qquad (5)$$

$$0 = F_2\sin\beta + F_{т2} + N_2. \qquad (6)$$

Система уравнений (3)–(6) неполная; дополним ее:

$$a_1 = a_2 = a, \qquad (7)$$

$$T_{12} = T_{21} = T, \qquad (8)$$

$$F_{т1} = m_1 g, \qquad (9)$$
$$F_{т2} = m_2 g, \qquad (10)$$
$$F_{тр1} = \mu N_1, \qquad (11)$$
$$F_{тр2} = \mu N_2. \qquad (12)$$

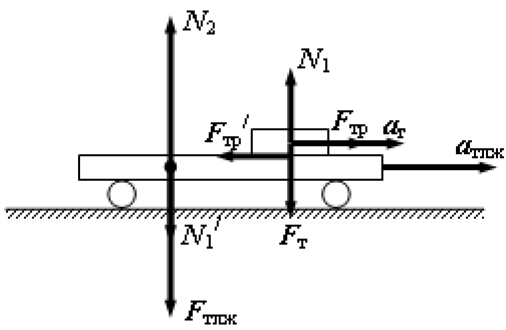
Система уравнений (3)–(12) – полная. Решив ее, получим:

$$a = \frac{F_1 \cos\alpha - F_2 \cos\beta - \mu(m_1 g + m_2 g - F_1 \sin\alpha - F_2 \sin\beta)}{m_1 + m_2},$$

$$T = F_1 \cos\alpha - F_2 \cos\beta - \mu(m_1 g - F_1 \sin\alpha) -$$
$$- \frac{m_1(F_1 \cos\alpha - F_2 \cos\beta - \mu(m_1 g + m_2 g - F_1 \sin\alpha - F_2 \sin\beta))}{m_1 + m_2}.$$

Проверка полученного ответа по наименованию показывает, что он согласуется с принятым в СИ.

Задача 3. Тележку массой 20 *кг*, на которой лежит груз массой 10 *кг*, тянут с силой ***F***, направленной горизонтально. Коэффициент трения между грузом и тележкой $\mu = 0{,}1$. Пренебрегая трением между тележкой и опорой, найти ускорения тележки и груза, а также силу трения между грузом и тележкой в двух случаях: 1) $F = 20$ *Н* и 2) $F = 60$ *Н*.



1-й случай

$a_{тлж}$ – ?
$a_г$ – ?
$F_{тр}$ – ?

$M = 20$ *кг*
$m = 10$ *кг*
$\mu = 0{,}1$
$F = 20$ *Н*
$g = 9{,}8$ *Н/кг*

Выберем в качестве тела отсчета Землю. Связанную с ней систему отсчета будем считать инерциальной. Груз примем за материальную точку, а тележку – за твердое тело.

На груз действуют три силы: сила тяжести, сила реакции тележки и сила трения. На тележку действует пять сил: сила тяжести, сила давления груза, сила реакции опоры, сила трения и сила $\boldsymbol{F}$, заданная по условию задачи. Все силы и ускорения груза и тележки показаны на рисунке.

Основное уравнение динамики движения груза имеет вид:

$$m_г\boldsymbol{a}_г = \boldsymbol{F}_т + \boldsymbol{N}_1 + \boldsymbol{F}_{тр}. \qquad (1)$$

А основное уравнение динамики движения тележки:

$$M\boldsymbol{a}_{тлж} = \boldsymbol{F}_{тлж} + \boldsymbol{N'}_1 + \boldsymbol{N}_2 + \boldsymbol{F'}_{тр} + \boldsymbol{F}. \qquad (2)$$

Спроектируем уравнения (1) и (2) на горизонтальное и вертикальное направления:

$$m_г a_г = F_{тр}, \qquad (3)$$

$$Ma_{тлж} = F - F'_{тр}, \qquad (4)$$

$$0 = -F_т + N_1, \qquad (5)$$

$$0 = -F_{тлж} - N'_1 + N_2. \qquad (6)$$

По определению модуль силы тяжести равен:

$$F_т = mg, \qquad (7)$$

$$F_{тлж} = Mg. \qquad (8)$$

На основании третьего закона Ньютона:

$$F_{тр} = F'_{тр}, \qquad (9)$$

$$N_1 = N'_1. \qquad 10)$$

Система уравнений (3)–(10) – неполная. Недостающее уравнение может появиться тогда, когда будет выяснен вопрос о природе силы трения; в условии задачи нет прямых указаний на этот счет. Попытаемся косвенным путем получить нужную информацию. Возможны два варианта: либо между грузом и тележкой действует сила трения скольжения, либо – трения покоя.

Если реализуется первый вариант, то по закону Кулона–Амонтона:

$$F_{тр.ск} = \mu N_1. \tag{11}$$

Если – второй, т.е. между грузом и тележкой действует сила трения покоя, то ситуация оказывается неоднозначной: значение силы трения покоя может лежать в интервале от 0 до $F_{тр.ск}$. Однако в таком случае ускорения груза и тележки будут одинаковы, и можно будет записать:

$$a_г = a_{тлж}. \tag{12}$$

Теперь для принятия окончательного решения нужно воспользоваться числовыми значениями масс взаимодействующих тел, коэффициента трения и горизонтально действующей силы. Из уравнения (11):

$F_{тр.ск} = 9,8\ Н$.

Такая сила может сообщить грузу (как следует из уравнения (3)) ускорение:

$a_г = 0,98\ м/с^2$.

А ускорение тележки при этом (как следует из уравнения (4)) будет равно:

$a_{тлж} = 0,51\ м/с^2$.

Из полученного видно, что ускорение груза и ускорение тележки направлены в одну сторону (оба ускорения получились положительными) и что ускорение груза $a_г$ больше ускорения тележки $a_{тлж}$.

Если для простоты рассуждений принять, что начальные скорости тележки и груза равны нулю, то из $a_г > a_{тлж}$ следует, что груз будет скользить по тележке в направлении ускорения $\boldsymbol{a}_г$. Получается, что, с одной стороны, ускорение груза обусловлено силой трения скольжения и, как вытекает из уравнения (3), вектор силы трения скольжения направлен так, как и вектор ускорения груза; с другой стороны, при скольжении груза по тележке в направлении ускорения $\boldsymbol{a}_\text{г}$ должна возникнуть сила трения скольжения, направленная противоположно относительной скорости груза, т.е. противоположно направлению скольжения груза (направлению $\boldsymbol{a}_\text{г}$). Это противоречие возникло потому, что было сделано допущение о скольжении груза по тележке, т.е. выбран первый из альтернативных вариантов. Естественно, если из двух возможных вариантов, обсуждавшихся выше, один приводит к абсурду, то, следовательно, имеет место второй, т.е. между грузом и тележкой действует сила трения покоя, а не сила трения скольжения.

Вот так удалось косвенным путем получить необходимую информацию о природе силы трения.

Таким образом, окончательно приходим к выводу о том, что между грузом и тележкой действует сила трения покоя и к уравнениям (3)–(10) нужно добавить уравнение (12). Решив получившуюся систему уравнений, получим:

$$a = a_\text{тлж} = \frac{F}{m+M}$$

и

$$F_\text{тр} = F\frac{m}{m+M}\,.$$

После проверки по наименованию и подстановки числовых значений, получим:

$a_\text{г} = a_\text{тлж} = 0{,}66$ *м/с*^{2},

$F_\text{тр} = 6{,}6$ *Н*.

2-й случай

Анализ ситуации при F = 60 *Н*, подобный вышеприведенному, приводит к выводу о том, что в таком случае имеет место трение скольжения между грузом и тележкой.

Решив систему уравнений (3)–(11), получим:

$F_{тр} = 9{,}8$ *Н*,

$a_{г} = 0{,}98$ *м/с*^{2},

$a_{тлж} = 2{,}5$ *м/с*^{2}.

Полученный результат не противоречит здравому смыслу.

Задача 4. Два одинаковых груза, массой 4,5 *кг* каждый, связаны нерастяжимой нитью, переброшенной через неподвижный невесомый блок. При этом в начальный момент времени грузы находятся на расстоянии 1 *м* друг от друга (по вертикали). Затем на верхний груз кладут перегрузок массой 0,1 *кг*. Определить силу давления перегрузка на груз и время, через которое оба груза поравняются. Массой нити, трением в оси блока и сопротивлением воздуха пренебречь.

$N_2^{/} - ?$

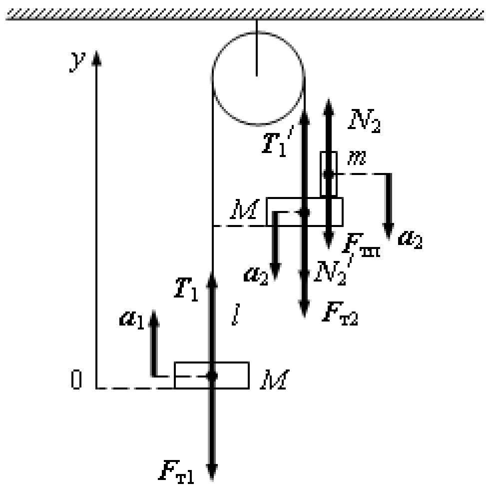
$t_1 - ?$

$M = 4{,}5$ *кг*

$l = 0{,}1$ *м*

$m = 1$ *кг*

$g = 9{,}8$ *м/с*^{2}



Выберем в качестве тела отсчета Землю. Связанную с ней систему отсчета будем считать инерциальной. Грузы и перегрузок будем считать материальными точками.

Выберем координатный способ описания движения. Предполагая движение грузов прямолинейным, ограничимся одной координатной осью y, направление и начало которой показаны на рисунке. За начало отсчета времени примем момент начала движения системы грузов.

На груз 1 действуют две силы: сила тяжести $\boldsymbol{F}_{т1}$ и сила натяжения $\boldsymbol{T}_1$ нити. На перегрузок тоже действуют две силы: сила тяжести $\boldsymbol{F}_{тп}$ и сила реакции $\boldsymbol{N}_2$ груза 2. На груз 2 действуют три силы: сила тяжести $\boldsymbol{F}_{т2}$, сила давления перегрузка $\boldsymbol{N}_2^{/}$ и сила натяжения нити $\boldsymbol{T}_1^{/}$. Все действующие силы и ускорения тел системы показаны на рисунке. Запишем уравнения динамики движения груза 1, груза 2 и перегрузка.

$$M\boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{F}_{т1} + \boldsymbol{T}_1, \tag{1}$$

$$M\boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{F}_{т2} + \boldsymbol{T}_1^{/} + \boldsymbol{N}_2^{/}, \tag{2}$$

$$m\boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{F}_{тп} + \boldsymbol{N}_2. \tag{3}$$

Спроектировав эти уравнения на ось y, получим:

$$Ma_1 = -F_{т1} + T_1, \tag{4}$$

$$Ma_2 = -F_{т2} + T_1^{/} - N_2^{/}, \tag{5}$$

$$ma_2 = -F_{тп} + N_2. \tag{6}$$

Система скалярных уравнений (4)–(6) содержит девять неизвестных и, естественно, не является полной. Дополним ее.

По определению силы тяжести для ее модуля можем записать:

$$F_{т1} = Mg, \tag{7}$$

$$F_{т2} = Mg, \tag{8}$$

$$F_{тп} = mg. \tag{9}$$

Так как нить нерастяжима, то ускорения грузов одинаковы по модулю:

$$a_1 = a_2. \tag{10}$$

Так как нить и блок невесомы и трением в оси блока пренебрегаем, то сила натяжения нити одинакова в любом сечении, т.е.:

$$T_1 = T_1^{/}. \tag{11}$$

На основании третьего закона Ньютона для модулей N_2 и $N_2^{/}$ можем записать:

$$N_2 = N_2^{/}. \tag{12}$$

Теперь система уравнений (4)–(12) является полной. Решив ее, получим:

$$a_1 = a_2 = \frac{m}{m + 2M} g , \tag{13}$$

$$N_2^{/} = \frac{2Mm}{2M + m} g . \tag{14}$$

Грузы совершают равноускоренное движение без начальной скорости. Кинематическое уравнение движения грузов имеет вид:

$$y_1 = \frac{a_1 t^2}{2} . \tag{15}$$

$$y_2 = l - \frac{a_2 t^2}{2} . \tag{16}$$

Когда грузы поравняются, то $y_1 = y_2$; это будет в какой-то момент времени $t = t_1$. С учетом (15)–(16) получим:

$$t_1 = \sqrt{\frac{l}{a_1}} = \sqrt{\frac{l(2M + m)}{mg}} . \tag{17}$$

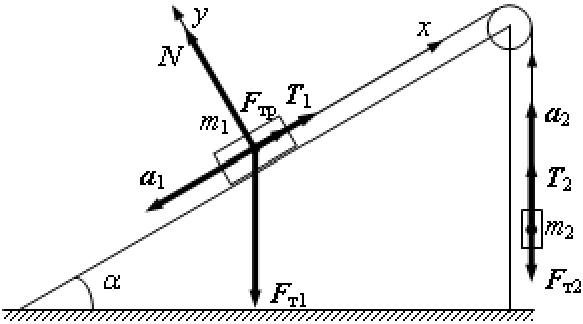
После проверки по наименованию и подстановки числовых значений получим:

$N_2^{/} = 1$ *Н*,

$t_1 = 3$ *с*.

Задача 5. С каким ускорением движется система грузов, изображенная на рисунке, и какова сила натяжения нити, если $m_1 = 2$ *кг*, $m_2 = 0{,}2$ *кг*, $\alpha = 30°$, $\mu = 0{,}2$?

$a_1 - ?$ $a_2 - ?$ $T - ?$	
m_1 m_2 μ α g	



Выберем в качестве тела отсчета Землю. Связанную с ней систему отсчета будем считать инерциальной, а грузы - материальными точками. На груз 1 действуют четыре силы: сила тяжести $\boldsymbol{F}_{т1}$, сила реакции наклонной плоскости $\boldsymbol{N}$, сила натяжения нити $\boldsymbol{T}_1$ и сила трения $\boldsymbol{F}_{тр}$. На груз 2 действуют две силы: сила тяжести $\boldsymbol{F}_{т2}$ и сила натяжения нити $\boldsymbol{T}_2$. Все силы и ускорения тел, в предположении, что тело 1 движется вдоль наклонной плоскости вниз, изображены на рисунке.

Запишем основное уравнение динамики движения для каждого груза:

$$m_1\boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{F}_{т1} + \boldsymbol{N} + \boldsymbol{T}_1 + \boldsymbol{F}_{тр}, \qquad (1)$$

$$m_2\boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{F}_{т2} + \boldsymbol{T}_2. \qquad (2)$$

Воспользуемся примечанием 5.1.1.1 и спроектируем равенство (1) на направления параллельное и перпендикулярное наклонной плоскости, а равенство (2) – на вертикальное направление:

$$-m_1a_1 = -F_{т1}\sin\alpha + T_1 + F_{тр}, \qquad (3)$$

$$m_1\times 0 = -F_{т1}\cos\alpha + N, \qquad (4)$$

$$m_2a_2 = -F_{т2} + T_2. \qquad (5)$$

Система скалярных уравнений (3)–(5) содержит восемь неизвестных и не является полной. Дополним ее.

На основании определения силы тяжести ее модуль равен:

$$F_{т1} = m_1 g, \tag{6}$$

$$F_{т2} = m_2 g. \tag{7}$$

Считая нить нерастяжимой, можем записать:

$$a_1 = a_2. \tag{8}$$

Предполагая нить и блок невесомыми, будем иметь:

$$T_1 = T_2. \tag{9}$$

На основании закона Кулона–Амонтона:

$$F_{тр} = \mu N. \tag{10}$$

Система уравнений (3)–(10) – полная, решив ее, получим:

$$a_1 = a_2 = \frac{m_1 g \sin\alpha - m_2 g - \mu m_1 g \cos\alpha}{m_1 + m_2},$$

$$T_1 = T_2 = m_2(a+g).$$

После проверки полученного ответа по наименованию и подстановки числовых значений получим:

$a_1 = a_2 = 2{,}02$ *м/с*^{2},

$T = 2{,}36$ *Н*.

Ускорение грузов получилось со знаком "+". Из этого следует, что направление ускорения грузов выбрано верно.

ПРИМЕЧАНИЕ.

Если бы значение ускорения получилось со знаком "–", то это означало бы, что направление ускорения выбрано неверно. В такой ситуации нужно изменить направление ускорения на противоположное (при этом изменится и направление силы трения скольжения) и снова решить задачу. Если в этом случае ускорение получится положительным, то направление ускорения выбрано верно. Если и в этом случае значение ускорения получится отрицательным, то нужно положить ускорение равным нулю и снова решить задачу. При этом нужно не забыть о том, что теперь уже будет действовать не сила трения скольжения, определяемая законом Кулона–Амонтона, а сила трения покоя, всегда равная и противоположная тангенциальной составляющей действующей на тело внешней силы.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Задача 2.1. Гирю массой m, подвешенную на нити, поднимают вверх с постоянным ускорением из состояния покоя. Каково будет перемещение гири за время t_1 после начала движения, если жесткость нити k, а удлинение нити Δl?

Ответ: $S = \dfrac{l^2}{2}\left(\dfrac{k\Delta l}{m} - g\right).$

Задача 2.2. Вагон движется по горизонтальному пути с постоянным ускорением a. К потолку вагона подвешен отвес. Найти угол отклонения отвеса от вертикали и силу натяжения нити, если масса отвеса m.

Ответ: $tg\alpha = \dfrac{a}{g}; \quad T = \sqrt{g^2 + a^2}.$

Задача 2.3. По горизонтальной плоскости начинает двигаться с постоянным ускорением тело массой m, на которое действует сила $\boldsymbol{F}$, направленная под углом к горизонту. Найти положение тела к моменту времени t_1, если коэффициент трения μ.

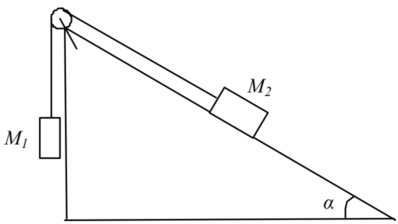
Ответ: $S = \dfrac{t^2}{2m}\left(F(\cos\alpha + \mu\sin\alpha) - \mu mg\right).$

Задача 2.4. По горизонтальной поверхности перемещают с постоянным ускорением три бруска массами m_1, m_2, m_3, связанные невесомыми и нерастяжимыми нитями, действуя на первый брусок нитью, расположенной горизонтально, силой $\boldsymbol{F}$. Определить ускорение системы и силы натяжения нитей, связывающих бруски, если коэффициент трения между брусками и поверхностью k.

Ответ: $a = \dfrac{F}{m_1 + m_2 + m_3} - kg;$

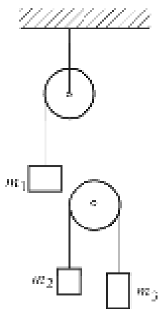
$$T_1 = F\frac{m_2}{m_1 + m_2 + m_3}; \quad T_2 = F\frac{m_3}{m_1 + m_2 + m_3}.$$

Задача 2.5. Два тела, соединенные невесомой нерастяжимой нитью, расположены на наклонной плоскости, как показано на рисунке. Определить ускорение системы тел (массой блока и трением на оси пренебречь). Рассмотреть два случая: а) система движется в сторону груза M_1; б) система движется в сторону груза M_2.



Ответ: а) $a = g\dfrac{M_1 - M_2(\mu\cos\alpha + \sin\alpha)}{M_1 + M_2};$

б) $a = g\dfrac{M_2(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) - M_1}{M_1 + M_2}.$



Задача 2.6. Определить ускорения грузов и силы натяжения нитей в системе, изображенной на рисунке. Считать нити нерастяжимыми; трением, массой нитей и блоков пренебречь; $m_1 > m_2 + m_3$, $m_2 > m_3$.

Ответ: $a_1 = g\dfrac{m_1(m_2 - m_3)}{m_1(m_2 - m_3) - 4m_2m_3}$;

$$a_2 = g\frac{m_1(m_2 + m_3) - 4m_2m_3}{m_1(m_2 - m_3) - 4m_2m_3};\quad a_3 = g\frac{3m_1(m_3 - m_2) + 4m_2m_3}{m_1(m_2 - m_3) - 4m_2m_3};$$

$$T_1 = \frac{m_1m_2m_3g}{m_1(m_3 - m_2) + 4m_2m_3};\qquad T_2 = \frac{2m_1m_2m_3g}{m_1(m_3 - m_2) + 4m_2m_3}.$$

Задача 2.7. К пружинным весам подвешен блок. Через блок перекинут шнур, к концам которого привязали грузы массами M_1 = 1,5 *кг*, M_2 = 3 *кг*. Каково будет показание весов во время движения грузов? Массой блока и шнура пренебречь.

Ответ: 32,1 *Н*.

Задача 2.8. Два бруска массами M_1 = 1 *кг* и M_2 = 4 *кг*, соединенные шнуром, лежат на столе. С каким ускорением будут двигаться бруски, если к одному из них приложить силу F = 10 *Н*, направленную горизонтально? Какова будет сила натяжения шнура, соединяющего бруски, если силу 10 *Н* приложить к первому бруску? Трением пренебречь.

Ответ: 2 *Н*; 8 *Н*.

Задача 2.9. На гладком столе лежит брусок массой M = 4 *кг*. К бруску привязаны два шнура, перекинутые через неподвижные блоки, прикрепленные к противоположным краям стола. К концам шнуров подвешены гири, массы которых M_1 = 1 *кг* и M_2 = 2 *кг*. Найти ускорение, с которым движется брусок, и силу натяжения каждого из шнуров. Массой блоков и трением пренебречь.

Ответ: 1,4 *м/с*^{2};11,2 *Н*; 16,8 *Н*.

Задача 2.10. Материальная точка массой $M = 2$ *кг* движется под действием некоторой силы $\boldsymbol{F}$ согласно уравнению $X=A+Bt+Ct^2+Dt^3$, где $C = 1$ *м/с*^{2}, $D = -0{,}2$ *м/с*^{3}. Найти значение этой силы в моменты времени $t_1 = 2$ *с* и $t_2 = 5$ *с*. В какой момент времени сила равна нулю?

Ответ: -8 *Н*; 1,67 *с*.

Задача 2.11. На горизонтальной поверхности находится брусок массой $M_1 = 2$ *кг*. Коэффициент трения бруска о поверхность $\mu_1 = 0{,}2$. На бруске находится другой брусок массой $M_2 = 8$ *кг*. Коэффициент трения верхнего бруска о нижний $\mu_2 = 0{,}3$. К верхнему бруску приложена сила F. Определить: 1) значение силы F_1, при котором начинается совместное скольжение брусков по поверхности; 2) значение силы F_2, при котором верхний брусок начинает проскальзывать относительно нижнего.

Ответ: 39.2 *Н*.

Задача 2.12. На концах легкой нити, перекинутой через неподвижный блок, подвешены два тела массой 240 *г* каждое. Вычислить массу добавочного груза, который надо положить на одно из тел, чтобы каждое из них прошло за 4 *с* путь 160 *см*.

Ответ: 0,01 *кг*.

2.3. ДИНАМИКА КРИВОЛИНЕЙНОГО ДВИЖЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

Перечислить основные понятия и физические величины, относящиеся к данной теме, а также назвать модели тел и движений, используемых при решении задач по данной теме.

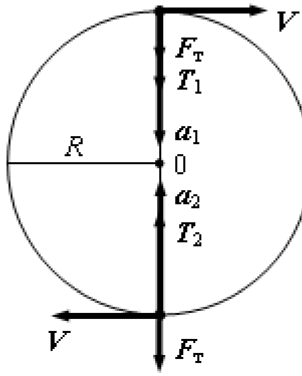
1. Объяснить, для чего введено каждое понятие, каждая физическая величина.
2. Перечислить, какими свойствами наделена каждая физическая величина.
3. Показать, что, обладая этими свойствами, физическая величина может выполнить свое предназначение.
4. Дать определение каждого понятия и каждой физической вели чины в соответствии с ГОСТом.
5. Привести определяющую формулу для каждой физической величины; проанализировать связь каждой физической величины с другими физическими величинами.
6. Указать, чем следует руководствоваться при выборе модели; объяснить, к чему приводит принятие той или иной модели.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задача 1. Камень, привязанный к нити, другой конец которой мальчик держит в руке, движется в вертикальной плоскости по окружности радиусом 50 *см* со скоростью 3 *м/с*. Масса камня 0,1 *кг*. Определить силу натяжения нити, когда камень находится в верхнем и нижнем положениях.

T_1 – ?
T_2 – ?

$V = 3$ *м/с*
$R = 0{,}50$ *м*
$m = 0{,}1$ *кг*
$g = 9{,}8$ *м/с*^{2}



Выберем в качестве тела отсчета Землю. Связанную с ней систему отсчета будем считать инерциальной, а камень - материальной точкой.

На камень, когда он находится в верхнем состоянии, действуют две силы: сила тяжести $\boldsymbol{F}_т$ и сила натяжения $\boldsymbol{T}_1$.

На камень, когда он находится в нижнем положении, действуют две силы: сила тяжести $\boldsymbol{F}_т$ и сила натяжения нити $\boldsymbol{T}_2$.

Принимая, что скорость V движения камня постоянна по модулю, ускорение камня будет направлено по радиусу к центру окружности, по которой будет двигаться камень.

Силы и ускорения для верхнего и нижнего положений камня показаны на рисунке.

Основное уравнение динамики движения камня для верхнего и нижнего положений запишется:

$$m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}_т + \boldsymbol{T}_1, \qquad (1)$$

$$m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}_т + \boldsymbol{T}_2. \qquad (2)$$

Спроектируем (1) и (2) на радиальные направления:

$$ma_n = F_т + T_1, \qquad (3)$$

$$ma_n = -F_т + T_2. \qquad (4)$$

Дополним эти уравнения. Из определения силы тяжести:

$$F_т = mg. \qquad (5)$$

Из формулы для расчета модуля центростремительного (нормального) ускорения имеем:

$$a_n = \frac{V^2}{R}. \tag{6}$$

Решив систему скалярных уравнений, получим:

$$T_1 = m\left(\frac{V^2}{R} - g\right),$$

$$T_2 = m\left(\frac{V^2}{R} + g\right).$$

После проверки полученного ответа по наименованию и подстановки числовых значений будем иметь:

$T_1 = 0,8$ *Н*,

$T_2 = 2,8$ *Н*.

Такие значения не лишены здравого смысла.

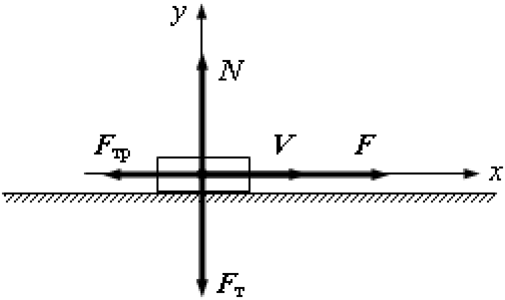
Задача 2. Найти силу $F_д$, с которой автомобиль массой 10^4 *кг*, движущийся со скоростью 72 *км/ч*, давит на мост в каждом из следующих случаев: а) горизонтальный мост; б) выпуклый мост; в) вогнутый мост. Радиус кривизны моста в последних двух случаях 100 *м*. Для случаев б) и в) силу $F_д$ определить для наивысшей и наинизшей точек моста. С какой наименьшей скоростью должен двигаться автомобиль для того, чтобы он не оказывал давления на выпуклый мост?

Выберем в качестве тела отсчета Землю. Связанную с ней систему отсчета будем считать инерциальной. Автомобиль будем считать материальной точкой.

Случай а)

$F_{да}$ – ?
$F_{дб}$ – ?
$F_{дв}$ – ?
$V_{minб}$ – ?

$m = 10^4$ *кг*
$V = 20$ *м/с*
$R = 100$ *м*
$g = 9{,}8$ *м/с*^{2}



На автомобиль действуют четыре силы: сила тяжести $\boldsymbol{F}_т$, сила реакции моста $\boldsymbol{N}$, сила тяги $\boldsymbol{F}$ и сила трения $\boldsymbol{F}_{тр}$. Под действием этих сил, направление которых показано на рисунке, автомобиль движется равномерно и прямолинейно. В таком случае ускорение автомобиля равно нулю.

Основное уравнение динамики движения автомобиля запишется:

$$m\times 0 = \boldsymbol{F}_т + \boldsymbol{N} + \boldsymbol{F} + \boldsymbol{F}_{тр}. \qquad (1)$$

Спроектировав равенство (1) на горизонтальное и вертикальное направления, получим:

$$0 = F - F_{тр}, \qquad (2)$$

$$0 = -F_т + N. \qquad 3)$$

Модуль силы тяжести найдем, воспользовавшись ее определением:

$$F_т = mg. \qquad (4)$$

Из уравнений (3) и (4) найдем модуль силы реакции моста:

$$N = mg. \qquad (5)$$

Силу давления автомобиля на мост найдем, воспользовавшись третьим законом Ньютона:

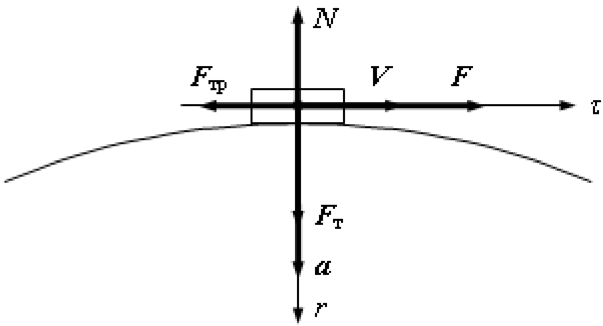
$$\boldsymbol{F}_д = -\boldsymbol{N}. \qquad (6)$$

Проверив ответ по наименованию и подставив числовые значения, получим:

$F_д = 9{,}8 \cdot 10^4$ *Н*.

Ответ не лишен здравого смысла.

<u>Случай б)</u>



На автомобиль (в случае выпуклого моста) действуют четыре силы: сила тяжести $\boldsymbol{F}_т$, сила реакции моста $\boldsymbol{N}$, сила тяги $\boldsymbol{F}$, сила трения $\boldsymbol{F}_{тр}$. Под действием этих сил, направление которых показано на рисунке, автомобиль движется равномерно по дуге окружности радиуса *R*. При таком движении ускорение будет направлено по радиусу к центру кривизны. Запишем основное уравнение динамики движения автомобиля:

$$m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}_т + \boldsymbol{N} + \boldsymbol{F} + \boldsymbol{F}_{тр}. \qquad (7)$$

Спроектируем уравнение (7) на радиальное и тангенциальное направления:

$$ma_n = F_т - N, \qquad (8)$$

$$m \times 0 = F - F_{тр}. \qquad (9)$$

Модуль силы тяжести найдем, воспользовавшись ее определением:

$$F_т = mg. \qquad (10)$$

Из формулы для расчета модуля центростремительного (нормального) ускорения имеем:

$$a_n = \frac{V^2}{R}. \quad (11)$$

Из уравнений (8), (10) и (11) найдем модуль силы реакции моста:

$$N = m\left(g - \frac{V^2}{R}\right). \quad (12)$$

Силу давления автомобиля на мост получим, воспользовавшись третьим законом Ньютона и уравнением (12):

$$\boldsymbol{F}_{\text{д}} = -\boldsymbol{N}, \quad (13)$$

$$F_{\text{д}} = N = m\left(g - \frac{V^2}{R}\right) \quad (14)$$

Проверив ответ по наименованию и подставив числовые значения, получим:

$F_{\text{д}} = 5{,}8 \cdot 10^4$ *Н*.

Таким образом, сила давления автомобиля на середину выпуклого моста меньше силы его тяжести.

Ответ не лишен здравого смысла.

Чтобы автомобиль не давил на мост, его минимальная скорость $V_{\min}$ должна удовлетворять условию:

$$F_{\text{д}} = 0. \quad (15)$$

или

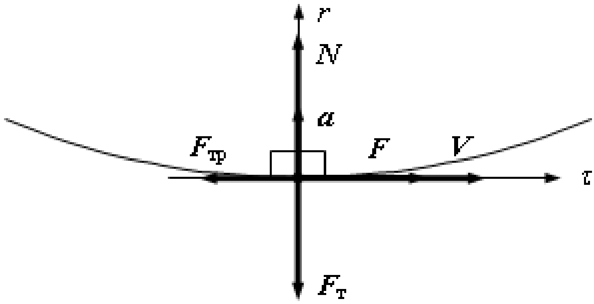
$$m\left(g - \frac{V_{\min б}^2}{R}\right) = 0. \quad (16)$$

Откуда

$$V_{\min б} = \sqrt{gR} = 31{,}4 \text{ м/с}. \quad (17)$$

Это состояние называется состоянием невесомости.

Случай в)



На автомобиль (в случае вогнутого моста) действуют четыре силы: сила тяжести $\boldsymbol{F}_{\text{т}}$, сила реакции моста $\boldsymbol{N}$, сила тяги $\boldsymbol{F}$, сила трения $\boldsymbol{F}_{\text{тр}}$. Под действием этих сил, направление которых показано на рисунке, автомобиль движется равномерно по дуге окружности радиуса R. При таком движении ускорение будет направлено по радиусу к центру кривизны. Запишем основное уравнение динамики движения автомобиля:

$$m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}_{\text{т}} + \boldsymbol{N} + \boldsymbol{F} + \boldsymbol{F}_{\text{тр}}. \qquad (18)$$

Спроектируем уравнение (18) на радиальное и тангенциальное направления:

$$ma_n = -F_{\text{т}} + N, \qquad (19)$$

$$m \times 0 = F - F_{\text{тр}}. \qquad (20)$$

Модуль силы тяжести найдем, воспользовавшись ее определением:

$$F_{\text{т}} = mg. \qquad (21)$$

Из формулы для расчета модуля центростремительного (нормального) ускорения имеем:

$$a_n = \frac{V^2}{R}. \qquad (22)$$

Из уравнений (19), (21) и (22) найдем модуль силы реакции моста:

$$N = m\left(g + \frac{V^2}{R}\right). \qquad (23)$$

Силу давления автомобиля на мост найдем, воспользовавшись третьим законом Ньютона и уравнением (23):

$$\boldsymbol{F}_{д} = -\boldsymbol{N}, \qquad (24)$$

$$F_{д} = N = m\left(g + \frac{V^2}{R}\right). \qquad (25)$$

Проверив ответ по наименованию и подставив числовые значения, получим:

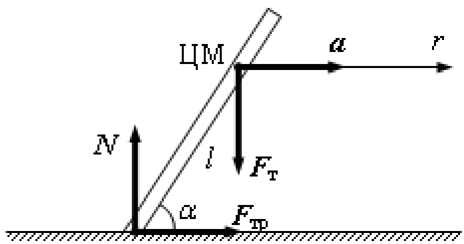
$F_{д} = 13{,}8 \cdot 10^4$ *Н*.

Таким образом, сила давления автомобиля на середину вогнутого моста больше его силы тяжести.

Ответ не лишен здравого смысла.

Задача 3. Велосипедист при повороте по кругу радиусом R наклоняется внутрь закругления так, что угол между плоскостью велосипедиста и землей равен α. С какой скоростью должен ехать велосипедист, чтобы не упасть?

$V - ?$
R
α
g



Выберем в качестве тела отсчета Землю. Связанную с ней систему отсчета будем считать инерциальной. Велосипедиста вместе с велосипедом будем считать единым целым - твердым телом. Будем также считать, что на велосипедиста действуют три силы: сила тяжести $\boldsymbol{F}_{т}$, сила реакции Земли $\boldsymbol{N}$ и сила трения $\boldsymbol{F}_{тр}$. Под действием этих сил центр тяжести велосипедиста движется с центростремительным ускорением, направленным параллельно горизонтальной поверхности к центру круга.

Запишем основное уравнение динамики движения центра тяжести велосипедиста:

$$m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}_{т} + \boldsymbol{N} + \boldsymbol{F}_{тр}. \qquad (1)$$

Спроектируем уравнение (1) на радиальное и бинормальное направления:

$$ma_n = F_{тр}, \qquad (2)$$

$$m \times 0 = -F_{т} + N. \qquad (3)$$

Модуль силы тяжести найдем, воспользовавшись ее определением:

$$F_{т} = mg. \qquad (4)$$

Из формулы для расчета модуля центростремительного (нормального) ускорения имеем:

$$a_n = \frac{V^2}{R}. \qquad (5)$$

Едущий велосипедист не упадет, если угол его наклона к поверхности земли будет оставаться неизменным, а это будет тогда, когда будет выполняться одно из условий равновесия твердого тела: результирующий момент сил относительно центра масс равен нулю.

Это позволяет записать уравнение:

$$(N\cos\alpha) \times l - (F_{тр}\sin\alpha) \times l = 0, \qquad (6)$$

где l – расстояние точки приложения сил $\boldsymbol{N}$ и $\boldsymbol{F}_{тр}$ от центра масс.

Решив систему уравнений (2)–(6), получим:

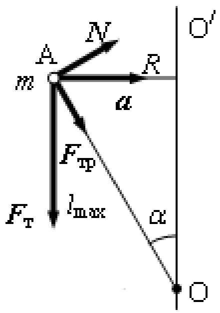
$$V = \sqrt{gR\,\mathrm{ctg}\,\alpha}. \qquad (7)$$

Из уравнения (7) следует, что для данного радиуса закругления и данного угла наклона скорость тела не зависит от его массы.

Наименование скорости, получаемое из уравнения (7) согласуется с принятым в СИ.

Задача 4. Стержень, изогнутый как показано на рисунке, вращается с постоянной угловой скоростью 10 *рад/с* относительно оси OO'. На стержень надета бусинка, размеры которой очень малы. Определить, на каком максимальном расстоянии от точки О может бусинка находиться в равновесии относительно стержня АО, если коэффициент трения между бусинкой и стержнем 0,1. Угол $\alpha = 30°$.

l_{max} – ?
$\omega = 10$ *рад/с* $\mu = 0{,}1$ $\alpha = 30°$ $g = 9{,}8$ *м/с*^{2}



Выберем в качестве тела отсчета Землю. Связанную с ней систему отсчета будем считать инерциальной, а бусинку - материальной точкой. На бусинку действуют три силы: сила тяжести $\boldsymbol{F}_т$, сила реакции стержня $\boldsymbol{N}$ и сила трения $\boldsymbol{F}_{тр}$. Поскольку в задаче речь идет о равновесии бусинки, то естественно считать, что мы имеем дело с силой трения покоя. И так как речь идет о максимальном расстоянии, то сила трения покоя должна быть направлена вдоль стержня к точке О. Все силы, действующие на бусинку, показаны на рисунке. Под действием этих сил бусинка равномерно движется по окружности в горизонтальной плоскости. Радиус этой окружности равен $R = l_{max}\sin\alpha$. Основное уравнение динамики движения бусинки имеет вид:

$$m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}_т + \boldsymbol{N} + \boldsymbol{F}_{тр}. \qquad (1)$$

Спроектируем уравнение (1) на радиальное и бинормальное направления:

$$ma_n = N\cos\alpha + F_{тр}\sin\alpha, \qquad (2)$$

$$m\times 0 = -F_т + N\sin\alpha - F_{тр}\cos\alpha. \qquad (3)$$

Дополним неполную систему скалярных уравнений (2)−(3) уравнениями, вытекающими из определения силы тяжести и формулы для вычисления центростремительного ускорения:

$$F_т = mg, \qquad (4)$$

$$a_n = \omega^2 l_{max}\sin a. \qquad (5)$$

Так как речь идет о максимальном расстоянии бусинки от оси вращения, то должна идти речь и о максимальной силе трения покоя, а она равна силе трения скольжения. Исходя из этого и закона Кулона–Амонтона, запишем:

$$F_{тр} = \mu N. \qquad (6)$$

Система уравнений (2)–(6) полная, решив ее, получим:

$$l_{max} = g\frac{\cos\alpha + \mu\sin\alpha}{\omega^2\sin\alpha(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)}.$$

Проверив полученный ответ по наименованию и проведя вычисления, получим:

$l_{max} = 0{,}46$ *м*.

Это не лишено здравого смысла.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Задача 2.13. Шарик массой *m*, подвешенный на нити длиной *l*, движется по окружности в вертикальной плоскости. Найти силу натяжения нити в точке, направление на которую из центра окружности составляет угол *α* с вертикалью, если скорость шарика в этой точке *V*.

Ответ: $T = \left(\frac{v^2}{R} - g\cos\alpha\right)\cdot$

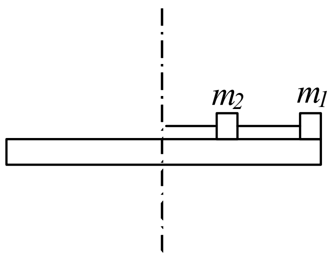
Задача 2.14. На горизонтальном диске, вращающемся равномерно с угловой скоростью ω, установлен отвес, шарик которого имеет массу m. Определить угол отклонения отвеса, если радиус окружности, по которой движется шарик, равен R.

Ответ: $tg\alpha = \dfrac{\omega^2 R}{g}$.

Задача 2.15. Какую наибольшую скорость может развить велосипедист, проезжая закругление радиусом $R = 50$ *м*, если коэффициент трения скольжения f между шинами и асфальтом равен 0,3? Каков угол отклонения велосипеда от вертикали, когда велосипедист движется по закруглению?

Ответ: 12,2 *м/с*; 73,3°.

Задача 2.16. Гладкий горизонтальный диск вращается с угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси. На поверхности диска находятся грузы 1 и 2, удерживаемые двумя нитями. Массы грузов m_1 и m_2, а радиусы вращения R_1 и R_2. Найти натяжения нитей.



Ответ: $T_1 = \omega^2 m_1 R_1$; $T_2 = \omega^2 (m_2 R_2 + m_1 R_1)$.

Задача 2.17. Диск радиусом 40 *см* вращается вокруг вертикальной оси. На краю диска лежит кубик. Принимая коэффициент трения равным 0,4, найти частоту вращения, при которой кубик соскользнет с диска.

Ответ: 3,13 *рад/с*.

Задача 2.18. Акробат на мотоцикле описывает "мертвую петлю" радиусом 4 *м*. С какой наименьшей скоростью должен проезжать акробат верхнюю точку петли, чтобы не сорваться?

Ответ: 6,26 *м/с*.

2.4. ЗАКОН ИЗМЕНЕНИЯ ИМПУЛЬСА ТЕЛА

КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Импульсом тела называется $\vec{p}$ векторная физическая величина, равная произведению массы m точки на ее скорость $\vec{v}$:

$$\vec{p} = m\vec{v}.$$

Если тело находилось в течение короткого промежутка времени Δt под действием постоянной силы $\vec{F}$, то второй закон Ньютона можно сформулировать следующим образом: изменение импульса тела $\Delta\vec{p}$ равно импульсу силы $\vec{F} \cdot \Delta t$:

$$\Delta\vec{p} = \vec{F} \cdot \Delta t.$$

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ФИЗИЧЕСКИЕ ВЕЛИЧИНЫ, ОТНОСЯЩИЕСЯ К ТЕМЕ ПРАКТИЧЕСКОГО ЗАНЯТИЯ: *масса, скорость, импульс, изменение импульса, сила, импульс силы, средняя сила, основное уравнение динамики движения материальной точки, взаимодействие, незамкнутая система тел, внешние и внутренние силы, система отсчета, ИСО.*

МОДЕЛИ ФИЗИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ И МЕХАНИЧЕСКИХ ДВИЖЕНИЙ, РАССМАТРИВАЕМЫХ НА ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЯХ ПО ДАННОЙ ТЕМЕ: *материальная точка, система материальных точек, неизолированная система материальных точек.*

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Объяснить, для чего введено каждое понятие, каждая физическая величина.

2. Перечислить, какими свойствами наделена каждая физическая величина.

3. Показать, что, обладая этими свойствами, физическая величина может выполнить свое предназначение.

4. Дать определение каждого понятия и каждой физической величины в соответствии с ГОСТом.

5. Привести определяющую формулу для каждой физической величины; проанализировать связь каждой физической величины с другими физическими величинами.

6. Указать, чем следует руководствоваться при выборе модели; объяснить, к чему приводит принятие той или иной модели.

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ ДЕЙСТВИЙ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ ДИНАМИКИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ЗАКОН ИЗМЕНЕНИЯ ИМПУЛЬСА ТЕЛА

1-я группа задач. Отличительный признак – незамкнутость системы взаимодействующих тел.

4.1. Выбрать ИСО.

4.2. Выделить рассматриваемые объекты и выбрать для них модели. Изобразить их импульсы и действующие на них силы.

4.3. Выяснить: является ли система взаимодействующих тел незамкнутой.

5.1. Записать в векторной форме основное уравнение динамики движения для каждого объекта.

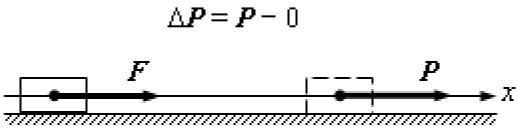
5.2. Перейти к скалярной записи, спроектировав на целесообразно выбранные направления.

5.3. Решить систему скалярных уравнений.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задача 1. На тело, имеющее возможность двигаться по горизонтальной поверхности без трения, действует в течение 2 *с* постоянная горизонтально направленная сила 20 *Н*. Определить изменение импульса тела.

ΔP – ?
$\Delta t = 2$ *с* $F = 20$ *Н*



Выберем в качестве тела отсчета горизонтальную поверхность. Связанную с ней систему отсчета будем считать инерциальной, а тело - материальной точкой. Оно не изолировано, так как на него действует внешняя сила. Изменение импульса тела $\Delta\boldsymbol{P}$ совпадает с направлением действия силы. Запишем основное уравнение динамики движения материальной точки:

$$\frac{\Delta\boldsymbol{P}}{\Delta t} = \boldsymbol{F}\ , \qquad (1)$$

Перейдем к скалярной записи, спроектировав (1) на горизонтальное направление:

$$\frac{\Delta P}{\Delta t} = F\ . \qquad (2)$$

Найдем ΔP из уравнения (2):

$$\Delta P = F\cdot\Delta t. \qquad (3)$$

Проверим полученный ответ по наименованию.

Подставив числовые значения, получим:

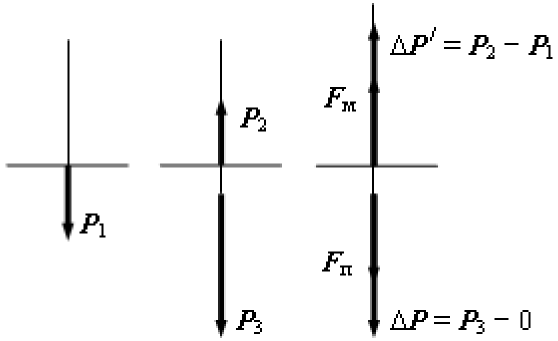
$\Delta P = 40$ *кг·м/с*.

Полученное значение не противоречит здравому смыслу.

Задача 2. На пол с высоты 2 *м* свободно падает мяч массой 200 *г* и подпрыгивает на высоту 1,5 *м*. Определить переданный полу импульс и среднюю силу, с которой мяч действовал на пол во время удара, если удар длился 0,1 *с*.

ΔP – ?
$F_п$ – ?

$m = 0{,}2$ *кг*
$h_1 = 2$ *м*
$h_2 = 1{,}5$ *м*
$g = 9{,}8$ *м/с*^{2}
$\Delta t = 0{,}1$ *с*



Выберем в качестве тела отсчета землю. Связанную с ней систему отсчета будем считать инерциальной. Взаимодействующими телами являются мяч и пол. Мяч будем считать материальной точкой, а пол - твердым телом. Импульс мяча непосредственно перед ударом $\boldsymbol{P}_1$, а непосредственно после удара $\boldsymbol{P}_2$. Импульс пола до соударения с мячом равен нулю, а после соударения отличен от нуля и равен $\boldsymbol{P}_3$. Силы взаимодействия мяча и пола показаны на рисунке. Импульс $\Delta\boldsymbol{P}$, переданный полу, равный приращению импульса пола ($\boldsymbol{P}_3 - 0 = \boldsymbol{P}_3$) в результате удара мяча, не может быть найден с помощью определяющей формулы, так как не известны ни масса пола, ни его скорость после соударения с мячом. Поэтому воспользуемся основным уравнением динамики поступательного движения твердого тела и материальной точки. Для пола и мяча можем записать:

$$\boldsymbol{P}_3 - 0 = \boldsymbol{F}_п \cdot \Delta t, \quad (1)$$

$$\boldsymbol{P}_2 - \boldsymbol{P}_1 = \boldsymbol{F}_м \cdot \Delta t, \quad (2)$$

где Δt – время соударения.

По третьему закону Ньютона:

$$\boldsymbol{F}_{п} = -\boldsymbol{F}_{м}. \qquad (3)$$

Из уравнений (1)−(2) с учетом (3) получим:

$$\boldsymbol{P}_3 - 0 = -(\boldsymbol{P}_2 - \boldsymbol{P}_1). \qquad (4)$$

Спроектировав (4) на вертикальное направление, получим:

$$P_3 = P_1 + P_2. \qquad (5)$$

Модули импульсов P_1 и P_2 соответственно равны:

$$P_1 = mV_1;\ P_2 = mV_2. \qquad (6)$$

Скорость V_1 мяча, свободно падающего с высоты h_1, равна:

$$V_1 = \sqrt{2gh_1}\ . \qquad (7)$$

Начальная скорость мяча, которую он должен иметь, чтобы подняться на высоту h_2, равна:

$$V_2 = \sqrt{2gh_2}\ . \qquad (8)$$

Из уравнения (5) с учетом (6)–(8) получим:

$$\Delta P = P_3 = m\left(\sqrt{2gh_1} + \sqrt{2gh_2}\right). \qquad (9)$$

Теперь среднюю силу, с которой мяч действовал на пол, можно найти, воспользовавшись уравнениями (1) и (9):

$$F_{п} = \frac{\Delta P}{\Delta t} = \frac{m\left(\sqrt{2gh_1} + \sqrt{2gh_2}\right)}{\Delta t}. \qquad (10)$$

Проверка полученных ответов по наименованию свидетельствует, что они согласуются с принятыми в СИ.

Подставив числовые значения в (9) и (10) и проведя вычисления, получим:

ΔP = 2,34 *кг·м/с*;

$F_{п}$ = 23,4 *Н*.

Полученный результат не противоречит здравому смыслу.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Задача 2.19. Мячик свободно падает с высоты 2 *м* на гладкую горизонтальную поверхность. Считая удар абсолютно упругим, а время удара равным 0,2 *с*, найти среднюю силу, с которой действовал мячик на поверхность во время удара. Масса мячика 0,2 *кг*.

Ответ: 12,5 *Н*.

Задача 2.20. Автомат выпускает 600 пуль в минуту. Масса каждой пули 4 *г*, ее начальная скорость 500 *м/с*. Найти среднюю силу отдачи при стрельбе.

Ответ: 20 *Н*.

Задача 2.21. Горизонтально летящая пуля массой 10 *г*, двигаясь со скоростью 100 *м/с*, попадает в лежащий на горизонтальном столе брусок массой 100 *г* и, пробив его, движется со скоростью 90 *м/с*. Найти скорость бруска после пробивания его пулей. Сравнить внешние силы с внутренними, если время движения пули в бруске 0,001 *с*, а коэффициент трения между бруском и столом 0,1.

Ответ: 1 *м/с*.

Задача 2.22. На горизонтальную поверхность падает мячик под углом 60° к вертикали. Найти, под каким углом он отразится от поверхности, если известно, что горизонтальная составляющая и абсолютная величина импульса сохраняются.

2.5. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ИМПУЛЬСА

КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Система называется ***замкнутой***, если на нее не действуют внешние силы. Для замкнутой системы можно сформулировать ***закон сохранения импульса*** - импульс замкнутой системы сохраняется, т. е. не изменяется с течением времени:

$$\vec{p} = const.$$

Удар — это столкновение двух или более тел, при котором взаимодействие длится очень короткое время. Силы взаимодействия во время удара столь велики, что внешними силами, действующими на соударяющиеся тела, можно пренебречь, систему взаимодействующих тел во время удара считать замкнутой и применять к ней закон сохранения импульса. Существует два предельных случая для удара – *абсолютно упругий* и *абсолютно неупругий*.

Абсолютно упругий удар — столкновение двух тел, в результате которого не происходит потерь механической энергии и оба тела после удара движутся раздельно.

Абсолютно неупругий удар — столкновение двух тел, в результате которого тела объединяются и двигаются после удара как единое целое. При абсолютно неупругом ударе часть механической энергии преобразуется в другие виды.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

Перечислить основные понятия и физические величины, относящиеся к данной теме, а также назвать модели тел и движений, используемых при решении задач по данной теме.

1. Объяснить, для чего введено каждое понятие, каждая физическая величина.

2. Перечислить, какими свойствами наделена каждая физическая величина.

3. Показать, что, обладая этими свойствами, физическая величина может выполнить свое предназначение.

4. Дать определение каждого понятия и каждой физической величины в соответствии с ГОСТом.

5. Привести определяющую формулу для каждой физической величины; проанализировать связь каждой физической величины с другими физическими величинами.

6. Указать, чем следует руководствоваться при выборе модели; объяснить, к чему приводит принятие той или иной модели.

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ ДЕЙСТВИЙ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ ДИНАМИКИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ЗАКОНА СОХРАНЕНИЯ ИМПУЛЬСА ТЕЛА

2-я группа задач. Отличительный признак – замкнутость системы взаимодействующих тел.

4.1. Выбрать ИСО.

4.2. Выделить взаимодействующие тела.

5.1. Если взаимодействующие тела представляют изолированную систему, то воспользоваться законом сохранения импульса, записав его сначала в векторной форме, а потом – скалярной.

5.2. Если система взаимодействующих тел в целом незамкнута, но сумма проекций сил на какое-то направление равна нулю, то воспользоваться законом сохранения для проекций импульса на это направление.

5.3. Решить систему скалярных уравнений.

ПРИМЕЧАНИЯ.

5.1.1. Поскольку замкнутая (изолированная) система – это идеализация, то в реальных условиях закон сохранения импульса применим к таким взаимодействиям, при которых внутренние силы намного больше внешних и последними (внешними) можно пренебречь.

5.1.2. Применяя закон сохранения импульса, надо следить за тем, чтобы импульсы всех тел, входящие в уравнения, были взяты относительно одной и той же системы отсчета.

5.1.3. Если в задаче требуется определить не только скорость какого-либо тела системы после взаимодействия, но и найти перемещение этого тела в результате приобретения скорости при взаимодействии, то надо четко разграничивать два этапа описанного в задаче механического процесса. Первый – этап взаимодействия, в результате которого тела приобретают некоторые скорости; второй – этап движения после прекращения взаимодействия тел выделенной системы. При этом помимо уравнений, связанных с понятием "импульс", придется использовать и другие физические законы.

ТРУДНОСТИ, которые могут возникнуть при решении задач по этой теме, могут быть связаны со следующим:

1. Как выделить систему взаимодействующих тел и определить, какие силы в данной системе являются внутренними, а какие – внешними?

2. Когда можно пользоваться законом сохранения импульса, а когда – нет?

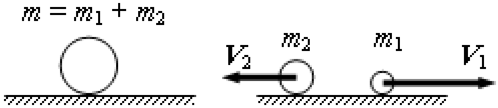
3. Как выбрать те состояния системы взаимодействующих тел, в которых можно и целесообразно сравнивать импульсы?

4. Как вычленить стадии взаимодействия тел и их движения после взаимодействия?

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задача 1. Граната, лежащая на земле, разрывается на две части, массы которых 200 *г* и 300 *г*. Скорость меньшего осколка 100 *м/с*. Найти скорость большего осколка.

V_2 – ?
$m_1 = 0{,}200$ *кг* $m_2 = 0{,}300$ *кг* $F = 20$ *Н* $V_1 = 100$ *м/с*



Выберем в качестве тела отсчета землю. Связанную с ней систему отсчета будем считать инерциальной. Взаимодействующие объекты – два осколка. Осколки будем считать материальными точками. На гранату действуют внешние и внутренние силы. Действие двух внешних сил – силы тяжести и силы реакции опоры – компенсируется. В таких условиях гранату, а затем и ее осколки можно рассматривать как замкнутую систему, в которой будет выполняться закон сохранения импульса. Импульс гранаты до разрыва равен нулю. Нетрудно сообразить, что в рассматриваемых условиях импульсы осколков могут быть направлены только вдоль одной прямой, например, как показано на рисунке. На основании закона сохранения импульса можем записать:

$$0 = m_1\boldsymbol{V}_1 + m_2\boldsymbol{V}_2. \qquad (1)$$

Спроектировав (1) на горизонтальное направление, получим:

$$m_1V_1 - m_2V_2 = 0. \qquad (2)$$

Из уравнения (2) скорость второго осколка равна:

$$V_2 = \frac{m_1V_1}{m_2}. \qquad (3)$$

Проверим полученный ответ по наименованию.

Подставив числовые значения и проведя вычисления, получим:

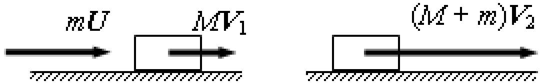
$V_2 = 67$ *м/с*.

Полученный ответ не лишен здравого смысла.

Задача 2. По гладкой горизонтальной поверхности движется тележка с песком массой M со скоростью V_1. В нее стреляют из винтовки, причем пуля массой m, летящая со скоростью U, застревает в тележке. Какой станет скорость тележки после попадания в нее пули, если скорость пули направлена горизонтально, так же, как и скорость тележки?

V_2 – ?

M
V_1
m
U



Выберем в качестве тела отсчета землю. Связанную с ней систему отсчета будем считать инерциальной, а тележку и пулю - материальными точками. В качестве взаимодействующих тел выберем тележку и пулю (так как именно в результате их взаимодействия меняется движение). Их импульсы показаны на рисунке. На тележку и пулю действуют внешние (силы тяжести тележки и пули и сила реакции поверхности) и внутренние силы. В рассматриваемой ситуации внешними силами пренебречь нельзя, поэтому система взаимодействующих тел незамкнутая и в ней не будет выполняться закон сохранения импульса. Однако нетрудно видеть, что проекции внешних сил на горизонтальное направление равны нулю, поэтому нет причин, которые обусловили бы изменение проекции импульса системы на горизонтальное направление. Следовательно, будет иметь место сохранение суммы проекций импульсов на горизонтальное направление, т.е.:

$$mU + MV_1 = (m + M)V_2, \qquad 1)$$

Отсюда

$$V_2 = \frac{mU + MV_1}{m + M}. \qquad (2)$$

Проверка показывает, что V_2 будет иметь наименование, согласующееся с принятым в СИ.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Задача 2.23. Тело массой 2 *кг* движется со скоростью 3 *м/с* и нагоняет второе тело массой 8 *кг*, движущееся со скоростью 1 *м/с*. Найти скорости тел после столкновения, если: 1) удар был неупругим; 2) удар был упругим. Тела движутся по одной прямой. Удар считать центральным.

Ответ: 0,2 *м/с*; 1,8 *м/с*.

Задача 2.24. На железнодорожной платформе, движущейся с некоторой скоростью, закреплено орудие в горизонтальной плоскости под углом 60° к направлению колеи. Масса платформы с орудием 15 *т*. Орудие стреляет снарядом, вылетающим со скоростью 900 *м/с*, масса которого равна 200 *кг*. Насколько изменится скорость платформы в результате выстрела?

Ответ: 6 *м/с*.

Задача 2.24. Человек, сидящий в лодке, бросает камень под углом 60° к горизонту. Масса камня 1 *кг*, масса человека и лодки 150 *кг*, начальная скорость камня 10 *м/с*. Найти расстояние между точкой падения камня и лодкой в момент, когда камень коснулся воды. Трение лодки о воду не учитывать.

Ответ: 8,9 *м*.

Задача 2.25. Три лодки одинаковой массы M идут в кильватер с одинаковой скоростью V. Из средней лодки одновременно в переднюю и заднюю лодки бросают со скоростью U относительно лодки грузы массой m. Каковы будут скорости лодок после переброски грузов?

Ответ: $U_1 = \dfrac{Mv + mu}{M + m}$; $U_2 = v$; $U_3 = \dfrac{Mv - mu}{M + m}$.

Задача 2.26. Конькобежец массой M_1, стоя на льду, бросает кусок льда массой M_2 со скоростью v под углом α к горизонту. Определить скорость конькобежца после броска.

Ответ: $U = \dfrac{M_2}{M_1} v \cos\alpha$.

Задача 2.27. Человек массой M_1 за время t переходит с кормы на нос покоившейся первоначально лодки длиной L и массой M_2. Найти скорость, которую в результате перехода приобретет лодка, если сопротивлением воды можно пренебречь.

Ответ: $U = \dfrac{M_1 v}{M_2 + M_2}$.

Задача 2.28. Шар массой 1 *кг*, двигаясь по столу со скоростью 5 *м/с*, ударился о покоящийся шар с такой же массой, который приобрел при этом скорость 3 *м/с*, направленную под углом 53° к линии движения первого шара (удар не лобовой). Определить модуль и направление скорости первого шара графически, считая удар упругим.

Ответ: 4 *м/с*.

2.6. ЗАКОН ИЗМЕНЕНИЯ ПОЛНОЙ МЕХАНИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ

КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Энергия – универсальная мера движения и взаимодействия тел. Для описания процесса обмена энергией между взаимодействующими телами вводится понятие *работы*. ***Работа*** постоянной силы:

$$A = (\vec{F}\vec{s}) = Fs\cos\alpha ,$$

где α – угол между векторами силы $\vec{F}$ и перемещения $\vec{s}$.

Работа и энергия в системе СИ измеряются в джоулях:

$$[A] = Дж; \quad [E] = Дж .$$

Работа *потенциальных* (консервативных) сил не зависит от формы траектории, а определяется только начальным и конечным положением тела. В этом случае работа по замкнутому контуру равна нулю. Для *диссипативных* (непотенциальных) сил работа всегда отрицательна и при перемещении точки по замкнутому контуру отлична от нуля.

Чтобы определить скорость совершения работы пользуются понятием ***мощности***:

$$N = \frac{A}{t} .$$

В механике рассматривают два вида механической энергии: *потенциальную*, являющуюся мерой взаимодействия тел, и *кинетическую*, отвечающую за движение.

Кинетическая энергия материальной точки:

$$E_k = \frac{mv^2}{2} = \frac{p^2}{2m} ,$$

где m - масса точки, v и p - ее скорость и импульс соответственно.

Изменение кинетической энергии равно работе всех сил:

$$E_{k_2} - E_{k_1} = \Delta E_k = A.$$

Потенциальная энергия:

- упруго деформированного тела:

$$U = \frac{kx^2}{2},$$

где k – коэффициент жесткости, зависящий от формы и размеров тела, x – его абсолютная деформация;

- гравитационного взаимодействия материальных точек массами m_1 и m_2, находящихся на расстоянии r:

$$U = -G\frac{m_1 m_2}{r};$$

- точки массой m в однородном поле тяжести:

$$U = mgh,$$

где h – высота точки над нулевым уровнем, выбираемым произвольно исходя из условия задачи.

Работа потенциальной силы совершается за счет убыли потенциальной энергии:

$$U_1 - U_2 = -\Delta U = A.$$

Полной механической энергией называется сумма механической и потенциальной энергий:

$$E = E_k + U.$$

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ФИЗИЧЕСКИЕ ВЕЛИЧИНЫ, ОТНОСЯЩИЕСЯ К ТЕМЕ ПРАКТИЧЕСКОГО ЗАНЯТИЯ: *энергия, кинетическая энергия, потенциальная энергия, полная механическая энергия, скорость, масса, деформация, незамкнутая система, ИСО, работа, консервативные и неконсервативные силы.*

МОДЕЛИ ФИЗИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ И МЕХАНИЧЕСКИХ ДВИЖЕНИЙ, РАССМАТРИВАЕМЫХ НА ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЯХ ПО ДАННОЙ ТЕМЕ: *материальная точка, система материальных точек, изолированная система материальных точек.*

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Объяснить, для чего введено каждое понятие, каждая физическая величина.
2. Перечислить, какими свойствами наделена каждая физическая величина.
3. Показать, что, обладая этими свойствами, физическая величина может выполнить свое предназначение.
4. Дать определение каждого понятия и каждой физической величины в соответствии с ГОСТом.
5. Привести определяющую формулу для каждой физической величины; проанализировать связь каждой физической величины с другими физическими величинами.
6. Указать, чем следует руководствоваться при выборе модели; объяснить, к чему приводит принятие той или иной модели.

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ ДЕЙСТВИЙ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ ДИНАМИКИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ЗАКОНА ИЗМЕНЕНИЯ ПОЛНОЙ МЕХАНИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ

4.1. Выбрать ИСО.

4.2. Выбрать модель для тел.

4.3. Выявить действующие на тела силы. Выяснить, какие из них потенциальные, а какие – непотенциальные. Если есть потенциальные, то выбрать нулевой уровень отсчета потенциальной энергии.

4.4. Если есть и непотенциальные, то выбрать два таких состояния системы (или тела), чтобы в число их параметров (координат и скоростей) входили как известные, так и искомые величины.

5.1. Записать закон изменения полной механической энергии для этих состояний, т.е. приравнять приращение полной механической энергии системы (или тела) работе непотенциальных сил, совершаемой при переходе из одного из выбранных состояний в другое.

5.2. Раскрыть значение кинетической и потенциальной энергии в каждом состоянии и подставить их в уравнение, записанное на основании закона изменения полной механической энергии.

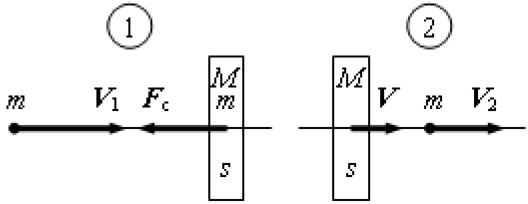
5.3. Решить полученное уравнение.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задача 1. Горизонтально летящая пуля массой 10 *г* пробивает доску толщиной 10 *см*. При этом ее скорость меняется от 600 до 400 *м/с*. Найти силу сопротивления доски.

$F_с$ – ?

$m = 10^{-2}$ *кг*
$s = 0{,}1$ *м*
$V_1 = 600$ *м/с*
$V_2 = 400$ *м/с*



Выберем в качестве тела отсчета Землю. Связанную с ней систему отсчета будем считать инерциальной. Пулю будем считать материальной точкой, а доску – твердым телом. Взаимодействующими телами являются пуля и доска. Силы взаимодействия пули и доски внутренние, непотенциальные. В этих условиях будет выполняться закон сохранения импульса, но не будет выполняться закон сохранения полной механической энергии системы "пуля–доска".

Выберем два состояния механической системы: 1-е – до входа пули в доску и 2-е – после вылета пули из доски.

В соответствии с законом сохранения импульса запишем:

$$m\mathbf{V}_1 = M\mathbf{V} + m\mathbf{V}_2, \qquad (1)$$

где M – масса доски, а V – ее скорость после вылета из нее пули.

Из уравнения (1) после проектирования на направление полета пули получим:

$$V = \frac{m(V_1 - V_2)}{M}. \qquad (2)$$

При движении пули внутри доски действуют силы сопротивления как на пулю, так и на доску (в соответствии с третьим законом Ньютона). Будем считать, что сила сопротивления постоянна.

Работа силы сопротивления, действующей на пулю, в соответствие с законом изменения полной механической энергии равна приращению полной механической энергии системы "пуля–доска":

$$F_c s\cos 180° = \Delta E = E_2 - E_1, \qquad (3)$$

где E_1 и E_2 – полная механическая энергия системы в 1-м и 2-м состояниях соответственно; F_c – сила сопротивления.

Полная механическая энергия системы "пуля–доска" до попадания пули в доску равна:

$$E_1 = \frac{mV_1^2}{2}. \qquad (4)$$

Полная механическая энергия этой же системы после вылета пули из доски:

$$E_2 = \frac{mV_2^2}{2} + \frac{MV^2}{2}. \qquad (5)$$

Подставив (4) и (5) в уравнение (3), получим:

$$-F_c s = \frac{mV_2^2}{2} + \frac{MV^2}{2} - \frac{mV_1^2}{2}. \qquad (6)$$

Если принять $M >> m$, то кинетической энергией доски можно пренебречь и уравнение (6) примет вид:

$$-F_c s = \frac{m\left(V_2^2 - V_1^2\right)}{2}. \qquad (7)$$

Откуда

$$F_c = \frac{m\left(V_1^2 - V_2^2\right)}{2s}. \qquad (8)$$

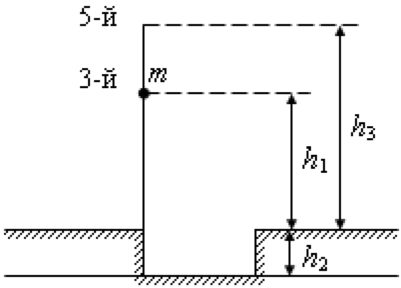
После проверки по наименованию и подстановки числовых значений, получим:

$F_c = 10000$ *Н*.

Задача 2. На балконе третьего этажа, расположенного на высоте 12 *м* от земли, находится тело массой 5 *кг*. Найти его потенциальную энергию относительно поверхности Земли, относительно пятого этажа, высота которого 18 *м*, и относительно дна котлована глубиной 4 *м*.

$E_п - ?$

$m = 5$ *кг*
$h_1 = 12$ *м*
$h_2 = 4$ *м*
$h_3 = 18$ *м*
$g = 9{,}8$ *м/с*^{2}



Выберем в качестве тела отсчета Землю. Связанную с ней систему отсчета будем считать инерциальной, а тело - материальной точкой. В данной ситуации рассматривается взаимодействие тела только с Землей. Сила тяжести, характеризующая это взаимодействие, является потенциальной.

Если за нулевой уровень потенциальной энергии принять ее значение на поверхности Земли и учесть, что потенциальная энергия всегда равна работе потенциальной силы при переходе тела из данного состояния в нулевое, то потенциальная энергия тела на высоте h_1 равна:

$$E_{п1} = A_{10} = F_т h_1 \cos 0° = mgh_1 = 600\ \textit{Дж}.$$

Если же за нулевой уровень потенциальной энергии принять ее значение на высоте h_3 (пятого этажа), то потенциальная энергия тела будет:

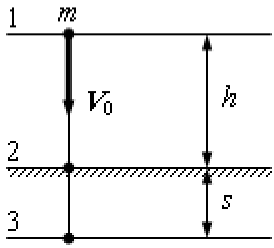
$$E_{п3} = mg(h_3 - h_1)\cos 180° = -300\ \textit{Дж}.$$

Если же за нулевой уровень потенциальной энергии принять ее значение на дне котлована, то потенциальная энергия тела будет:

$$E_{п2} = mg(h_2 - h_1)\cos 0° = 800\ Дж.$$

Задача 3. Тело массой m бросают вертикально вниз со скоростью V_0 с высоты h. Упав на землю, оно углубляется в грунт на глубину S. Найти среднюю силу сопротивления грунта.

$F_с$ – ?
V_0 h s g



Выберем в качестве тела отсчета Землю. Связанную с ней систему отсчета будем считать инерциальной. Тело будем считать материальной точкой. Движение тела можно разбить на два участка: участок падения с высоты h с начальной скоростью V_0 и участок углубления в грунт на глубину s. На первом участке на тело действует только одна потенциальная сила тяжести, на втором – сила тяжести и сила сопротивления грунта; последняя – непотенциальная.

Выберем за нулевой уровень отсчета потенциальной энергии поверхность Земли.

Выберем три состояния тела: 1-е – на высоте h, 2-е – на поверхности Земли, 3-е – на глубине s.

Так как при движении тела на первом участке система "тело–Земля" изолирована и в системе действуют только потенциальные силы и изменением энергии Земли при переходе тела из состояния 1 в состояние 2 можно пренебречь (масса Земли гораздо больше массы тела, а изменение кинетической и потенциальной энергии взаимодействующих тел обратно пропорционально массам), то, во-первых, можно пользоваться законом сохранения полной механической энергии и, во-вторых, записывать его только для тела, т.е.:

$$E_1 = E_2, \tag{1}$$

где E_1 – полная механическая энергия тела в первом состоянии, E_2 – полная механическая энергия тела во втором состоянии.

Полная механическая энергия тела в первом состоянии складывается из кинетической $\frac{mV_0^2}{2}$ и потенциальной mgh. Полная механическая энергия тела во втором состоянии равна только кинетической $\frac{mV^2}{2}$.

При переходе тела из состояния 2 в состояние 3 действует и непотенциальная сила – сила сопротивления, поэтому на этом участке можно пользоваться только законом изменения полной механической энергии, причем, как было обосновано выше, опять только для тела. Изменение полной механической энергии тела равно работе непотенциальной силы:

$$E_3 - E_2 = A_с, \tag{2}$$

где E_3 – полная механическая энергия тела в третьем состоянии, $A_с$ – работа силы сопротивления.

Полная механическая энергия тела в третьем состоянии равна:

$$E_3 = -mgs. \tag{3}$$

По определению, работа силы сопротивления равна:

$$A_с = F_с s\cos 180°. \qquad (4)$$

Из уравнений (1)–(4) получим:

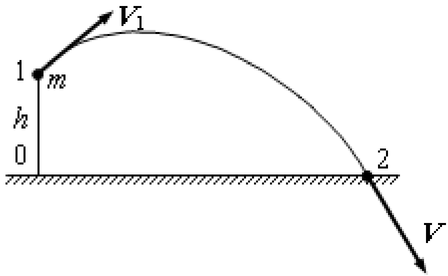
$$F_s = \frac{mV_0^2 + 2mg(h+s)}{2s}.$$

Проверив полученный ответ по наименованию, приходим к заключению, что он согласуется с принятым в СИ.

Задача .4. Камень массой 50 *г*, брошенный с высоты 5 *м* над Землей со скоростью 18 *м/с* под углом к горизонту, упал на Землю со скоростью 20 *м/с*. Найти работу сил сопротивления воздуха.

$A_с$ – ?

$V_1 = 18$ *м/с*
$V_2 = 20$ *м/с*
$m = 5\cdot 10^{-2}$ *кг*
$h = 5$ *м*
$g = 9{,}8$ *м/с*^{2}



Выберем в качестве тела отсчета Землю. Связанную с ней систему отсчета будем считать инерциальной, а камень – материальной точкой. На камень во время полета действуют две силы: сила тяжести и сила сопротивления воздуха. Сила тяжести является потенциальной. Примем за нулевой уровень отсчета потенциальной энергии поверхность Земли. Сила сопротивления воздуха – непотенциальная. Ее величина неизвестна, направление будет меняться в процессе движения. В такой ситуации не представляется возможным найти работу, используя определяющую ее формулу. Поэтому выберем два состояния камня: 1-е – на высоте h над поверхностью Земли, 2-е – на поверхности Земли. На основании закона изменения полной механической энергии можем записать, что приращение полной механической энергии камня при переходе его из 1-го состояния во второе ΔE равно работе силы сопротивления воздуха $A_с$. Приращение полной механической энергии камня равно:

$$\Delta E = E_2 - E_1,$$

где E_1 – полная механическая энергия камня в состоянии 1, E_2 − полная механическая энергия камня в состоянии 2.

Полная механическая энергия камня E_1 складывается из кинетической энергии $\frac{mV_1^2}{2}$ и потенциальной mgh. Полная механическая энергия E_2 равна только кинетической $\frac{mV_2^2}{2}$, потому что в этом состоянии потенциальная энергия равна нулю. С учетом вышесказанного можем записать:

$$A_с = \Delta E = \frac{mV_2^2}{2} - \left(\frac{mV_1^2}{2} + mgh\right).$$

Проверка полученного ответа по наименованию показывает, что он согласуется с принятым в СИ.

После подстановки числовых значений получим:

$A_с = -0{,}55$ *Дж*.

Отрицательное значение работы силы сопротивления воздуха указывает на то, что сила сопротивления препятствует движению и, естественно, приводит к уменьшению полной механической энергии системы.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Задача 2.29. К нерастянутой пружине с жесткостью k подвесили груз массой m. Определить максимальное растяжение пружины, считая, что груз начал двигаться из состояния покоя.

Ответ: $v_{\max} = g\sqrt{\dfrac{m}{k}}.$

Задача 2.30. В ящик с песком, подвешенный на нитях и имеющий массу M, попадает горизонтально летящая пуля массой m и застревает в нем. При этом ящик отклоняется и поднимается на высоту h от начального положения. Найти скорость пули.

Ответ: $v = \left(1 + \dfrac{M}{m}\right)\sqrt{2gh}.$

Задача 2.31. Автомобиль движется по шоссе со скоростью 36 *км/ч*. Шофер увидел на шоссе предмет, препятствующий движению, когда до него оставалось 26 *м*. Будет ли совершен наезд, если коэффициент трения 0,2 (время реакции шофера не учитывать).

Ответ: нет.

Задача 2.32. Под действием постоянной силы F вагонетка двигаясь из состояния покоя прошла путь 5 *м* и приобрела скорость 2 *м/с*. Определить работу силы, если масса вагонетки 400 *кг* и коэффициент трения 0,01.

Ответ: 996 *Дж*.

Задача 2.33. Вычислить работу, совершаемую при равноускоренном подъеме груза массой 100 *кг* на высоту 4 *м* за 2 *с*.

Ответ: 4,72 *кДж*.

Задача 2.34. Найти работу подъема груза по наклонной плоскости длиной 2 *м*, если масса груза 100 *кг*, угол наклона 30°, коэффициент трения – 0,1 и груз движется с ускорением 1 *м/с*^{2}.

Ответ: 1,35 *кДж*.

Задача 2.35. Вычислить работу, совершаемую на пути 12 *м* равномерно возрастающей силой, если в начале пути сила равна 10 *Н*, а в конце – 46 *Н*.

Ответ: 336 *Дж*.

2.7. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ПОЛНОЙ МЕХАНИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ

КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Система называется ***замкнутой***, если на нее не действуют внешние силы. Для замкнутой системы можно сформулировать ***закон сохранения механической энергии***: в замкнутой системе тел, между которыми действуют только консервативные силы, механическая энергия сохраняется:

$$E = \sum E_k + \sum U = const\,.$$

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

Перечислить основные понятия и физические величины, относящиеся к данной теме, а также назвать модели тел и движений, используемых при решении задач по данной теме.

1. Объяснить, для чего введено каждое понятие, каждая физическая величина.
2. Перечислить, какими свойствами наделена каждая физическая величина.
3. Показать, что, обладая этими свойствами, физическая величина может выполнить свое предназначение.
4. Дать определение каждого понятия и каждой физической величины в соответствии с ГОСТом.
5. Привести определяющую формулу для каждой физической величины; проанализировать связь каждой физической величины с другими физическими величинами.

6. Указать, чем следует руководствоваться при выборе модели; объяснить, к чему приводит принятие той или иной модели.

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ ДЕЙСТВИЙ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ ДИНАМИКИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ЗАКОНА СОХРАНЕНИЯ И ПРЕВРАЩЕНИЯ ПОЛНОЙ МЕХАНИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ

4.1. Выбрать ИСО.

4.2. Выбрать модель для тел. Выделить систему взаимодействующих тел.

4.3. Выявить действующие на тела силы. Выяснить, являются они потенциальными или нет.

4.4. Выяснить, является ли рассматриваемая система тел замкнутой. Если система взаимодействующих тел замкнутая, а силы потенциальные, то выбрать нулевой уровень отсчета потенциальной энергии.

4.5. Выбрать два (или больше) таких состояния системы, чтобы в число их параметров (координат и скоростей) входили как известные, так и искомые величины.

5.1. Записать закон сохранения механической энергии для этих состояний.

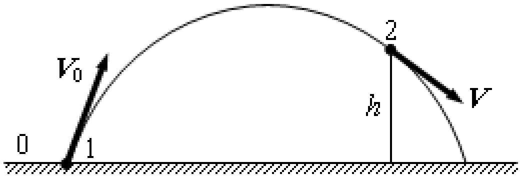
5.2. Раскрыть значение энергии в каждом состоянии и, подставив их в уравнение, записанное на основании закона сохранения энергии, решить полученные уравнения.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задача 1. Тело брошено с поверхности Земли под углом со скоростью V_0. Найти его скорость на некоторой высоте h, если сопротивление воздуха пренебрежимо мало.

V – ?

V_0
h
g



Выберем в качестве тела отсчета Землю. Связанную с ней систему отсчета будем считать инерциальной, а тело - материальной точкой. В данной задаче предполагается взаимодействие тела только с Землей. Сила тяжести, характеризующая это взаимодействие, является потенциальной. За нулевой уровень потенциальной энергии примем ее значение на поверхности Земли.

Выберем два состояния механической системы: 1-е – тело на поверхности Земли, 2-е – тело на высоте h.

Изменения потенциальной и кинетической энергии Земли при переходе системы из состояния 1 в состояние 2 пренебрежимо малы (так как перемещение Земли и изменение скорости Земли при взаимодействии с телом обратно пропорциональны их массам, а масса Земли гораздо больше массы тела, то перемещением Земли по сравнению с перемещением тела и изменением скорости Земли по сравнению с изменением скорости тела действительно можно пренебречь). С учетом этого приходим к выводу о том, что речь может идти о сохранении только полной механической энергии тела.

Для тела (на основании закона сохранения полной механической энергии) можем записать:

$$E_1 = E_2, \qquad (1)$$

где E_1 – полная механическая энергия тела в состоянии 1, E_2 – полная механическая энергия тела в состоянии 2.

Полная механическая энергия тела в состоянии 1 равна кинетической энергии $\dfrac{mV_0^2}{2}$. Полная механическая энергия тела в состоянии 2 равна сумме кинетической $\dfrac{mV^2}{2}$ и потенциальной mgh энергий. С учетом этого уравнение (1) примет вид:

$$\frac{mV_0^2}{2} = mgh + \frac{mV^2}{2}. \qquad (2)$$

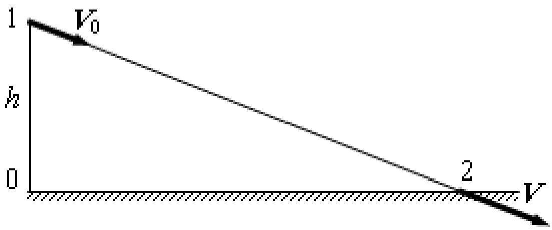
Откуда

$$V = \sqrt{V_0^2 - 2gh}\,.$$

Проверка полученного ответа по наименованию показывает, что он согласуется с принятым в СИ.

Задача 2. С вершины наклонной плоскости высотой h толкают тело, сообщая ему скорость V_0. Найти скорость тела в конце наклонной плоскости, считая трение пренебрежимо малым.

$V - ?$
h V_0 g



Выберем в качестве тела отсчета Землю. Связанную с ней систему отсчета будем считать инерциальной. Взаимодействующими телами в данной ситуации являются тело и Земля. Тело будем считать материальной точкой, а Землю – твердым телом. Рассматриваемая механическая система "тело–Земля" изолирована. Действующие в ней внутренние силы – силы тяготения и упругие силы реакций – потенциальны. Следовательно, в ней должен выполняться закон сохранения полной механической энергии.

За нулевой уровень отсчета потенциальной энергии примем основание наклонной плоскости. Выберем два состояния механической системы: 1-е – тело на вершине наклонной плоскости, 2-е – тело у основания наклонной плоскости.

Изменения потенциальной и кинетической энергии Земли при переходе системы из состояния 1 в состояние 2 – пренебрежимо малы (так как перемещение Земли и изменение скорости Земли при взаимодействии с телом обратно пропорциональны их массам, а масса Земли гораздо больше массы тела, то перемещением Земли по сравнению с перемещением тела и изменением скорости Земли по сравнению с изменением скорости тела действительно можно пренебречь). С учетом этого приходим к выводу о том, что речь может идти о сохранении только полной механической энергии тела.

Для тела (на основании закона сохранения полной механической энергии) можем записать:

$$E_1 = E_2, \tag{1}$$

где E_1 – полная механическая энергия тела в состоянии 1, E_2 – полная механическая энергия тела в состоянии 2.

Полная механическая энергия тела в состоянии 1 складывается (как величина аддитивная) из кинетической $\frac{mV_0^2}{2}$ и потенциальной mgh энергий. Полная механическая энергия тела в состоянии 2 равна лишь кинетической энергии $\frac{mV^2}{2}$. С учетом этого уравнение (1) примет вид:

$$\frac{mV_0^2}{2} + mgh = \frac{mV^2}{2}. \tag{2}$$

Откуда

$$V = \sqrt{V_0^2 + 2gh}.$$

Проверка полученного ответа по наименованию показывает, что он согласуется с принятым в СИ.

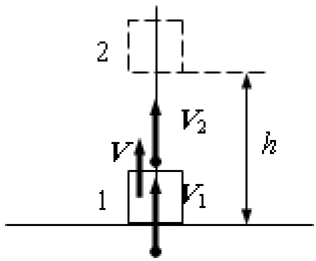
ПРИМЕЧАНИЕ.

Кроме энергетического подхода к решению этой задачи возможен и динамический.

Задача 3. На горизонтальной плоскости лежит кубик массой 100 *г*. Его пробивает летящая вертикально пуля массой 10 *г*. При этом ее скорость меняется от 100 до 95 *м/с*. Определить, на какую высоту подпрыгнет кубик.

h – ?

$m_1 = 10^{-2}$ *кг*
$m_2 = 10^{-1}$ *кг*
$V_1 = 100$ *м/с*
$V_2 = 95$ *м/с*



Выберем в качестве тела отсчета Землю. Связанную с ней систему отсчета будем считать инерциальной. Кубик и пулю будем считать материальными точками, а Землю – твердым телом. По условию задачи взаимодействующими телами будут пуля, кубик и Земля. Сначала пуля взаимодействует с кубиком, а потом кубик – с Землей. Так как взаимодействие пули с кубиком является ударным, то действием Земли на пулю и кубик за время удара можно пренебречь (внутренние силы гораздо больше внешних; время удара мало). При таких условиях будет выполняться закон сохранения импульса. На его основе можем записать:

$$m_1\boldsymbol{V}_1 = m_1\boldsymbol{V}_2 + m_2\boldsymbol{V}, \qquad (1)$$

где $\boldsymbol{V}$ – скорость кубика после пробивания его пулей.

Спроектировав уравнение (1) на вертикальное направление, получим:

$$m_1V_1 = m_1V_2 + m_2V. \qquad (2)$$

Отсюда

$$V = \frac{m_1(V_1 - V_2)}{m_2}. \tag{3}$$

После вылета пули из кубика он испытывает действие лишь силы тяжести. Эта сила – потенциальная. За нулевой уровень отсчета потенциальной энергии примем поверхность Земли. Под действием силы тяжести скорость кубика будет уменьшаться, вследствие этого будет убывать и кинетическая энергия. На какой-то высоте h она обратится в нуль.

Выберем два состояния механической системы: 1-е – кубик на горизонтальной плоскости, 2-е – кубик на высоте h. Изменения потенциальной и кинетической энергии Земли при переходе системы "кубик–Земля" из состояния 1 в состояние 2 – пренебрежимо малы (так как перемещение Земли и изменение скорости Земли при взаимодействии с телом обратно пропорциональны их массам, а масса Земли гораздо больше массы тела, то перемещением Земли по сравнению с перемещением тела и изменением скорости Земли по сравнению с изменением скорости тела действительно можно пренебречь). С учетом этого приходим к выводу о том, что речь может идти о сохранении только полной механической энергии кубика.

На основе закона сохранения полной механической энергии для кубика можем записать:

$$E_1 = E_2, \tag{4}$$

где E_1 и E_2 – полные механические энергии кубика в 1-м и 2-м состояниях.

Полная механическая энергия кубика в первом состоянии равна:

$$E_1 = \frac{m_2 V^2}{2}. \tag{5}$$

Полная механическая энергия кубика во втором состоянии:

$$E_2 = m_2gh. \qquad (6)$$

Из уравнения (6) с учетом (3)–(5) получим:

$$h = \frac{m_1^2(V_1 - V_2)^2}{2m_2^2 g}.$$

После проверки по наименованию и подстановки числовых значений получим:

$h = 0{,}125$ *м*.

Полученный ответ не противоречит здравому смыслу.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Задача 2.36. С какой наименьшей высоты должен начать скатываться акробат на велосипеде (не работая ногами), чтобы проехать по дорожке, имеющей форму "мертвой петли" радиусом 4 *м*, и не оторваться от дорожки в верхней точке петли? Трением пренебречь.

Ответ: 10 *м*.

Задача 2.37. Камешек скользит с наивысшей точки купола, имеющего форму полусферы. Какую дугу опишет камешек, прежде чем оторвется от поверхности купола? Трением пренебречь.

*Ответ:*48°.

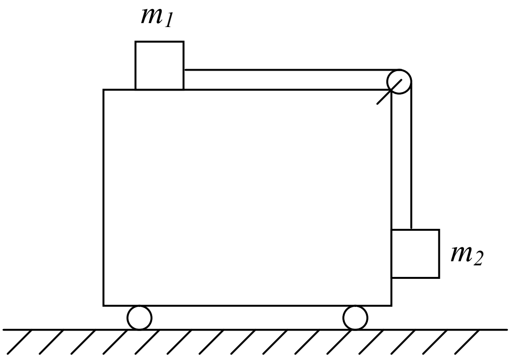
Задача 2.38. Мотоциклист едет по горизонтальной дороге. Какую наименьшую скорость он должен развить, чтобы, выключив мотор, проехать по треку, имеющему форму "мертвой петли" радиусом 4 *м*? Трением и сопротивлением воздуха пренебречь.

Ответ: 14 *м/с*.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА 2

ВАРИАНТ 1

Задача 1. С каким наименьшим ускорением должна двигаться тележка, чтобы положение грузов m_1 и m_2 по отношению к ней оставалось неизменным. Коэффициент трения $K = 0{,}3$, $m_1 = m_2$.

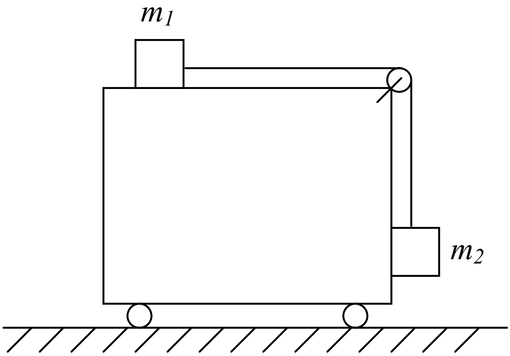


Задача 2. На железнодорожной платформе установлено орудие. Масса платформы с орудием $M = 15$ *т*. Орудие стреляет вверх под углом 60° к горизонту в направлении пути. С какой скоростью V_1 покатится платформа вследствие отдачи, если масса снаряда $m = 20$ *кг* и он вылетает со скоростью $V_2 = 600$ *м/с*?

Задача 3. Движущееся тело массой m_1 ударяется о неподвижное тело массой m_2. Считая удар неупругим и центральным, найти, какая часть первоначальной кинетической энергии переходит при ударе в тепло. Задачу решить для случая $m_1 = m_2$.

ВАРИАНТ 2

Задача 1. С каким наибольшим ускорением может двигаться тележка, чтобы положение грузов m_1 и m_2 по отношению к ней оставалось неизменным. Коэффициент трения $K = 0{,}3$, $m_1 = m_2$.

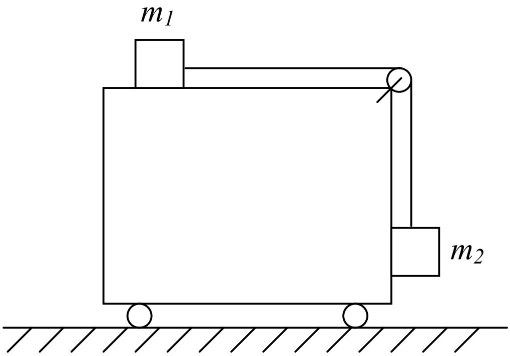


Задача 2. Два конькобежца массами 80 *кг* и 50 *кг*, держась за концы длинного натянутого шнура, неподвижно стоят на льду один против другого. Один из них начинает укорачивать шнур, выбирая его со скоростью $V = 1$ *м/с*. С какими скоростями U_1 и U_2 будут двигаться по льду конькобежцы? Трением пренебречь.

Задача 3. Движущееся тело массой m_1 ударяется о неподвижное тело массой m_2. Считая удар неупругим и центральным, найти, какая часть первоначальной кинетической энергии переходит при ударе в тепло. Задачу решить для случая $m_1 = 9m_2$.

ВАРИАНТ 3

Задача 1. С каким наименьшим ускорением должна двигаться тележка, чтобы положение грузов m_1 и m_2 по отношению к ней оставалось неизменным. Коэффициент трения $K = 0{,}3$, $m_1 > m_2$.

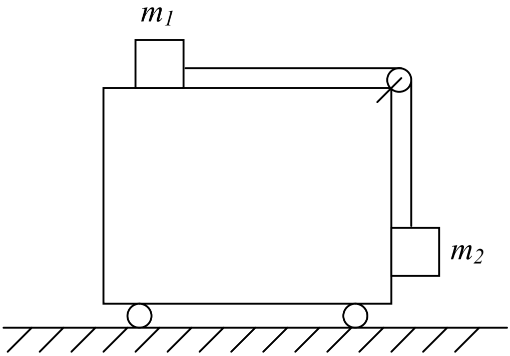


Задача 2. Лодка длиной L = 3 *м* стоит в неподвижной воде. Человек, находящийся в лодке, переходит с носа на корму. На какое расстояние s сдвинется при этом лодка относительно берега, если масса человека m = 60 *кг*, масса лодки M = 180 *кг*? Сопротивлением воды движению лодки пренебречь.

Задача 3. Движущееся тело массой m_1 ударяется о неподвижное тело массой m_2. Считая удар упругим и центральным, найти, какую часть своей первоначальной кинетической энергии первое тело передает второму при ударе. Задачу решить для случая $m_1 = m_2$.

ВАРИАНТ 4

Задача 1. С каким наименьшим ускорением должна двигаться тележка, чтобы положение грузов m_1 и m_2 по отношению к ней оставалось неизменным. Коэффициент трения $K = 0{,}3$; $m_1 < m_2$.

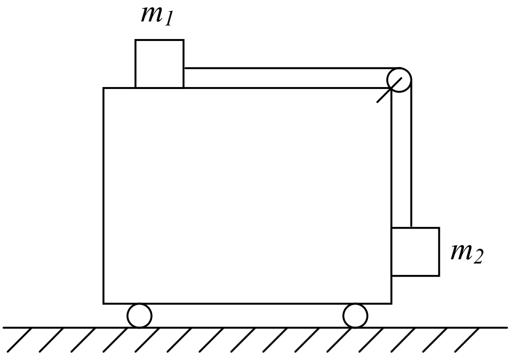


Задача 2. Ракету запустили со скоростью V под углом α к горизонту. В высшей точке траектории произошло разделение ступеней ракеты и первая ступень упала на Землю на расстоянии X_0 от места запуска. Определить дальность полета второй ступени ракеты, если масса второй ступени M_2 в K раз меньше массы первой ступени.

Задача 3. Движущееся тело массой m_1 ударяется о неподвижное тело массой m_2. Считая удар упругим и центральным, найти, какую часть своей первоначальной кинетической энергии первое тело передает второму при ударе. Задачу решить для случая $m_1 = 9m_2$.

ВАРИАНТ 5

Задача 1. С каким наибольшим ускорением должна двигаться тележка, чтобы положение грузов m_1 и m_2 по отношению к ней оставалось неизменным. Коэффициент трения $K = 0{,}3$; $m_1 > m_2$.

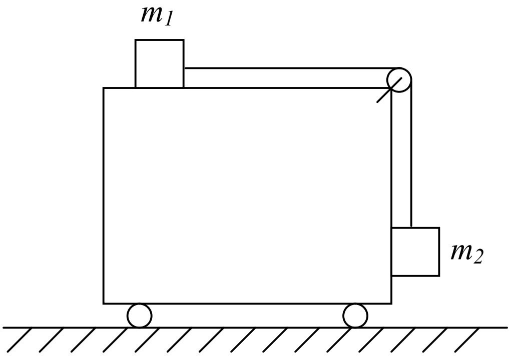


Задача 2. Две лодки массами M_1 и M_2 двигались навстречу друг к другу со скоростями V_1 и V_2. Когда лодки поравнялись друг с другом, пассажиры лодок поменялись грузами массами m_1 и m_2, сообщив им скорости соответственно u_1 и u_2 перпендикулярно движению лодок. Каковы скорости лодок после обмена грузами?

Задача 3. Движущееся тело массой m_1 ударяется о неподвижное тело массой m_2. Чему должно равняться отношение масс m_1/m_2, чтобы при центральном упругом ударе скорость первого тела уменьшилась в 1,5 раза? С какой кинетической энергией при этом начнет двигаться второе тело, если первоначальная кинетическая энергия первого тела E_1?

ВАРИАНТ 6

Задача 1. С каким наибольшим ускорением должна двигаться тележка, чтобы положение грузов m_1 и m_2 по отношению к ней оставалось неизменным. Коэффициент трения $K = 0{,}3$; $m_1 < m_2$.



Задача 2. Снаряд, выпущенный под углом 30° к горизонту, разрывается в верхней точке траектории на высоте 40 *м* на три одинаковые части, импульсы которых оказались расположенными в одной плоскости. Одна часть снаряда падает на землю через 1 *с* после взрыва под точкой взрыва, вторая – там же через 4 *с*. На каком расстоянии от места выстрела и с какой скоростью упадет третий осколок?

Задача 3. Движущееся тело массой m ударяется о неподвижное тело массой $12m$. Считая удар центральным и упругим, найти, во сколько раз уменьшится кинетическая энергия первого тела при ударе.

РАЗДЕЛ 3
ДИНАМИКА ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

3.1. ВРАЩАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА И ЕГО ХАРАКТЕРИСТИКИ

КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Вращательным называют такое движение, при котором все точки тела движутся по окружностям, центры которых лежат на одной прямой, называемой осью вращения, а плоскости перпендикулярны к ней. При рассмотрении вращательного движения используют идеализированный объект ***твердое тело*** - систему материальных точек, взаимное расположение которых не будет меняться ни при каких обстоятельствах.

Для описания вращения твердого тела пользуются понятиями момента инерции, момента импульса, момента силы.

Момент инерции системы (тела) относительно оси вращения – физическая величина, равная сумме произведений масс *n* материальных точек системы на квадраты их расстояний до рассматриваемой оси:

$$I = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 \ .$$

В случае непрерывного распределения масс эта сумма сводится к интегралу:

$$I = \int r^2 \, dm,$$

где интегрирование производится по всему объему тела.

В системе СИ единицей измерения момента инерции является: килограмм-метр квадратный:

$$\left[I \right] = кг \cdot м^2$$

Если известен момент инерции I_c относительно оси, проходящей через центр масс, то момент инерции I относительно любой другой параллельной оси определяется ***теоремой Штейнера***: момент инерции тела I относительно любой оси вращения равен сумме момента его инерции I_c относительно параллельной оси, проходящей через центр масс тела, и произведения массы m тела на квадрат расстояния a между осями

$$I = I_c + ma^2.$$

Моменты инерции однородных тел относительно оси, проходящей через центр масс:

- *сплошной цилиндр* (диск) радиуса R $\qquad I = \frac{1}{2}mR^2$;

- *полый цилиндр* (обруч) с внутренним R_1 и внешним R_2 радиусами $\qquad I = \frac{R_1^2 + R_2^2}{2}m$;

- *тонкостенный полый цилиндр* ($R_1 = R_2 = R$) $\qquad I = mR^2$;

- *шар* радиуса R $\qquad I = \frac{2}{5}mR^2$;

- *стержень* длиной l $\qquad I = \frac{1}{12}ml^2$.

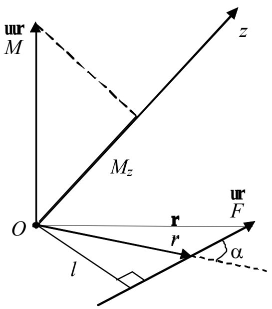


Рис. 3

Моментом силы относительно неподвижной точки О называется физическая величина, равная векторному произведению радиус-вектора $\vec{r}$ на вектор силы $\vec{F}$ (рис. 3):

$$\vec{M} = \left[\vec{r}\,\vec{F}\right].$$

Его модуль:

$$M = rF\sin\alpha = Fl,$$

где l - плечо силы.

Момент инерции измеряется:

$$\left[M\right] = H \cdot м .$$

Моментом силы относительно неподвижной оси *z* называется скалярная величина *M*, равная проекции на эту ось вектора M_z момента силы, определенного относительно произвольной точки О данной оси *z* (рис. 3).

Основное уравнение вращательного движения твердого тела относительно неподвижной оси вращения имеет вид:

$$\vec{M} = I\vec{\varepsilon},$$

где $\vec{\varepsilon}$ - угловое ускорение, приобретаемое телом с моментом инерции *I* под действием момента сил $\vec{M}$.

ВОПРОСЫ К СЕМИНАРУ

1. Из каких простых движений слагается движение твердого тела? Какое движение называется вращательным? Какие различают оси вращения? Что такое мгновенная ось вращения? Остается ли мгновенная ось неподвижной в теле? Приведите примеры мгновенных осей вращения.

2. Какое движение получается в результате сложения поступательного и вращательного движений цилиндра, катящегося по горизонтальной поверхности без скольжения? Покажите, что в этом случае угловая скорость вращения цилиндра около мгновенной оси равна угловой скорости вращения около оси, совпадающей с геометрической осью цилиндра. Какое движение называют плоскопараллельным?

3. Что называют числом степеней свободы? Сколько их у твердого тела?

4. Что называют моментом импульса твердого тела? Что называют моментом инерции твердого тела? Что называют моментом силы? Почему если на тело с

неподвижной осью вращения действуют несколько моментов сил, то векторное суммирование можно заменить алгебраическим? Покажите, что все силы реакции подшипников не создают моментов относительно оси вращения.

5. Получите математическое выражение основного закона динамики вращательного движения твердого тела около неподвижной оси вращения.

6. Сопоставляя $I\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{M}$ с законом Ньютона $m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}$, укажите, в чем состоит аналогия и каковы ее следствия.

7. Сколько моментов инерции может иметь данное тело? Сформулируйте и докажите теорему Штейнера.

8. Выведите формулы для вычисления моментов инерции диска относительно наиболее часто встречающихся осей его вращения.

9. Выведите формулу для вычисления кинетической энергии твердого тела. В чем основная идея вывода?

10. Сформулируйте закон сохранения момента импульса твердого тела. Приведите примеры его проявления и использования.

Сформулируйте основной закон динамики движения твердого тела в обобщенной форме. Поясните, как получается уравнение моментов.

12. Сформулируйте условия равновесия твердого тела.

ЛИТЕРАТУРА: [1], [2], [3], [4], [5], [6], [7], [8].

3.2. ДИНАМИКА ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ФИЗИЧЕСКИЕ ВЕЛИЧИНЫ, ОТНОСЯЩИЕСЯ К ТЕМЕ ПРАКТИЧЕСКОГО ЗАНЯТИЯ: *вращательное движение, ось вращения, подвижная ось вращения, неподвижная ось вращения, мгновенная ось вращения, угловое перемещение, угловая скорость, угловое ускорение, момент силы, момент инерции, момент импульса.*

МОДЕЛИ ФИЗИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ И МЕХАНИЧЕСКИХ ДВИЖЕНИЙ, РАССМАТРИВАЕМЫХ НА ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЯХ ПО ДАННОЙ ТЕМЕ: *твердое тело, равномерное вращение, равноускоренное вращательное движение, неравномерное вращение.*

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Объяснить, для чего введено каждое понятие, каждая физическая величина.

2. Перечислить, какими свойствами наделена каждая физическая величина.

3. Показать, что, обладая этими свойствами, физическая величина может выполнить свое предназначение.

4. Дать определение каждого понятия и каждой физической вели чины в соответствии с ГОСТом.

5. Привести определяющую формулу для каждой физической величины; проанализировать связь каждой физической величины с другими физическими величинами.

6. Указать, чем следует руководствоваться при выборе модели; объяснить, к чему приводит принятие той или иной модели.

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ ДЕЙСТВИЙ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ ДИНАМИКИ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

4.1. Выбрать ИСО.

4.2. Выбрать модель для движущегося тела. Выбрать ось вращения.

4.3. Выявить действующие на тело силы и точки их приложения; изобразить на рисунке силы, их моменты и угловое ускорение тела.

5.1. Записать основное уравнение динамики вращательного движение твердого тела в векторном виде и перейти к скалярной записи.

5.2. Исходя из определения физических величин (момента силы и момента инерции) и природы действующих сил, выразить их через величины, от которых они зависят. В случае если система скалярных уравнений будет неполной, нужно попытаться дополнить ее, используя кинематические связи или дополнительные и неявно выраженные условия.

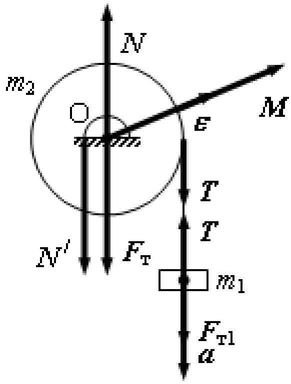
5.3. Решить систему уравнений.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задача 1. На горизонтальную ось насажен шкив радиуса R = 10 *см*. На шкив намотан шнур, к свободному концу которого подвесили гирю массой m_1 = 0,5 *кг*. Считая массу шкива m_2 = 1 *кг* равномерно распределенной по ободу, определить ускорение a, с которым будет опускаться гиря, силу натяжения нити T и силу давления $N^{/}$ шкива на ось.

a – ?
T – ?
N – ?

$R = 0{,}1$ *м*
$m_1 = 0{,}5$ *кг*
$m_2 = 1$ *кг*
$g = 9{,}8$ *м/с*^{2}



Выберем в качестве тела отсчета Землю. Связанную с ней систему отсчета будем считать инерциальной. Гирю будем считать материальной точкой, а шкив – твердым телом. Ось вращения шкива неподвижна, перпендикулярна плоскости шкива, проходит через точку О. На гирю действуют две силы: сила тяжести, направленная вертикально вниз, и сила натяжения нити, направленная вертикально вверх. На шкив действуют три силы: сила тяжести, сила реакции оси и сила натяжения нити, показанные на рисунке. На шкив действует только момент силы натяжения нити $\boldsymbol{M}$. Моменты силы тяжести шкива и силы реакции оси равны нулю, потому что линии их действия проходят через ось вращения. Направление момента силы, действующей на шкив, и угловое ускорение шкива показаны на рисунке.

В выбранной системе отсчета гиря будет совершать прямолинейное движение, а шкив – вращательное относительно неподвижной оси О.

Основное уравнение динамики движения гири имеет вид:

$$m_1\boldsymbol{a} = \boldsymbol{T} + \boldsymbol{F}_{т1}. \qquad (1)$$

Основное уравнение динамики вращательного движения шкива имеет вид:

$$\boldsymbol{I\varepsilon} = \boldsymbol{M}. \qquad (2)$$

Спроектировав уравнение (1) на вертикальное направление, а уравнение (2) – на направление оси вращения, получим:

$$m_1 a = -T + F_{т1}, \qquad (3)$$

$$I\varepsilon = M. \qquad (4)$$

Уравнения (3) и (4) содержат шесть неизвестных и поэтому представляют неполную систему. Дополним ее.

Исходя из определений силы тяжести и момента силы, можем записать:

$$F_{т1} = m_1 g, \qquad (5)$$

$$M = TR. \qquad (6)$$

Момент инерции шкива, поскольку его масса распределена по ободу, равен:

$$I = m_2 R^2. \qquad (7)$$

Считая, что шнур сматывается со шкива без проскальзывания, ускорение гири равно линейному ускорению точек обода шкива, можно записать:

$$a = \varepsilon R. \qquad (8)$$

Поскольку центр масс шкива при вращении неподвижен ($a = 0$), то можем записать:

$$m_2 \times 0 = \boldsymbol{F}_{т2} + \boldsymbol{T} + \boldsymbol{N}. \qquad (9)$$

Полученная система уравнений (3)–(9) является полной; решив ее, получим:

$$a = \frac{m_1 g}{m_1 + m_2}, \qquad (10)$$

$$T = \frac{m_1 m_2 g}{m_1 + m_2}, \qquad (11)$$

$$N = \frac{m_2 (m_2 + 2m_1) g}{m_1 + m_2}, \qquad (12)$$

Искомую силу давления N шкива на ось найдем, воспользовавшись третьим законом Ньютона:

$$\boldsymbol{N} = -\boldsymbol{N}' . \qquad (13)$$

Единицы измерения искомых величин, как вытекает из уравнений (10)–(12), согласуются с принятыми в СИ.

Подставив числовые значения и проведя вычисления, получим:

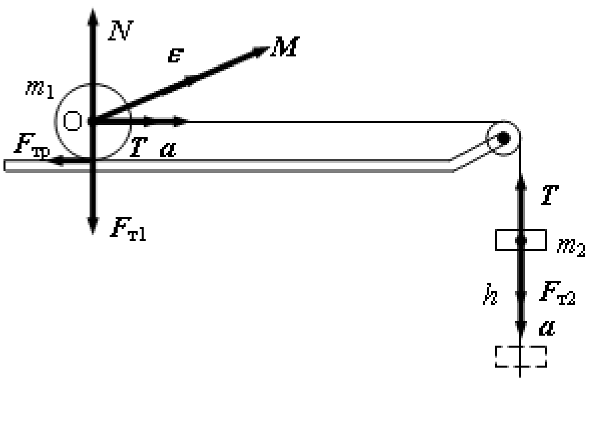
$a = 3{,}27$ *м/с*^{2};
$T = 3{,}27$ *Н*;
$N = 13{,}1$ *Н*.

Задача 2. Система, состоящая из цилиндрического катка радиуса R и гири, связанных нитью, перекинутой через блок, под действием силы тяжести гири приходит в движение из состояния покоя. Определить ускорение a центра масс катка и силу натяжения T нити. Какую скорость V приобретет гиря, если она опустится с высоты h? Масса цилиндра m_1, масса гири m_2, массой блока пренебречь. Считать, что цилиндр катится по горизонтальной поверхности без скольжения. Трением качения пренебречь.

<u>1-й вариант</u>

a – ?
T – ?
V – ?

R
m_1
m_2
h
g



Выберем в качестве тела отсчета Землю. Связанную с ней систему отсчета будем считать инерциальной. Гирю будем считать материальной точкой, а каток – твердым телом. Качение цилиндрического катка представим как сложное движение, состоящее из вращения вокруг оси, совпадающей с осью симметрии катка, проходящей через точку О, и поступательного движения со скоростью оси.

На гирю действуют две силы: сила тяжести $\boldsymbol{F}_{т2}$, направленная вертикально вниз, и сила натяжения нити $\boldsymbol{T}$, направленная вертикально вверх. На каток действуют четыре силы: сила тяжести $\boldsymbol{F}_{т1}$, сила реакции опоры $\boldsymbol{N}$, сила натяжения нити $\boldsymbol{T}$ и сила трения покоя $\boldsymbol{F}_{тр}$, показанные на рисунке. На каток действует только момент силы трения $\boldsymbol{M}$. Моменты силы тяжести катка, силы реакции поверхности и силы натяжения нити равны нулю потому, что линии их действия проходят через ось вращения О. Направление момента силы $\boldsymbol{F}_{тр}$, действующей на каток, угловое ускорение катка, ускорение центра масс катка и ускорение гири показаны на рисунке.

В выбранной системе отсчета при выбранном представлении движения катка он будет совершать вращательное движение относительно оси О и поступательное – параллельно горизонтальной поверхности, а гиря – прямолинейное движение вдоль вертикали.

Основное уравнение динамики движения гири имеет вид:

$$m_2\boldsymbol{a} = \boldsymbol{T} + \boldsymbol{F}_{т2}. \qquad (1)$$

Основное уравнение динамики вращательного движения катка имеет вид:

$$I_0\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{M}. \qquad (2)$$

А основное уравнение поступательного движения катка:

$$m_1\boldsymbol{a} = \boldsymbol{T} + \boldsymbol{F}_{тр} + \boldsymbol{F}_{т1} + \boldsymbol{N}. \qquad (3)$$

Спроектировав уравнение (1) на вертикальное направление, уравнение (2) – на направление оси вращения, а уравнение (3) – на горизонтальное и вертикальное, получим:

$$m_2 a = -T, \tag{4}$$

$$I_0 \varepsilon = M, \tag{5}$$

$$m_1 a_0 = T - F_{\text{тр}}, \tag{6}$$

$$m_1 \times 0 = F_{\text{т}1} - N. \quad 7)$$

Уравнения (4)–(7) содержат восемь неизвестных и поэтому представляют неполную систему. Дополним ее.

Исходя из определений силы тяжести, момента силы и связи между тангенциальным и угловым ускорениями, можем записать:

$$F_{\text{т}1} = m_1 g, \tag{8}$$

$$F_{\text{т}2} = m_2 g, \tag{9}$$

$$M = F_{\text{тр}} R, \tag{10}$$

$$a_{\text{т}} = \varepsilon R. \tag{11}$$

Момент инерции цилиндрического катка, предполагая, что его масса распределена равномерно по объему цилиндра, равен:

$$I_0 = \frac{1}{2} m_1 R^2 . \tag{12}$$

Так как каток движется без проскальзывания, то модуль тангенциального ускорения внешних точек катка равен модулю ускорения центра масс катка и равен модулю ускорения гири, можно записать:

$$a_{\text{т}} = a_0 = a. \tag{13}$$

Полученная система уравнений (4)–(13) является полной, решив ее, получим:

$$a_0 = \frac{2m_2 g}{3m_1 + 2m_2} . \tag{14}$$

$$T = \frac{3m_1 m_2 g}{3m_1 + 2m_2} . \tag{15}$$

Гиря, опускаясь равноускоренно с высоты h, как известно из кинематики, приобретет скорость V равную:

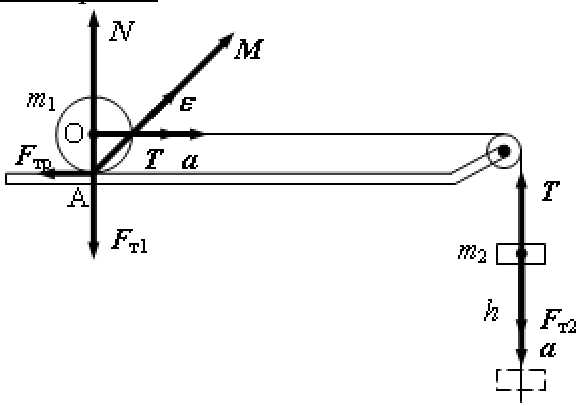
$$V = \sqrt{2ah}\,. \qquad (16)$$

Подставив значение ускорения в уравнение (16), получим:

$$V = 2\sqrt{\frac{m_2 gh}{3m_1 + 2m_2}}\,. \qquad (17)$$

Проверка полученных ответов по наименованиям входящих в них величин, показывает, что они согласуются с принятыми в СИ.

<u>2-й вариант</u>



Выберем в качестве тела отсчета Землю. Связанную с ней систему отсчета будем считать инерциальной. Гирю считаем материальной точкой, а каток – твердым телом. Качение цилиндрического катка представим как вращение вокруг мгновенной оси, проходящей через точку касания цилиндра с плоскостью (точка А).

На гирю действуют две силы: сила тяжести $\boldsymbol{F}_{т2}$, направленная вертикально вниз, и сила натяжения нити $\boldsymbol{T}$, направленная вертикально вверх. На каток действуют четыре силы: сила тяжести $\boldsymbol{F}_{т1}$, сила реакции опоры $\boldsymbol{N}$, сила натяжения нити $\boldsymbol{T}$ и сила трения покоя $\boldsymbol{F}_{тр}$, показанные на рисунке. На каток действует только момент силы натяжения нити $\boldsymbol{M}$. Моменты силы тяжести катка, силы реакции поверхности и силы трения равны нулю потому, что линии их действия проходят через ось вращения А. Направление момента силы натяжения нити, действующего на каток, угловое ускорение катка, ускорение центра масс катка и ускорение гири, показаны на рисунке.

В выбранной системе отсчета при выбранном представлении движения катка он будет совершать вращательное движение относительно оси А, а гиря – прямолинейное движение вдоль вертикали.

Основное уравнение динамики движения гири имеет вид:

$$m_2\boldsymbol{a} = \boldsymbol{T} + \boldsymbol{F}_{\text{т}2}. \tag{1}$$

Основное уравнение динамики вращательного движения катка имеет вид:

$$I_{\text{A}}\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{M}. \tag{2}$$

Спроектировав уравнение (1) на вертикальное направление, а уравнение (2) – на направление оси вращения, получим:

$$m_2 a = -T, \tag{3}$$

$$I_{\text{A}}\varepsilon = M. \tag{4}$$

Уравнения (3)–(4) содержат пять неизвестных и поэтому представляют неполную систему. Дополним ее.

Исходя из определений силы тяжести, момента силы и связи между тангенциальным и угловым ускорениями, можем записать:

$$F_{\text{т}1} = m_1 g, \tag{8}$$

$$F_{\text{т}2} = m_2 g, \tag{5}$$

$$M = TR, \tag{6}$$

$$a_0 = \varepsilon R. \tag{7}$$

Момент инерции I_A цилиндрического катка (предполагая, что его масса распределена равномерно по объему цилиндра) по теореме Штейнера равен:

$$I_A = \frac{1}{2} m_1 R^2 + m_1 R^2 . \qquad (8)$$

Полученная система уравнений (3)–(7) является полной; решив, ее получим:

$$a_0 = \frac{2m_2 g}{3m_1 + 2m_2}, \qquad (9)$$

$$T = \frac{3m_1 m_2 g}{3m_1 + 2m_2}. \qquad (10)$$

Гиря, опускаясь равноускоренно с высоты h без начальной скорости, как известно из кинематики, приобретет скорость V равную:

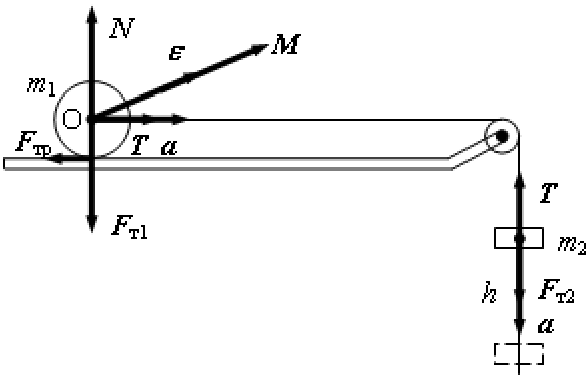
$$V = \sqrt{2ah}. \qquad (11)$$

Подставив значение ускорения в уравнение (11), получим:

$$V = 2\sqrt{\frac{m_2 g h}{3m_1 + 2m_2}}. \qquad (12)$$

Проверка полученных ответов по наименованиям входящих в них величин, показывает, что они согласуются с принятыми в СИ.

<u>3-й вариант</u>



Выберем в качестве тела отсчета Землю. Связанную с ней систему отсчета будем считать инерциальной. Гирю считаем материальной точкой, а каток – твердым телом. Качение цилиндрического катка представим как сложное движение, состоящее из вращения вокруг оси, совпадающей с осью симметрии катка, проходящей через точку О, и поступательного движения со скоростью оси.

На гирю действуют две силы: сила тяжести $\boldsymbol{F}_{т2}$, направленная вертикально вниз, и сила натяжения нити $\boldsymbol{T}$, направленная вертикально вверх. На каток действуют четыре силы: сила тяжести $\boldsymbol{F}_{т1}$, сила реакции опоры $\boldsymbol{N}$, сила натяжения нити $\boldsymbol{T}$ и сила трения покоя $\boldsymbol{F}_{тр}$, показанные на рисунке. На каток действует только момент силы трения покоя $\boldsymbol{M}$. Моменты силы тяжести катка, силы реакции поверхности и силы натяжения нити равны нулю потому, что линии их действия проходят через ось вращения О. Направление момента силы трения покоя, действующего на каток, показано на рисунке.

В выбранной системе отсчета при выбранном представлении движения катка он будет совершать вращательное движение относительно оси О и поступательное – параллельно горизонтальной поверхности, а гиря – прямолинейное движение вдоль вертикали.

В данном случае вращающийся каток не изолирован, так как на него действует момент внешних сил – момент силы трения покоя. Однако так как работа силы трения покоя равна нулю, то нет рассеяния механической энергии. Следовательно, система "каток–гиря" ведет себя как замкнутая; ее полная механическая энергия будет сохраняться.

Выберем нулевой уровень отсчета высоты проходящим через центр масс опущенной гири. Этот же уровень будет нулевым и для отсчета потенциальной энергии. Поскольку в условии задачи нет детальной информации о взаимном расположении горизонтальной плоскости и гири, то возможны такие варианты действий. Первый – задаться каким-то значением этой высоты, например, H, а второй – обойти эту неопределенность, исключив из уравнения, которое может быть записано на основании закона сохранения полной механической энергии, потенциальную энергию катка, так как при качении катка по горизонтальной поверхности она все равно будет оставаться неизменной, присутствуя одновременно в левой и правой частях уравнения. Как видно, варианты действий могут быть разными, а результат будет одинаковым.

В исходном состоянии полная механическая энергия системы "каток–гиря" W_1 равна лишь потенциальной энергии поднятой на высоту h гири:

$$W_1 = m_2 gh. \tag{1}$$

В конечном состоянии полная механическая энергия W_2 этой же системы равна сумме кинетической энергии опускающейся гири и кинетической энергии вращающегося и поступательно движущегося катка:

$$W_2 = \frac{m_2 V^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2} + \frac{m_1 V^2}{2}, \tag{2}$$

где ω – угловая скорость вращения катка, I – момент инерции катка относительно оси O, V – скорость поступательного движения катка, равная скорости опускающейся гири.

Так как выше было показано, что при качении катка (без проскальзывания) под действием гири не будет превращения механической энергии системы "каток–гиря" в другие виды энергии, то можем приравнять полную механическую энергию системы "каток–гиря" в исходном W_1 и конечном W_2 состояниях:

$$m_2 gh = \frac{m_2 V^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2} + \frac{m_1 V^2}{2}. \qquad (3)$$

При качении без проскальзывания скорость центра масс катка будет равна линейной скорости внешних (поверхностных) точек катка и, как известно из кинематики, связана с угловой скоростью вращения катка уравнением:

$$V = \omega R, \qquad (4)$$

где R – радиус катка.

Момент инерции катка как сплошного цилиндра радиуса R равен:

$$I = \frac{m_1 R^2}{2}. \qquad (5)$$

Из уравнения (3), с учетом (4) и (5), можно найти скорость гири, которая будет равна скорости центра масс катка:

$$V = 2\sqrt{\frac{m_2 gh}{3m_1 + 2m_2}}. \qquad (6)$$

Ускорение центра масс катка можно найти, воспользовавшись связью (известной из кинематики) между скоростью, ускорением и путем, пройденным материальной точкой, при равноускоренном движении без начальной скорости:

$$V^2 = 2a_0 h. \qquad (7)$$

Откуда

$$a_0 = \frac{2m_2 g}{3m_1 + 2m_2}. \qquad (8)$$

Натяжение нити T можно найти разными способами, например, исходя из энергетических соображений. Работа силы $\boldsymbol{T}$, приложенной к центру масс катка, при перемещении на расстояние h равна приращению кинетической энергии катка при этом перемещении:

$$Th = \frac{m_1 V^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2}. \qquad (9)$$

Отсюда

$$T = \frac{3m_1 m_2 g}{3m_1 + 2m_2}. \qquad (10)$$

Проверка ответов по наименованию входящих в них физических величин показывает, что они согласуются с принятыми в СИ.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Задача 3.1. На горизонтальную ось насажены маховик и легкий шкив радиусом R = 5 *см*. На шкив намотан шнур, к которому привязан груз массой m = 0,4 *кг*. Опускаясь равноускоренно, груз прошел путь s = 1,8 *м* за время t_1 = 3 *с*. Определить момент инерции I маховика. Массу шкива считать пренебрежимо малой.

Ответ: $2{,}35 \cdot 10^{-2}$ *кг·м*^{2}.

Задача 3.2. Вал массой m = 100 *кг* и радиусом R = 5 *см* вращался с частотой n = 8 *с*$^{-1}$. К цилиндрической поверхности вала прижали тормозную колодку с силой F = 40 *Н*, под действием которой вал остановился через t_1 =10 *с*. Определить коэффициент трения.

Ответ: 0,314.

Задача 3.3. Два тела массами m_1 = 0,25 *кг* и m_2 = 0,15 *кг* связаны тонкой нитью, переброшенной через блок. Блок укреплен на краю горизонтального стола, по поверхности которого скользит тело массой m_2. С каким ускорением a движутся тела и каковы силы T_1 и T_2 натяжения нити по обе стороны от блока? Коэффициент трения f тела о поверхность стола равен 0,2. Масса m блока равна 0,1 *кг* и ее можно считать равномерно распределенной по ободу. Массой нити и трением в подшипниках оси блока пренебречь.

Ответ: 4,2 *м/с*^{2}; 1,4 *Н*; 0,3 *Н*.

Задача 3.4. На барабан радиусом R = 10 *см* намотана нить, к концу которой привязан груз массой m = 0,50 *кг*. Найти момент инерции барабана, если груз опускается с ускорением a = 1,0 *м/с*^{2}.

Ответ: $4{,}4 \cdot 10^{-2}$ *кг·м*^{2} .

Задача 3.5. Какой путь пройдет катящийся без скольжения диск, поднимаясь вверх по наклонной плоскости с углом наклона 30°, если ему сообщена начальная скорость 7,0 *м/с*, параллельная наклонной плоскости?

Ответ: 7,5 *м*.

Задача 3.6. Какую работу нужно совершить, чтобы маховику в виде диска массой 100 *кг* и радиусом 0,4 *м* сообщить частоту вращения 10 *об/с*, если он находился в состоянии покоя?

Ответ: 400 *Дж*.

Задача 3.7. Определить тормозящий момент, которым можно остановить за 20 *с* маховое колесо массой 50 *кг* и радиусом 0,30 *м*, вращающееся с частотой 20 *об/с*. Массу маховика считать распределенной по ободу. Чему равна работа, совершаемая тормозящим моментом?

Ответ: 35,5 *кДж*.

Задача 3.8. При наличии трения обруч скатывается с наклонной плоскости, а при отсутствии – скользит по ней. В каком случае и во сколько раз скорость, которую будет иметь обруч у основания наклонной плоскости, больше?

Ответ: 1,22.

3.3. ЗАКОН ИЗМЕНЕНИЯ МОМЕНТА ИМПУЛЬСА ТВЕРДОГО ТЕЛА

КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Моментом импульса материальной точки относительно произвольной точки O называется векторная физическая величина, численно равная векторному произведению радиус-вектора $\vec{r}$ на импульс $\vec{p}$ материальной точки:

$$\vec{L} = \left[\vec{r}\,\vec{p}\right].$$

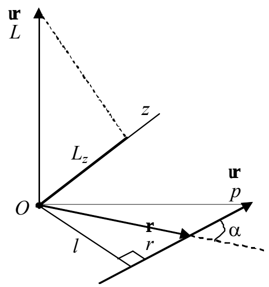


Рис. 4

Его модуль:

$$\left|L\right| = rp\sin\alpha = pl,$$

где $l = r\sin\alpha$ - плечо вектора $\vec{p}$ относительно точки O.

Момент импульса в системе СИ:

$$\left[L\right] = кг \cdot м^2 / с.$$

Моментом импульса относительно неподвижной оси z называется скалярная величина L_z, равная проекции на эту ось вектора момента импульса, определенного относительно произвольной точки O данной оси (рис. 4). Значение L_z не зависит от положения точки O на этой оси.

Используя выражение для момента импульса, можно получить другую форму ***основного уравнения динамики вращательного движения*** твердого тела

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}.$$

Кинетическая энергия тела с моментом инерции I, вращающегося вокруг неподвижной оси с угловой скоростью ω:

$$E_k = \frac{I\omega^2}{2}.$$

В случае *плоского движения твердого тела* кинетическая энергия:

$$E_k = \frac{mv_c^2}{2} + \frac{I_c\omega^2}{2},$$

где I_c – момент инерции относительно оси, проходящей через центр масс, v_c – его скорость.

Мощность при вращении твердого тела:

$$N = M\omega.$$

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ФИЗИЧЕСКИЕ ВЕЛИЧИНЫ, ОТНОСЯЩИЕСЯ К ТЕМЕ ПРАКТИЧЕСКОГО ЗАНЯТИЯ: *момент импульса, момент силы, момент инерции, угловая скорость, ось вращения, система отсчета, ИСО, НИСО, незамкнутая (неизолированная) система.*

МОДЕЛИ ФИЗИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ И МЕХАНИЧЕСКИХ ДВИЖЕНИЙ, РАССМАТРИВАЕМЫХ НА ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЯХ ПО ДАННОЙ ТЕМЕ: *твердое тело, равномерное вращение, равноускоренное вращение,*

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Объяснить, для чего введено каждое понятие, каждая физическая величина.

2. Перечислить, какими свойствами наделена каждая физическая величина.

3. Показать, что, обладая этими свойствами, физическая величина может выполнить свое предназначение.

4. Дать определение каждого понятия и каждой физической вели чины в соответствии с ГОСТом.

5. Привести определяющую формулу для каждой физической величины; проанализировать связь каждой физической величины с другими физическими величинами.

6. Указать, чем следует руководствоваться при выборе модели; объяснить к чему приводит принятие той или иной модели.

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ ДЕЙСТВИЙ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ ДИНАМИКИ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ЗАКОНА ИЗМЕНЕНИЯ МОМЕНТА ИМПУЛЬСА

1-я группа задач. Отличительный признак: незамкнутость системы взаимодействующих тел.

4.1. Выбрать ИСО.

4.2. Выделить рассматриваемые объекты, выбрать ось вращения, изобразить действующие на рассматриваемые объекты силы, моменты этих сил и моменты импульсов этих объектов.

5.1. Записать в векторной форме основное уравнение динамики вращательного движения твердого тела; перейти к скалярной записи, спроектировав их на направление параллельное оси вращения.

5.2. Решить уравнение.

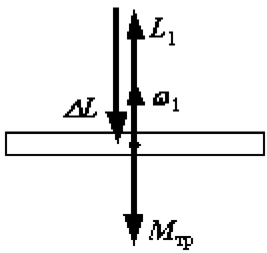
ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задача 1. Маховик в виде диска массой $m = 50$ *кг* и радиусом $R = 20$ *см* был раскручен до частоты вращения $n_1 = 480$ *об/мин* и затем предоставлен самому себе. Вследствие трения маховик остановился. Найти: изменение момента импульса маховика и момент сил трения, считая его постоянным, для двух случаев: 1) маховик остановился через $t_1 = 50$ *с*; 2) маховик до полной остановки сделал $N = 200$ оборотов.

1-й случай

ΔL – ?
$M_{тр}$ – ?

$m = 50$ *кг*
$R = 0{,}2$ *м*
$n_1 = 8\ с^{-1}$
$t_1 = 50$ *с*
$g = 9{,}8$ *м/с*^{2}



Выберем в качестве тела отсчета Землю. Связанную с ней систему отсчета будем считать инерциальной.

Маховик будем считать твердым телом. Ось вращения маховика проходит через его центр масс перпендикулярно плоскости диска. В выбранной системе отсчета на маховик действуют три силы: сила тяжести, направленная вертикально вниз, сила реакции опоры маховика, направленная вертикально вверх, и сила трения. Действие силы тяжести и силы реакции опоры компенсируется. Моменты этих сил относительно оси вращения равны нулю. Момент силы трения $\boldsymbol{M}_{тр}$ отличен от нуля и направлен вдоль оси вращения как показано на рисунке. Момент импульса маховика $\boldsymbol{L}_1$ направлен вдоль оси вращения и тоже показан на рисунке.

Момент импульса маховика $\boldsymbol{L}_1$ на основании определения равен:

$$\boldsymbol{L}_1 = I\boldsymbol{\omega}_1, \tag{1}$$

где I – момент инерции маховика, а $\boldsymbol{\omega}_1$ – его угловая скорость.

Момент инерции маховика, имеющего форму диска, относительно оси вращения, проходящей через его центр масс перпендикулярно плоскости диска, равен:

$$I = \frac{mR^2}{2}. \tag{2}$$

Модуль угловой скорости $\boldsymbol{\omega}_1$ равен:

$$\boldsymbol{\omega}_1 = 2\pi n_1. \tag{3}$$

Модуль момента импульса маховика L_1 в начале торможения с учетом (2) и (3) равен:

$$L_1 = \frac{mR^2}{2} \cdot 2\pi n_1. \tag{4}$$

Момент импульса маховика $\boldsymbol{L}_2$ в конце движения равен нулю.

Поэтому изменение момента импульса $\boldsymbol{\Delta L}$ за время торможения равно:

$$\boldsymbol{\Delta L} = \boldsymbol{L}_2 - \boldsymbol{L}_1 = -\boldsymbol{L}_1. \tag{5}$$

Модуль изменения момента импульса маховика за время торможения равен:

$$\Delta L = mR^2\pi n_1. \tag{6}$$

Направление вектора $\boldsymbol{\Delta L}$ показано на рисунке.

Считая момент силы трения постоянным, воспользовавшись обобщенным уравнением динамики движения твердого тела (так называемым уравнением моментов), можем записать:

$$\boldsymbol{M}_{\text{тр}} = \boldsymbol{\Delta L}/t_1. \tag{7}$$

Спроектировав (7) на направление оси вращения, получим:

$$M_{\text{тр}} = -\Delta L/t_1. \qquad (8)$$

Модуль $M_{\text{тр}}$, с учетом (6), равен:

$$M_{\text{тр}} = \frac{mR^2\pi n_1}{t_1}. \qquad (9)$$

Направление момента сил трения определяется соотношением (7).

Проверка полученных ответов по наименованиям входящих в них величин показывает, что они согласуются с принятыми в СИ.

После подстановки числовых значений и вычислений получим:

$\Delta L = 50{,}2\ кг{\cdot}м^2{\cdot}с^{-1}$;

$M_{\text{тр}} = -1\ Н{\cdot}м$.

<u>2-й случай</u>

ΔL – ?

$M_{\text{тр}}$ – ?

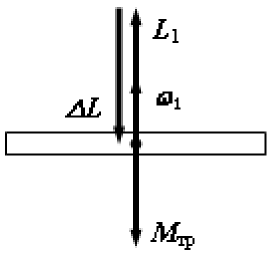
$m = 50\ кг$

$R = 0{,}2\ м$

$n_1 = 8\ с^{-1}$

$N = 200\ об$

$g = 9{,}8\ м/с^2$



Выберем в качестве тела отсчета Землю. Связанную с ней систему отсчета будем считать инерциальной.

Маховик считаем твердым телом. Ось вращения маховика проходит через его центр масс перпендикулярно плоскости диска. В выбранной системе отсчета на маховик действуют три силы: сила тяжести, направленная вертикально вниз, сила реакции опоры маховика, направленная вертикально вверх, и сила трения. Действие силы тяжести и силы реакции опоры компенсируется. Моменты этих сил относительно оси вращения равны нулю. Момент силы трения $\boldsymbol{M}_{\text{тр}}$ отличен от нуля, направлен вдоль оси вращения как показано на рисунке. Момент импульса маховика $\boldsymbol{L}_1$ направлен вдоль оси вращения и тоже показан на рисунке.

Момент импульса маховика $\boldsymbol{L}_1$, на основании определения, равен:

$$\boldsymbol{L}_1 = I\boldsymbol{\omega}_1, \qquad (1)$$

где I – момент инерции маховика, а $\boldsymbol{\omega}_1$ – его угловая скорость.

Момент инерции маховика, имеющего форму диска, относительно оси вращения, проходящей через его центр масс перпендикулярно плоскости диска, равен:

$$I = \frac{mR^2}{2}. \qquad (2)$$

Модуль угловой скорости $\boldsymbol{\omega}_1$ равен:

$$\boldsymbol{\omega}_1 = 2\pi n_1. \qquad (3)$$

Модуль момента импульса маховика L_1 в начале торможения с учетом (2) и (3) равен:

$$L_1 = \frac{mR^2}{2} \cdot 2\pi n_1. \qquad (4)$$

Момент импульса маховика $\boldsymbol{L}_2$ в конце движения равен нулю.

Поэтому изменение момента импульса $\boldsymbol{\Delta L}$ за время торможения равно:

$$\boldsymbol{\Delta L} = \boldsymbol{L}_2 - \boldsymbol{L}_1 = -\boldsymbol{L}_1. \qquad (5)$$

Модуль изменения момента импульса маховика за время торможения равен:

$$\Delta L = mR^2\pi n_1. \qquad (6)$$

Направление вектора $\boldsymbol{\Delta L}$ показано на рисунке.

Раскрученный маховик обладает кинетической энергией $E_к$ равной:

$$E_к = \frac{I\omega_1^2}{2}. \qquad (7)$$

Момент сил трения совершает над маховиком работу $A_{тр}$ равную:

$$A_{тр} = M_{тр} \cdot \varphi, \qquad (8)$$

где φ – угол, на который повернется маховик до полной остановки.

С другой стороны, эта работа равна приращению кинетической энергии маховика.

Так как кинетическая энергия остановившегося маховика равна нулю, то получим:

$$A_{тр} = 0 - E_к = -\frac{I\omega_1^2}{2}. \qquad (9)$$

Из уравнений (8) и (9)

$$M_{тр} = -\frac{I\omega_1^2}{2\varphi}. \qquad (10)$$

Угол, на который повернется маховик, сделав N оборотов, равен:

$$\varphi = 2\pi N. \qquad (11)$$

С учетом этого окончательно для момента сил трения получим:

$$M_{тр} = -\frac{I\omega_1^2}{2\pi N}. \qquad (12)$$

Знак минус указывает на то, что момент сил трения замедляет движение.

Наименование $M_{тр}$ согласуется с принятым в СИ.

Подставив числовые значения и проведя вычисления, получим:

$\Delta L = 50{,}2$ *кг*·м^2·*с*$^{-1}$;

$M_{тр} = -1$ *Н·м*.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Задача 3.9. Определить тормозящий момент, которым можно остановить за 20 *с* маховое колесо массой 50 *кг* и радиусом 0,3 *м*, вращающееся с частотой 20 *об./с*. Массу маховика считать распределенной по ободу. Чему равна работа, совершаемая тормозящим моментом?

Ответ: 35,5 *кДж*.

Задача 3.10. Какую мощность должен развивать мотор, приводящий в движение стабилизирующий гироскоп, который имеет форму диска радиусом 1 *м* и массой 1000 *кг*, если в течение 1 *мин* угловая скорость доводится до 31 *рад/с*? Трением и сопротивлением воздуха пренебречь.

Ответ: 4 *кВт*.

Задача 3.11. Какую работу нужно совершить, чтобы маховику в виде диска массой 100 *кг* и радиусом 0,4 *м* сообщить частоту вращения 10 *об/с*, если он находился в состоянии покоя?

Ответ: 15,8 *кДж*.

Задача 3.12. Найти полезную мощность двигателя, приводящего в движение платформу в виде диска массой 280 *кг* и радиусом 1 *м*, на краю которой стоит человек массой 60 *кг*, если за 30 *с* платформа приобретает скорость, соответствующую частоте 1,2 *об/с*.

Ответ: 189,5 *Вт*.

3.4. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ МОМЕНТА ИМПУЛЬСА ТВЕРДОГО ТЕЛА

КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

В замкнутой системе тел момент внешних сил равен нулю, следовательно $\frac{d\vec{L}}{dt}=0$ и $\vec{L}=const$ - ***закон сохранения момента импульса***: момент импульса замкнутой системы сохраняется, т.е. не меняется с течением времени.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

Перечислить основные понятия и физические величины, относящиеся к данной теме, а также назвать модели тел и движений, используемых при решении задач по данной теме.

1. Объяснить, для чего введено каждое понятие, каждая физическая величина.
2. Перечислить, какими свойствами наделена каждая физическая величина.
3. Показать, что, обладая этими свойствами, физическая величина может выполнить свое предназначение.
4. Дать определение каждого понятия и каждой физической величины в соответствии с ГОСТом.
5. Привести определяющую формулу для каждой физической величины; проанализировать связь каждой физической величины с другими физическими величинами.
6. Указать, чем следует руководствоваться при выборе модели; объяснить, к чему приводит принятие той или иной модели.

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ ДЕЙСТВИЙ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ ДИНАМИКИ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ЗАКОНА СОХРАНЕНИЯ МОМЕНТА ИМПУЛЬСА

2-я группа задач. Отличительный признак: замкнутость системы взаимодействующих тел.

4.1. Выбрать ИСО.

4.2. Выделить взаимодействующие тела, выбрать ось вращения, изобразить действующие на рассматриваемые объекты силы, моменты этих сил и моменты импульсов этих объектов.

5.1. Если взаимодействующие тела представляют изолированную (замкнутую) систему, то воспользоваться законом сохранения момента импульса, записав его сначала в векторной форме, а потом – в скалярной.

5.2. Если система взаимодействующих тел в целом незамкнута, но сумма проекций моментов сил на какое-то направление равна нулю, то воспользоваться законом сохранения для проекций момента импульса на это направление.

5.3. Решить систему скалярных уравнений.

ПРИМЕЧАНИЯ.

5.1.1. Поскольку замкнутая (изолированная) система – это идеализация, то в реальных условиях закон сохранения момента импульса применим к таким взаимодействиям, при которых внутренние силы намного больше внешних и последними (внешними) можно пренебречь.

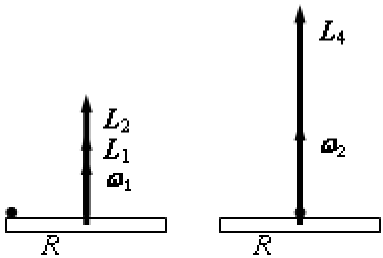
5.1.2. Применяя закон сохранения момента импульса, надо следить за тем, чтобы моменты импульсов и моменты сил были взяты относительно одной и той же оси.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задача 1. Круглая платформа радиусом $R = 1$ *м*, момент инерции которой $I = 130$ *кг·м*^{2}, вращается по инерции вокруг вертикальной оси, делая $n_1 = 1$ *об/с*. На краю платформы стоит человек, масса которого $m = 70$ *кг*. Сколько оборотов в секунду будет совершать платформа, если человек перейдет в ее центр? Момент инерции человека рассчитать как для материальной точки.

n_2 – ?

$R = 1$ *м*
$I = 150$ *кг·м*^{2}
$n_1 = 1$ *с*$^{-1}$
$m = 70$ *кг*
$g = 9{,}8$ *м/с*^{2}



Выберем в качестве тела отсчета Землю. Связанную с ней систему отсчета будем считать инерциальной.

В данной задаче взаимодействуют человек и платформа. Человека будем считать материальной точкой, а платформу – твердым телом. Ось вращения платформы проходит через центр масс платформы. В выбранной системе отсчета на человека действуют две силы: сила тяжести, направленная вертикально вниз и сила реакции платформы, направленная вертикально вверх. Моменты этих сил относительно оси вращения платформы равны нулю. На платформу действуют три силы: сила тяжести платформы, сила давления человека и сила реакции Земли (опорного подшипника). Момент этих сил относительно оси вращения тоже равен нулю. Момент импульса человека $\boldsymbol{L}_1$ и момент импульса платформы $\boldsymbol{L}_2$ направлены вдоль оси вращения в одну сторону и показаны на рисунке.

Перемещаясь по платформе, человек взаимодействует с ней. О характере этого взаимодействия нам ничего не известно, поэтому записать основное уравнение динамики вращательного движения для платформы не представляется возможным. Однако из условия задачи известно, что платформа с человеком вращается по инерции. Это значит, что результирующий момент внешних сил равен нулю. Следовательно, система взаимодействующих тел "платформа–человек" изолирована и для нее будет справедлив закон сохранения момента импульса. На основании этого закона можем записать:

$$\boldsymbol{L}_3 = \boldsymbol{L}_4, \qquad (1)$$

где $\boldsymbol{L}_3$ – момент импульса системы до начала движения человека от края платформы, $\boldsymbol{L}_4$ – момент импульса системы в тот момент, когда человек находится в центре платформы.

Момент импульса величина аддитивная, поэтому момент импульса системы "человек–платформа" равен векторной сумме момента импульса человека и момента импульса платформы, т.е.:

$$\boldsymbol{L}_3 = \boldsymbol{L}_1 + \boldsymbol{L}_2. \qquad (2)$$

Момент импульса $\boldsymbol{L}_1$ человека равен:

$$\boldsymbol{L}_1 = I_1\boldsymbol{\omega}_1, \qquad (3)$$

где I_1 – момент инерции человека, а $\boldsymbol{\omega}_1$ – угловая скорость платформы.

Момент инерции I_1 как для материальной точки равен:

$$I_1 = mR^2. \qquad (4)$$

Угловая скорость платформы равна:

$$\omega_1 = 2\pi n_1. \qquad (5)$$

Момент импульса платформы $\boldsymbol{L}_2$ равен:

$$\boldsymbol{L}_2 = I\boldsymbol{\omega}_1. \qquad (6)$$

Момент импульса системы $\boldsymbol{L}_4$ после взаимодействия (когда человек находится в центре платформы) равен:

$$\boldsymbol{L}_4 = I_4\boldsymbol{\omega}_2, \qquad (7)$$

где I_4 – момент инерции платформы с человеком, стоящим в ее центре, $\boldsymbol{\omega}_2$ – угловая скорость платформы после перехода человека в центр платформы.

Момент инерции I_4 как величина аддитивная равен сумме момента инерции платформы и момента инерции человека, когда он стоит в центре платформы. В данной конкретной ситуации момент инерции человека равен нулю. Поэтому

$$I_4 = I. \tag{8}$$

Угловая скорость платформы равна:

$$\omega = 2\pi n_2. \tag{9}$$

Решив систему (1)–(9), получим:

$$n_2 = \frac{n_1(I + mR^2)}{I}. \tag{10}$$

Проверив полученный ответ по наименованию входящих в него величин, убедимся в том, что он согласуется с наименованием принятым в СИ.

Подставив числовые значения в выражение (10) и выполнив вычисления, получим:

$n_2 = 1{,}5$ *об/с*.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Задача 3.13. Человек стоит на скамье Жуковского и ловит рукой мяч массой 0,4 *кг*, летящий в горизонтальном направлении со скоростью 20 *м/с*. Траектория мяча проходит на расстоянии 0,8 *м* от вертикальной оси вращения скамьи. С какой угловой скоростью начнет вращаться скамья Жуковского с человеком, поймавшим мяч, если суммарный момент инерции человека и скамьи равен 6 $кг{\cdot}м^2$?

Ответ: 1,02 *рад/с*.

Задача 3.14. Маховик, имеющий вид диска радиусом 40 *см* и массой 48 *кг*, может вращаться вокруг горизонтальной оси. К его цилиндрической поверхности прикреплен конец нерастяжимой нити, к другому концу которой подвешен груз массой 0,2 *кг*. Груз был приподнят и затем отпущен. Упав свободно с высоты 2 *м*, груз натянул нить и благодаря этому привел маховик во вращение. Какую угловую скорость груз сообщил при этом маховику?

Ответ: 0,129 *рад/с*.

Задача 3.15. На краю горизонтальной платформы, имеющей форму диска радиусом 2 *м*, стоит человек массой 80 *кг*. Масса платформы равна 240 *кг*. Платформа может вращаться вокруг вертикальной оси, проходящий через ее центр. Пренебрегая трением, найти, с какой угловой скоростью будет вращаться платформа, если человек будет идти вдоль ее края со скоростью 2 *м/с* относительно платформы.

Ответ: 0,4 *рад/с*.

Задача 3.16. Платформа, имеющая форму диска, может вращаться около вертикальной оси. На краю платформы стоит человек массой 60 *кг*. На какой угол повернется платформа, если человек пойдет вдоль края платформы и, обойдя его, вернется в исходную точку на платформе? Масса платформы 240 *кг*. Момент инерции человека рассчитывать как для материальной точки.

Ответ: $2\pi/3$.

Задача 3.17. Платформа в виде диска радиусом 1 *м* вращается по инерции с частотой 6 $мин^{-1}$. На краю платформы стоит человек, масса которого равна 80 *кг*. С какой частотой будет вращаться платформа, если человек перейдет в его центр? Момент инерции платформы равен

120 $кг \cdot м^2$. Момент инерции человека рассчитывать как для материальной точки.

Ответ: 10 $мин^{-1}$.

Задача 3.18. На скамье Жуковского стоит человек и держит в руках стержень длиной 2,4 *м* и массой 8 *кг*, расположенный вертикально по оси вращения скамейки. Скамья с человеком вращается с частотой 1 $с^{-1}$. С какой частотой будет вращаться скамья с человеком, если он повернет стержень в горизонтальное положение? Суммарный момент инерции человека и скамьи равен 6 $кг \cdot м^2$.

Ответ: 0,61 $с^{-1}$.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА 3

ВАРИАНТ 1

Задача 1. Тележка, имеющая четыре колеса массой m, находится на горизонтальном столе. Масса тележки без колес M. К тележке привязана нить с грузом массой $2M$ на конце. Нить перекинута через неподвижный блок, укрепленный на краю стола, и вся система находится в движении. Полагая колеса однородными дисками, катящимися без скольжения, и пренебрегая трением качения, определите натяжение нити.

Задача 2. Однородный диск радиусом 0,2 *м* и массой 5 *кг* вращается вокруг оси, проходящей через его центр. Зависимость угловой скорости вращения диска от времени имеет вид $\omega = 3 + 8t$. Найти величину касательной силы, приложенной к ободу.

Задача 3. Пуля массой 10 *г* летит горизонтально со скоростью 400 *м/с*, вращаясь с частотой 300 *Гц*. Считая пулю сплошным цилиндром, определить ее полную кинетическую энергию.

ВАРИАНТ 2

Задача 1. Вал массой $m = 100$ *кг* и радиусом $R = 5$ *см* вращался с частотой $n = 8$ c^{-1}. К цилиндрической поверхности вала прижали тормозную колодку с силой $F = 40$ *Н*, под действием которой вал остановился через 10 *с*. Определить коэффициент трения *f*.

Задача 2. К ободу колеса в виде диска радиусом 1 *м* и массой 5 *кг* приложена касательная сила 10 *Н*. Найти угловое ускорение колеса и время, через которое колесо будет вращаться с частотой 100 *Гц*. Трением пренебречь.

Задача 3. Диск радиусом 10 *см* и массой 1 *кг* вращается вокруг оси, проходящей через цент масс. Уравнение движения диска имеет вид $\varphi = 0{,}5 + 4t^2 - t^3$. Определить момент сил к моменту времени 2 *с*. Считать массу диска равномерно распределенной по ободу.

ВАРИАНТ 3

Задача 1. Какой путь пройдет катящийся без скольжения диск, поднимаясь вверх по наклонной плоскости с углом наклона 30°, если ему сообщена начальная скорость 7,0 *м/с*, параллельная наклонной плоскости?

Задача 2. Маховик, момент инерции которого 50 $кг \cdot м^2$, вращается с постоянной угловой скоростью 10π *рад/с*. Найти тормозящий момент, под действием которого маховик остановится через 10 *мин*.

Задача 3. Шар радиусом 10 *см* и массой 1 *кг* вращается вокруг оси, проходящей через цент масс. Уравнение движения шара имеет вид $\varphi = 1 + 2t^2 - t^3$. Как меняется момент сил, действующих на шар?

ВАРИАНТ 4

Задача 1. При выстреле орудия снаряд вылетел из ствола с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega} = 200\ c^{-1}$ под углом $\alpha = 60°$ к горизонту. Момент инерции снаряда относительно его продольной оси $I = 15$ *кг/м*^{2}, расстояние между колесами орудия $l = 1{,}5$ *м*, время движения снаряда в стволе $t = 2\cdot10^{-2}$ *с*. На сколько отличаются силы давления земли, действующие на колеса во время выстрела?

Задача 2. Однородный шар радиусом 50 с*м* и массой 5 *кг* вращается вокруг оси, проходящей через его центр масс. Зависимость угловой скорости вращения шара от времени имеет вид $\omega = 8 + 5t$. Как меняется касательная сила, приложенная к ободу?

Задача 3. Определить линейную скорость цента шара, скатившегося без скольжения с наклонной плоскости высотой 1 *м*.

ВАРИАНТ 5

Задача 1. Маховик, представляющий собой диск массой m =10 *кг* и радиусом R =10 *см*, свободно вращается вокруг оси, которая проходит через центр, с круговой частотой 8 c^{-1}. При торможении маховик останавливается через t = 5 *с*. Определить тормозящий момент.

Задача 2. Однородный стержень длиной 50 с*м* и массой 2 *кг* вращается вокруг оси, проходящей через один из его концов. Зависимость угловой скорости вращения стержня от времени имеет вид $\omega = 6 + 8t$. Найти момент сил к моменту времени 3 *с*.

Задача 3. Какой промежуток времени будет скатываться полый цилиндр с наклонной плоскости длиной 2 *м* и высотой 50 *см*?

ВАРИАНТ 6

Задача 1. На горизонтальную ось насажены маховик и легкий шкив радиусом 5 *см*. На шкив намотан шнур, к которому привязан груз массой 0,4 *кг*. Опускаясь равноускоренно, груз прошел путь 1,8 *м* за 3 *с*. Определить момент инерции маховика. Массу шкива считать пренебрежимо малой.

Задача 2. Однородный стержень длиной 50 с*м* и массой 2 *кг* вращается вокруг оси, отстоящей на 25 *см* от одного из его концов. Зависимость угловой скорости вращения стержня от времени имеет вид $\omega = 6 + 8t$. Как меняется момент сил, действующий на стержень?

Задача 3. Обруч и сплошной цилиндр, имеющие одинаковые радиус и массу, скатываются с наклонной плоскости. Сравнить их полную кинетическую энергию.

РАЗДЕЛ 4
КОЛЕБАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ

4.1. КИНЕМАТИКА И ДИНАМИКА КОЛЕБАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Колебания – процесс, характеризующийся определенной повторяемостью во времени. ***Гармонические колебания*** **—** колебания, при которых смещение x материальной точки изменяется со временем по закону синуса или косинуса:

$$x = A\sin(\omega t + \varphi_0),$$

где A – максимальное смещение точки из положения равновесия (***амплитуда*** колебаний);

ω - ***циклическая частота***;

$\varphi = \omega t + \varphi_0$ ***- фаза*** колебаний в момент времени t;

φ_0 – ***начальная фаза***.

Гармонические колебания повторяются через промежуток времени T, называемый ***периодом*** колебания**,** за который фаза колебания получает приращение 2π:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

Величина, обратная периоду колебаний, т. е. число полных колебаний, совершаемых в единицу времени, называется ***частотой*** ν колебаний:

$$\nu = \frac{1}{T}.$$

Циклическая частота ω и частота ν колебаний связаны соотношением:

$$\omega = 2\pi\nu .$$

Дифференциальное уравнение свободных гармонических колебаний:

$$\frac{d^2s}{dt^2} + \omega_0^2 s = 0$$

или

$$s'' + \omega_0^2 s = 0 .$$

Период колебаний для простейших колебательных систем:

- *пружинный маятник* $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$,

где m – масса груза, k - коэффициент жесткости пружины;

- *математический маятник* $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$,

где l – длина подвеса, g - ускорение свободного падения;

- *физический маятник* $T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgl}}$,

где I – момент инерции тела, l - расстояние между точкой подвеса и центром масс;

- *крутильный маятник* $T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{D}}$,

где I – момент инерции тела, D - коэффициент упругости кручения образца.

ВОПРОСЫ К СЕМИНАРУ

1. Колебательные процессы. Свободные и вынужденные колебания

2. Гармонические колебания:

- понятие гармонических колебаний;
- их характеристики;
- графическое представление колебаний.

3. Механические гармонические колебания:

- скорость;

- ускорение;

- сила;

- графическое представление кинематических и динамических величин.

4. Кинетическая, потенциальная и полная энергии материальной точки, совершающей прямолинейные гармонические колебания.

5. Простейшие колебательные системы:

- гармонический осциллятор, дифференциальное уравнение свободных гармонических колебаний;

- математический маятник;

- горизонтальный пружинный маятник;

- физический маятник;

- поплавковый маятник;

- крутильный маятник.

6. Сложение гармонических колебаний:

- одного направления и одинаковой частоты;

- взаимноперпендикулярных направлений и одинаковой частоты;

- фигуры Лиссажу.

7. Затухающие колебания:

- дифференциальное уравнение свободных гармонических колебаний;

- декремент затухания, добротность системы.

8. Вынужденные колебания.

ЛИТЕРАТУРА [1], [2], [3], [4], [5], [6], [7], [8].

4.2. КИНЕМАТИКА КОЛЕБАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

Перечислить основные понятия и физические величины, относящиеся к данной теме, а также назвать модели тел и движений, используемых при решении задач по данной теме.

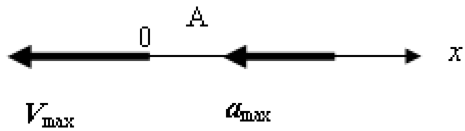
1. Объяснить, для чего введено каждое понятие, каждая физическая величина.
2. Перечислить, какими свойствами наделена каждая физическая величина.
3. Показать, что, обладая этими свойствами, физическая величина может выполнить свое предназначение.
4. Дать определение каждого понятия и каждой физической величины в соответствии с ГОСТом.
5. Привести определяющую формулу для каждой физической величины; проанализировать связь каждой физической величины с другими физическими величинами.
6. Указать, чем следует руководствоваться при выборе модели; объяснить, к чему приводит принятие той или иной модели.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задача 1. Материальная точка совершает гармонические колебания с частотой 500 *Гц* и амплитудой 0,020 *см*. Определить средние значения модуля скорости и ускорения точки на пути от ее крайнего положения до положения равновесия, а также найти максимальные значения этих величин.

$V_{ср}$ – ? $a_{ср}$ – ?
V_{max} – ? a_{max} – ?

ν = 500 *Гц*
A = 0,020 *см*



Выберем в качестве тела отсчета землю. Объект исследования – материальная точка. Воспользуемся координатным способом описания движения. Предполагая, что материальная точка совершает гармонические колебания вдоль прямой, ограничимся одной координатной осью *x*. Пусть ее начало совпадает с положением равновесия. За начало отсчета времени примем момент прохождения материальной точкой положения равновесия.

В выбранной системе отсчета кинематическое уравнение гармонических колебаний материальной точки запишется:

$$x = A\sin\omega_0 t. \qquad (1)$$

Модуль средней скорости равен:

$$V_{ср} = \frac{\Delta r}{\Delta t}. \qquad (2)$$

где модуль перемещения $\Delta r = A$, а интервал времени $\Delta t = \frac{T}{4}$.

С учетом этого будем иметь:

$$V_{ср} = 4\frac{A}{T}. \qquad (3)$$

По определению, частота колебаний:

$$\nu = \frac{1}{T}. \qquad (4)$$

Откуда

$$T = \frac{1}{\nu}. \qquad (5)$$

С учетом этого

$$V_{\text{ср}} = 4\nu A. \qquad (6)$$

После проверки полученного ответа по наименованию и подстановки числовых значений получим:

$V_{\text{ср}} = 0{,}40$ *м/с*.

Проекция (на ось Оx) мгновенной скорости при координатном способе описания движения равна:

$$V = \frac{dx}{dt} = A\omega_0 \cos\omega_0 t\,. \qquad (7)$$

Максимальное значение скорости будет при $\cos\omega_0 t = 1$:

$$V_{\max} = A\omega_0. \qquad (8)$$

Циклическая и линейная частоты связаны соотношением:

$$\omega_0 = 2\pi\nu. \qquad (9)$$

С учетом этого максимальное значение скорости равно:

$$V_{\max} = 2\pi\nu A. \qquad (10)$$

После проверки по наименованию и подстановки числовых значений получим:

$V_{max} = 0{,}63$ *м/с*.

По определению, модуль среднего ускорения равен:

$$a_{\text{ср}} = \frac{\Delta V}{\Delta t}\,. \qquad (11)$$

где ΔV – приращение модуля скорости, равное ($V_{max} - 0$), а $\Delta t = \dfrac{T}{4}$, т.е.

$$a_{\text{ср}} = \frac{4V_{\max}}{T}\,. \qquad (12)$$

С учетом (10) и (5) модуль среднего ускорения равен:

$$a_{\text{ср}} = 8\pi\omega^2 A. \qquad (13)$$

После проверки по наименованию и подстановки числовых значений получим:

$a_{ср} = 1{,}2 \cdot 10^3$ *м/с*^{2}.

Модуль мгновенного ускорения при координатном способе описания движения равен:

$$a = \left|\frac{dV}{dt}\right| = \left|- A\omega_0^2 \sin\omega_0 t\right|. \qquad (14)$$

Максимальное значение модуля ускорения равно:

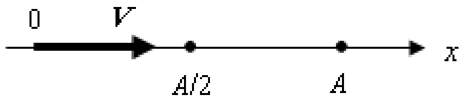
$$a_{max} = A\omega_0^2 = 4\pi^2\nu^2 A. \qquad (15)$$

После проверки по наименованию и подстановки числовых значений получим:

$a_{max} = 2{,}0 \cdot 10^3$ *м/с*^{2}.

Задача 2. За какую часть периода точка, совершающая гармоническое колебание, пройдет путь, равный половине амплитуды, если в начальный момент она находилась в положении равновесия?

t_1/T – ?
$S = A/2$



Примем в качестве тела отсчета землю. Точку будем считать материальной. Воспользуемся координатным способом описания движения. Предполагая гармонические колебания происходящими по одной прямой, ограничимся одной координатной осью *x*, направление которой показано на рисунке. Начало оси *x* совпадает с положением равновесия материальной точки. За начало отсчета времени примем момент прохождения материальной точкой положения равновесия.

В выбранной системе отсчета кинематическое уравнение гармонического колебания будет иметь вид:

$$x = A\sin\omega_0 t. \qquad (1)$$

По определению, путь равен длине траектории, пройденной материальной точкой при движении в одном направлении. В рассматриваемом случае $S = x(t_1) - 0 = A/2$.

При $t = t_1$ $x = A/2$. С учетом этого из уравнения (1) получим:

$$\frac{A}{2} = A\sin\omega_0 t_1. \tag{2}$$

По определению циклической частоты:

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}. \tag{3}$$

Уравнение (2) с учетом (3) примет вид:

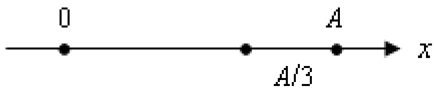
$$\frac{A}{2} = A\sin\frac{2\pi t_1}{T}. \tag{4}$$

Откуда

$$\frac{t_1}{T} = \frac{1}{12}. \tag{5}$$

Задача 3. За какую часть периода точка, совершающая гармоническое колебание, пройдет путь, равный одной трети амплитуды, если в начальный момент она находилась в крайнем положении?

$t_1/T - ?$
$S = A/3$



Примем в качестве тела отсчета землю. Точку будем считать материальной. Воспользуемся координатным способом описания движения. Предполагая гармонические колебания происходящими по одной прямой, ограничимся одной координатной осью x, направление которой показано на рисунке. Начало оси x совпадает с положением равновесия материальной точки. За начало отсчета времени примем момент нахождения материальной точки в крайнем правом положении.

В выбранной системе отсчета кинематическое уравнение гармонического колебания будет иметь вид:

$$x = A\sin(\omega_0 t + \alpha_0). \qquad (1)$$

Исходя из начальных условий, найдем α_0. При $t = 0$ $x = A$. С учетом этого уравнение (1) примет вид:

$$A = A\sin(\omega_0 \times 0 + \alpha_0). \qquad (2)$$

Откуда $\alpha_0 = \frac{\pi}{2}$.

Таким образом, уравнение гармонических колебаний примет вид:

$$x = A\sin\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{2}\right). \qquad (3)$$

По определению, путь равен длине траектории, пройденной материальной точкой при движении в одном направлении. В рассматриваемом случае S как величина положительная равен:

$$S = x(0) - x(t_1) = A - x(t_1) = \frac{A}{3}. \qquad (4)$$

Откуда координата материальной точки в момент времени $t = t_1$ равна $\frac{2}{3}A$.

При $t = t_1$ $x = \frac{2}{3}A$. С учетом этого, из уравнения (1) получим:

$$\frac{2}{3}A = A\sin\left(\omega_0 t_1 + \frac{\pi}{2}\right). \qquad (5)$$

По определению циклической частоты:

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}. \qquad (6)$$

Уравнение (5) с учетом (6) примет вид:

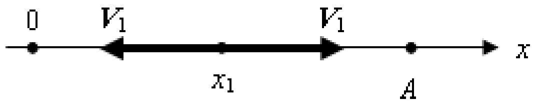
$$\frac{2}{3}A = A\sin\left(\frac{2\pi t_1}{T} + \frac{\pi}{2}\right). \qquad (7)$$

Откуда $\frac{t_1}{T} \approx 0{,}134$.

Задача 4. Материальная точка совершает гармоническое колебание с частотой 0,5 *Гц*. Амплитуда 3 *см*. Определить скорость точки в момент времени, когда смещение 1,5 *см*.

$V_1 - ?$

$A = 3$ *см*
$x_1 = 1{,}5$ *см*
$\nu = 0{,}5$ *Гц*



Выберем в качестве тела отсчета землю. Воспользуемся координатным способом описания движения материальной точки. Предполагая, что гармоническое колебание происходит вдоль одной прямой, ограничимся осью *x*; ее начало совпадает с положением равновесия материальной точки. За начало отсчета времени примем момент прохождения материальной точкой положения равновесия.

В выбранной системе отсчета кинематическое уравнение гармонического колебания запишется:

$$x = A\sin\omega_0 t. \qquad (1)$$

Проекция скорости V при координатном способе описания движения равна:

$$V = \frac{dx}{dt} = A\omega_0\cos\omega_0 t. \qquad (2)$$

Из тригонометрии известно, что

$$\cos\omega_0 t = \sqrt{1 - \sin^2\omega_0 t}\ . \qquad (3)$$

Выразив $\sin\omega_0 t$ из уравнения (1), подставив его в уравнение (3), а затем полученное выражение для $\cos\omega_0 t$ – в уравнение (2), получим:

$$V = \omega_0 \sqrt{A^2 - x^2}\ . \tag{4}$$

Из уравнения (4) следует, что скорость материальной точки, совершающей гармоническое колебание, является функцией смещения.

При $x = x_1$ $V = V_1$. С учетом этого уравнение (4) примет вид:

$$V_1 = \omega_0 \sqrt{A^2 - x_1^2}\ . \tag{5}$$

Воспользовавшись связью между циклической и линейной частотой, будем иметь

$$\omega_0 = 2\pi\nu. \tag{6}$$

Подставив (6) в (5), для V_1 окончательно получим:

$$V_1 = 2\pi\nu \sqrt{A^2 - x_1^2}\ . \tag{7}$$

Проверив по наименованию и подставив числовые значения, получим:

$V_1 = 0{,}082$ *м/с*.

При координатном способе описания движения имеем информацию о проекции скорости на выбранное направление. Знак "+" указывает на то, что вектор скорости совпадает с направлением выбранной оси координат, а знак "–" – что он имеет противоположное направление.

Материальная точка, совершающая гармоническое колебание, имеет смещение x_1 дважды: один раз двигаясь от положения равновесия, а второй – двигаясь к положению равновесия. Это и обусловливает два знака у проекции скорости V_1.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Задача 4.1. Уравнение колебаний, записанное в СИ, имеет вид: $x = \sin(300t - \sigma)$. Указать его амплитуду, начальную фазу, частоту и период.

Ответ: 1 *м*; σ; 47,8 *Гц*; 0,02 *с*.

Задача 4.2. Два одинаково направленные гармонические колебания с равными частотами и амплитудами 9 *см* и 6 *см* образуют новое гармоническое колебание той же частоты. Амплитуда результирующего колебания 7 *см*. Начальная фаза первого колебания 0,5 *рад*. Определить начальную фазу второго колебания.

Ответ: 2,75.

Задача 4.3. Камертон колеблется с частотой 800 *Гц* и амплитудой 4 *мм*. Найти максимальное ускорение его колеблющейся ветви.

Ответ: 10^5 *м/с*^{2}.

Задача 4.4. Два одинаково направленные колебания с периодами 0,3 *с* и 0,4 *с* складываются, образуя новое колебание. Найти его период.

Ответ: 1,2 *с*.

Задача 4.5. Написать уравнение гармонического колебания с амплитудой 5 *см*, если в минуту совершается 150 колебаний и начальная фаза колебаний равна 45°. Начертить график этого движения.

Задача 4.6. Через какое время после начала движения точка, совершающая гармоническое колебание, сместится от положения равновесия на половину амплитуды? Период колебаний равен 24 *с*, начальная фаза равна нулю.

Ответ: 4 *с*.

Задача 4.7. За какое время от начала движения точка, совершающая колебательное движение, описываемое уравнением $x = \sin 0{,}5\pi t$, проходит путь от положения равновесия до максимального смещения?

Ответ: 1 *с.*

Задача 4.8. Начальная фаза гармонического колебания равна нулю. При смещении точки от положения равновесия, равном 2,4 *см*, скорость точки равна 3 *см/с*, а при смещении, равном 2,8 *см*, скорость равна 2 *см/с*. Найти амплитуду и период этого колебания.

Ответ: 0,16 *м*; 0.015 *с.*

Задача 4.9. Построить графики зависимости от времени смещения, скорости и ускорения при простом гармоническом колебании. Построить графики зависимости скорости и ускорения от смещения. Найти соотношение между амплитудами смещения, скорости и ускорения.

Задача 4.10. Начальная фаза гармонического колебания равна нулю. Через какую долю периода скорость точки будет равна половине ее максимальной скорости?

Ответ: Т/12.

4.3. ДИНАМИКА КОЛЕБАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ФИЗИЧЕСКИЕ ВЕЛИЧИНЫ, ОТНОСЯЩИЕСЯ К ТЕМЕ ПРАКТИЧЕСКОГО ЗАНЯТИЯ: *смещение, амплитуда, фаза, начальная фаза, период, частота, циклическая частота, возвращающая сила, сила сопротивления, вынуждающая сила, собственные колебания, свободные колебания, затухающие колебания, вынужденные колебания, резонанс, резонансная частота, коэффициент затухания, логарифмический декремент, параметры колебательной системы.*

МОДЕЛИ ФИЗИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ И МЕХАНИЧЕСКИХ ДВИЖЕНИЙ, РАССМАТРИВАЕМЫХ НА ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЯХ ПО ДАННОЙ ТЕМЕ: *пружинный маятник, математический маятник, физический маятник, гармонические колебания, незатухающие колебания.*

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Объяснить, для чего введено каждое понятие, каждая физическая величина.

2. Перечислить, какими свойствами наделена каждая физическая величина.

3. Показать, что, обладая этими свойствами, физическая величина может выполнить свое предназначение.

4. Дать определение каждого понятия и каждой физической величины в соответствии с ГОСТом.

5. Привести определяющую формулу для каждой физической величины; проанализировать связь каждой физической величины с другими физическими величинами.

6. Указать, чем следует руководствоваться при выборе модели; объяснить, к чему приводит принятие той или иной модели.

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ ДЕЙСТВИЙ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ ДИНАМИКИ КОЛЕБАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

4.1. Выбрать ИСО.

4.2. Выбрать модель колебательной системы. Выявить положение устойчивого равновесия колебательной системы и действующие силы (или моменты сил); изобразить их.

5.1. Записать основное уравнение динамики движения колебательной системы в векторной форме и перейти к скалярной записи.

5.2. Исходя из физической природы сил и моментов сил, выразить их через величины, от которых они зависят.

5.3. Привести уравнение к стандартной форме записи линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка и получить из него информацию о циклической частоте колебаний.

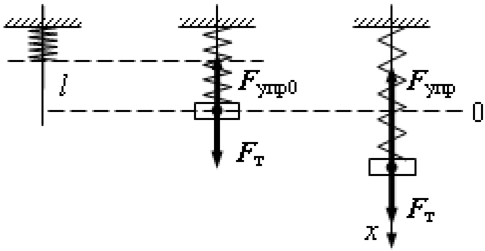
5.4. Используя связи между параметрами колебательного движения и кинематическое уравнение колебаний, найти неизвестные величины.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задача 1. Когда груз неподвижно висел на вертикальной пружине, ее удлинение было 5 *см*. Затем груз оттянули и отпустили, вследствие чего он начал колебаться. Каков период этих колебаний?

$T - ?$

$\Delta l = 0{,}05$ *м*
$g = 9{,}8$ *м/с*^{2}



Выберем в качестве тела отсчета Землю. Связанную с ней систему отсчета будем считать инерциальной, а груз – материальной точкой. Груз на пружине похож на пружинный маятник, однако отличается от него тем, что в данном случае кроме упругой силы действует еще и неупругая по своей природе сила – сила тяжести. Поэтому нет оснований сразу воспользоваться для нахождения периода колебаний такой колебательной системы формулой для периода колебаний пружинного маятника.

Положением устойчивого равновесия колебательной системы будет точка, совпадающая с неподвижно висящим грузом. На груз действуют сила тяжести и упругая сила. Воспользуемся координатным способом описания движения. Ограничимся одной вертикальной осью, начало которой совпадает с неподвижно висящим грузом. Направление оси и сил после оттягивания груза показаны на рисунке. Основное уравнение динамики движения материальной точки при координатном способе его описания будет иметь вид:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -F_{\text{упр}} + F_{\text{тж}}\,. \qquad (1)$$

На основании закона Гука:

$$F_{\text{упр}} = k(\Delta l + x), \qquad (2)$$

где k – коэффициент жесткости пружины; x – смещение груза от положения устойчивого равновесия.

На основании определения силы тяжести:

$$F_{тж} = mg. \tag{3}$$

Из условия равновесия системы имеем:

$$F_{упро} = F_{тж}. \tag{4}$$

По закону Гука

$$F_{упро} = k \cdot \Delta l. \tag{5}$$

Уравнение (1) с учетом (2) и (3) примет вид:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -F_{тж} - kx + F_{тж} = -kx\,. \tag{6}$$

Из уравнений (5) и (4) коэффициент жесткости равен:

$$k = \frac{mg}{\Delta l}\,. \tag{7}$$

С учетом (2), (3) и (7) уравнение (1) примет вид:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{gx}{\Delta l} = 0\,. \tag{8}$$

В уравнении (8) коэффициент, стоящий перед x, равен квадрату циклической частоты колебаний:

$$\omega^2 = \frac{g}{\Delta l}\,. \tag{9}$$

Период колебаний связан с циклической частотой соотношением:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}\,. \tag{10}$$

Окончательно, с учетом (9), получим:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\Delta l}{g}}\,.$$

После проверки ответа по наименованию и подстановки числовых значений получим:

$T = 0{,}44$ c.

Полученный ответ не противоречит здравому смыслу.

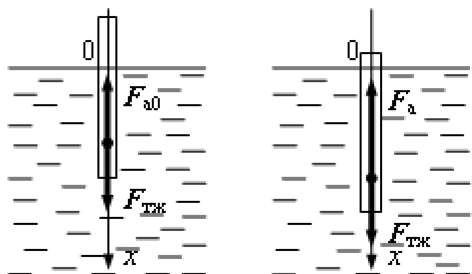
ПРИМЕЧАНИЕ.

Как свидетельствует (6), из уравнения динамики, описывающего колебания груза, подвешенного на пружине, "ушла" сила тяжести. А это означает, что постоянная сила, действующая на колебательную систему, не влияет на циклическую частоту и период колебаний этой системы, т.е. в данной ситуации груз, подвешенный на пружине, можно было разу считать пружинным маятником.

Задача 2. Ареометр массой 55 *г*, плавающий в растворе серной кислоты, указывает, что плотность жидкости 1,27 *г/см*^{3}. Если прибор немного сместить из положения его равновесия по вертикали и отпустить, он начнет колебаться. Считая колебания незатухающими, определить их период, если радиус цилиндрической трубки ареометра, в которой заключена его шкала, равен 0,30 *см*.

T – ?

$m = 55$ *г*
$\rho = 1,27$ *г/см*^{3}
$r = 0,30$ *см*
$g = 9,8$ *м/с*^{2}



Выберем в качестве тела отсчета Землю. Связанную с ней систему отсчета будем считать инерциальной. Ареометр будем считать твердым телом. Движение ареометра – поступательное. Ареометр в растворе серной кислоты представляет колебательную систему. Спокойно плавающий ареометр находится в состоянии равновесия.

На спокойно плавающий ареометр будут действовать две уравновешивающие друг друга силы: сила тяжести, направленная вертикально вниз, и выталкивающая сила – сила Архимеда, направленная вертикально вверх.

После смещения ареометра в вертикальном направлении на него будут действовать та же сила тяжести и изменившаяся по модулю сила Архимеда. В этой ситуации равнодействующая силы тяжести и силы Архимеда отлична от нуля и направлена всегда к положению равновесия. Запишем основное уравнение динамики поступательного движения ареометра, воспользовавшись координатным способом описания движения и ограничившись одной координатной осью x, направленной вертикально вниз, начало которой расположим на поверхности жидкости:

$$mx'' = F_{\text{тж}} - F_{\text{а}}, \tag{1}$$

где m – масса ареометра; $F_{\text{а}}$ – сила Архимеда; $F_{\text{тж}}$ – сила тяжести.

На основании определения силы тяжести и силы Архимеда для их модулей можем соответственно записать:

$$F_{\text{тж}} = mg, \tag{2}$$

$$F_{\text{а}} = \rho g V, \tag{3}$$

где ρ – плотность жидкости, а V – объем погруженной части ареометра.

Объем погруженной части ареометра можно представить:

$$V = V_0 + \Delta V, \tag{4}$$

где V_0 – объем погруженной части ареометра, когда он спокойно плавает; ΔV – изменение объема погруженной части ареометра при его смещении по вертикали (величина алгебраическая).

Изменение ΔV можно выразить так:

$$\Delta V = Sx, \tag{5}$$

где S – площадь поперечного кругового сечения цилиндрической части ареометра; x – смещение ареометра в вертикальном направлении (величина алгебраическая).

Площадь поперечного сечения равна:

$$S = \pi r^2. \tag{6}$$

С учетом (2)–(6) уравнение (1) примет вид:

$$mx'' = mg - \rho g(V_0 + \pi r^2 x). \tag{7}$$

Так как при спокойном плавании

$$F_{\text{тж}} = F_{\text{ао}}, \tag{8}$$

$$F_{\text{ао}} = \rho g V_0, \tag{9}$$

то получим:

$$mg = \rho g V_0. \tag{10}$$

Из (7) с учетом (10) получим:

$$mx'' + \frac{\pi \rho g r^2}{m} x = 0\,. \tag{11}$$

В этом дифференциальном уравнении коэффициент, стоящий перед x, есть не что иное, как квадрат циклической частоты собственных колебаний ареометра:

$$\omega_0^2 = \frac{\pi \rho g r^2}{m}\,. \tag{12}$$

Период колебаний связан с циклической частотой соотношением:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}\,. \tag{13}$$

С учетом (12) из (13) получим:

$$T = \frac{2}{r}\sqrt{\frac{\pi m}{\rho g}}\,.$$

Проверив по наименованию и подставив числовые значения, получим:

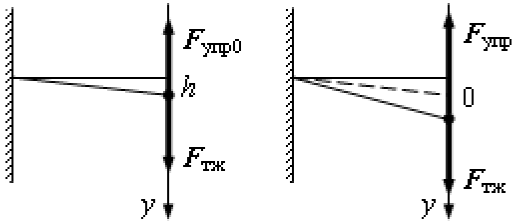
$T = 2{,}5$ *с*.

Полученный ответ не противоречит здравому смыслу.

Задача 3. Под действием силы тяжести электродвигателя консольная балка, на которой он установлен, прогнулась на 1 *мм*. При какой частоте вращения якоря электродвигателя может возникнуть опасность резонанса?

n – ?

$h = 10^{-3}$ *м*
$g = 9{,}8$ *м/с*^{2}



Выберем в качестве отсчета Землю. Связанную с ней систему отсчета будем считать инерциальной, а электродвигатель - материальной точкой. Консольная балка с установленным на ней электродвигателем представляет колебательную систему. Равновесное положение этой колебательной системы – неработающий электродвигатель на деформированной консольной балке – показано на рисунке (точка О). Будем использовать координатный способ описания движения, ограничившись одной координатной осью y, направленной вертикально вниз, начало которой – точка О.

На электродвигатель в положении равновесия действуют две силы: сила тяжести $F_{тж}$ и упругая сила $F_{упр0}$, связанные соотношением:

$$F_{тж} = F_{упр0}, \tag{1}$$

По определению модуль силы тяжести равен:

$$F_{тж} = mg. \tag{2}$$

На основании закона Гука:

$$F_{упр0} = kh. \tag{3}$$

С учетом этого уравнение (1) примет вид:

$$mg = kh. \tag{4}$$

На электродвигатель, смещенный из положения равновесия (в вертикальном направлении), тоже действует сила тяжести и сила упругости, но уже другая. Основное уравнение динамики движения данной колебательной системы в проекции на ось y, имеет вид:

$$my'' = F_{\text{тж}} - F_{\text{упр}}, \tag{5}$$

где $F_{\text{уп}}$ на основании закона Гука равна:

$$F_{\text{упр}} = k(h + y). \tag{6}$$

С учетом этого уравнение (5) примет вид:

$$my'' = mg - k(h + y). \tag{5}$$

Подставив k из (4), получим:

$$my'' = mg - \frac{mg}{h}(h + y)\,. \tag{6}$$

После упрощения имеем:

$$y'' + \frac{g}{h}y = 0\,. \tag{7}$$

Решением этого уравнения будет функция:

$$y = A\sin(\omega_0 t + \varphi_0), \tag{8}$$

где $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{h}}$, т.е. система будет совершать гармонические колебания с частотой ω_0.

В описанной ситуации опасность резонанса может возникнуть при совпадении угловой скорости вращения электродвигателя с циклической частотой собственных колебаний системы (вращение можно представить как сложение двух взаимно перпендикулярных колебаний одинаковых частот, т.е.

$$\omega_{\text{рез}} = \omega_0. \tag{9}$$

Угловая скорость связана с частотой вращения соотношением:

$$\omega_{\text{рез}} = 2\pi n. \tag{10}$$

Таким образом,

$$2\pi n = \omega_0. \tag{11}$$

Откуда

$$n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{h}}\ .$$

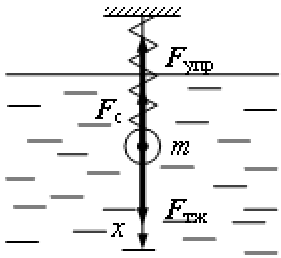
После проверки по наименованию и подстановки числовых значений получим:

$n = 16\ c^{-1}$.

Полученный ответ – 16 *об/с* – не противоречит здравому смыслу.

Задача 4. Найти частоту колебаний груза массой 0,20 *кг*, подвешенного на пружине и помещенного в масло, если коэффициент трения в масле 0,50 *кг/с*, а жесткость пружины 50 *Н/м*.

ω – ?
m = 0,20 *кг* r = 0,50 *кг/с* k = 50 *Н/м*



Примем в качестве тела отсчета Землю. Связанную с ней систему отсчета будем считать инерциальной, а груз - материальной точкой. Груз на пружине представляет собой пружинный маятник, на который действует сила вязкого трения, пропорциональная первой степени скорости. Сила вязкого трения в данной ситуации не будет постоянной ни по модулю, ни по направлению, поэтому она, в отличие от силы тяжести, окажет влияние на частоту колебаний.

При использовании координатного способа описания движения уравнение динамики движения груза (прикрепленного к пружине) в масле будет иметь вид

$$mx'' = -kx' - rx \qquad (1)$$

или, после приведения к общепринятой записи,

$$x'' + 2\delta x' + \omega_0^2 x = 0. \qquad (2)$$

Решением уравнения (2) является функция:

$$x = Ae^{-\delta t}\cos(\omega t + \alpha_0)\,, \qquad (3)$$

где:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}\,,$$

$$\delta = \frac{r}{2m}\,,$$

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}\,.$$

Частота затухающих колебаний, которые будет совершать груз, равна:

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{r^2}{4m^2}}\,.$$

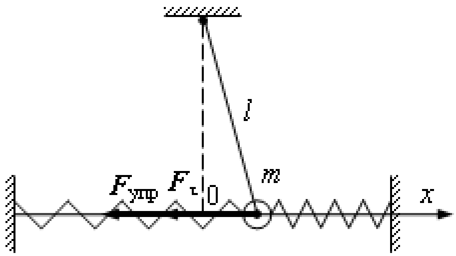
После проверки по наименованию и подстановки числовых значений получим:

$\nu = 2{,}5$ *Гц*.

Полученный ответ не противоречит здравому смыслу.

Задача 5. Легкий стержень длиной l подвешен к горизонтальной оси за один конец так, что он может совершать движение в вертикальной плоскости. На другом конце стержня закреплен груз массой m, к нему прикреплены одинаковые пружины жесткостью k, расположенные горизонтально в плоскости, в которой может двигаться стержень. Другие концы пружин закреплены неподвижно. Найти частоту малых собственных колебаний такой системы в отсутствие трения.

$\omega_0 - ?$
l m k g



Выберем в качестве тела отсчета Землю. Связанную с ней систему отсчета будем считать инерциальной, а груз - материальной точкой. Колебательная система представляет собой комбинированный (математический и пружинный) маятник. Положение равновесия колебательной системы изображено на рисунке пунктиром. Выберем координатный способ описания движения. Так как речь идет о малых колебаниях, то будем считать, что груз совершает прямолинейное движение. Поэтому ограничимся одной координатной осью *x*, начало которой совпадает с положением равновесия груза.

На маятник, выведенный из положения равновесия, действуют в горизонтальном направлении две силы: составляющая силы тяжести $\frac{mgx}{l}$ и сила упругости $2kx$ (две пружины), направленные к положению равновесия.

Основное уравнение динамики движения груза в проекции на ось *x* имеет вид:

$$mx'' = -\frac{mgx}{l} - 2kx\,. \qquad (1)$$

Дифференциальное уравнение (1) можно привести к виду:

$$x'' + \left(\frac{g}{l} + 2\frac{k}{m}\right)x = 0\,. \qquad (2)$$

Из этого дифференциального уравнения получаем информацию о том, что колебания, совершаемые комбинированным маятником, будут гармоническими и что квадрат их циклической частоты ω_0 равен:

$$\omega_0^2 = \frac{g}{l} + 2\frac{k}{m}. \qquad (3)$$

Откуда

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l} + 2\frac{k}{l}}. \qquad (4)$$

Проверка полученного ответа по наименованию показывает, что оно соответствует принятому в СИ.

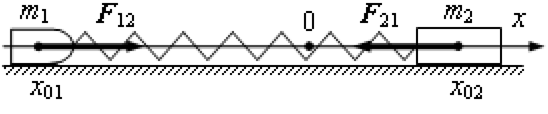
ПРИМЕЧАНИЕ.

Обращает на себя внимание тот факт, что первое слагаемое в уравнении (3) равно квадрату циклической частоты математического маятника, а второе – квадрату циклической частоты пружинного маятника. Оказывается, что это свойство является достаточно общим для колебательных процессов разной природы: если какая-либо физическая величина может совершать собственные колебания под действием нескольких причин, то при одновременном действии этих причин частота колебаний удовлетворяет уравнению (3).

Задача 6. На льду находятся такси и самосвал с массами 1 *т* и 9 *т*, соединенные пружиной жесткостью 10^3 *Н/м*. Найти период колебаний автомобилей под действием пружины.

$T - ?$

$m_1 = 10^3$ *кг*
$m_2 = 9\cdot10^3$ *кг*
$k = 10^3$ *Н*/м
$g = 9{,}8$ *м/с*^{2}



Выберем в качестве тела отсчета Землю. Связанную с ней систему отсчета будем считать инерциальной.

Автомобили будем считать материальными точками. Пренебрежем трением и массой пружины. На такси действуют три силы: сила реакции льда и сила тяжести в вертикальном направлении, которые компенсируют действие друг друга, и упругая сила $\boldsymbol{F}_{12}$ в горизонтальном направлении. На самосвал тоже три силы: сила реакции льда и сила тяжести, компенсирующие действие друг друга, и упругая сила $\boldsymbol{F}_{21}$.

Систему "такси–пружина–самосвал" можно считать замкнутой (по крайней мере, в горизонтальном направлении): силы $\boldsymbol{F}_{12}$ и $\boldsymbol{F}_{21}$ внутренние, а равнодействующая остальных – внешних – равна нулю.

Для замкнутой (или изолированной) системы "такси–самосвал" должен выполняться закон сохранения импульса.

Воспользовавшись координатным способом описания движения и ограничившись одной координатной осью x, начало которой совпадает с центром масс системы, получим, что импульс центра масс равен нулю. Следовательно, в любой момент времени будет равна нулю и сумма проекций импульсов колеблющихся такси и самосвала:

$$m_1 V_{1x} - m_2 V_{2x} = 0. \qquad (1)$$

Используя физический смысл производной, запишем:

$$V_{1x} = dx_1/dt, \qquad (2)$$

$$V_{2x} = dx_2/dt. \qquad (3)$$

Подставив (2) и (3) в (1), получим:

$$m_1(dx_1/dt) = m_2(dx_2/dt) \qquad (4)$$

или

$$m_1 dx_1 = m_2 dx_2. \qquad (5)$$

Проинтегрировав (5), получим:

$$m_1(-x_1 - (-x_{01})) = m_2(x_2 - x_{02}). \qquad (6)$$

Это равенство справедливо для любого момента времени, в том числе и для начального.

Запишем основное уравнение динамики движения такси и самосвала:

$$m_1\boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{F}_{12}, \tag{7}$$

$$m_2\boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{F}_{21}. \tag{8}$$

Спроектируем (7) и (8) на ось x, предоставив возможность самим уравнениям ответить на вопрос о направлении ускорений $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{a}_2$:

$$m_1a_{1x} = F_{12}, \tag{9}$$

$$m_2a_{2x} = -F_{21}. \tag{10}$$

На основании третьего закона Ньютона $F_{12} = F_{21}$ по модулю.

Положение устойчивого равновесия для такси – точка с координатой x_{01}. Следовательно, смещение такси при колебаниях будет $(x_1 - x_{01})$, а проекция ускорения:

$$a_{1x} = (x_1 - x_{01})''. \tag{11}$$

Аналогично для самосвала:

$$a_{2x} = (x_2 - x_{02})''. \tag{12}$$

По закону Гука:

$$F_{12} = k((x_2 - x_{02}) + (-x_1 - (-x_{01}))), \tag{13}$$

$$F_{21} = k((x_2 - x_{02}) + (-x_1 + x_{01})). \tag{14}$$

Уравнение (9) с учетом (11), (13) и (6) примет вид

$$m_1(x_1 - x_{01})'' = -k\left(-\frac{m_1}{m_2} + 1\right)\left(x_1 - x_{01}\right) \tag{15}$$

или в общепринятом виде для дифференциальных уравнений

$$(x_1 - x_{01})'' + k\frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2}\left(x_1 - x_{01}\right) = 0\,. \tag{16}$$

Из дифференциального уравнения (16) следует, что такси будет совершать гармонические колебания, циклическая частота которых равна:

$$\omega_1 = \sqrt{k\frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2}}\ . \tag{17}$$

Период этих колебаний равен:

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = 2\pi\sqrt{\frac{m_1 m_2}{k(m_1 + m_2)}}\ . \tag{18}$$

Проделав аналогичные действия с уравнением (10), получим:

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{m_1 m_2}{k(m_1 + m_2)}}\ . \tag{19}$$

Таким образом, такси и самосвал будут совершенствовать гармонические колебания с одинаковым периодом, равным 6 *с*, причем в противофазе. Последнее нужно для того, чтобы центр масс колебательной системы оставался в покое.

Полученный ответ полезно исследовать. Например, при $m_2 \to \infty$ колебательная система превращается в обычный пружинный маятник с массой m_1 и жесткостью k. Его период должен равняться:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m_1}{k}}\ .$$

Действительно, из уравнения (18) при $m_2 \to \infty$ получаем:

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{m_1}{k}}\ .$$

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Задача 4.11. Стакан массой 20 *г* и площадью поперечного сечения 5 $см^2$ содержит ртуть массой 80 *г* и плавает на поверхности воды. Под действием вертикальной силы стакан выводится из положения равновесия и отпускается. Определить период колебаний системы.

Ответ: 0,9 *с*.

Задача 4.12. Стержень длиной 50 *см* совершает колебания около горизонтальной оси, проходящей через точку, которая расположена на расстоянии 12,5 *см* от конца стержня. Определить частоту колебаний стержня.

Ответ: 1,2 *с*.

Задача 4.13. На концах стержня, масса которого 60 *г* и длина 49 *см*, укреплены два шарика массами 70 *г* и 90 *г*, а стержень подвешен так, что может совершать колебания около горизонтальной оси, проходящей через его середину. Определить период малых колебаний стержня.

Ответ: 3,44 *с*.

Задача 4.14. К потолку лифта подвешен стержень за один конец так, что может совершать колебания. Длина стержня 50 *см*. Определить период колебаний стержня, если лифт движется с ускорением 1,2 $м/с^2$, направленным вверх.

Ответ: 1,1 *с*.

Задача 4.15. Однородный диск радиусом 0,1 *м* совершает колебания вокруг горизонтальной оси, которая проходит через точку, расположенную на расстоянии 0,05 *м* от центра диска, и перпендикулярна плоскости диска. Определить частоту колебаний диска.

Ответ: 0,65 *с*.

Задача 4.16. Определить период крутильных колебаний железного шара радиусом 0,1 *м*, подвешенного на стальной проволоке радиусом 1 *мм* и длиной 1 *м*. Модуль сдвига для стали принять равным 80 *ГПа*.

Ответ: 6,45 *с*.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА 4

ВАРИАНТ 1

Задача 1. Уравнение колебания материальной точки массой 8 г имеет вид $x = 10\sin(\frac{\pi}{4}t + \frac{\pi}{2})$ м. Построить график зависимости силы от времени. Какова амплитуда колебаний силы?

Задача 2. Амплитуда гармонического колебания точки 8 см, его период – 3 с. Определить максимальное ускорение точки.

Задача 3. Ареометр массой 0,25 кг и диаметром 10 мм совершает в жидкости незатухающие колебания с периодом 3 с. Определить плотность жидкости.

ВАРИАНТ 2

Задача 1. Уравнение колебания материальной точки массой 5 г имеет вид $x = 10\sin(\frac{\pi}{5}t + \frac{\pi}{4})$ м. Какова амплитуда колебаний силы и полная энергия колеблющейся точки?

Задача 2. Материальная точка колеблется с частотой 8 Гц. Записать зависимость ускорения от времени, если максимальное значение смещения точки 8 см.

Задача 3. Математический маятник совершает колебания в жидкости, плотность которой в 2,5 раза меньше плотности шарика. Определить период малых колебаний маятника при условии отсутствия сил сопротивления.

ВАРИАНТ 3

Задача 1. Уравнение колебания материальной точки массой 10 г имеет вид $x = 4\sin(\frac{\pi}{4}t + \frac{\pi}{4})$ м. Построить график зависимости от времени потенциальной энергии точки.

Задача 2. Скорость точки при смещении на 1,2 см равна 6 м/с^2, а при смещении на 1,4 см - 4 м/с^2. Записать уравнение колебаний точки.

Задача 3. На концах невесомого стержня закреплены два груза разной массы. Определить длину стержня, если он совершает малые колебания в вертикальной плоскости. Центр масс системы находится на расстоянии 10 см от центра стержня.

ВАРИАНТ 4

Задача 1. Уравнение колебания материальной точки массой 10 г имеет вид $x = 5\sin(\frac{\pi}{3}t + \frac{\pi}{4})$ м. Построить график зависимости от времени кинетической энергии точки.

Задача 2. Материальная точка за 10 с совершает 50 колебаний. Максимальное значение смещения колеблющейся точки 8 см. Записать зависимость ускорения от времени.

Задача 3. Физический маятник представляет собой шарик, подвешенный на нити, причем длина нити равна диаметру шарика. Сравнить периоды колебаний этого маятника и математического с таким же расстоянием от точки подвеса до центра маятника.

ВАРИАНТ 5

Задача 1. Уравнение колебания материальной точки массой 8 г имеет вид $x = 5\sin(\frac{\pi}{4}t + \frac{\pi}{4})$ м. Построить график зависимости от времени полной энергии точки.

Задача 2. Записать уравнение колебания материальной точки, если максимальное значение ее ускорения 30 м/с^2. Период колебаний точки 3 с, максимальное смещение 5 см.

Задача 3. К вертикально подвешенной пружине прикрепляют груз, при этом пружина удлиняется на 9 см. Оттягивая груз вниз и отпуская, заставляют его колебаться. Определить период малых колебаний системы.

ВАРИАНТ 6

Задача 1. Уравнение колебания материальной точки массой 5 г имеет вид $x = 10\sin(\frac{\pi}{4}t + \frac{\pi}{3})$ м. Записать зависимость от времени потенциальной, кинетической и полной энергии точки.

Задача 2. Точка совершает колебательное движение по закону $x = 5\sin\frac{\pi}{4}t$. В какие моменты времени скорость точки максимальна?

Задача 3. Недеформированная пружина жесткостью 10 Н/м расположена в горизонтальной плоскости, края ее жестко закреплены. В точке, отстоящей на 1/4 длины пружины, закреплено тело массой 200 г. Определить период малых горизонтальных колебаний тела.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дущенко В.П., Кучерук І.М. Загальна фізика. Фізичні основи механіки. Молекулярна фізика і термодинаміка. – К.: Вища шк., 1987. – 431 с.

2. Гершензон Е.М., Малов Н.Н. Курс общей физики. Механика: Учеб. пособие для студентов физ.-мат. фак. пед. ин-тов. – 2-е изд. перераб. – М.: Просвещение, 1987. – 304 с.

3. Александров Н.В., Яшкин А.Я. Курс общей физики. Механика: Учеб. пособие для студентов-заочников физ.-мат. фак. пед. ин-тов. – М.: Просвещение, 1978. – 416 с.

4. Савельев И.В. Курс общей физики: Учеб. пособие. В 3-х т. Т.1. Механика. Молекулярная физика. -3-е изд., испр. –М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. – 432 с.

5. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Механика: Учеб. пособие для вузов. – 3-е изд. – М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989. – 576 с.

6. Стрелков С.П. Механика. – М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1965. – 526 с.

7. Чертов А.Г. Физические величины. – М.: Высш. шк., 1990. – 196 с.

8. Трофимова Т. И. Курс физики: Учеб. пособие для вузов. – 7-е изд., стер. – М.: Высш. шк., 2001. – 542 с.

9. Балаш В.А. Сборник задач по курсу общей физики. Учебное пособие для студентов физ.-мат. фак. пед. ин-тов. – М.: Просвещение, 1978. – 208 с.

10. Чертов А.Г., Воробьев А.А. Задачник по физике: Учебное пособие. – 4-е изд. перераб. и доп. – М.: Высш. школа, 1981. – 496 с.

11. Сборник задач по курсу общей физики: Учеб. пособие для студентов пед. ин-тов / Загуста Г.А., Макеева Г.П., Микулин А.С. и др. – М.: Просвещение, 1989. – 271 с.

12. Фирганг Е.В. Руководство к решению задач по курсу общей физики. Учеб. пособие для втузов. – М.: Высшая школа, 1978. – 352 с.

13. Брюханов А.В., Пустовалов Г.Е., Рыдник В.И. Толковый физический словарь. Основные термины. – М.: Рус. яз., 1988. – 232 с.

14. Русско-украинский физический словарь: 16000 терминов / Сост. В.В. Гейченко и др. - Х.: Основа, 1990. – 211 с.

15. Краткий словарь физических терминов / Сост. А.И.Болсун. – Х.: Вища шк. Изд-во при Харьк. ун-те, 1986. –200 с.

16. Физический энциклопедический словарь: В 5-ти т. – М.: Советская энциклопедия, 1960–1966.

Механіка. – Навчальний посібник.

У посібнику реалізовано єдиний методичній підхід щодо рішення задач механіки, приведено методичні матеріали, які допомагають формуванню узагальнених вмінь та навичок рішення фізичних задач та організаці№ результативно№ самостійно№ роботи.

Призначено для студентів спеціальності 6.040203 «Фізика», студентів фізичних спеціальностей, а також буде корисним для викладачів вищих навчальних закладів, коледжів, ліце№в, гімназій, шкільних вчителів.

Механика. – Учебное пособие.

В пособии реализован единый методический подход к решению задач механики, приведены дидактические материалы, способствующие выработке обобщенных умений и навыков решения физических задач и организации результативной самостоятельной работы.

Предназначено для студентов специальности «Физика», а также студентов физических специальностей. Пособие будет полезно преподавателям высших учебных заведений, колледжей, лицеев, гимназий, учителей школ.

Mechanics. – Tutorial.

In a manual the single methodical approach realized near the decision of tasks of mechanics, didactic materials, cooperant making of the generalized abilities and skills of decision of physical tasks and organization of effective independent work, are resulted.

It is intended for the students of speciality 6.040203 of «Physics», and also students of physical specialities. A manual will be useful the teachers of higher educational establishments, colleges, lyceums, gymnasia, teachers of schools.

Навчальне видання

МЕХАНІКА

Навчальний посібник
для самостійної роботи студентів
спеціальності 6.040203 «Фізика»

(російською мовою)

У посібнику реалізовано єдиний методичній підхід щодо рішення задач механіки, приведено методичні матеріали, які допомагають формуванню узагальнених вмінь та навичок рішення фізичних задач та організаці№результативно№самостійно№роботи.

Призначено для студентів спеціальності 6.040203 «Фізика», студентів фізичних спеціальностей, а також буде корисним для викладачів вищих навчальних закладів, коледжів, ліце№в гімназій, шкільних вчителів.

Укладачі:
КРАСНЯКОВА Тетяна Вадимівна
КРАВЦОВ Анатолій Никифорович
ЖИХАРЄВ Ігор Васильович

Редактор – А. Н. Кравцов
Комп'ютерний макет – Т. В. Краснякова

Здано до склад. 03.09.2012 р. Підп. до друку 03.10.2012 р.
Формат 60х84 1/16. Папір офсет. Гарнітура Times New Roman.
Друк ризографічний. Ум. друк. арк.12,9. Наклад 300 прим. Зам. № 161.

Видавець і виготовлювач
Видавництво Державного закладу
«Луганський національний університет імені Тараса Шевченка»
вул. Оборонна, 2, м. Луганськ, 91011. Тел./факс: (0642) 58-03-20.
e-mail: alma-mater@list.ru
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 3459 від 09.04.2009 р.