О. В. ПАНИШЕВА

ПРАКТИКУМ ПО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ

Министерство образования и науки Украины
Государственное учреждение
«Луганский национальный университет
имени Тараса Шевченко»

О. В. ПАНИШЕВА

ПРАКТИКУМ ПО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ

Учебное пособие

Луганск
ГУ «ЛНУ имени Тараса Шевченко»
2014

УДК 517.9(076.1)
ББК 22.161.1я73
П16

Р е ц е н з е н т ы:

Дымарский Я. М. – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедры информатики Луганского государственного университета внутренних дел имени Э. А. Дидоренко.

Жовтан Л. В. – кандидат педагогических наук, доцент, заведующая кафедрой общей математики Луганского национального университета имени Тараса Шевченко.

Мартыненко А. В. – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа и алгебры Луганского национального университета имени Тараса Шевченко.

Панишева О. В.

П16 Практикум по дифференциальным уравнениям : учеб пособие / О. В. Панишева ; Гос. учрежд. «Луган. нац. ун-т имени Тараса Шевченко». – Луганск : Изд-во ГУ «ЛНУ имени Тараса Шевченко», 2014. – 125 с.

Учебное пособие предназначено для подготовки к практическим занятиям и организации самостоятельной работы студентов специальности 6.040302 «Информатика» по дисциплине «Дифференциальные уравнения» Оно содержит краткое изложение основных методов решения типовых уравнений, примеры их решения, тренировочные упражнения, задания для индивидуальной работы, контрольные вопросы и тесты для самопроверки и контроля знаний.

УДК 517.9(076.1)
ББК 22. 161я73

Рекомендовано к печати Научно-методическим советом Луганского национального университета имени Тараса Шевченко (протокол № 6 от 5 февраля 2014 года)

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Курс «Дифференциальные уравнения» составляет важную и неотъемлемую часть профессионального становления студента. Содержание дисциплины имеет многочисленные приложения и является одним из фундаментов будущей практической и научной деятельности специалиста.

Большое значение, которое имеют дифференциальные уравнения для математики и особенно для ее приложений, объясняется тем, что к решению таких уравнений сводится исследование многих физических и технических задач. Дифференциальные уравнения широко используются для моделирования реальных систем, зависящих от времени, в частности, для описания и исследования экономических и биологических систем.

Целью изучение дисциплины «Дифференциальные уравнения» является дальнейшее развитие математического кругозора студентов и построение фундамента, на котором строятся многочисленные приложения математики, овладение методами моделирования прикладных задач. Теория дифференциальных уравнений благодаря их универсальности в описании процессов, протекающих в природе и обществе, представляет в этом плане большие возможности.

Овладеть мощнейшим математическим аппаратом моделирования, каким являются дифференциальные уравнения, поможет данное пособие.

Задачами изучения дисциплины являются следующие: овладение начальными навыками моделирования практических задач дифференциальными уравнениями; выработка умения классифицировать уравнения; овладение практическими навыками в решении и исследовании основных типов обыкновенных дифференциальных уравнений и их систем, приобретение навыков решения прикладных задач с помощью дифференциальных уравнений.

Выработать вышеперечисленные навыки и умения студенту помогут практические упражнения в решении и составлении дифференциальных уравнений разных типов, которые предлагаются автором в данном пособии.

Пособие предназначено для организации учебной деятельности всех специальностей, изучающих курс «Дифференциальные уравнения», во время практических занятий и при организации их самостоятельной работы.

В начале каждого пункта изложены основные теоретические сведения, необходимые при решении упражнений. Теоретические сведения представлены в объеме, достаточном для решения последующих уравнений. Но эти сведения не являются полным изложением теории по данной теме. В каждом пункте даны подробные решения типовых задач, что позволяет использовать сборник для самостоятельной работы студентов с ним. Представлены задачи разного уровня сложности. Многие задачи, имеющиеся в пособии, взяты из известных задачников, но есть и авторские задачи. Количество задач таково, что позволяет обеспечивать достаточный выбор для работы на практических занятиях и внеаудиторно.

Изучение курса «Дифференциальные уравнения» базируется на знаниях студентами общих курсов математического анализа и линейной алгебры. Актуализация необходимых знаний и умений из этих курсов проводится с помощью заданий курса, помеченных буквой (А). Эти задания не относятся непосредственно к дифференциальным уравнениям, а лишь актуализируют знания, необходимые для успешного овладения способами решения дифференциальных уравнений. Задачи с пометкой (У) рекомендуется решать устно.

Четвертый раздел пособия предназначен для организации контроля знаний и умений студентов со стороны преподавателей и самоконтроля усвоения материала студентами. Он содержит контрольные вопросы, которые можно использовать на практических занятиях при обобщающем повторении, а так же для подготовки к модульной работе. Тестовые задания разных типов рекомендуются для проверки качества теоретической подготовки студентов к практическому занятию. Варианты индивидуальных заданий позволят дифференцировать самостоятельную работу студентов.

Для успешного усвоения курса «Дифференциальные уравнения» необходимо уметь дифференцировать и интегрировать функции. Поэтому в приложении приведены основные правила дифференцирования и интегрирования, таблицы интегралов и производных.

Проверку самостоятельно выполненного решения дифференциального уравнения можно осуществить с помощью специальных он-лайн калькуляторов в сети Интернет, краткий перечень которых приведен в приложении 3.

Пособие полностью соответствует рабочей программе по дисциплине «Дифференциальные уравнения».

ПРОГРАММА КУРСА «ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ»

Модуль 1

Тема 1. Основные понятия и обозначения теории дифференциальных уравнений.

Тема 2. Уравнения с разделенными и разделяющимися переменными.

Тема 3. Однородные, линейные уравнения первого порядка и сводящиеся к ним. Уравнения Бернулли.

Тема 4. Уравнения в полных дифференциалах.

Модуль 2

Тема 1. Способы интегрирования и понижения порядка дифференциальных уравнений высших порядков.

Тема 2. Однородные дифференциальные уравнения высших порядков с постоянными коэффициентами.

Тема 3. Неоднородные дифференциальные уравнения высших порядков с постоянными коэффициентами.

Тема 4. Общая теория систем дифференциальных уравнений. Примеры составления типовых дифференциальных уравнений и их систем. Применение дифференциальных уравнений в социально-экономических науках.

РАЗДЕЛ 1. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

1.1. Основные понятия о дифференциальных уравнениях

Ключевые слова: дифференциальное уравнение, порядок дифференциального уравнения, интеграл (решение) дифференциального уравнения, обыкновенное дифференциальное уравнение, общее и частное решение, задача Коши, особое решение.

ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Дифференциальным уравнением (сокращенно: дифуравнением или ДУ) называется уравнение, связывающее независимые переменные, их функцию и производные (или дифференциалы) этой функции. Если независимая переменная одна, то уравнение называется *обыкновенным*, если две или больше – дифференциальным уравнением в частных производных.

Наивысший порядок производной, входящей в уравнение, называется порядком дифференциального уравнения.

Обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка имеет вид $F(x, y, y') = 0$ или $y' = f(x, y)$.

Решением дифференциального уравнения (или его *интегралом*) называется такая дифференцируемая функция $y = \varphi(x)$, которая при подстановке в уравнение вместо неизвестной функции обращает его в тождество.

Процесс нахождения решения дифференциального уравнения называется его решением или интегрированием.

Общим решением дифференциального уравнения первого порядка $y' = f(x, y)$ в области D называется функция $y = \varphi(x, C)$, обладающая свойствами: 1) она является решением данного дифференциального уравнения при любых значениях произвольной постоянной C, принадлежащих некоторому множеству; 2) для любого начального условия $y(x_0)=y_0$ такого, что $(x_0,y_0)\in D$, существует единственное значение $C=C_0$, при котором решение $y=\varphi(x,C_0)$ удовлетворяет заданному начальному условию.

Заметим, что общее решение дифференциального уравнения может быть записано не единственным способом. Общее решение всегда содержит постоянную C. Эту постоянную целесообразно записывать в виде, удобном для дальнейших преобразований, к примеру, C^2, $\ln C, \dfrac{1}{C}$ и т.д.

Всякое решение $y=\varphi(x,C_0)$, получающееся из общего решения $y=\varphi(x,C)$ при конкретном значении $C=C_0$, называется *частным* решением дифференциального уравнения. Задача, в которой требуется найти частное решение уравнения $y'=f(x,y)$, удовлетворяющее начальному условию $y(x_0)=y_0$, называется *задачей Коши*.

Любое дифференциальное уравнение имеет бесконечно много частных решений, подобно тому, как любая функция имеет бесконечно много первообразных, отличающихся друг от друга на произвольную постоянную.

Построенный на плоскости график всякого решения $y=\varphi(x,C)$ называется *интегральной кривой* этого дифуравнения.

Общему решению дифференциального уравнения соответствует на плоскости семейство интегральных кривых, а частному решению, удовлетворяющему начальному условию – одна кривая этого семейства, проходящая через точку $M(x_0,y_0)$.

Решение дифференциального уравнения, которое не может быть получено из общего решения ни при одном частном значении произвольной постоянной, называется его *особым* решением. Пусть известен общий интеграл дифференциального уравнения $\Phi(x,y,C)=0$ и после исключения из этого уравнения C получено уравнение $\varphi(x,y)=0$. Если функция φ удовлетворяет заданному дифференциальном уравнению и не принадлежит семейству кривых $\Phi(x,y,C)=0$, то она является особым интегралом дифуравнения.

Через каждую точку кривой, изображающей особое решение, проходит по крайней мере две интегральные кривые, т.е. в каждой точке особого решения нарушается единственность решения.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 1. Определить порядок заданных дифференциальных уравнений.

1) $y' + 3x^3 = 2xy$;

2) $y''' + 5y' - 9xy^4 = 0$;

3) $y^3 - 7x^5 y^2 \cos x = 0$;

4) $\sqrt{1 - \cos x}dx + \sqrt{1 - \sin y}dy = 0$.

Решение.

Дифференциальное уравнение (1) является уравнение первого порядка (по порядку входящей в него производной). Порядок входящих в уравнение переменных при определении порядка дифференциального уравнения не играет роли.

Дифференциальное уравнение (2) является уравнением третьего порядка, так как наивысший порядок входящей в него производной – третий.

Дифференциальное уравнение (3) не является дифференциальным уравнением, так как не содержит производную или дифференциал.

Для определения порядка уравнения (4) разделим обе его части на dx, запишем его в виде $\sqrt{1 - \cos x} + \sqrt{1 - \sin y}\,\dfrac{dy}{dx} = 0$ или $\sqrt{1 - \cos x} + \sqrt{1 - \sin y}\,y' = 0$. Таким образом, уравнение (4) является дифференциальным уравнением первого порядка.

Пример 2. Проверить, является ли функция $y = \sin x$ решением дифференциального уравнения $y'' + y = 0$.

Решение.

Вычислим вторую производную функции $y = \sin x$:

$y' = \cos x;$

$y'' = (\cos x)' = -\sin x$.

Подставим значение функции y и ее второй производной в заданное дифференциальное уравнение. Получим: $-\sin x + \sin x = 0$. Таким образом, уравнение при подстановке в него заданной функции превратилось в тождество.

Значит, функция $y = \sin x$ является его решением.

Пример 3. Найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 1$, если его общее решение имеет вид $x^2 + y^2 = C$.

Решение.

Подставив в общее решение заданные начальные условия ($x = 0, y = 1$), получим $0 + 1 = C$, откуда $C = 1$. Таким образом, частное решение уравнения, удовлетворяющее заданным начальным условиям, имеет вид: $x^2 + y^2 = 1$. Изобразив это решение на плоскости, получим окружность радиуса 1 с центром в начале координат.

ТРЕНИРОВОЧНЫЕ УПРАЖНЕНИЯ

1. (А, У) Что означает операция дифференцирования? Продифференцируйте следующие функции:

1) $y = 5x;$

2) $y = 9 - x;$

3) $y = x^6;$

4) $y = \frac{5}{x};$

5) $y = \cos x;$

6) $y = \sqrt{x}$

2. (А) Перечислите правила вычисления производных. Вычислите производную от функции y , если

1) $y = 2xcosx;$

2) $y = \dfrac{3x}{1-x^2}$;

3) $y = 3x^4 + 6\sqrt{x}$;

4) $y = e^{3x}$;

5) $y = 7^x - 4\sin x$;

6) $y = cos(e^{\sqrt{3x}})$.

3. (У, А) Чему равен интеграл от функций $y = C, y = 4x, y = \sqrt{x}$?

4. Определите порядок уравнений:

1) $x - 9 = 7$;

2) $x^2 - 6x + 9 = 0$;

3) $xy = 8$;

4) $\sqrt{x} = 6$;

5) $y + 4^5 = \sqrt{2}$;

6) $x^3 - 2x^2 + 8x - 7 = 0$.

5. Укажите порядок дифференциальных уравнений

1) $p'' + h^3 = 0$;

2) $y\sqrt{x} = y'$;

3) $xy - y^4 = 0$;

4) $xy' - y = \cos x$;

5) $xy = y'''$.

6. Выберите среди данных уравнений дифференциальные и расположите их по возрастанию порядка:

1) $y^2 - x = 5$;

2) $y^3 - 3xy = 9$;

3) $y^3 - 3y'' = 9$;

4) $y' - 5x = 3$;

5) $y' - 6y''' - 2y = 0$.

Есть ли среди дифференциальных уравнений те, которые можно разрешить относительно производной?

7. (У) Преобразуйте записи, не используя дифференциалов: $\frac{dy}{dx}$; $\frac{dx}{dt}$; $\frac{d^2x}{dt^2}$; $\frac{dx}{dy}$.

8. (У) Представьте, если это возможно, заданные дифференциальные уравнения в виде, разрешимом относительно производной.

1) $y'' - 2y = 9;$
2) $3xy - y'\sqrt{x} = 0;$
3) $y'' - y^2 = x;$
4) $yy' = 6x$;
5) $e^y - xy' = \sqrt{x}e^x$;
6) $\frac{xdy}{dx} = \sqrt{1-y}$;
7) $x^2 + y^2y' = 0.$

9. (А) Проверьте, является ли число 5 решением заданных уравнений:

1) $2x - 10 = 0;$
2) $x^2 - 6x + 5 = 0;$
3) $y^2 - 15y + 10 = 0;$
4) $t^2 - 5t = 0;$
5) $y^2 + 5y = 0;$
6) $t^2 - 25 = 0.$

10. Докажите, что функция $y = 5\cos x$ является решением дифференциального уравнения $y'' = -y$.

11. Проверьте, является ли функция $y = 3 + e^{3x} + 4e^{-3x}$ решением дифференциального уравнения $y''' - 9y' = 0.$

12. Среди заданных функций выберите те, которые являются решением заданного дифуравнения: *а*) $y'' + y = 0;$ *б*) $y' + y = 0.$

1) $y = \sin x;$
2) $y = 2\cos x;$

3) $y = 3\sin x - \cos x$;

4) $y = tgx$;

5) $y = x$;

6) $y = 2x$;

7) $y = x^2$;

8) $y = 0{,}5$;

9) $y = x^2 + 5x$;

10) $y = \dfrac{4}{x}$.

13. Выберите среди дифференциальных уравнений те, решением которого является функция $y = 8x$.

1) $y' - \dfrac{y}{x} = 0$;

2) $y' - 8y = 0$;

3) $y' + y = 8$;

4) $y' - y = 8$;

5) $y'' + y = 8x$;

6) $xy' - 8x = 0$;

7) $\dfrac{y'}{y} = \dfrac{1}{x}$.

14. Установите соответствие между дифференциальными уравнениями и заданными функциями, соединив каждое уравнение линией с тем уравнением, решением которого оно является.

Функции	*Уравнения*
$y = \sin x - 1 + Ce^{-\sin x}$;	$y' + y\cos x = 0{,}5\sin 2x$;
$y = Cx + C - C^2$;	$\dfrac{d^2y}{dx^2} + \dfrac{2}{x}\dfrac{dy}{dx} = 0$;
$y = 2Cx + C^2$;	$y(\dfrac{dy}{dx})^2 + 2xy' - xy' + y = 0$;
$y = \dfrac{C_1}{x} + C_2$;	$(y')^2 - y' - xy' + y = 0$.

15. Общее решение некоторого ДУ есть функция $y=\frac{C}{x^2}$. Найдите частное решение этого дифуравнения, удовлетворяющее условию $y(2)=1$.

16. Проверьте, что функция $y=Ce^{-2x}+\frac{1}{3}e^x$ является общим решением уравнения $y'+2y=e^x$ и найдите частное решение этого уравнения, удовлетворяющее начальным условиям $y(\ln 3)=2$.

17. $y+3x=C-$ общее решение некоторого уравнения. Найдите его частное решение, удовлетворяющее начальным условиям $y(2)=5$.

18. Каков геометрический смысл общего решения ДУ $x^2+y^2=C$ и его частного решения, удовлетворяющего начальному условию y (1)=0? Изобразите это частное решение на плоскости.

19. Каков геометрический смысл частного решения дифференциального уравнения, удовлетворяющего начальным условиям $y(1)=\frac{1}{3}$, если его общее решение имеет вид $y=Cx^3$. Постройте график частного решения в системе координат.

20. При каких начальных условиях из общего решения $y=\frac{C}{x}$ получится его частное решение $y=\frac{6}{x}$?

21. Общий интеграл некоторого уравнения имеет вид $x=e^{C\sin y}$. Частным или особым решением этого уравнения является решение $x=1$?

22. *Общее решение некоторого уравнения $x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}+C$. Является ли решение $y=1$ особым решением этого уравнения?

23. Найдите общий интеграл некоторого уравнения непосредственным интегрированием.

1) $y'=0$;

2) $y' = a$;

3) $y' = 2x^2 + 5x + 12$;

4) $y' = \cos x + 8$;

5) $y = \dfrac{3}{x}$;

6) $\dfrac{dx}{dt} = 5$.

1.2. Изоклины. Составление дифференциального уравнения семейства кривых. Изогональные и ортогональные траектории

Ключевые слова: изоклины, изогональные траектории, ортогональные уравнения.

ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Решение уравнения $y' = f(x, y)$, проходящее через точку (x, y), должно иметь в этой точке производную, равную $f(x, y)$, т.е. оно должно касаться прямой, наклоненной под углом $\alpha = arctg\, f(x, y)$ к оси Ox. Геометрическое место точек плоскости (x, y), в которых наклон касательных к решениям уравнения $y' = f(x, y)$ один и тот же, называется *изоклиной*. Следовательно, уравнение изоклины имеет вид: $f(x, y) = k$, где $k -$ постоянная.

Чтобы приближенно построить решение уравнения $y' = f(x, y)$, можно начертить достаточное количество изоклин, а затем провести решения – кривые, которые в точках пересечения с изоклинами $f(x, y) = k_1$, $f(x, y) = k_2$, …, имеют касательные с угловыми коэффициентами $k_1, k_2, \ldots$.

Линии, пересекающие все кривые данного семейства под одним и тем же углом, называются *изогональными траекториями*.

Если этот угол прямой, то траектории называются *ортогональными* траекториями.

Углы α и β наклона траектории к кривой к оси Ox связаны соотношением $\beta = \alpha \pm \varphi$. Пусть $y' = f(x, y)$ – дифференциальное уравнение семейства кривых, а $y' = f_1(x, y)$ – уравнение семейства изогональных траекторий. Тогда $tg\alpha = f(x, y), tg\beta = f_1(x, y)$. Следовательно, если известно уравнение $y' = f(x, y)$ и угол φ, то легко найти $tg\beta$ и затем написать дифференциальное уравнение траектории.

Чтобы найти дифференциальное уравнение, которому удовлетворяют кривые семейства $\varphi(x, y, C_1, ..., C_n) = 0$, надо продифференцировать это равенство n раз, считая y функцией от x, а затем из полученных уравнений и исходного уравнения исключить произвольные постоянные $C_1, C_2, ..., C_n$.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 1. Найти ортогональные траектории семейства парабол $y = Cx^2$.

Решение.

Напишем дифференциальное уравнение семейства $y' = 2Cx$.

Исключая из этого уравнения C, получаем $\dfrac{y'}{y} = \dfrac{2}{x}$.

Заменяя y' на $-\dfrac{1}{y'}$, получим дифференциальное уравнение семейства ортогональных траекторий $-\dfrac{1}{yy'} = \dfrac{2}{x}$.

Запишем уравнение в дифференциальной форме ($-\dfrac{1}{y\dfrac{dy}{dx}}=\dfrac{2}{x}$) и преобразуем его к виду $ydy=-\dfrac{xdx}{2}$.

Найдем интеграл от обеих частей уравнения:

$\dfrac{y^2}{2}=-\dfrac{x^2}{4}+C$, откуда $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=C^2$. Это уравнение является уравнением эллипса. Следовательно, ортогональные траектории данного семейства парабол – некоторое семейство эллипсов с полуосями $a=2C, b=C\sqrt{2}$.

Пример 2. Составить дифференциальное уравнение семейства кривых $C_1x+(y-C_2)^2=0$.

Решение

Так как уравнение семейства содержит 2 параметра, дифференцируем его 2 раза, считая $y=y(x)$. Получим:

$C_1+2(y-C_2)y'=0$;

$2y'^2+2(y-C_2)y''=0$.

Исключаем C_1. Выражая его из первого уравнения, получаем $C_1=-2(y-C_2)y'$. Подставляем C_1 в исходное уравнение семейства кривых:

$-2xy'(y-C_2)+(y-C_2)^2=0$.

Из второго уравнения имеем $y-C_2=\dfrac{y'^2}{y''}$. После упрощения получаем дифференциальное уравнение $y'+2xy''=0$.

ТРЕНИРОВОЧНЫЕ УПРАЖНЕНИЯ

1. (У, А) Какой вид имеет уравнение

1) прямой;
2) параболы;

3) эллипса;
4) гиперболы;
5) окружности

2. Напишите дифференциальное уравнение семейства прямых $y = Cx$.

3. Найдите дифференциальное уравнение семейства парабол $y = Cx^2$.

4. Составьте дифференциальное уравнение данных семейств линий:

1) $y = e^{Cx}$;
2) $y = (x = C)^2$;
3) $y = \sin(x + C)$;
4) $y^2 + Cx = x^3$;
5) $x^2 + Cy^2 = 2y$.

5. С помощью изоклин начертите (приближенно) решения данных дифференциальных уравнений:

1) $y' = y - x^2$;
2) $y' = \dfrac{x^2 + y^2}{2} - 1$;
3) $xy' + x = 0$;
4) $xy' + y = 0$;
5) $xy' = 2y$.

6. Напишите дифференциальное уравнение, изоклинами которого являются равнобочные гиперболы $xy = a$

1.3. Дифференциальные уравнения с разделенными и разделяющимися переменными

Ключевые слова: разделенные переменные, разделение переменных, уравнение с разделяющимися переменными.

ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Уравнения с *разделяющимися* переменными – это дифференциальные уравнения первого порядка, которые могут быть записаны в виде $y' = f(x)g(y)$, а также в виде $M(x)N(y)dx + P(x)Q(y)dy = 0$.

Представляя производную как отношение дифференциалов, с помощью деления или умножения обеих частей уравнения на такое выражение, чтобы в одну часть уравнения входила только функция от переменной x и дифференциал x, а в другую – только функция от переменной y и дифференциал y, мы можем записать исходное уравнение в виде $G(y)dy = F(x)dx$. Для решения полученного уравнения достаточно проинтегрировать его обе части по соответствующей переменной.

Процедура записи уравнения в виде, когда в одной части собраны только выражения, зависящие от одной переменной, а в другой – от второй, называется *разделением переменных*. Уравнение, полученное в результате такого преобразования – уравнение с *разделенными переменными.*

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 1. Разделить переменные в уравнениях

1) $x^2(y^3+5)dx + (x^3+5)dy = 0;$

2) $y'\cos x = y^3$.

Решение.

1) Разделим обе части уравнения на произведение $(x^3+5)(y^3+5)$.

Получим уравнение $\dfrac{x^2}{x^3+5}dx + \dfrac{y^2}{y^2+5}dy = 0$, в котором переменные разделены.

2) Представим уравнение в виде $\frac{dy}{dx}\cos x = y^3$. Умножим обе части уравнения на dx и разделим на $y^3\cos x$. Получим уравнение с разделенными переменными $\frac{dy}{y^3} = \frac{dx}{\cos x}$.

Пример 2. Решить дифференциальное уравнение $x^2y^2y' + 1 = y$.

Решение.

Запишем уравнение в виде $x^2y^2\frac{dy}{dx} + 1 = y$ или $x^2y^2\frac{dy}{dx} = y - 1$.

Умножив обе части этого уравнения на dx, получаем $x^2y^2dy = (y-1)dx$.

Разделим обе части уравнения на выражение $x^2(y-1)$: $\frac{y^2}{y-1}dy = \frac{dx}{x^2}$. Переменные разделены. Интегрируем обе части полученного уравнения с разделенными переменными:

$$\int \frac{y^2}{y-1}dy = \int \frac{dx}{x^2}.$$

$\frac{y^2}{2} + y + \ln|y-1| = -\frac{1}{x} + C$ – общее решение исходного дифференциального уравнения.

Пример 3. Найти общее решение уравнения $y' = 5\sqrt{y}$ и его частное решение, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 25$.

Решение.

Перепишем заданное уравнение в виде $\frac{dy}{dx} = 5\sqrt{y}$. Деля обе части уравнения на $5\sqrt{y}$ и умножая на dx, получим уравнение с разделенными переменными $\frac{dy}{5\sqrt{y}} = dx$. Интегрируя обе части, находим общее решение $\frac{2}{5}\sqrt{y} = x + C$.

Для нахождения частного решения подставим в общее решение начальные условия $x = 0,\ y = 25$:

$\frac{2}{5}\sqrt{25} = 0 + C$, откуда $C = 2$.

Выразим из общего решения y и подставив найденное значение C, получаем частное решение $y = \frac{25}{4}(x+2)^2$.

ТРЕНИРОВОЧНЫЕ УПРАЖНЕНИЯ

1. (У, А) В чем состоит метод интегрирования внесением переменной под знак дифференциала?

2. (А) Вычислите интегралы

1) $\int \frac{dx}{9 + x^2}$;

2) $\int \frac{dx}{x^5}$;

3) $\int \sqrt[3]{x}dx$;

4) $\int \frac{3dx}{x}$;

5) $\int \frac{dx}{7x}$.

3. (А) Вычислите интегралы внесением под знак дифференциала:

1) $\int \frac{x^2}{x^3 - 8}dx$;

2) $\int \frac{xdx}{x^2 + 1}$.

4. (У) Укажите, какие из уравнений являются уравнениями с разделенными переменными:

1) $xdy + ydx = 0$;

2) $xdx + ydy = 0$;

3) $5xydx + 2xydy = 0$;

4) $x^2 dy + y^2 dx = 0$;

5) $x^2 dx = (y + \frac{1}{y})dy$;

6) $\sqrt{x}dx = \frac{dy}{y^5}$.

5. (У) Преобразуйте уравнение так, чтобы производная была представлена в дифференциальной форме:

1) $y'y = x^2$;

2) $\sqrt{1-x^2}\,y' = y$.

6. Разделите переменные, не решая дифференциального уравнения:

1) $y' = \frac{x}{y}$;

2) $y' = \frac{x}{siny}$;

3) $y' = y^2\sqrt{4x^2 - 1}$;

4) $y' = (1+x^2)(1-y^2)$;

5) $(x^2 y - y)dy + (xy^2 + x)dx = 0$.

7. Составьте 2-3 уравнения с разделенными переменными.

8. Разделите переменные в уравнении, если известно, что y является аргументом, а $x-$ функцией от y:

1) $dx = xdy$;

2) $x' = xy$.

9. Найдите частные решения уравнений с разделенными переменными, отвечающие начальным условиям $y(1) = 2$.

1) $dx = ydy$;

2) $(x+1)dx = 4ydy$;

3) $y' = \frac{1}{x}$.

10. Решите дифуравнения, разделив переменные

1) $y' = 4 + y^2$;

2) $y' = xy^4$;

3) $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$;

4) $y' = \frac{1+y^2}{1+x^2}$;

5) $y' = x^6\sqrt{1-y^2}$;

6) $y' = \frac{x^3}{\sin y}$;

7) $y'\sqrt{1-x^2} = 2\sqrt{y}$;

8) $xydx + (x+1)dy = 0$;

9) $\sqrt{y^2+1}dx = xydy$;

10) $xdy = \frac{y^3}{1-y^2}dx$;

11) $\frac{y'x+y}{y'} = 3x$;

12) $y' = \frac{x^2+1}{y}$;

13) $(x+1)ydx + (1-y)dy = 0$;

14) $xydx + x^2y^3dy = 0$;

15) $x^2dy + y^2dx = 0$;

16) $x^3du + udx = 0$;

17) $\sqrt{x}ydx + x^2ydy = 0$;

18) $y' = x^2\cos^2 y$;

19) $y' = xy + x$;

20) $y' - ytgx = 0$;

21) $y'tgx = y$;

22) $\sqrt{1-y^2}\,dx + y\sqrt{1-x^2}\,dy = 0$.

11. Решите дифференциальные уравнения

1) $(1+u)vdv = (1-v)udu$;

2) $(t^2 - tx)\dfrac{dx}{dt} + (x^2 + tx^2) = 0.$

12. Найдите общее решение дифференциальных уравнений.

1) $xyy' = 1 - x^2$;

2) $yy' = \dfrac{1-2x}{y}$;

3) $y' = 10^{x+y}$.

13. Найдите решение уравнения $\dfrac{e^x}{e^x + 1}dx = ydy$, отвечающее условию $y(0) = 1$.

14. Найдите решение дифуравнения $y'ctgx + y = 2$, отвечающее начальному условию $y\big|_{x=0} = -1$.

15. Найдите решение дифуравнения $y'(yx^2 - y) + xy^2 + x = 2$, отвечающее начальному условию $y(0) = 1$.

16. Найдите решение дифуравнения $y' + \dfrac{1-2x}{x^2}y = 0$, отвечающее начальному условию $y(1) = 1$.

17. Найдите решение дифуравнения $y' = 2y$, отвечающее начальному условию $y(0) = 1$. Постройте интегральную кривую, отвечающую частному решению уравнения.

18. Постройте интегральные кривые уравнения $y' = k\dfrac{y}{x}$.

19. Является ли решение $y = 2$ особым решением уравнения $x(y^2 - 4)dx + ydy = 0$?

20. Найдите общие решения уравнений, их особые решения и частные решения, удовлетворяющие указанным начальным условиям:

1) $x^2(y^3+5)dx+(x^3+5)y^2dy=0; y(0)=1.$

2) $x\sqrt{1+y^2}dx+y\sqrt{1+x^2}dy=0; y(\sqrt{3})=0.$

3) $xydx+(1+y^2)\sqrt{1+x^2}dy=0; y(\sqrt{8})=1.$

4) $tgydx-x\ln xdy=0; x(\frac{\pi}{2})=e.$

5) $y'=(2y+1)ctgx;\ y(\frac{\pi}{4})=\frac{1}{2}.$

1.4. Однородные уравнения

Ключевые слова: однородная функция, функция n-го измерения, функция нулевого измерения, однородное уравнение.

ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Функция $f(x,y)$ называется *однородной* степени n (или функцией n-го измерения), если для всех k выполняется равенство $f(kx,ky)=k^n f(x,y)$. Если дифференциальное уравнение не изменяется при замене x на kx, а y на ky (т.е. функция $f(x,y)$, входящая в уравнение, является функцией нулевого измерения), то оно является *однородным*.

Однородное уравнение может быть записано в виде $y'=f(\frac{y}{x})$ или $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0,$ где $M(x,y)$ и $N(x,y)$ – однородные функции одной и той же степени.

Для решения однородного уравнения делают замену, обозначая отношение функций y и x другой буквой, например, $\frac{y}{x}=t$. Эта подстановка позволяет получить уравнение с разделяющимися переменными. После того, как новое уравнение будет проинтегрировано, следует заменить t на $\frac{y}{x}$.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 1. Проверить, является ли уравнение однородным.

1) $y' = \frac{xy}{x-y}$;

2) $y'y = xtg\frac{2x}{y}$

Решение.

Подставим в каждое уравнение вместо $x - kx$, а вместо $y - ky$. Заметим, что первое уравнение при этом изменилось, превратившись в $y' = \frac{k^2xy}{k(x-y)} = \frac{kxy}{x-y}$, а второе – нет: $y'ky = kxtg\frac{2kx}{ky}$, или $y'y = xtg\frac{2x}{y}$, (k сократилось). Таким образом, однородным является только второе уравнение.

Пример 2. Проинтегрировать дифференциальное уравнение $y' + \frac{x^2 + y^2}{xy} = 0$.

Решение.

Прежде всего убедимся, что заданное уравнение является однородным. Заменив x на kx, а y на ky, заметим, что уравнение не изменяется. Это и доказывает, что оно однородное.

Сделаем подстановку $\frac{y}{x} = u$, или $y = ux$. Тогда по формуле дифференцирования произведения получаем, что $y' = u'x + ux' = u'x + u$. Исходное уравнение после подстановки перепишется так:

$$u'x + u + \frac{x^2 + u^2x^2}{xux} = 0.$$

Сократим дробь на x^2: $u'x + u + \dfrac{1+u^2}{u} = 0$.

$$u'x = -u - \frac{1+u^2}{u}.$$

В правой части выполним приведение к общему знаменателю:

$$u'x = -\frac{1+2u^2}{u}.$$

Получили уравнение с разделяющимися переменными

$$\frac{du}{dx}x = -\frac{1+2u^2}{u}.$$

Разделив переменные, получаем

$$\frac{dx}{x} = -\frac{u}{1+2u^2}.$$

Интегрируем обе части полученного уравнения (в левой части интеграл находим внесением под знак дифференциала):

$$-\frac{1}{4}\ln\left|1+2u^2\right| = \ln|x| + \ln C;$$

$$\ln(1+2u^2)^{-1} = 4\ln|x| + 4\ln C;$$

Потенцируя (переходя от логарифмов к числам), находим, что

$$\frac{1}{1+2u^2} = Cx^4.$$

Делая обратную подстановку $u = \dfrac{y}{x}$, переходим к переменным x и y:

$$\frac{1}{1+\dfrac{2y^2}{x^2}} = Cx^4.$$

После упрощения имеем $\dfrac{1}{x^2+2y^2} = Cx^2$ или $x^2(x^2+2y^2) = \dfrac{1}{C}$.

Обозначив $\dfrac{1}{C}$ через C_1, окончательно получаем общее решение исходного уравнения: $x^2(x^2+2y^2)=C_1$.

Пример 3. Решить уравнение $xdy=(x+y)dx$

Решение.

Проверим, является ли уравнение однородным. Подставляем вместо *x* и *y* *kx и ky*: $kxdy=(kx+ky)dx$. Вынеся в правой части уравнения *k* за скобку, делим обе части уравнения на *k*. Так как уравнение не изменилось при замене *x* на *kx, y* на *ky*, то оно является однородным.

Положим $y=tx$. Тогда, применяя формулу производной произведения, получаем $dy=tdx+xdt$.

Подставляя значения *y* и *dy* в уравнение, получим

$$x(xdt+tdx)=(x+tx)dx;$$

Вынесем в правой части уравнения *x* за скобку и разделим обе части уравнения на *x:*

$$xdt=dx;$$

$$dt=\frac{dx}{x};$$

$$t=\ln|x|+C$$

Возвращаемся к прежней переменной *y*: $y=x(\ln|x|+C)$.

Кроме того, имеется решение $x=0$, потерянное при делении обеих частей уравнения на *x*.

ТРЕНИРОВОЧНЫЕ УПРАЖНЕНИЯ

1. Определить порядок (измерение) функций

1) $f(x,y)=xy$;

2) $f(x,y)=x+y$;

3) $f(x,y)=x^3+y^3$;

4) $f(x,y)=\sqrt{xy}$;

5) $f(x,y) = xy - y^2$;

6) $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$.

2. Составьте аналитическое выражение функции первого измерения.

3. (У) Приведите пример функции нулевого измерения.

4. Выбрать из предложенных уравнений однородные.

1) $(xy' - y)arctg\dfrac{y}{x} = x$;

2) $y' = \dfrac{x+y}{x-y}$;

3) $y' = 4 + (\dfrac{y}{x})^2 + \dfrac{x}{y}$;

4) $xy' = y\ln(\dfrac{y}{x})$;

5) $y'tgx = \cos^2 x$;

6) $y' = \dfrac{y+1}{x^2}$;

7) $y' = \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}$;

8) $y' + 2xy = xe^{-x^2}$;

9) $y' + \dfrac{2y}{x} = \dfrac{4x}{y}$;

10) $y' + \dfrac{x^2 + y^2}{xy} = 0$;

11) $y' = \dfrac{y^2}{x^2} - 2$;

12) $xydy - y^2 dx = (x+y)^2 e^{-\frac{y}{x}} dx$.

5. Решите однородные уравнения из предыдущего упражнения.

6. Для уравнения $y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$ найдите частное решение при условии $y(1) = \sqrt{2}$.

7. (У) Приведите примеры уравнений, являющихся однородными и не являющихся таковыми

8. Найдите частные решения однородных уравнений

1) $xy' = x\sin\frac{y}{x} + y$ при условии $y(1) = 1$;

2) $y' = e^{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}$ при $y(1) = 0$;

3) $xy' = y(1 + \ln\frac{y}{x})$ при $y(1) = \frac{1}{\sqrt{e}}$;

4) $y' = \frac{y^2}{x^2} - \frac{y}{x}$ при $y(-1) = 1$

9. Проинтегрируйте дифференциальные уравнения:

1) $y' + \frac{x^2 + y^2}{xy} = 0$;

2) $(x + y)dx + (y - x)dx = 0$;

3) $(x^2 - xy)dy + y^2dx = 0$;

4) $xy' + x\cos\frac{y}{x} - y + x = 0$;

5) $(x + 2y)dx - xdy = 0$;

6) $(2x - 4y + 6)dx + (x + y - 3)dy = 0$;

7) $(xy' - y) = xtg\frac{y}{x}$.

1.5. Линейные уравнения первого порядка

Ключевые слова: линейное дифференциальное уравнении первого порядка, подстановка, метод Бернулли, метод Лагранжа.

ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Уравнение вида $y' + p(x)y = q(x)$ называют *линейным* потому, что искомая функция y и ее производная y' входят в него в первой степени. Функции *p(x)* и *q(x)* предполагаются непрерывными в промежутке (*a,b*), в котором ищется решение уравнения.

Если правая часть линейного уравнения – функция $q(x)$ – тождественно равна нулю, то такое уравнение называется линейным *однородным* уравнением или уравнением без правой части, при $q(x) \neq 0$ – линейным неоднородным.

Некоторые уравнения становятся линейными, если поменять местами искомую функцию и независимую переменную. Например, уравнение $y = (2x + y^3)y'$ не является линейным. Запишем его в дифференциалах:

$ydx - (2x + y^3)dy = 0$. Заметим, что в это уравнение *x* и *dx* входят линейно, поэтому уравнение будет линейным, если считать *x* искомой функцией, а *y* – независимой переменной. Его можно записать в виде

$$\frac{dx}{dy} - \frac{2}{y} = y^2.$$

Для решения линейного уравнения могут использоваться разные методы. Один из них – *метод Бернулли* – заключается в следующем. Общее решение линейного неоднородного уравнения ищется в виде произведения двух функций от $x: y = u(x)v(x)$, одна из которых (например, *v*) выбирается произвольно, а вторая находится из уравнения. Для того подставляют в уравнение значение *y* и y', после чего группируют слагаемые, вынося за скобки *u*. Приравнивая выражение в скобках к нулю, находят значение функции *v*. Затем, подставив в уравнение значение *v,* находят *u.* Общее решение записывают в виде произведения найденных функций *u* и *v*.

Заметим, что функция *u* в этом случае будет равна выражению $e^{-\int p(x)dx}$ (1).

Эта подстановка приводит линейное уравнение к уравнению с разделяющимися переменными, что позволяет упростить алгоритм решения.

Заметим, что при решении линейных уравнений чаще всего полученные интегралы приходится вычислять с помощью формулы интегрирования по частям. При использовании этой формулы рекомендуем пользоваться соответствующей таблицей из приложения 2.

Метод Лагранжа (или метод вариации произвольной постоянной) состоит в том, что общее решение линейного неоднородно уравнения можно найти исходя из общего решения соответствующего однородного уравнения варьируя произвольную постоянную, т.е. полагая $y = C(x)e^{-\int P(x)dx}$, где $C(x)-$ некоторая, подлежащая определению, дифференцируемая функция от *x*. Для нахождения $C(x)$ нужно подставить *y* в исходное уравнение. Тогда получим, что

$C'(x)e^{-\int p(x)dx} = q(x),$ откуда

$C(x) = \int q(x)e^{\int p(x)dx}\,dx + C,$ где C – произвольная постоянная.

Тогда искомое общее решение линейного неоднородного уравнения имеет вид $y = e^{-\int p(x)dx}\left(\int q(x)e^{\int p(x)dx}\,dx + C\right)$.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 1. Решить уравнение $\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{2}{x+1}y = (x+1)^3$.

Решение.

Заметим, что уравнение является линейным, так как искомая функция y и ее производная входят в уравнение в первой степени. Решим его методом Бернулли.

Полагаем $y = uv$, тогда $\frac{dy}{dx} = u\frac{dv}{dx} + \frac{du}{dx}v$.

Подставляем эти выражения в исходное уравнение:

$$u\frac{dv}{dx} + \frac{du}{dx}v - \frac{2}{x+1}uv = (x+1)^3$$

Группируя и вынося u за скобку, получаем

$$u(\frac{dv}{dx} - \frac{2}{x+1}v) + v\frac{du}{dx} = (x+1)^3.$$

Для нахождения v приравниваем выражение в скобках к нулю:

$$\frac{dv}{dx} - \frac{2}{x+1}v = 0.$$

Отсюда $\frac{dv}{dx} = \frac{2v}{x+1}$.

Разделяя переменные, получаем

$$\frac{dv}{v} = \frac{2dx}{x+1}.$$

Интегрируя обе части уравнения, имеем

$$\ln|v| = 2\ln|x+1|.$$

Потенцируя, находим, что $v = (x+1)^2$.

Находим теперь функцию u. Из уравнения $u(\frac{dv}{dx} - \frac{2}{x+1}v) + v\frac{du}{dx} = (x+1)^3$, имея в виду, что выражение в скобках равно 0, получаем

$v\frac{du}{dx} = (x+1)^3$. Подставляем сюда найденное значение v:

$$(x+1)^2\frac{du}{dx} = (x+1)^3.$$

Отсюда $du = (x+1)dx$. Интегрируя, получаем $u = \frac{x^2}{2} + x + C$.

Возвращаясь к подстановке $y = uv$, получаем общее решение заданного уравнения $y=(\frac{x^2}{2}+x+C)(x+1)^2$.

Пример 2. Найти решение уравнения $y'+y=e^x$, удовлетворяющее начальному условию $y(0)=1$.

Решение.

Сравнивая это уравнение с уравнением, записанным в общем виде, заметим, что функция *p(x)* – коэффициент при *y* – равна 1.

Тогда $\int p(x)dx=\int dx=x, a\, e^{-\int p(x)dx}=e^{-x}$.

Так мы получили значение функции *u*. Делаем подстановку $y = uv = e^{-x}v$. Тогда $y'=e^{-x}v'-ve^{-x}$.

Подставим значения y и y' в исходное уравнение, получаем $e^{-x}v'-ve^{-x}+e^{-x}v= e^x$. Получили уравнение с разделяющимися переменными $e^{-x}v'=e^x$. Записав производную в виде отношения дифференциалов и умножив обе части уравнения на $e^x dx$, получим уравнение с разделенными переменными:

$dv=e^{2x}dx$.

Интегрируя, находим значение функции *v:*

$v=\frac{1}{2}e^{2x}+C$.

Общее решение уравнения $y = uv = e^{-x}v=e^{-x}(\frac{1}{2}e^{2x}+C)=$

$Ce^{-x}+\frac{1}{2}e^x$.

Пример 3. Проинтегрировать уравнение $y'cos^2x+y=tgx$.

Решение.

Решим это уравнение методом Лагранжа.

Проинтегрируем соответствующее однородное уравнение $y'cos^2x+y=0$. Это уравнение является уравнением с разделяющимися переменными, разделив которые, получим

$\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{\cos^2 x}$. Проинтегрировав обе части уравнения, получаем общее решение $\ln y = -tgx + \ln C$ или $y = Ce^{-tgx}$.

Ищем решение неоднородного уравнения в виде $y = C(x)e^{-tgx}$.

Тогда $y' = C'(x)e^{-tgx} - C(x)e^{-tgx}\sec^2 x$.

Подставив значение y и y' в исходное уравнение, приходим к уравнению

$$\cos^2 xC'(x)e^{-tgx} - \cos^2 xC(x)e^{-tgx}\sec^2 x + C(x)e^{-tgx} = tgx$$

или $\cos^2 xC'(x)e^{-tgx} = tgx$.

Находим $C'(x) = \frac{tgxe^{tgx}}{\cos^2 x}$. Интегрируем, используя метод внесения под знак дифференциала. Находим, что $C(x) = \int \frac{tgxe^{tgx}}{\cos^2 x}dx = e^{tgx}(tgx - 1) + C$.

Таким образом, общее решение данного уравнения $y = C(x)e^{-tgx} = (e^{tgx}(tgx - 1) + C)e^{-tgx} = tgx - 1 + Ce^{-tgx}$.

ТРЕНИРОВОЧНЫЕ УПРАЖНЕНИЯ

1. (А, У) Для чего используется формула интегрирования по частям? Назовите эту формулу.

2. (У) Выберите из нижеперечисленных уравнений линейные:

1) $y' + 2y^2 = \frac{6}{x}$;

2) $(2x^2 y\ln y - x)y' = y$;

3) $y'x^3 \sin y = xy' - 2y$;

4) $2y' + 3y^2 + \frac{2}{x^2} = 0$.

3. Решите линейные уравнения, пользуясь разными алгоритмами.

1) $y' + y = cosx$;

2) $y' + 2y = 4x$

3) $y' + 2xy = xe^{-x}$;

4) $y' + \dfrac{1-2x}{x^2} y = 1$;

5) $(1+x^2)y' - 2xy = (1+x^2)^2$;

6) $2ydx + (y-6x)dy = 0$;

7) $x(y'-y) = (1+x^2)e^x$;

8) $y' - ytgx = \dfrac{1}{cosx}$, $y(0)=0$

9) $xy' + y - e^x = 0$;

10) $y' - 2xy = 1 - 2x^2$;

11) $ydx - (x + y^2 \sin y)dy = 0$;

12) $tdx + (x - t\sin t)dt = 0$;

13) $xy' - 2y = 2x^4$;

14) $(x + y^2)dy = ydx$;

4. Найдите частное решение уравнения $xy' - \dfrac{y}{x+1} = x$ при начальных условиях $y(1) = 0$.

5. Решите задачу Коши для уравнения $y' + y\cos x = \sin x \cos x$, если $y(0) = 0$.

6. Найдите общие и частные решения следующих линейных уравнений:

1) $y' + ytgx = \cos^2 x$; $y(\dfrac{\pi}{4}) = \dfrac{1}{2}$;

2) $y' - \dfrac{1}{x+2} y = x^2 + 4x + 5$; $y(-1) = 1{,}5$;

3) $y' - 4y = cosx$, $y(0) = 1$.

1.6. Уравнения Бернулли

Ключевые слова: уравнение Бернулли.

ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Если правую часть линейного неоднородного уравнения умножить на y^n, при условии, что n – любое действительное число кроме 0 и 1, то получим уравнение вида $y' + p(x)y = q(x)y^n$, которое называется уравнением Бернулли. Это уравнение не является линейным, но после умножения на y^{-n} и подстановки $y^{1-n} = z$, где z – новая искомая функция, оно приводится к линейному.

Преобразование уравнения Бернулли и его решение проводится по такому алгоритму:

1) умножаем обе части уравнения на y^{-n};
2) вводим подстановку $y^{1-n} = z$ и дифференцируем обе части этого равенства: $(1-n)y^{-n}y' = z'; y^{-n}y' = \dfrac{z'}{1-n}$;
3) полученное уравнение решаем как линейное с помощью подстановки, в которой вместо y надо писать z;
4) возвращаемся к искомой функции, заменяя z на y^{1-n}.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 1. Найти общее решение уравнения Бернулли $xy' - y(2y\ln x - 1) = 0$.

Решение.

Разделив обе части уравнения на x, и запишем его в следующем виде:

$$y' + \frac{1}{x}y = 2\frac{\ln x}{x}y^2.$$

Умножим обе части уравнения на y^{-2}:

$$y^{-2}y'+\frac{1}{x}y^{-1}=2\frac{\ln x}{x}.$$

Сделаем подстановку $y^{-1}=z$, тогда $z'=-y^{-2}y'$. Получим уравнение $z'-\frac{1}{x}z=-2\frac{\ln x}{x}$, которое является линейным относительно z и z'.

Здесь $p(x) = -\frac{1}{x}; -\int p(x)dx=\int\frac{dx}{x}=\ln x;$ тогда $e^{-\int p(x)dx}=e^{knx}=x$.

Делаем подстановку $z=vx,\ z'=v'x+v$.

$$v'x+v-\frac{1}{x}vx=-2\frac{\ln x}{x}.$$

Разделяя переменные и учитывая, что $v=x$, получаем

$$dv=-2\frac{\ln x}{x^2}dx.$$

Для вычисления интеграла в правой части используем формулу интегрирования по частям. Получаем

$$v=-2\int\frac{\ln x}{x^2}dx=\begin{bmatrix} u=\ln x, du=\dfrac{dx}{x} \\ dt=\dfrac{dx}{x^2}, t=-\dfrac{1}{x}\end{bmatrix}=-2\left(-\frac{\ln x}{x}+\int\frac{dx}{x^2}\right)=2\frac{\ln x}{x}+\frac{2}{x}+C$$

$$z=vx=\left(2\frac{\ln x}{x}+\frac{2}{x}+C\right)x,.$$

$$z=Cx+2\ln x+2$$

Чтобы возвратиться к исходной функции, воспользуемся сделанной подстановкой $y^{-1}=z$ и получим

$$y^{-1}=Cx+2\ln x+2,$$

откуда $y=\dfrac{1}{Cx+2\ln x+2}$.

ТРЕНИРОВОЧНЫЕ УПРАЖНЕНИЯ

1. (У) На какое выражение нужно умножить обе части уравнения Бернулли, чтобы затем с помощью подстановки его можно было привести к линейному.

1) $y' + 2x^2 y = 3xy^5$

2) $y' - \dfrac{y}{x} = -y^3$

3) $(x-9)y' - 5y = (x+5)y^2$

4) $xy' - 8x^2 y = 6\sqrt{y}$.

Какая подстановка приведет каждое из уравнений к линейному?

2. Приведите уравнение Бернулли к виду линейного уравнения.

1) $\dfrac{dy}{dx} + xy = x^3 y^3$;

2) $xy' - y^2 \ln x - 5y = 0$;

3) $y' + \dfrac{y}{x} = 2xy^2$

4) $y' + xy = x^3 y^3$.

3. Найдите общее решение уравнений

1) $x^2 y^2 y' + xy^3 = 9$;

2) $y' - \dfrac{y}{x} = -y^2$;

3) $xy' - y^2 \ln x + y = 0$;

4) $(x^2 - 9)y' - 9y = -(x+3)y^2$;

5) $y' + \dfrac{xy}{1-x^2} = x\sqrt{y}$.

1.7. Уравнения в полных дифференциалах

Ключевые слова: полный дифференциал, частные производные, дифференциальное уравнение в полных дифференциалах, интегрирующий множитель.

ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Уравнение $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ называется *уравнением в полных дифференциалах,* если его левая часть является полным дифференциалом некоторой функции *F(x,y*). Это имеет место, если $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$.

Чтобы решить уравнение в полных дифференциалах, нужно найти функцию *F(x,y*), от которой полный дифференциал $dF(x,y) = F'_x dx + F'_y dy$ равен левой части заданного уравнения.

Тогда общее решение заданного уравнения можно записать в виде *F(x,y)=C,* где *C* – произвольная постоянная.

Интегрирующим множителем для уравнения $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ называется такая функция $m(x,y) \neq 0,$ после умножения на которую это уравнение превращается в уравнение в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель должен удовлетворять уравнению в частных производных $(mM)'_y = (mN)'_x$. Интегрирующий множитель существует, если функции M и N в уравнении $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ имеют непрерывные частные производные и не обращаются в нуль одновременно. Общего метода отыскания интегрирующего множителя не существует. Но в некоторых случаях бывают полезны следующие приемы.

- Написав какое-нибудь выражение $z = \varphi(x,y),$ зависящее от *x* и *y* (в частности $z = x, z = y, z = xy$ *или* $z = \dfrac{x}{y}$), можно узнать, существует ли интегрирующий множитель и найти его. Для этого в исходное уравнение подставляют $m = m(z)$. Если в полученном уравнении удалось избавиться от *x* и *y*, то интегрирующий множитель существует.

- Если в уравнении $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ можно выделить полный дифференциал некоторой функции $\varphi(x,y)$, то иногда уравнение упрощается, если от переменных (x,y) перейти к переменным (x,z) или (y,z), где $z = \varphi(x,y)$.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 1. Решить уравнение

$(2x + 3x^2 y)dx + (x^3 - 3y^2)dy = 0$.

Решение.

Проверим выполнение равенства $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$.

Так как $\frac{\partial(2x + 3x^2 y)}{\partial y} = 3x^2$ и $\frac{\partial(x^3 - 3y^2)}{dx} = 3x^2$, то уравнение является уравнением в полных дифференциалах.

Найдем функцию *F(x,y)*, полный дифференциал которой $dF(x,y) = F'_x dx + F'_y dy$ был бы равен левой части уравнения. следовательно,

$F'_x = 2x + 3x^2 y$ (1), $F'_y = x^3 - 3y^2$ (2)

Интегрируем по *x* уравнение (1), считая *y* постоянным. При этом вместо постоянной интегрирования надо поставить $\varphi(y)$– неизвестную функцию от *y*.

$F = \int(2x + 3x^2 y)dx = x^2 + x^3 y + \varphi(y)$.

Подставляя это выражение для *F* в уравнение (2), найдем

$\varphi(y) : (x^2 + x^3 y + \varphi(y))'_y = x^3 - 3y^2$.

$\varphi'(y) = -3y^2$; $\varphi(y) = -y^3 + const$.

Следовательно, можно взять $F(x,y) = x^2 + x^3 y - y^3$ и общее решение уравнения будет иметь вид:

$x^2 + x^3 y - y^3 = C.$

Пример 2. Найти интегрирующий множитель для уравнения

$(y^4 - 4xy)dx + (2xy^3 - 3x^2)dy = 0$.

Решение.

Проверим, существует ли интегрирующий множитель, зависящий только от $z = xy$. Для этого умножим обе части заданного уравнения на $m = m(z)$ и напишем условие полного дифференциала:

$\left[\, m(y^4 - 4xy) \,\right]' y = \left[m(2xy^3 - 3x^2) \,\right]' x$.

Так как $m'_x = m'_z \cdot z'_x = m'_z \cdot y,\ m'_y = m'_z \cdot z'_y = m'_z x$, то после упрощения получаем $m'_z \cdot xy(y^3 + x) = 2m(y^3 + x)$, заменяя xy на z и сокращая на $(y^3 + x)$, получим $m'_z \cdot z = 2m$. Так как удалось избавиться от x *и* y, то интегрирующий множитель существует. Его найдем из последнего уравнения непосредственным интегрированием: $m = Cz^2$. Постоянную C можно выбрать произвольно, например, взяв $C = 1$. Таким образом, для заданного уравнения интегрирующим множителем является $m = x^2 y^2$.

ТРЕНИРОВОЧНЫЕ УПРАЖНЕНИЯ

1. (У, А) Прочитайте и поясните запись $\dfrac{\partial f}{\partial x}$? $\dfrac{\partial f}{\partial y}$?

2. (А) Что значит вычислить частную производную некоторой функции $f(x, y)$ по x?

3. Найдите частные производные $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ для функций

1) $f = x^3 y^4 - 3x$;

2) $f = x^4 - y^7$;

3) $f = \cos x - \sin y$;

4) $f = \cos x \sin y$

4. Запишите полный дифференциал функции $f(x,y)$.

5. (А) Найдите полный дифференциал функции $x^2+y^2-1=0$.

6. Проверьте, является ли уравнение уравнением в полных дифференциалах :

1) $\dfrac{2x}{y^3}dx+\dfrac{y^2-3x^2}{y^4}dy=0;$

2) $(2x-y^3)dx+(2y-x^3)dy=0;$

3) $xydx+xydy=0$;

4) $(x^2+y)dx+(x-2y)dy=0$;

5) $(y-3x^2)dx-(4y-x)dy=0$;

6) $2xydx+(x^2-y^2)dy=0$.

7. Решите те из уравнений из предыдущего задания, которые являются уравнениями в полных дифференциалах.

8. Найдите общие решения уравнений в полных дифференциалах:

1) $(2x^3-xy^2)dx+(2y^3-x^2y)dy=0;$

2) $(x^2+y)dx+(x-2y)dy=0$;

3) $e^{-y}dx-(2y+xe^{-y})dy=0$;

4) $\dfrac{y}{x}dx+(y^3+\ln x)dy=0$;

5) $(x+y)dx+(x+2y)dy=0$;

6) $(y^3-x)y'=y$;

7) $(x+y-1)dx+(e^y+x)dy=0$;

8) $y'=-\dfrac{x+\sin y}{x\cos y+\sin y}$;

9) $(x^2+\sin y)dx+(1+x\cos y)dy=0$;

10) $\dfrac{2x}{y^3}dx+\dfrac{y^2-3x^2}{y^4}dy=0$;

11) $(1+x\sqrt{x^2+y^2})dx+(-1+\sqrt{x^2+y^2})ydy=0$.

9. Убедитесь, что интегрирующим множителем линейного уравнения $\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)$ является функция $e^{\int P(x)dx}$.

10. Проверьте, существует ли интегрирующий множитель для уравнения $\frac{y}{x}dx+(y^3-\ln x)dy=0.$

11. Найдите условия, при которых уравнение $X(x,y)dx+Y(x,y)dy=0$ допускает интегрирующий множитель вида $M=F(x+y)$.

12. Найдите интегрирующий множитель и общие решения уравнений

1) $\frac{y}{x}dx+(y^3-\ln x)dy=0$;

2) $(x^2+y)dx-xdy=0;$

3) $(x^2+y^2+2x)dx+2ydy=0$;

4) $(x\cos y-y\sin y)dy+(x\sin y+y\cos y)dx=0;$

РАЗДЕЛ 2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

2.1. Уравнения, допускающие понижение порядка

Ключевые слова: дифференциальное уравнение n-го порядка, понижение порядка уравнения, задача Коши, уравнение, разрешимое относительно производной.

ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Дифференциальное уравнение n-го порядка имеет вид $f(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0$, где x – независимая переменная, y – искомая функция. Всякая функция $y = \varphi(x)$, определенная и n раз дифференцируемая в промежутке (a, b), называется решением этого уравнения, если она обращает его в тождество.

Задача Коши для дифференциального уравнения n-го порядка ставится так: найти такое решение дифференциального уравнения, чтобы оно само и его производные до (n-1) порядка включительно при заданном значении аргумента $x = x_0$ принимали бы заданные значения, т.е. чтобы это решение удовлетворяло условиям: $y(x_0) = y_0$; $y'(x_0) = y'_0$; $y''(x_0) = y''_0$, …, $y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$, где x_0 и y_0, $y'_0, y''_0, ..., y_0^{(n-1)}$ – заданные числа, которые называются начальными условиями.

Отличительной особенностью задачи Коши является то, что как значения как искомой функции, так и всех ее производных до порядка $n-1$ включительно задаются при одном и том же значении независимой переменной $x = x_0$.

Решение такого уравнения имеет в своем составе n произвольных постоянных и имеет вид $F(x, C_1, C_2, ..., C_n) = 0$.

Если уравнение имеет вид $F(x, y^{(n)}) = 0$ и его можно разрешить относительно $y^{(n)}$, т.е. представить в виде

$y^{(n)} = f(x)$, то для получения его общего решения нужно n раз продифференцировать функцию $f(x)$ и прибавить к полученному результату многочлен $(n-1)$-ой степени, коэффициентами которого являются произвольные постоянные.
Уравнение n-го порядка, не содержащее искомой функции имеет вид $f(x, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0$. Его порядок можно понизить на единицу при помощи подстановки $y' = p(x)$.Эта подстановка приводит к уравнению $f(x, p, p', p'', ..., p^{(n-1)}) = 0$, которая решается описанным выше способом.
Если в уравнение не входит независимая переменная x, то порядок его можно понизить, взяв за новую независимую переменную y, а за неизвестную функцию $y' = p(y)$.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 1.Найти общее решение уравнения $xy'' - 1 = 0$.

Решение.

Это уравнение разрешимо относительно производной. Выразив производную второго порядка, получим:

$$y'' = \frac{1}{x}.$$

Проинтегрируем обе части этого уравнения.

$y' = \ln x + C$;

$$y = \int (\ln x + C)dx = \begin{bmatrix} u = \ln x; du = \dfrac{1}{x}dx \\ dv = dx;\ v = x \end{bmatrix} = x\ln x - \int dx + Cx = x\ln x - x + Cx.$$

(При нахождении интеграла $\int \ln x dx$ воспользовались формулой интегрирования по частям).

Пример 2. Решить задачу Коши при указанных начальных условиях для уравнения $y'' = \sin kx$; $y(0) = 0; y'(0) = 1$.

Решение.

Проинтегрируем дважды $\sin kx$ в пределах от 0 до x (так как $x_0 = 0$ по условию).

При первом интегрировании получим

$$y' = \int_0^x \sin kx dx = -\frac{1}{k}(\cos kx)\Big|_0^x + C = -\frac{1}{k}\cos kx + \frac{1}{k}\cos 0 + C = -\frac{1}{k}\cos x + \frac{1}{k} + C$$

При втором интегрировании получаем общее решение заданного уравнения:

$$y = -\int_0^x (\frac{1}{k}\cos kx - \frac{1}{k} - C)dx = (-\frac{1}{k^2}\sin kx + \frac{1}{k}x + Cx)\Big|_0^x + C_1 =$$

$$= -\frac{1}{k^2}\sin kx + \frac{x}{k} + Cx + C_1.$$

Чтобы найти частное решение (решить задачу Коши), достаточно найти значения C и C_1.

Из условия $y(0) = 0$ находим, что $C_1 = 0$.

Из второго условия $y'(0) = 1$ находим значение $C = 1$.

Таким образом, частное решение заданного уравнения имеет вид:

$$y = -\frac{1}{k^2}\sin kx + \frac{x}{k} + Cx$$

Пример 3. Решить уравнение $2yy'' = y'^2 + 1$.

Решение.

В уравнение не входит *x*. Полагаем $y' = p(y)$. Тогда

$$y'' = \frac{d(y')}{dx} = \frac{dp(y)}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p \cdot p'.$$

Подставляя $y' = p(y)$ и $y'' = pp''$ в уравнение, получим $2ypp' = p^2 + 1$. Порядок уравнения понижен. Решив полученное уравнение, найдем $p = \pm\sqrt{Cy - 1}$. Следовательно, $y' = \pm\sqrt{Cy - 1}$.

Из этого уравнения получаем $4(Cy - 1) = C^2(x + C_2)$.

ТРЕНИРОВОЧНЫЕ УПРАЖНЕНИЯ

1. (А)Найдите производную третьего порядка от следующих функций:

1) $y = x^3 + 7$;

2) $y = \dfrac{1}{x}$;

3) $y = e^{2x}$;

4) $y = \sin 2x$.

2. (У) Известна производная 3-го порядка от некоторой функции y'''. Сколько раз нужно проинтегрировать эту производную, чтобы получить функцию y? Сколько произвольных постоянных будет иметь в своем составе функция y?

3. (А) Проинтегрируйте заданные функции 4 раза.

1) $y = \sin x$;

2) $y = 8$;

3) $y = x - 3$;

4) $y = x^2$;

5) $y = e^{2x}$.

4. Решите дифференциальные уравнения

1) $y'' = \sin x$;

2) $y''' = \cos 2x$;

3) $y''' = 3x + 1$;

4) $y'' = \dfrac{1}{x}$;

5) $y'' = 0$;

6) $y'' = a$;

7) $xy''' = 1$;

8) $xy'' = x^2$;

9) $y'' = 2\sqrt{x}$;

10) $y''' = x + cosx$.

5. Общее решение некоторого дифференциального уравнения имеет вид $y = \sin x + 2x + C_1 x + C_2$. Найдите его частное решение при условиях $y(0) = 0; y'(0) = 1$.

6. (У) Сколько начальных условий должно быть задано, чтобы было возможным найти частное решение уравнения, содержащего производную 5-го порядка, разрешимого относительно этой производной?

7. (У) В каком случае условия задачи Коши для уравнения, содержащего производную третьего порядка и разрешимого относительно этой производной, записаны неправильно? Ответ объясните.

1) $y(0) = 1;\ \ y'(1) = 2; y''(0) = -1$;

2) $y(1) = 0; y'(1) = -1; y''(1) = 2; y'''(1) = 1$;

3) $y(1) = 0; y'(1) = -1; y''(1) = 2;$

4) $y(1) = 0; y'(1) = -1;$

5) $y(2) = 4; y'(2) = 4x; y''(2) = 2x^2$.

6) $y(e) = 0; y'(e) = 1; y''(e) = 1$;

7) $y'(1) = -1; y''(1) = 2; y'''(1) = 0;$

8. Решите задачу Коши при указанных начальных условиях для уравнений

1) $y''' = \dfrac{1}{x}; y(1) = 1; y'(1) = 2; y''(1) = -2.$

2) $y^{IV} = \sin x; y(\dfrac{\pi}{2}) = 1; y'(\dfrac{\pi}{2}) = 2; y''(\dfrac{\pi}{2}) = y'''(\dfrac{\pi}{2}) = 0.$

3) $y^{v} = e^{2x}$; $y(0) = 0; y'(0) = -2; y''(0) = 3; y'''(0) = -1; y^{IV}(0) = 2.$

9. Найдите решения уравнений, которые не содержат искомой функции, с помощью подстановки.

1) $(1 - x^2)y'' - xy' = 2;$

2) $y'' = ay'$;

3) $(y'')^2 = y'$;

4) $x^2 y'' = y'^2$

10. Найдите общее решение уравнения, не содержащего независимой переменной:

1) $y^3 y'' = 1$;

2) $y'^2 + 2yy'' = 0$.

2.2. Линейные однородные уравнения с постоянными коэффициентами

Ключевые слова: линейное однородное уравнение с постоянными коэффициентами, линейно независимые и линейно-зависимые функции, характеристическое уравнение.

ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Линейным однородным уравнением n-го порядка с постоянными коэффициентами называется уравнение вида

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + \ldots + p_{n-1} y' + p_n y = 0,$$

где $p_1, p_2, \ldots, p_n$ – некоторые вещественные числа, y – искомая функция. Отличительной чертой линейного уравнения является то, что искомая функция y и все ее производные входят в это уравнение в первой степени.

Если функция $y_1(x)$ является решением некоторого линейного однородного уравнения, то ее произведение на произвольную постоянную величину C также является решением этого уравнения.

Функции $y_1(x)$, $y_2(x)$, … $y_n(x)$ называются *линейно независимыми*, если равенство $a_1 y_1 + a_2 y_2 + \ldots a_n y_n = 0, \textit{где}\ a_i$ – постоянные, выполняется только тогда, когда все коэффициенты a_i равны нулю. В противном случае эти функции являются линейно зависимыми. Отношение линейно зависимых функций $\dfrac{y_1(x)}{y_2(x)}$ является величиной постоянной.

Если функции $y_1(x)$, $y_2(x)$, … $y_n(x)$ являются решениями однородного уравнения и линейно независимы, то общее решение этого уравнения имеет вид $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3 + ... + C_n y_n$.

Таким образом, чтобы найти общее решение линейного однородного уравнения, надо найти *n* его частных линейно независимых решений, каждое из которых умножить на произвольную постоянную величину и все эти произведения сложить.

Линейное однородное дифуравнение *n*-го порядка имеет *n* линейно независимых решений.

Решение линейного однородного уравнения с постоянными коэффициентами ищется в виде $y = e^{kx}$.

Это приводит к алгебраическому уравнению *n*-ой степени, которое называется *характеристическим* уравнением: $k^n + p_1 k^{n-1} + p_2 k^{n-2} + ... + p_{n-1} k + p_n = 0$.

Таким образом, чтобы составить характеристическое уравнение, нужно в заданном дифференциальном уравнении заменить производные степенями неизвестной величины *k*, причем степень *k* должна быть равна порядку соответствующей производной, а сама исходная функция заменена 1.

Решениями этого характеристического уравнения могут быть как вещественные (действительные), так и комплексные числа. Рассмотрим все возможные случаи:

1) Все корни характеристического уравнения $k_1, k_2, k_3 ..., k_n$ - числа вещественные и среди них нет равных между собой. В этом случае получим *n* частных линейно независимых решений $y_1 = e^{k_1 x}, y_2 = e^{k_2 x}, ..., y_n = e^{k_n x}$. Общее решение запишется в виде $y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x} + ... + C_n e^{k_n x}$.

2) Если все корни характеристического уравнения – действительные числа, но среди них есть равные, то каждому корню k_i кратности *l* соответствует *l* линейно независимых частных решений $y_1 = e^{k_i x}, y_2 = x e^{k_i x}, y_3 = x^2 e^{k_i x} ..., y_n = x^{l-1} e^{k_i x}$.

3) Если среди корней характеристического уравнения имеются комплексные не равные между собой, то каждой паре комплексных корней $\alpha + \beta x$ и $\alpha - \beta x$ соответствует два

частных линейно независимых решения уравнения вида $e^{\alpha x}\cos\beta x$ и $e^{\alpha x}\sin\beta x$.

4) Каждой паре комплексных сопряженных корней $\alpha+\beta x$ и $\alpha-\beta x$ кратности m в общем решении соответствует слагаемое вида

$$e^{\alpha x}((C_1+C_2x+\ldots+C_{m-1}x^{m-1})\cos\beta x)+((C_1+C_2x+\ldots+C_{m-1}x^{m-1})\sin\beta x)$$

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 1. Найдите общие решения однородных дифференциальных уравнений:

1) $y''-3y'+2y=0$;

2) $y''-2y''+y=0$;

3) $y''-2y'+2y=0$.

Решение.

1) Составляем характеристическое уравнение, заменяя y'' на k^2, y' на k, а y на 1.

Получаем квадратное уравнение $k^2-3k+2=0$, решениями которого являются действительные не равные между собой числа $k_1=1$ и $k_2=2$. Потому частными решениями заданного дифуравнения будут функции $y_1=e^x$ и $y_2=e^{2x}$. Они являются линейно независимыми, т. к. их отношение $\dfrac{y^2}{y_1}=e^x\neq const$.

Общим решением уравнения имеет вид $y=C_1e^{k_1x}+C_2e^{k_2x}$. В нашем случае общим решением будет функция $y=C_1e^x+C_2e^{2x}$.

2) Составляем характеристическое уравнение: $k^2-2k+1=0$. Корни этого уравнения равны между собой $(k_1=k_2=1)$. Общее решение дифференциального уравнения в этом случае имеет вид $y=C_1e^{kx}+C_2xe^{kx}$. Таким образом, общее

решение заданного дифференциального уравнения – функция $y = C_1 e^x + C_2 x e^x = e^x (C_1 + C_2 x)$.

3) Характеристическое уравнение запишется так: $k^2 - 2k + 2 = 0.$ Дискриминант этого уравнения $D = 4 - 8 = -4 < 0,$ поэтому уравнение имеет лишь комплексные корни $k_{1,2} = 1 \pm i$. Общее решение дифференциального уравнения имеет вид $y = C_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + C_2 e^{\alpha x} \sin \beta x.$ Поэтому решение заданного дифференциального уравнения $y = C_1 e^x \cos x + C_2 e^x \sin x.$

Пример 2. Найдите решение линейного однородного уравнения $y'' - 6y' + 8y = 0$, удовлетворяющее указанным начальным условиям $y(0) = 1, y'(0) = 0.$

Решение.

Составляем характеристическое уравнение. Оно запишется как $k^2 - 6k + 8 = 0$. Решая это уравнение, находим, что его корни действительные не равные между собой числа $k_1 = 2,\ k_2 = 4.$ Общим решением дифференциального уравнения будет функция $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{4x}$.

Чтобы найти решение, удовлетворяющее начальным условиям, найдем производную общего решения $y' = 2C_1 e^{2x} + 4C_2 e^{4x}$.

Подставим в выражения, найденные для y и y', заданные начальные условия. Получим систему уравнений для определения произвольных постоянных C_1 и C_2:

$$\begin{cases} 1 = C_1 + C_2, \\ 0 = 2C_1 + 4C_2 \end{cases}$$

Решив систему, находим, что $C_1 = 2,\ C_2 = -1$. Подставляя эти значения в общее решение, находим решение, удовлетворяющее начальным условиям: $y = 2e^{2x} - e^{4x}$.

Пример 3. Найдите общее решение однородного дифференциального уравнения $y''' - y'' - y' + y = 0.$

Решение.

Характеристическое уравнение имеет вид $k^3 - k^2 - k + 1 = 0$. Разлагаем левую часть этого уравнения на множители:

$$k^2(k-1) - (k-1) = 0; (k-1)(k^2-1) = 0.$$

Отсюда $k_1 = 1,\ k_2 = 1,\ k_3 = -1.$ Все корни действительные, но среди них есть равные. Общее решение дифференциального уравнения запишется в виде:

$$y = C_1 e^x + C_2 x e^x + C_3 e^{-x}.$$

ТРЕНИРОВОЧНЫЕ УПРАЖНЕНИЯ

1. (А, У) Способы решения полных, неполных и приведенных квадратных уравнений.

2. (А, У) Найдите корни квадратного уравнения, не находя его дискриминанта:

1) $x^2 - 3x + 2 = 0;$

2) $x^2 - 4x + 4 = 0;$

3) $x^2 - 5x - 14 = 0;$

4) $3x^2 - 5x + 2 = 0;$

5) $x^2 - 16 = 0;$

6) $x^2 - 3x = 0;$

7) $x^2 + 25 = 0;$

8) $x^2 + 3x = 0;$

3. (А) Найдите решения квадратных уравнений во множестве комплексных чисел.

1) $x^2 - 7x + 12 = 0;$

2) $5x^2 - 3x - 2 = 0$;

3) $x^2 - 2x + 5 = 0;$

4) $x^2 - 9 = 0;$

5) $t^2 + 9 = 0;$

6) $x^2 + 7x = 0;$

7) $x^2 - 4x + 13 = 0$;

8) $y^2 - 6y + 9 = 0$.

4. (А)Составьте квадратное уравнение, корни которого

1) 2 и 4;
2) -9 и 3
3) 4 и 4
4) $2 \pm 3i$;
5) 0 и -5;
6) 9 и -9;
7) 1 и -1;
8) 6 и 6;
9) 1-2i и 1+2i;
10) 3i и -3i;
11) x_1 – номер страницы, на которой ставится библиотечный штамп; x_2 – число атомов водорода в молекуле воды.

5. (А, У) Назовите способы разложения многочлена на множители.

6. (А) Решите уравнения:

1) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$;

2) $t^3 - 8t^2 + 15t = 0$

3) $k^3 - 25k = 0$;

7. (А) Составьте уравнения, корни которых

1) 1, 8 и 2;
2) 3, -3 и 0;
3) 2-4i, 2+4i и 0;
4) ± 8 и $1 \pm 5i$;
5) 4, -4, 3, 2 и 0.

8. Запишите характеристические уравнения для линейных однородных уравнений с постоянными коэффициентами.

1) $y'' - 4y' + 9y = 0$;

2) $y''' + 6y'' - 4y' = 0$;

3) $y^{IV} - 9y'' + 6y = 0$

9. (У) Назовите дифференциальное уравнение, характеристическое уравнение которого имеет вид

1) $k^2 - 4k + 1 = 0$;

2) $k^4 - 3k = 0$;

3) $k^3 + 8 = 0$.

10. Найдите общие решения линейных однородных уравнений с постоянными коэффициентами.

1) $y'' + y' - 2y = 0$;

2) $y'' - 2y' = 0$;

3) $y'' - 4y' + 5y = 0$;

4) $y'' + 4y = 0$;

5) $y'' + 4y' + 3y = 0$;

6) $2y'' - 5y' + 2y = 0$;

7) $y'' + 2y' + 10y = 0$;

8) $y''' - 8y = 0$;

9) $y^{IV} - y = 0$;

10) $y^{VI} + 64y = 0$;

11) $4y'' + 4y' + y = 0$;

12) $y^{V} - 10y''' + 9y' - 0$;

13) $y'' - 11y' + 24y = 0$;

14) $y'' - 5y' - 24y = 0$;

15) $4y'' - 11y' + 7y = 0$;

16) $y'' - 10y'' + 25y = 0$;

17) $y'' - 10y' + 26y = 0$;

18) $y'' + 16y' + 64y = 0$;

19) $y'' - 2y' - 8y = 0$;

20) $3y'' - 12y' + 9y = 0$;

21) $y'' - 11y' + 30y = 0$;

22) $\dfrac{d^3z}{du^3} - 6\dfrac{d^2z}{dz^2} + 12\dfrac{dz}{du} - 8z = 0$.

11. Частные решения некоторого дифференциального уравнения y_1 и y_2. Поверьте, являются ли эти решения линейно независимыми, в зависимости от результата запишите общий вид общего решения этого уравнения.

1) $y_1 = e^{3x}, y_2 = e^{-3x}$;

2) $y_1 = \sin x, y_2 = \cos x$;

3) $y_1 = \sqrt{x}, y_2 = -\sqrt{x}$;

4) $y_1 = x - 1, y_2 = x^2 - 1$.

12. Найдите общие решения уравнений относительно независимой постоянной t:

1) $x'' - 4x' = 0$;

2) $x'' - 9x = 0$;

3) $x'' - 4x' + 4x = 0$;

4) $x'' - 4x' + 29x = 0$;

5) $x'' + 5x = 0$;

6) $\dfrac{d^4x}{dt^4} - 13\dfrac{d^2x}{dt^2} + 36x = 0$.

13. Составьте дифференциальное уравнение, корни которого равны 1, -1, 2 и 0.

14. (У) Назовите корни характеристического уравнения, если общее решение дифуравнения имеет вид:

1) $y = C_1e^{3x} + C_2e^{5x}$;

2) $y = C_1e^{2x} + xC_2e^{2x}$;

3) $y = e^x(Acos2x + B\sin 2x)$

15. Составьте однородное уравнение с постоянными коэффициентами, общее решение которого имеет вид :

1) $y = C_1e^{2x} + C_2e^{3x}$;

2) $y = C_1e^{2x} + e^{-x}(C_2cos\sqrt{3}x + C_3\sin\sqrt{3}x)$;

3) $y = C_1e^{x} + C_2e^{-x} + C_3xe^{x}$

4) $y = C_1e^{3x} + C_2xe^{3x}$;

5) $y = e^{2x}(A\cos 3x + B\sin 3x)$

16. Составьте дифференциальное уравнение, характеристическое уравнение которого имеет корни k_1 – число вашего рождения, k_2 – номер месяца вашего рождения.

17. Найдите решения уравнений, удовлетворяющие начальным условиям

1) $y''' - y' = 0; y(0) = 3; y'(0) = -1; y''(0) = 1;$

2) $y'' - 2y' + y = 0; y(2) = 1, y'(2) = -2;$

3) $3y'' - 2y' - y = 0; y(0) = 3; y'(0) = 9;$

4) $y'' - 3y' + 2y = 0; y(0) = 2; y'(0) = -3;$

5) $y'' - 2y' + 2y = 0;\ y(\pi) = -2, y'(\pi) = -3$;

6) $y'' - 6y' + 8y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 1;$

7) $y'' + 9y' + 20y = 0, y(0) = 0; y(0) = -1;$

8) $y'' - y = 0; y(0) = 2, y'(0) = 1;$

9) $y'' + 4y' + 4y = 0, y(0) = 2, y'(0) = 4;$

10) $y'' + 4y' + 4y = 0, y(2) = 2, y'(2) = 4;$

11) $y'' + y' + y = 0, y(0) = 2, y'(0) = 0{,}5;$

12) $y'' + y = 0; y(0) = 2, y'(0) = 5$;

13) $y^{(IV)} - a^4 y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 0, y''(0) = -a^2$.

2.3. Линейные неоднородные уравнения с постоянными коэффициентами

Ключевые слова: линейное неоднородное уравнение, линейное неоднородное уравнение с постоянными коэффициентами, общее решение однородного уравнение, частное решение неоднородного уравнения, метод неопределенных коэффициентов, метод вариации произвольных постоянных.

ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Линейное неоднородное дифференциальное уравнения имеет вид $y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + ... + p_{n-1}y' + p_n y = f(x)$, где $p_1, p_2, \ldots, p_n$ –

некоторые функции от x или вещественные числа, y – искомая функция.

Общее решение неоднородного уравнения представляется как сумма какого-нибудь частного решения этого уравнения и общего решения соответствующего однородного уравнения $y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + ... + p_{n-1}y' + p_n y = 0.$

Если коэффициенты $p_1, p_2, \ ..., \ p_n$ являются действительными числами, то уравнения называются *неоднородным уравнением с постоянными коэффициентами.*

Общее решение линейного неоднородного уравнения находится по следующему алгоритму:

1) Находят одно какое-нибудь его частное решение $y_{ч.}$

2) Находят общее решение соответствующего однородного уравнения $y_{o.}$

3) Складывают эти два решения. Их сумма и будет общим решением неоднородного уравнения: $y = y_o + y_ч$.

Если правая часть неоднородного уравнения представляет собой сумму функций $f_1 + f_2$, то рассматривают два уравнения, у которых левые части такие же, как в исходном уравнении, но в одном из них правой частью будет функция f_1, а во втором – f_2, а затем сложить полученные частные решения каждого из уравнений и общее решение соответствующего однородного уравнения.

Если известно общее решение однородного линейного уравнения, соответствующего заданному неоднородному, то его частное решение можно найти с помощью метода Лагранжа (методом вариации произвольных постоянных, методом квадратур) или методом неопределенных коэффициентов

Метод вариации произвольных постоянных, указанный Лагранжем, состоит в следующем. Получив общее решение $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + ...C_n y_n$, полагают, что в нем величины $C_1, C_2 ,..., C_n$ являются не постоянными, а функциями аргумента x. Для нахождения этих функций составляют систему уравнений. Для уравнения второго порядка она будет иметь вид

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 = 0, \\ C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' = f(x). \end{cases}$$

Такая система всегда имеет единственное решение. Решают эту систему относительно $C_1'(x)\, u\, C_2'(x)$. Выразив $C_1'(x)\, u\, C_2'(x)$, значения $C_1(x)\, u\, C_2(x)$ находят интегрированием и подставляют найденные значения в выражение для общего решения.

Метод неопределенных коэффициентов позволяет находить частное решение, не прибегая к интегрированию. Метод предназначен для неоднородных уравнений с постоянными коэффициентами, т.е. таких, в левой части которых коэффициентами являются не функции, а числа, а их правая часть имеет вид $f(x) = e^{\alpha x}(P(x)\cos\beta x + Q(x)\sin\beta x)$ или $P_n(x)e^{\alpha x}$. В этом случае можно решить уравнение и методом Лагранжа, но метод неопределенных коэффициентов позволяет получить решение быстрее.

Для уравнения с правой частью $f(x) = e^{\alpha x}(P(x)\cos\beta x + Q(x)\sin\beta x)$ рассматривают два возможных случая:

1) Число $\alpha + \beta x$ не является корнем характеристического уравнения соответствующего однородного уравнения.

В этом случае частное решение неоднородного уравнения ищется в виде $y_ч = e^{\alpha x}(p(x)\cos\beta x + q(x)\sin\beta x)$, где $p(x)$ и $q(x)$ – многочлены одной и той же степени, равной наивысшей степени многочленов $P(x)$ *и* $Q(x)$. Коэффициенты многочленов $p(x)$ и $q(x)$ – числа, подлежащие определению.

2) Если число $\alpha + \beta x$ является корнем кратности $k, (k \geq 1)$ характеристического уравнения соответствующего однородного уравнения, то частное решение неоднородного уравнения ищется в виде $y = x^k(p(x)\cos\beta x + q(x)\sin\beta x)$.

Неопределенные коэффициенты многочленов $p(x)$ и $q(x)$ в обоих случаях находят так: частное решение подставляется в заданное дифференциальное уравнение и сравниваются коэффициенты при одинаковых степенях независимой переменной x в левой и правой частях полученного равенства.

Если правая часть уравнения имеет вид $P_n(x)e^{\alpha x}$, то возможны следующие случаи.

1) Число α не является корнем характеристического уравнения $k^2 + pk + q = 0$.

В этом случае частное решение ищут в виде $Q_n(x)e^{\alpha x}$

2) Число α является простым (однократным) корнем характеристического уравнения $k^2 + pk + q = 0$.

В этом случае частное решение ищут в виде $xQ_n(x)e^{\alpha x}$.

3) Число α является двукратным корнем характеристического уравнения $k^2 + pk + q = 0$.

В этом случае частное решение ищут в виде $x^2 Q_n(x)e^{\alpha x}$.

Аналогично решаются и неоднородные уравнения с постоянными коэффициентами более высоких порядков.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 1. Найти общее решение уравнения $y'' - \dfrac{y'}{x} = x$

Решение.

Найдем общее решение соответствующего однородного уравнения $y'' - \dfrac{y'}{x} = 0$. Для этого перепишем его в виде

$$\frac{y''}{y'} = \frac{1}{x}$$

$$\ln y' = \ln x + \ln c; \; y' = cx; \; y = C_1 x^2 + C_2$$

Чтобы функция $y = C_1 x^2 + C_2$ была решением заданного уравнения, надо определить $C_1 \, и \, C_2$ как функции от x из системы

$$\begin{cases} C_1'x^2 + C_2' = 0, \\ 2C_1'x + C_2' = x \end{cases}$$

Решая эту систему, получим $C_1' = \frac{1}{2}; C_2' = -\frac{1}{2}x^2$.

Проинтегрировав последние равенства, найдем, что $C_1 = \frac{1}{2}x + \overline{C_1}; C_2 = -\frac{1}{6}x^3 + \overline{C_2}$.

Подставляя найденные функции в формулу $y = C_1x^2 + C_2$, получаем общее решение неоднородного уравнения

$$y = \overline{C_1}x^2 + \overline{C_2} + \frac{x^3}{2} - \frac{x^3}{6}.$$

Пример 2. Найдите общее решение уравнения методом неопределенных коэффициентов

1) $y'' - 7y'' + 12y = 5;$

2) $y'' + y' + y = 3e^{2x}$;

3) $y'' - 7y' + 6y = (x-2)e^x$;

4) $y'' + 4y = 2\cos x$.

Решение.

1) Уравнение является неоднородным уравнением с постоянными коэффициентами, так как его правая часть не равна нулю. Отбрасываем правую часть этого уравнения и решаем соответствующее однородное уравнение $y'' - 7y'' + 12y = 0.$ Его характеристическое уравнение $k^2 - 7k + 12 = 0$ имеет действительные корни $k_1 = 3, k_2 = 4.$ Общее решение однородного уравнения $y_o = C_1e^{3x} + C_2e^{4x}$.

Рассмотрим правую часть неоднородного уравнения. Она не содержит множителя $e^{\alpha x}$, потому $\alpha = 0 (e^{\alpha x} = e^{ox} = e^0 = 1)$. Правая часть не содержит так же ни косинуса, ни синуса, поэтому $\beta = 0$. Число 5 в правой части надо рассматривать как многочлен нулевой степени.

Составляем число $\alpha + \beta x$ и проверяем, является ли оно решением характеристического уравнения, соответствующего однородному уравнению. Видим, что $\alpha + \beta x$ =0, а 0 не является решением характеристического уравнения (его решения 3 и 4). Значит, частное решение нужно искать в виде $y_ч = e^{\alpha x}(p(x)\cos\beta x + q(x)\sin\beta x)$, в котором нужно положить $\alpha = \beta = 0$, а многочлены $p(x)$ и $q(x)$ – нулевой степени. Таким образом, частное решение примет вид $y_ч = A$. Тогда $y_ч' = y_ч'' = 0$. Подставим найденные значения $y_ч, y_ч'$ и $y_ч''$ в исходное неоднородное уравнения. Получим: $0 + 0 + 12A = 5$, откуда $A = \dfrac{5}{12}$ и частное решение неоднородного уравнения $y_ч = \dfrac{5}{12}$. Тогда общее решение неоднородного уравнения $y = y_o + y_ч = C_1 e^{3x} + C_2 e^{4x} + \dfrac{5}{12}$.

2) Характеристическое уравнение соответствующего заданному однородного уравнения $y'' + y' + y = 0$ имеет комплексные корни $k_{1,2} = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2} i$. Поэтому $y_o = e^{-\frac{1}{2}x}(C_1 \cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}x + C_2 \sin\dfrac{\sqrt{3}}{2}x)$.

Анализируя правую часть неоднородного уравнения, замечаем, что $\alpha = 2, \beta = 0,$ многочлен Р(x) имеет нулевую степень (так как множитель при e^{2x} есть величина постоянная). Число $\alpha + \beta x$ =2 не является корнем характеристического уравнения, поэтому частное решение ищем в виде $y_ч = e^{\alpha x}(p(x)\cos\beta x + q(x)\sin\beta x) = Ae^{2x}$. Его первая и вторая производные соответственно равны $2Ae^{2x}$ и $4Ae^{2x}$.

Подставляя эти значения в исходное уравнение и вынося e^{2x} за скобки, получаем равенство $e^{2x}(A + 2A + 4A) = 3e^{2x}$, из которого находим, что $A = \frac{3}{7}$. Это значит, что частное решение $y_ч = \frac{3}{7}e^{2x}$, а общее решение неоднородного уравнения $y = y_o + y_ч = e^{-\frac{1}{2}x}(C_1 \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_2 \sin\frac{\sqrt{3}}{2}x) + \frac{3}{7}e^{2x}$.

3) Составляем однородное уравнение, приравнивая правую часть к нулю: $y'' - 7y + 6y = 0$. Корни его характеристического уравнения – числа 1 и 6, поэтому общее решение однородного уравнения записывается в виде $y_o = C_1e^{6x} + C_2e^x$.

Правая часть уравнения $y'' - 7y' + 6y = (x-2)e^x$ имеет вид $P_1(x)e^{1x}$, причем коэффициент 1 в показателе степени является простым корнем характеристического уравнения. Многочлен первой степени, каким является многочлен $(x-2)$ в правой части, в общем виде записывается как $Ax + B$. Значит, частное решение надо искать в виде $y_ч = x(Ax+B)e^x$. Найдем первую и вторую производные $y_ч$ и подставим их в исходное уравнение. Получим уравнение

$$((Ax^2 + Bx) + (4Ax + 2B) + 2A - 7(Ax^2 + Bx) - 7(2Ax + B) +$$
$$+ 6(Ax^2 + Bx))e^x = (x-2)e^x$$

Упростив, получаем

$$(-10Ax - 5B + 2A)e^x = (x-2)e^x.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях переменной x, получаем систему для нахождения коэффициентов А и В:

$$\begin{cases} -10A = 1, \\ -5B + 2A = -2 \end{cases}$$

Решением этой системы являются числа $A = -\frac{1}{10}, B = \frac{9}{25}$.

Общим решением неоднородного уравнения является функция

$$y = C_1e^{6x} + C_2e^x + x(-\frac{1}{10}x + \frac{9}{25})e^x.$$

4) Характеристическое уравнение имеет комплексные корни $k_{1,2} = \pm 2i$, поэтому общее решение однородного уравнения имеет вид $y_o = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$.

Частное решение неоднородного уравнения ищем в виде $y_ч = x(A\cos 2x + B\sin 2x)$.

Находим производные функции $y_ч$:

$$y_ч' = 2x(-A\sin 2x + B\cos 2x) + A\cos 2x + B\sin 2x;$$

$$y_ч'' = -4x(-A\cos 2x - B\sin 2x) + 4(A\sin 2x + B\cos 2x).$$

Подставим эти выражения для производных в заданное уравнение и приравняем коэффициенты при $\cos 2x$ *и* $\sin 2x$. Получим систему для нахождения коэффициентов A и B:

$$\begin{cases} 4B = 1, \\ -4A = 0. \end{cases}$$

Из нее находим, что $A = 0$, $B = \dfrac{1}{4}$.

Таким образом, общий интеграл данного уравнения

$$y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + \frac{1}{4} x\cos 2x.$$

Пример 3. Решить уравнение $y^{IV} - y = 5\cos x$.

Решение.

Характеристическое уравнение $k^4 - 1 = 0$ имеет корни $k_1 = 1,\ k_2 = -1,\ k_3 = i, k_4 = -i.$ Следовательно, общим решением соответствующего однородного уравнения является $y_0 = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x$.

Правая часть данного неоднородного уравнения имеет вид $f(x) = M\cos x + N\sin x$, где M=5, $N = 0$.

Так как i является простым корнем характеристического уравнения, то частное решение ищем в виде $y_ч = x(A\cos x + B\sin x)$. Найдя производные этого выражения до четвертого порядка включительно, подставляем производную четвертого порядка и само выражение y в уравнение. Получим:

$$4A\sin x - 4B\cos x = 5\cos x.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых функциях, получим, что $4A = 0; -4B = 5$, т.е. А = 0, В $= -\dfrac{5}{4}$.

Следовательно, частным решением уравнения является $y_ч = -\dfrac{5}{4} x \sin x$, а частным решением

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x - \frac{5}{4} x \sin x .$$

ТРЕНИРОВОЧНЫЕ УПРАЖНЕНИЯ

1. (У, А) Назовите общий вид многочленов нулевой, первой, второй, третьей степени.

2. (У, А) Определите степень многочлена

1) $x - 9$;

2) 7;

3) $x^2 - 7x^3 - 9$;

4) $1 - x^2$;

5) $3 + 5x$.

3. (У) Назовите однородное уравнение, соответствующее заданному неоднородному

1) $y'' - y = 2e^x - x^2$;

2) $y'' + 4y' = 2e^x \cos x$;

3) $y'' - 3y' + y = 2e^x$;

4. (У) В каком виде искать частное решение неоднородного уравнения, если правая часть неоднородного уравнения равна $x^2 - 4$, и число 0 не является решением характеристического уравнения?

5. (У) В каком виде искать частное решение неоднородного уравнения, если правая часть неоднородного уравнения равна $x^2 - 4$, и число 0 является решением характеристического уравнения?

6. (У) В каком виде искать частное решение, если правая часть неоднородного уравнения равна $(x-4)e^{3x}$, и число 3 не является решением характеристического уравнения?

7. (У) В каком виде искать частное решение, если правая часть неоднородного уравнения равна $(x-4)e^{3x}$, и число 3 является решением характеристического уравнения?

8. (У) В каком виде искать частное решение, если правая часть неоднородного уравнения равна $(cosx+\sin x)e^{3x}$, и число $3\pm i$ является решением характеристического уравнения?

9. (У) В каком виде необходимо искать частное решение неоднородного дифференциального уравнения, если его правая часть имеет вид (рассмотрите все возможные случаи):

1) $x-9$;
2) e^{3x};
3) $e^{2x}(x^2-5)$;
4) $2cosx$
5) xe^x.

10. (У) Укажите те уравнения, частное решение которых необходимо искать в виде $Ax+B$:

1) $y'''+5y'-2y=4x^2-8$;
2) $y''+5y'-6y=2x+3$;
3) $y''+5y'=2x+3$;
4) $y''+5y'+6y=e^{2x}(2x+3)$;
5) $y''+5y'-6y=2$;
6) $y''+5y'+6y=2x$.

11. (У) Общее решение однородного уравнения $y''-5y'+6y=0$ имеет вид $y=C_1e^{5x}+C_2e^x$, а частное решение неоднородного уравнения $y''-5y'+6y=3x-4$ имеет вид $y=0{,}5x-1{,}5$. Какой вид будет иметь общее решение неоднородного уравнения $y''-5y'+6y=3x-4$?

12. (У) Общее решение однородного уравнения $y''-5y'+6y=f_1(x)+f_2(x)$ имеет вид $y=C_1e^{5x}+C_2e^x$, частное решение неоднородного уравнения $y'' - 5y' + 6y = f_1(x)$ имеет вид $3xe^x$, а уравнения $y'' - 5y' + 6y = f_2(x)$ – вид $3\cos x + 2\sin x$. Какой вид будет иметь общее решение неоднородного уравнения $y'' - 5y' + 6y = f_1(x) + f_2(x)$?

13. Для каждого из уравнений напишите его частное решение с неопределенными коэффициентами (числовых значений коэффициентов не находить).

1) $y'' - 2y' + 2y = e^x - xcosx$;

2) $y'' + 6y' + 10y = 3xe^{-3x} - 2e^{3x}\cos x$;

3) $y'' - 8y' + 20y = 5xe^{4x}\sin 2x$;

4) $y'' - 4y' = 2e^{4t}$ y.

14. Найдите общие решения неоднородных уравнений

1) $y'' - 6y' + 8y = 10$;

2) $y'' + 4y = 8$;

3) $y'' - 5y' = 7$;

4) $y'' + y' + y = 3e^{2x}$

5) $y'' - 2y' + 2y = e^{4x}$;

6) $y'' + y = 4xe^x$;

7) $y'' - 7y' + 12y = 5e^{3x}$;

8) $y'' + y' - 2y = 3xe^x$;

9) $\dfrac{d^2x}{dt^2} - 6\dfrac{dx}{dt} + 8x = 3e^{2t}$;

10) $y'' - 4y' = 2e^{4t}$;

11) $y'' + 2y' - 3y = x^2e^x$;

12) $y'' - 3y' + 2y = cosx$;

13) $y'' + y = 4\sin 2x$;

14) $y'' - 5y' + 4y = 4x^2e^{2x}$;

15) $y'' - 3y' + 2y = x\cos x$;

16) $y'' - 9y = e^{3x}\cos x$;

17) $y'' + 3y' - 4y = e^{-4x} + xe^{-x}$;

18) $y'' + y = x\sin x$;

19) $y'' + 4y' + 4y = xe^{2x}$;

20) $y'' - 2y' + y = 6xe^{x}$;

21) $y'' - 4y' + 5y = (4x + 22)\sin 3x - (28x + 84)\cos 3x$;

22) $y'' - 4y' + 8y = e^{2x} + \sin 2x$;

23) $y'' - 5y' = 3x^2 + \sin 5x$;

24) $y'' - y = 2e^{x} - x^2$;

25) $\dfrac{d^4x}{dt^4} + \dfrac{d^3x}{dt^3} = \cos t$.

15. Найдите решения уравнений, удовлетворяющие указанным условиям

1) $y'' + y = 4e^{x}$; $y(0) = 4$; $y'(0) = -3$;

2) $y'' - y = 2x$; $y(0) = 0$; $y(1) = -1$;

3) $\dfrac{d^3x}{dt^3} + \dfrac{dx}{dt} = e^{2t}$, $x(0) = 0, x'(0) = 0, x''(0) = 0$.

РАЗДЕЛ 3. ПРИМЕНЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И ИХ СИСТЕМ

3.1. Нормальные системы дифференциальных уравнений

Ключевые слова: нормальная система, линейная система, метод исключения

ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Нормальной системой дифференциальных уравнений называется система уравнений вида

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = f_1(t, x_1, x_2 \ldots x_n) \\ \dfrac{dx_2}{dt} = f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = f_n(t, x_1, x_2 \ldots x_n) \end{cases}$$

В этой системе неизвестными являются n функций $x_1, x_2, \ldots, x_n$, а независимой переменной – t.

Особенности нормальной системы в том, что все входящие в систему уравнения являются уравнениями первого порядка и являются разрешенными относительно производных искомых функций.

Если правые части нормальной системы являются линейными функциями относительно $x_1, x_2, \ldots, x_n$, то система дифференциальных уравнений называется *линейной*.

Проинтегрировать систему – значит определить функции $x_i(t)$, удовлетворяющие системе уравнений и данным начальным условиям.

Иногда нормальную систему дифуравнений удается свести к одному уравнению n-го порядка, содержащему одну неизвестную функцию. Это может быть достигнуто дифференцированием одно из уравнений системы и исключением всех неизвестных, кроме одного (так называемый *метод исключения*).

Интегрирование такой системы проводится по следующему алгоритму:

1) дифференцируем по x первое из уравнений системы:

$$\frac{d_2 x_1}{dt^2} = \frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdot \frac{dx_1}{dt} + ... + \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \cdot \frac{dx_n}{dt};$$

2) заменяем производные $\frac{dx_i}{dt}$ их выражениями из уравнений данной системы;

3) дифференцируем полученное уравнение по t и т.д.

4) из первых уравнений полученной системы определяем $x_1, x_2, ... x_n$;

5) подставляем полученные в п 4) выражения в последнее из уравнений системы;

6) получаем дифференциальное уравнение n-го порядка, дифференцируя которую ($n-1$) раз, находят производные как функции от t.

7) подставляя эти функции в уравнения системы, определяем $x_2, x_3, ..., x_n$

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 1. Решить систему

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + y, \\ \frac{dy}{dt} = x - y. \end{cases}$$

Решение.

Продифференцируем по t первое уравнение:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt}.$$

Подставим в полученное уравнения выражения $\frac{dx}{dt}$ и $\frac{dy}{dt}$ из уравнений исходной системы. Таким образом, нам удалось исключить из уравнения $\frac{dy}{dt}$ и y: $\frac{d^2x}{dt^2} - 2x = 0$. Получили уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами, характеристическое уравнение которого $k^2 - 2 = 0$ имеет корни $k_1 = \sqrt{2}, k_2 = -\sqrt{2}$. Следовательно, общее решение для x запишется в виде: $x = C_1 e^{\sqrt{2}t} + C_2 e^{-\sqrt{2}t}$. Общее решение для y находим из первого уравнения системы:

$$y = \frac{dx}{dt} - x = C_1(\sqrt{2} - 1)e^{t\sqrt{2}} - C2(\sqrt{2} + 1)e^{-t\sqrt{2}}.$$

Пример 2. Проинтегрировать систему

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = y + x + z, \\ \frac{dz}{dx} = -4y - 3z + 2x. \end{cases}$$

Решение.

Дифференцируя по x первое уравнение, получим

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy}{dx} + \frac{dz}{dx} + 1.$$

Подставляя сюда выражения $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{dz}{dx}$ из условия, получим

$\frac{d^2y}{dx^2} = (y + x + z) + (-4y - 3z + 2x) + 1$ или, упростив,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -3y - 2z + 3x + 1.$$

Из первого уравнения заданной в условии системы находим

$$z = \frac{dy}{dx} - y - x.$$

Подставляя значение z в только что полученное уравнение, получаем $\dfrac{d^2y}{dx^2} = -3y - 2(\dfrac{dy}{dx} - y - x) + 3x + 1$ или

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + y = 5x + 1 .$$

Получили неоднородное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами, решив которое, находим

$$y = (C_1 + C_2)e^{-x} + 5x - 9 .$$

Т.к. $z = \dfrac{dy}{dx} - y - x,$

$$z = (C_2 - 2C_1 - 2C_2 x)e^{-x} - 6x + 14 .$$

Это и есть общее решение заданной системы.

ТРЕНИРОВОЧНЫЕ УПРАЖНЕНИЯ

1. (А) Решите систему способом подстановки:

1) $\begin{cases} 3x - y = 8, \\ x + 2y = 19. \end{cases}$

2. Найти общее решение системы уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y - 7; \\ \dfrac{dy}{dt} + 2x + 5y = 0. \end{cases}$$

3. Проинтегрировать системы

1) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y + z, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + z, \\ \dfrac{dz}{dt} = x + y. \end{cases}$

2) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x - y + z, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + 5y - z, \\ \dfrac{dz}{dt} = x - y + 3z. \end{cases}$

3) $\begin{cases} x' = -2y + 3t \\ y' = 2x + 4 \end{cases}$, где x и y – искомые функции, t – независимая переменная.

4) $\begin{cases} x' = y - z, \\ y' = x + y, \\ z' = x + z \end{cases}$

5) $\begin{cases} x' = 6x - 72y + 44z, \\ y' = -4x + 40y - 22z, \\ z' = -6x + 57y - 31z. \end{cases}$

4. Найдите решение системы при заданных начальных условиях

1) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 2y; \end{cases}$ $x(0) = 1, y(0) = 3.$

2) $\begin{cases} x' = -3y + cost - e^t, \\ y' = 4y - \cos t + 2e^t \end{cases}$, $x(0) = y(0) = 0$.

3.2. Системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

Ключевые слова: система уравнений с постоянными коэффициентами, характеристическое уравнение системы.

ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Система дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами имеет вид :

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + \cdot_{1n}\, x_n \\ \dfrac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n \end{cases}$$

Найти ее решение можно с помощью характеристического уравнения в виде детерминанта, которое имеет вид:

$$\begin{vmatrix} (a_{11} - k) & a_{12} \ \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - k \ldots & a_{2n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots a_{nn} - k \end{vmatrix} = 0 .$$

Возможны следующие случаи.

1) Корни характеристического уравнения действительные и различные – $k_1, k_2, \ldots, k_n$.

В этом случае общее решение системы имеет вид

$$\begin{cases} x_1 = C_1\alpha_1{}^1 e^{k_1 t} + C_2\alpha_1{}^2 e^{k_2 t} + \ldots + C_n\alpha_1{}^n e^{k_n t} \\ x_2 = C_1\alpha_2{}^1 e^{k_1 t} + C_2\alpha_2{}^2 e^{k_2 t} + \ldots + C_n\alpha_2{}^n e^{k_n t} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = C_1\alpha_n{}^1 e^{k_1 t} + C_n\alpha_1{}^2 e^{k_2 t} + \ldots + C_n\alpha_n{}^n e^{k_n t} \end{cases}$$

2) Корни характеристического уравнения различные, но среди них есть комплексные.

Тогда в общее решение войдут комбинации функций

$$x_j{}^1 = e^{\alpha t}(\lambda_j{}^1 \cos \beta x + \lambda_j{}^2 \sin \beta x),$$

$$x_j{}^2 = e^{\alpha t}(\lambda_j{}^1 \cos \beta x + \lambda_j{}^2 \sin \beta x),$$

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = 7x_1 + 3x_2 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = 6x_1 + 4x_2 \end{cases}$$

Решение:

Составляем характеристическое уравнение матрицы системы

$$\begin{vmatrix} 7-\lambda & 3 \\ 6 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 11\lambda + 10 = 0$$

Корни этого уравнения $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 10$ – два действительных разных числа.

Для $\lambda = 1$ получаем уравнения $(7-1)p_1 + 3p_2 = 0;\ 6p_1 + (4-1)p_2 = 0$, которые сводятся к одному уравнению $2p_1 + p_2 = 0$.

Пусть $p_1 =$ 1, тогда $p_2 = -2$.

При $\lambda = 10$ получаем уравнения

$(7-10)p_1 + 3p_2 = 0;\ 6p_1 + (4-10)p_2 = 0$ или $p_1 = p_2$, которое определяет вектор (1;1).

Получаем фундаментальную систему решений:

Для $\lambda = 1$: $x_{11} = e^t; x_{21} = -2e^t$;

При $\lambda = 10$: $x_{12} = e^{10t};\ x_{22} = e^{10t}$.

Общее решение системы имеет вид

$x_1 = C_1e^t + C_2e^{10t}; x_2 = -2C_1e^t + C_2et^{10t}$

Пример 2. Найти общее решение системы

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = -7x_1 + x_2 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -2x_1 - 5x_2 \end{cases}$$

Решение.

Составим характеристическое уравнение

$\begin{vmatrix} -7-k & 1 \\ -2 & -5-k \end{vmatrix} = 0$ или по правилу вычисления определителей второго порядка: $(-7-k)(-5-k)+2=0,$ упростив которое, получаем $k^2+12k+37=0$.

Корни этого уравнения – комплексные числа $k_{1,2}=-6\pm i$.

Подставляя эти корни в систему, получим для $-6+i$ значения $\alpha_1{}^1=1, \alpha_2{}^1=1+i$, а для $-6-i$ значения $\alpha_1{}^2=1, \alpha_2{}^2=1-i$

Первому корню соответствуют решения

$x_1{}^1=1e^{-6t}(\cos t+i\sin t)$ и $x_2{}^1=(1+i)e^{-6t}(\cos t+i\sin t)$.

Второму корню соответствуют решения

$x_1{}^2=1e^{-6t}(\cos t-i\sin t),$

$x_2{}^2=e^{-6t}(\cos t-i\sin t)-ie^{-6t}(\cos t+\sin t)$

За системы частных решений можно взять отдельно действительные части и отдельно мнимые.

Общим решением системы будет

$$\begin{cases} x_1=C_1e^{-6t}\cos t+C_2e^{-6t}\sin t, \\ x_2=C_1e^{-6t}(\cos t-\sin t)+C_2e^{-6t}(\cos t+\sin t) \end{cases}$$

ТРЕНИРОВОЧНЫЕ УПРАЖНЕНИЯ

1. (А) Вычислите определитель второго порядка:

1) $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 8 \end{vmatrix};$

2) $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -4 \end{vmatrix};$

3) $\begin{vmatrix} k-1 & 3 \\ 4 & 7-k \end{vmatrix}.$

2. Составьте систему дифференциальных уравнений, характеристическое уравнение которой имеет вид

1) $\begin{vmatrix} 1-k & 4 \\ 8 & 9-k \end{vmatrix} = 0$;

2) $(2-k)(3-k) - 15 = 0$

3. Составьте характеристическое уравнение для системы уравнений и найдите его корни.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 5x + 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + y. \end{cases}$$

4. Решите системы дифференциальных уравнений

1) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + 4y. \end{cases}$

2) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - y, \\ \dfrac{dy}{dt} = y - 4x. \end{cases}$

3) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + x - 8y = 0, \\ \dfrac{dy}{dt} - x - 4y = 0. \end{cases}$

4) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3y - 2x. \end{cases}$

5) $\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = 8x_2 - x_1 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = x_1 + x_2 \end{cases}$

6) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y + 1 \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 1 \end{cases}$

7) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 2y \\ \dfrac{dy}{dt} = x - y \end{cases}$

8) $\begin{cases} 4\dfrac{dx}{dt} - \dfrac{dy}{dt} + 3x = \sin t \\ \dfrac{dx}{dt} + y = \cos t \end{cases}$

9) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y - 7x \\ \dfrac{dy}{dt} + 2x + 5y = 0 \end{cases}$

3.3. Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям и их системам

ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Чаще всего дифференциальные уравнения приходится решать в таких науках, как физика, геометрия, биология, демография, экономика, военное дело и других. Многие процессы в радиотехнике, кинетика химических реакций, динамика биологических популяций, модели экономического развития исследуются с помощью дифференциальных уравнений.

Составление дифференциального уравнения по условиям задачи состоит обычно в определении математической зависимости между переменными величинами и их приращениями, которые затем заменяются соответствующими дифференциалами. Тем самым полученным зависимостям придается «дифференциальный» вид.

Общих правил для составления дифференциальных уравнений нет. Но в большинстве случаев методика решения прикладных задач с использованием дифуравнений сводится к следующему:

1) подробный анализ условия задачи и составление чертежа. Блок схемы и т.п., поясняющих ее суть;
2) составление дифференциального уравнения исследуемого процесса, модели;
3) определение типа полученного дифуравнения;
4) интегрирование полученного дифуравнения соответствующим приемом или методом и получение общего решения;
5) отыскание частного решения задачи на основании заданных начальных условий;
6) графическое изображение полученных зависимостей;
7) вывод общего закона рассматриваемого процесса и числовое определение искомых величин;
8) анализ ответа и проверка исходных положений задачи.

Все сказанное относится не только к составлению одного дифференциального уравнения, но и к системе дифференциальных уравнений.

Общие рекомендации по составлению дифференциальных уравнений для решения задач из конкретных областей знаний могут быть такими

Для того, чтобы решить *геометрическую* задачу, нужно построить чертеж, обозначить искомую кривую через $y = y(x)$ в прямоугольных координатах и выразить все упоминаемые в задаче величины через x, y и y'. Тогда данное в условии задачи соотношение превращается в дифференциальное уравнение, из которого можно найти искомую функцию $y(x)$.

В *физических* задачах нужно прежде всего решить, какую из независимых величин взять за независимое переменное, а какую – за искомую функцию. Затем надо выразить, на сколько изменится искомая функция y при приращении аргумента Δx, т.е. выразить приращение функции $y(x+\Delta x)-y(x)$ через величины, о которых говорится в задаче. Разделив эту разность на Δx и перейдя к пределу при приращении аргумента, стремящемуся к нулю, получаем дифференциальное уравнение, из которого можно найти искомую функцию. В большинстве задач содержатся условия, с помощью которых можно определить входящие в общее решение дифуравнения значения постоянных. Иногда дифуравнение можно составить более простым путем, воспользовавшись физическим смыслом производной.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 1. С некоторой высоты сброшено тело, масса которого *m*. Требуется установить, по какому закону будет изменяться скорость падения этого тела, если на него, кроме силы тяжести, действует тормозящая сила сопротивления воздуха, пропорциональная скорости.

Решение.

В задаче требуется найти $v=f(t)$. По второму закону Ньютона $ma=F$. Ускорение представляет собой производную от скорости по времени, т.е. данное уравнение можно переписать в виде $\frac{dv}{dt}m=F$. Сила F, действующая на тело в направлении движения, состоит из двух сил – силы тяжести mg и силы сопротивления воздуха $-kv$.

Получаем соотношение $m\frac{dv}{dt}=mg-kv$, которое связывает неизвестную функцию v и ее производную, то есть дифференциальное уравнение по переменной v.
Это уравнение является уравнением движения некоторых типов парашютов.
Легко проверить, что решением этого уравнения будет семейство функций

$$v=Ce^{-\frac{k}{m}t}+\frac{mg}{k}.$$

Пример 2. В сосуд, содержащий 10*л* воды, непрерывно поступает со скоростью 2 *л/мин* раствор, в каждом литре которого содержится 0,3 *кг* соли. Поступающий в сосуд раствор перемешивается с водой, и смесь вытекает из сосуда с той же скоростью. Сколько соли будет в сосуде через 5 минут?
Решение.
Примем за независимую переменную время, а за искомую функцию $y(t)$ количество соли в сосуде через t минут после начала опыта. Найдем, на сколько изменится количество соли за промежуток времени от момента t до $t+\Delta t$, в одну минуту поступает 2литра раствора, а в Δt минут – $2\,\Delta t$ литров. В этих $2\,\Delta t$ литрах содержится $0{,}3\cdot 2\Delta t=0{,}6\Delta t$ соли. С другой стороны, за время Δt вытекает $2\,\Delta t$ литров раствора. В момент времени t во всем сосуде (10*л*) содержится $y(t)$ кг соли, следовательно, в $2\,\Delta t$ литрах вытекающего раствора содержалось бы $2\,\Delta t\ y(t)$ кг соли, если бы за время Δt содержание соли не изменялось. Но за это время содержание соли меняется на бесконечно малую величину за время $\Delta t\to 0$, то в вытекающих $2\,\Delta t$ литрах содержится $0{,}2\Delta t(y(t)+\alpha)\text{кг}$ соли, где $\alpha\to 0$ при $\Delta t\to 0$
Итак, в растворе, вытекающем за промежуток времени от момента t до $t+\Delta t$ содержится $0{,}6\Delta t$ кг соли, а в вытекающем – $0{,}2\Delta t(y(t)+\alpha)\text{кг}$. Приращение количества соли за это время равно разности найденных величин, т.е.

$$y(t+\Delta t)-y(t)=0{,}6\Delta t-0{,}2\Delta t(y(t)+\alpha).$$

Разделим обе части этого уравнения на Δt и перейдем к пределу:

$y'(t) = 0{,}6 - 0{,}2y(t)$

Таким образом, мы составили дифференциальное уравнение по условию заданной задачи.

Пример 3. Пусть $y(t)-$интенсивность выпуска продукции некоторого предприятия. С увеличением выпуска продукции происходит насыщение рынка и цена товара $p(y)$ будет падать. Пусть, например, $p(y)=b-ay, a, b>0$ т скорость увеличения интенсивности выпуска продукции является возрастающей функцией дохода. Составить дифуравнение для функции $y(t)$ и решить его.

Решение.

Согласно механическому смыслу производной $y' = \dfrac{dy}{dt}$ есть скорость изменения функции $y(t)$. По условию $\dfrac{dy}{dt} = k(b - ay)$, где $p(y)y -$ доход от продажи выпуска $y(t)$ по цене $p(y)$. Получили уравнение с разделяющимися переменными. Разделив переменные, получим $\dfrac{dy}{y(b-ay)} = kdt$. Интегрируя, находим

$$y = \frac{Cbe^{bkt}}{1 + Cae^{bkt}}.$$

Полученная в результате интегрирования функция $y(t)$ представляет собой уравнение так называемой логистической кривой, часто возникающей в различных разделах социальных наук. В данном случае эта кривая отражает поведение выпуска продукции $y(t)$ в соответствии с условием задачи, а именно налицо насыщение рынка товаром с ростом времени t.

ТРЕНИРОВОЧНЫЕ УПРАЖНЕНИЯ

1. (У) Каков геометрический, механический и экономический смысл производной первого и второго порядка?

2. (A) Напишите уравнение касательной к графику функции $y = 2x^3 - 1$ в точке $x = 2$.

3. Определите тип и решите дифференциальные уравнения, к которым приводят следующие задачи нематематического содержания.

1) Скорость распада радия пропорциональна количеству нераспавшегося радия, т.е. описывается уравнением $\frac{dx}{dt} = kx$. Количество радия в начале процесса распада $(t = 0)$ было равно x_0. Известно, что за 1600 лет распадается половина первоначального количества. Через сколько лет количество нераспавшегося радия будет составлять 80 % первоначального?

2) В сопротивлении материалов доказывается, что дифуравнение упругой линии консоли с постоянным поперечным сечением и сосредоточенной на свободном конце силой Р имеет вид $\frac{d^2\omega}{dx^2} = -\frac{Px}{EI}$, где $\omega -$ прогиб консоли в сечении с абсциссой x, а $EI -$ постоянная величина, называемая жесткостью на изгиб сечения балки. Найти решение этого уравнения, удовлетворяющее начальным условиям $\omega(l) = 0, \omega'(l) = 0$.

3) При движении точки по прямой, принимаемой за ось Ox, уравнение ее движения записывается так: $m\frac{d^2x}{dt^2} = F_x$. Найти закон движения точки, падающей под действием силы тяжести, если в начальный момент $t = t_0$ ее координата $x = x_0$, а начальная скорость равна v_0.

4) Найти закон движения материальной точки массой m, которая движется по прямой, притягиваемая к неподвижному центру силой, прямопропорциональной расстоянию точки от притяжения. Сила сопротивления среды прямопропорциональна скорости. По второму закону Ньютона дифуравнение уравнение такого движения записывается так: $m\frac{d^2x}{dt^2} = -k^2mx - 2hm\frac{dx}{dt}$.

5) Замедляющее действие трения на диск, вращающийся в жидкости, пропорционально угловой скорости вращения ω. Найти зависимость этой угловой скорости от времени, если известно, что диск, начав вращаться со скоростью 100об/мин, по истечении 1 минуты вращается со скоростью 60 об/мин.

6) Составить уравнение, описывающее эволюцию популяций в произвольный момент времени t при предположениях, что А – число особей в популяции, рождающихся в единицу времени, а В – число особей, умирающих в единицу времени. Обозначив $x(t)$ – число особей в популяции в произвольный момент времени. Скорость изменения популяции задается формулой $\dfrac{dx}{dt} = A - B$. Простейшим случаем является линейная зависимость для скоростей рождения и умирания особей: А = $ax, B = bx$. Тогда дифуравнение перепишется в виде: $\dfrac{dx}{dt} = (a-b)x$. Решив его, получим уравнение эволюции популяции.

7) Проанализируем динамику рыночной цены. Связь между изменением цены p и неудовлетворенным спросом $d(p) - s(p)$, где $d(p) = a - bp, s(p) = \alpha + \beta p$ соответственно спрос и предложение при цене р. Согласно модели Самуэльсона скорость изменения цены пропорциональна неудовлетворенному спросу с коэффициентом пропорциональности k>0, где $\dfrac{dp}{dt} = k(d(p) - s(p))$.решить уравнение, с учетом явного вида функций спроса и предложения.

9) Модель мобилизации: принимая во внимание, что текущий уровень мобилизации (привлечение людей в политическую партию или ряды ее сторонников, участие в общественном движении) тесно связан с прошлым уровнем, а прирост числа вовлеченных зависит от сегодняшних успехов компании, получаем уравнение $\dfrac{dy}{dt} = \alpha(1-y) - \beta y$, где y – доля вовлеченных (от всего населения), $\alpha -$ коэффициент

успешности агитационной кампании, $\beta -$ коэффициент выбытия (разочаровавшихся). Найти функцию $y(t)$.

10) Вещество А превращается в вещество В. Определить первоначальное количество вещества А ии время, когда останется половина этого вещества, если спустя 1 час после начала реакции осталось 44, 8 г вещества А, а после 3 часов – 11, 2 г.

Обозначим через a – первоначальное количество вещества А, а через х – количество вещества, прореагировавшего за время t от начала реакции, тогда дифференциальное уравнение имеет вид:

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = k(a - x)$$

4. Составить дифуравнения для решения задач.

1) Гибкая однородная нить подвешена за два конца. Найти уравнение кривой, по которой расположится нить под действием собственного веса.

2) Найти такую кривую, проходящую через точку (0;-2), чтобы угловой коэффициент касательной в любой ее точке равнялся ординате этой точки, увеличенной на 3 единицы.

3) Найти закон прямолинейного движения материальной точки массой m, которая падает в среде, сопротивление которой пропорционально квадрату скорости.

5. Если $x -$ количество йодисто-водородной кислоты HJ, разложившееся к моменту времени t, то скорость разложения $\frac{dx}{dt}$ определяется дифференциальным уравнением $\frac{dx}{dt} = k_1 (\frac{1-x}{v})^2 - k_2 (\frac{x}{v})^2$, где k_1, $k_2, v -$ постоянные. Проинтегрировать это уравнение.

6. Зависимость между скоростью снаряда v и пройденным путем l в канале орудия устанавливается в баллистике следующим уравнением: $v = \frac{al^n}{b + l^n}$, где $v = \frac{dl}{dt}$ и $n < 1$. Найти зависимость между временем t движением снаряда и пройденным расстоянием l по каналу.

7. Решите задачу, составив дифференциальное уравнения и решив его.

1) Установлено, что скорость распада радия прямо пропорциональна его количеству в каждый данный момент времени. Определить закон изменения массы радия в зависимости от времени.

2) Определить наименьшую скорость, с которой нужно бросить тело вертикально вверх, чтобы оно вернулось на Землю. Сопротивлением воздуха пренебречь.

3) По закону Ньютона скорость охлаждения какого-либо тела в воздухе пропорциональна разности между температурой тела и температурой воздуха, если температура воздуха 20^0С и тело в течении 20 минут охлаждается со 100^0С до 60 ^{0}С, то через сколько времени его температура понизится до 30^0С?

4) В какое время вода вытечет через отверстие 0,5 см^2 на дне конической воронки высотой 10 см и углом при вершине 60^0?

5) Определить кривую, для которой отрезок, отсекаемый на оси ординат нормалью, проведенной в какой-нибудь точке кривой, равен расстоянию от этой точки до начала координат.

6) Допустим, что в вертикальном столбе воздуха давление на каждом уровне обусловлено давлением вышележащих слоев. Найти зависимость давления от высоты, если известно, что на уровне моря то давление равно 1 кг на 1 см^2, а на высоте 500 м 0,92 кг на 1 см^2 (воспользоваться законом Бойля-Мариотта, по которому плотность газа пропорциональна давлению).

7) Из статистических данных известно, что для рассматриваемо региона число новорожденных и число умерших за единицу времени пропорциональны численности населения с коэффициентами пропорциональности k_1 и k_2. Найти закон изменения численности населения с течением времени.

8) Исследовать динамику роста цены p на товар, если прогноз спроса $d(t)$ и предложения $s(t)$ описывается следующими соотношениями: $d(t)=3p''-p'-2p+18, s(t)=4p''+p'+3p+3$. (учесть, что равновесие рынка характеризуется равенством $d(p)=s(p)$.

9) Материальная точка массы m движется по оси Ox под действием восстанавливающей силы, направленной к началу координат и пропорциональной расстоянию движущейся точки от начала. Среда, в которой происходит движение, оказывает движению точки сопротивление, пропорциональное скорости движения. Найти закон движения.

8. Решите задачу с помощью системы дифуравнений.

Два шарика, масса каждого из которых m, соединены очень легкой пружиной, удлинение которой пропорционально растягивающей силе. Длина нерастянутой пружины l_0, Пружина растянута до длины l_1, а затем в момент $t = 0$ оба шарика, расположенные вертикально один над другим, начинают падать (соединением среды пренебречь).

РАЗДЕЛ 4. ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ И КОНТРОЛЯ УСВОЕНИЯ ЗНАНИЙ

4.1. Задания для проверки теоретических знаний

Контрольные вопросы

1. Определение дифференциального уравнения.
2. Символическая запись дифуравнения.
3. Обыкновенное дифуравнение.
4. Порядок дифуравнения.
5. Решение дифуравнения.
6. Вид дифуравнения, разрешенного относительно производной.
7. Теорема о существовании и единственности решения ДУ.
8. Геометрический смысл теоремы о существовании и единственности решения ДУ.
9. Общее решение ДУ.
10. Частное решение ДУ.
11. Особое решение.
12. Начальные условия.
13. Задача Коши.
14. Геометрический смысл общего интеграла и частного решения ДУ.
15. Геометрическая интерпретация ДУ первого порядка.
16. Определение изоклины.
17. Изогональные траектории.
18. Ортогональные траектории.
19. Общий вид уравнения с разделенными переменными.
20. Как получить общий интеграл ДУ с разделенными переменными.
21. Общий вид уравнения с разделяющимися переменными.
22. Что значит разделить переменные?
23. С помощью какого преобразования можно разделить переменные?

24. Что такое интегральная кривая?

25. Чем отличается общее решение ДУ от его частного решения?

26. Что означает запись $y(0)=3$? $y|_{x_0=1}=2$?

27. Определение функции *n*-го измерения (порядка)

28. Определение однородного дифуравнения.

29. Как определить порядок (измерение) функции?

30. Как проверить, является ли уравнение однородным?

31. Способ решения однородных ДУ.

32. Какая подстановка используется для решения однородного уравнения?

33. Какое дифуравнение называется линейным?

34. В чем состоит метод Бернулли решения линейного уравнения?

35. Какая подстановка для решения линейного уравнения используется при решении его методом Бернулли?

36. Метод Лагранжа решения линейного уравнения.

37. На какое выражение нужно умножать обе части уравнения Бернулли, записанного в стандартном виде, для приведения его к линейному уравнению?

38. Какая подстановка позволяет привести уравнение Бернулли к линейному?

39. Алгоритм решения уравнения Бернулли.

40. Какое условие нужно проверить, чтобы выяснить, является ли дифуравнение уравнением в полных дифференциалах?

41. Общий вид уравнения в полных дифференциалах.

42. Алгоритм решения дифуравнения в полных дифференциалах.

43. Общий вид однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.

44. Как составить характеристическое уравнение для заданного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами?

45. Какой вид имеет общее решение однородного дифференциального уравнения второго порядка, если его характеристическое уравнения имеет 2 различных действительных корня?

46. Какой вид имеет общее решение однородного дифференциального уравнения, если его характеристическое уравнения имеет 2 одинаковых действительных корня?

47. Какой вид имеет общее решение однородного дифференциального уравнения, если его характеристическое уравнения имеет 2 комплексных корня?

48. Какой вид имеет общее решение однородного дифференциального уравнения, если его характеристическое уравнения имеет один вещественный и два комплексных корня?

49. Какой вид имеет общее решение однородного дифференциального уравнения, если его характеристическое уравнения имеет 2 одинаковых вещественных корня и два комплексных корня?

50. Структура общего решения линейного неоднородного уравнения.

51. От чего зависит общий вид частного решения неоднородного уравнения?

52. Как связан общий вид частного решения неоднородного уравнения с корнями соответствующего однородного уравнения?

53. Метод Лагранжа для решения дифуравнений высших порядков.

54. Метод неопределенных коэффициентов.

55. Какая система дифуравнений называется нормальной?

56. Какой вид имеет характеристическое уравнения для системы уравнений с постоянными коэффициентами с двумя переменными?

Тесты для контроля и самоконтроля знаний

Тема: Основные понятия дифференциальных уравнений

Вариант 1

1. Какая операция называется дифференцированием?
…………………………………………………………………………

2. Дифференциальным уравнением называется уравнение, связывающее независимую переменную x, искомую функцию $y = f(x)$ и ………………………………

3. Порядком дифуравнения называется:………………….
…………………………………………………………………………

4. Если искомая функция $y = f(x)$ является функцией одного независимого переменного, то такое дифуравнение называется.............................

5. Решением (интегралом) дифференциального уравнения называется всякая ……………., которая, будучи подставленной в уравнение,
…………………………………………………………………………

6. Подчеркните дифференциальные уравнения первого порядка одной чертой, второго порядка – двумя:

$y^2 - y' = 2xy;$

$y'' - y' = 2x^3 + y\ ;$

$y^5 - y = 2y'x\ ;$

$y''' - 2y' = x^3 y\ ;$

$y^2 - x^3 = y$

$y''x + 2y = x + \sqrt{y}$

7. Если дифуравнение можно разрешить относительно y', то его можно записать в виде …………………………….

8. С геометрической точки зрения общее решение дифуравнения представляет собой ……………………………………………………, зависящее от одной произвольной постоянной С.

9. Решение, удовлетворяющее некоторому условию $y = y_0$ при $x = x_0$ называется ……………………... решением дифуравнения

10. Частному решению соответствует ……………… кривая семейства кривых, проходящая через………………………………………………………….

11. Функция $y = Cx$ является для дифуравнения $\frac{dy}{dx} = xy$

1) общим решением
2) частным решением
3) не является решением.

12. Функция $y = x$ является для уравнения $1 - y' = 0$

1) общим решением
2) частным решением
3) не является решением

Вариант 2

1. Обыкновенное дифуравнение в общем виде можно записать так: ……………………………

2. Решение дифуравнения по-другому называют его

1) интегралом
2) ответом
3) другой вариант(написать какой)

3. Порядок наивысшей производной, входящей в дифуравнение, называют ………………………………………….

4. Если дифуравнение можно представить в виде $y' = f(x, y)$, то его называют уравнением, ………………………………………………………………………..

5. Геометрический смысл теоремы о существовании и единственности решения дифуравнения: существует и притом единственная, ………………………………………………

……………………………………………………………………………

………………… ……………………………………………………..

6. Уравнение $y'' - 3y^3 x = 2x + y$ является дифуравнением

1) первой степени
2) второй степени
3) другой степени
4) не является дифуравнением

7. Уравнение $y' - 3y^2 x = 3x + y$ является дифуравнением

1) первой степени
2) второй степени
3) другой степени
4) не является дифуравнением

8. Уравнение $y - 3y^3 x = 5x + y$ является дифуравнением

1) первой степени
2) второй степени
3) другой степени
4) не является дифуравнением

9. Геометрическое место точек плоскости (*x, y*), в которых наклон касательных к решениям уравнения $y' = f(x, y)$ один и тот же, называется ……………………………………………….

10. Функция у = $\dfrac{c}{x}$ является для дифуравнения $\dfrac{dy}{dx} = xy$

1) общим решением;
2) частным решением;
3) не является решением;

Тема: Дифференциальные уравнения с разделенными и разделяющимися переменными

1. Уравнение вида $M(x)dx + N(y)dy = 0$ называется дифуравнением с ……..…………………………...переменными

2. Уравнение вида $M_1(x)N_1(y)dx + M_2(x)N_2(y)dy = 0$ называется дифуравнением с ……………………..…………переменными

3. Уравнение с разделяющимися переменными, записанное в общем виде, решается делением обеих его частей на ……………………………………………………………………… …………

4. Уравнение $\frac{dy}{dx}=\frac{x^2}{y}$ является

1) уравнением с разделенными переменными
2) с разделяющимися переменными
3) другого типа

5. Уравнение $\frac{dy}{y}=\frac{dx}{\cos x}$ является

1) уравнением с разделенными переменными
2) с разделяющимися переменными
3) другого типа

6. Чтобы разделить переменные в уравнении $\frac{dx}{y}=\frac{dy}{x^2}$, нужно обе его части

1) умножить на x^2y
2) разделить на x^2y
3) умножить на y и разделить на x^2
4) выполнить другое преобразование(написать какое)

7. Чтобы разделить переменные в уравнении $xdy=y^2dx$, нужно обе его части умножить на xy^2

1) разделить на xy^2
2) умножить на y^2 и разделить на x
3) выполнить другое преобразование

Тема: Однородные уравнения

1. Функция $f(x,y)$ называется однородной n-го измерения относительно переменных x и y, если при любом k справедливо тождество*: f(kx,ky)=…………………*

2. Функция $f(x,y)=xy-y^2$ является функцией .... измерения.

3. Дифференциальное уравнение первого порядка $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ называется однородным относительно x и y, если функция $f(x,y)$ является однородной.........................измерения относительно x и y.

4. Однородное дифуравнения решаются с помощью подстановки:.......................или ...., тогда $\frac{dy}{dx} =$ ……………………………..

5. Подчеркнуть те уравнения, которые являются однородными:

1) $(x\,y' - y)\,\mathrm{arctg}\,\frac{y}{x} = x$

2) $y' + ytgx = \cos^2 x$

3) $y' = \frac{x + y}{x - y}$

4) $y' = 8 + \frac{y}{x} + (\frac{y}{x})^2$

5) $xy' = y\ln\frac{y}{x}$

6) $y'\,\mathrm{tg}x = y$

7) $y' - \frac{3y}{x} = x$

8) $y' = \frac{y+1}{x^2}$

9) $y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$

10) $y' + 2xy = xe^{-x^2}$

Тема: Линейные уравнения, уравнения Бернулли

Вариант 1

1. Линейным уравнением первого порядка называется уравнение, линейное относительно неизвестной функции y и ………………………………………………………………………….

2. Выполнив подстановку $y = uv$, уравнение записываем в виде $(u(\frac{dv}{dx} + Pv) + v\frac{du}{dx} = Q$ и выбираем функцию v так, чтобы выполнялось равенство:..

3. Среди всех уравнений выбрать уравнения с разделяющимися переменными (подчеркнуть прямой линией), однородные (подчеркнуть пунктирной линией) и линейные (подчеркнуть волнистой линией):

$y' = \frac{y^2}{x^2} - 2$

$y' = \frac{x+y}{x-y}$

$yy' = \frac{1-2x}{y}$

$xy' = y^2 + y$

$y' + y = cosx$

y'+2y = 4x

$(xy^2 + x)dx + (y - x^2 y)dy = 0$

$xy' - \frac{y}{x+1} = x$

4. Уравнение вида …………………. называют уравнением Бернулли.

5. Для решения уравнения Бернулли его приводят к линейному, умножая обе части уравнения на ……. и делая подстановку z = y^{1-n} .

6. Для преобразования уравнения Бернулли $xy' + x^3 y = (x^4 - 9)y^5$ к линейному его нужно умножить на

1) x^{-4}

2) y^{-5}

3) x^{-3}

4) y^5

5) на другое выражение (написать, какое) ……………………

7. Для преобразования уравнения Бернулли $xy' + x^3 y = (x^2 - 9)y^6$ к линейному его нужно умножить на ……………………………………………………………………….

Вариант 2

1. Решение линейного уравнения ищут в виде
y =…………………………………………………………

2. Для определения u подставляем в уравнение $(u\frac{dv}{dx}+Pv)+v\frac{du}{dx}=Q$ значение v и получаем уравнение: …………………………………………………………………………

3. Среди всех уравнений выбрать уравнения с разделяющимися переменными(подчеркнуть прямой линией), однородные(подчеркнуть пунктирной линией) и линейные(подчеркнуть волнистой линией)

$y = y'tgx\,y$

$y' = \dfrac{1+y^2}{1+x^2}$

$xdy - ydx = y$

$y' = \dfrac{1}{2x - y^2}$

$y' + 2xy = xe^{-x}$

$y' = \dfrac{2xy}{x^2 - y^2}$

$y' = e^{\frac{y}{x}} + \dfrac{y}{x}$

$\sqrt{1-y^2}dx + y\sqrt{1-x^2}dy = 0$

4. Уравнение вида $y' + p(x)y = q(x)y^n$ называют ……………………………………………………………………..

5. Уравнение Бернулли приводится к линейному с помощью подстановки z =…………….

6. Для преобразования уравнения Бернулли $xy' + x^3y = (x^2 - 9)y^6$ к линейному его нужно умножить на

1) y^{-6}

2) y^6

3) x^{-2}

4) x^{-3}

5) на другое выражение (записать его)………………………

7. Для преобразования уравнения Бернулли $xy' + x^2 y = (x-9)y^4$ к линейному его обе части нужно умножить на ……………………………………………………….

Тема: Линейные однородные уравнения высших порядков

Вариант 1

1. Линейное однородное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами имеет вид………………………., где p и q-……………………………

2. Квадратное уравнение, соответствующее данному дифуравнению, называется……………………………уравнением

3. Если характеристическое уравнение имеет два различных действительных корня $k_1 \neq k_2$,то его частными решениями будут y_1=……. и y_2=……….

4. Если корни характеристического уравнения комплексные сопряженные числа $\alpha + \beta i$ и $\alpha - \beta i$, то его общее решение в тригонометрической форме записывается так ……………………………………………………………………….

5. Характеристическое уравнение для дифуравнения $y'' + 5y' - 6y = 0$ имеет вид………………………………………., а корни этого уравнения равны $k_1 =$................, $k_2 =$...................……………………………

6. Какими были корни характеристического уравнения, если его общее решение имеет вид: $y=C_1e^x+C_2e^{-x}+C_3e^{2x}+C_4e^{-2x}$

7. Корни характеристического уравнения равны: -1, -1, 3, 5. Запишите его общее решение.

8. Запишите общее решение дифуравнения, если его корни : 1 ± 3i, 4 и -4.

9. Составить дифуравнение четвертого порядка, для которого корни характеристического уравнения равны 1 и -1, 5 и -5.

Вариант 2

1. Линейное однородное уравнение третьего порядка с постоянными коэффициентами имеет вид………………………

2. Если дискриминант характеристического уравнения больше нуля, то общее решение дифуравнения записывается в виде y = ……………………………………………………

3. Если характеристическое уравнение имеет два одинаковых действительных корня $k_1 = k_2$, то его частными решениями будут y_1=…….. и y_2=………..

4. Если общее решение дифуравнения записано в тригонометрической форме, то корни характеристического уравнения были ……………………………………………..

5. Составить характеристическое уравнение для дифуравнения $y'' + 4y' + 3y = 0$ и найти его корни.

6. Какими были корни характеристического уравнения, если его общее решение имеет вид: $y=C_1e^x+C_2xe^x +C_3e^{5x}+C_4e^{-5x}$

7. Корни характеристического уравнения равны: -1, -4, 5, 5. Запишите его общее решение.

8. Запишите общее решение дифуравнения, если его корни : 2 ± 3i, 1 и -1.

9. Составьте дифуравнение, корни характеристического уравнения которого равны 0, 1, 4, 4

Тема: Линейные неоднородные уравнения с постоянными коэффициентами

1. Если в уравнении $y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + ... + p_{n-1}y' + p_n y = f(x)$ функция $f(x) = 0$**,** то уравнение называется

1) однородным
2) неоднородным
3) уравнением без правой части
4) уравнением с правой частью

2. Если в уравнении $y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + ... + p_{n-1}y' + p_n y = f(x)$ функция $f(x) \neq 0$, то уравнение называется

1) однородным
2) неоднородным
3) уравнением без правой части
4) уравнением с правой частью

3. Чтобы уравнение $y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + ... + p_{n-1}y' + p_n y = f(x)$ было неоднородным уравнением с постоянными коэффициентами, необходимо, чтобы

1) функции $p_1, p_2, \ ..., \ p_n$ являлись многочленами первой степени
2) $p_1, p_2, \ ..., \ p_n$ являлись некоторыми вещественным числами
3) функция $f(x) = 0$
4) функция $f(x) \neq 0$.

4. Общее решение неоднородного уравнения с постоянными коэффициентами $y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + ... + p_{n-1}y' + p_n y = f(x)$ имеет вид $y = y_o + y_ч$, где

y_o - ....

$y_ч$ – ....

5. Если правая часть неоднородного уравнения с постоянными коэффициентами $y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + ... + p_{n-1}y' + p_n y = f(x)$ имеет вид e^{3x} и число 3 не является решением характеристического уравнения соответствующего однородного уравнения, то частное решение необходимо искать в виде

1) e^{3x}
2) xe^{3x}
3) Ae^{3x}
4) $(Ax + B)e^{3x}$
5) Axe^{3x}

6. Если правая часть неоднородного уравнения с постоянными коэффициентами $y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + ... + p_{n-1}y' + p_n y = f(x)$ имеет вид e^{3x} и число 3 является решением характеристического уравнения соответствующего однородного уравнения, то частное решение необходимо искать в виде……………………………………..

4.2. Задания на решение дифференциальных уравнений разного типа

Варианты индивидуальных заданий к пунктам 1.1-1.7

Вариант 1

1. Показать, что функция $y = \sin x - 1 + e^{\sin x}$ является решением уравнения $y' + y\cos x = \dfrac{1}{2}\sin 2x$.

2. Определить вид уравнения и решить его:

1) $ydx - xdy = 0$;

2) $(y - x)dx + (y + x)dy = 0$;

3) $y' - \dfrac{2y}{x+1} = (x+1)^2$.

3. Решить уравнение в полных дифференциалах

$(y - 3x^2)dx - (4y - x)dy$

Вариант 2

1. Показать, что функция $y = Cx + C - C^2$ является решением уравнения $y'' - y' - xy + y = 0$

2. Определить вид уравнения и решить его:

1) $(1 + y^2)dx - (1 - x^2)dy = 0$;

2) $(y + x)dx + xdy = 0$;

3) $y' - \dfrac{2y}{x} = \dfrac{x+1}{x}$.

3. Решить уравнение в полных дифференциалах $(y^3 - x)y' = y$

Вариант 3

1. Показать, что функция $y = C_1 x + \dfrac{C_2}{x} + C_3$ является решением уравнения $y''' + \dfrac{3}{x} y'' = 0$

2. Определить вид уравнения и решить его:

1) $(1+y)xdy + (1-x)ydx = 0$;

2)$(y+x)dx + (y-x)dy = 0$;

3) $\dfrac{ds}{dt}\cos t + s\sin t = 1$.

3. Решить уравнение в полных дифференциалах

$$\frac{y^2}{(x-y)^2}dx + (\frac{1}{y} - \frac{x^2}{(x-y)^2})dy = 0$$

Вариант 4

1. Проверить, является ли функция $y = \dfrac{C_1}{x} + C_2 x - 1 + e^{-\sin x}$ решением уравнения $y'' + \dfrac{2}{x} y' = 0$.

2. Определить вид уравнения и решить его:

1) $y^2 dx - xdy = 0$;

2) $(2x^3 - xy^2)dx + (2y^3 - x^2 y)dy = 0$;

3) $\dfrac{ds}{dt} + S\cos t = \dfrac{1}{2}\sin 2t$.

3. Решить уравнение в полных дифференциалах

$$\frac{xdx + (2x+y)dy}{(x+y)^2} = 0.$$

Вариант 5

1. Показать, что функция $y = \sin x + 2\cos x$ является решением уравнения $y'' + y = 0$.

2. Определить тип дифуравнения и решить его:

1) $y' = 2 - e^x$;

2) $y' + 2xy = xe^{-x^2}$;

3) $xy' = x\sin\frac{y}{x} + y$.

3. Решить уравнение в полных дифференциалах

$(\frac{1}{x^2} + \frac{3y^2}{x^4})dx = \frac{2y}{x^3}dy$.

Вариант 6

1. Показать, что функция $y = 5\sin x + 3\cos x$ является решением уравнения $y'' + y = 0$

2. Определить вид уравнения и решить его:

1) $\sin y\cos xdy = \cos y\sin xdx$;

2) $y' = 4\frac{x}{y} + 3\frac{y}{x}$;

3) $3\,y' - 3\frac{y}{x} = x$.

3. Решить уравнение в полных дифференциалах

$\frac{x^2dy - y^2dx}{(x-y)^2} = 0$.

Вариант 7

1. Показать, что функция $y = Cx + C$ является решением уравнения $y'' - y'' - xy + y = 0.$

2. Определить вид уравнения и решить его:

1) $(1+y)dy + (1-x)dx = 0$;

2) $(y + x)dx + xdy = 0;$

3) $y' + y = \frac{1}{e^x}$.

3. Решить уравнение в полных дифференциалах $xdx + ydy = \frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2}$

Вариант 8

1. Показать, что функция $y = C_1 + C_2e^{3x} + C_3e^{-3x}$ является решением уравнения $y''' - 9y' = 0$

2. Определить вид уравнения и решить его:

1) $y' = (1 + e^x)(1+y^2)$;

2) $y' + \dfrac{x^2 + y^2}{xy} = 0$;

3) $\dfrac{ds}{dt}\cos t + s\sin t = 1$

3. Решить уравнение в полных дифференциалах

$x^3 ydx = (y - \dfrac{x^4}{4})dy$

Вариант 9

1. Показать, что функция $y = Cx^3$ является решением уравнения $3y - xy' = 0$.

2. Определить вид уравнения и решить его:

1) $(1 + s^2)dt - \sqrt{t}ds = 0$;

2) $yy' = 2y - x$;

3) $(x^2 - x)y' + y = x(2x - 1)$

3. Решить уравнение в полных дифференциалах

$(e^x + y + \sin y)dx + (e^y + x + x\cos x)dy = 0$.

Вариант 10

1. Показать, что функция $y = Ce^{-2x} + \dfrac{1}{3}e^x$ является решением уравнения $y' + 2y = e^x$.

2. Определить вид уравнения и решить его:

1) $y' = \dfrac{1 + y^2}{1 + x^2}$;

2) $y'x^2 = y^2 + xy$;

3) $(2x + 1)y' + y = x$.

3. Решить уравнение в полных дифференциалах $(y^3 - 2x)dy = 2ydx$

Варианты индивидуальных заданий к пунктам 2.1-2.3

Вариант 1

1. Составьте дифференциальное уравнение, если его общее решение имеет вид: $y=C_1e^{x}+C_2e^{-x}+C_3e^{2x}+C_4e^{-2x}$

2. Корни характеристического уравнения равны: -1, -1, 3, 5. Запишите его общее решение.

3. Решить однородное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами: $y''+10y'+25=0$ и начальными условиями y(0)=1, $y'(0)=-10$

4. Не решая дифуравнение, определить вид его частного решения, если известны корни характеристического уравнения и задана правая часть: $k_1=0, k_2=1, f(x)=\sin x+\cos x$

5. Решить ДУ $y''=6y'-8y+cosx$.

6. Решить уравнение, понизив его степень $y'''=4cos3x$

Вариант 2

1. Составьте дифференциальное уравнение, если его общее решение имеет вид: $y=C_1e^{x}+C_2xe^{x}+C_3e^{5x}+C_4e^{-5x}$

2. Корни характеристического уравнения равны: -1, -4, 5, 5. Запишите его общее решение.

3. Найти общее и частное решение уравнения $y''-y'=0$, $y(0)=0, y'(0)=-5$.

4. Не решая дифуравнение, определить вид его частного решения, если известны корни характеристического уравнения и задана правая часть: $k_1=0, k_2=1, f(x)=(x^2-1)e^{x}$.

5. Решить неоднородное уравнение $y''+y=cosx$ **.**

6. Решить уравнение, понизив его степень $y''=5cos2x$

Вариант 3

1. Запишите общее решение дифуравнения, если его корни: $1\pm 3i$, 4 и -4.

2. Составить дифуравнение четвертого порядка, для которого корни характеристического уравнения равны 1 и -1, 5 и -5.

3. Решить уравнение при заданных начальных условиях $y'' + 6y' + 9y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 2$.

4. Решить неоднородное уравнение $y'' + 4y = \cos 2x - \sin 2x$

5. Не решая дифуравнение, определить вид его частного решения, если известны корни характеристического уравнения и задана правая часть: $k_1 = 2, k_2 = -3, f(x) = xe^{-4x}$

6. Решить уравнение, понизив его степень $y''' = \dfrac{4}{x^3}$.

Вариант 4

1. Запишите общее решение дифуравнения, если его корни : 2 ± 3i, 1 и -1.

2. Составить дифуравнение четвертого порядка, для которого корни характеристического уравнения равны 1 и 0, 3 и -3.

3. Решить однородное уравнение $y^{(IV)} + 2y'' + 9y = 0$.

4. Не решая дифуравнение, определить вид его частного решения, если известны корни характеристического уравнения и задана правая часть: $k_1 = 1, k_2 = -5, f(x) = 3e^x$

5. Решить неоднородное уравнение $y'' + 9y = 3cosx - 2\sin x$.

6. Решить уравнение, понизив его степень $y'' = \dfrac{4}{\cos^2 x}$

Вариант 5

1. Составить дифуравнение четвертого порядка, для которого корни характеристического уравнения равны 2 и -2, 0 и -6.

2. Корни характеристического уравнения 4-*i*, 4+*i*, 6, -2. Составить дифуравнение и записать его решение.

3. Решить однородное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами $y'' + 3y' = 0, y(0) = 1, y'(0) = -5$.

4. Не решая дифуравнение, определить вид его частного решения, если известны корни характеристического уравнения и задана правая часть: $k_1 = -1,\ k_2 = -5,\ f(x) = (3 - x^2)e^x$

5. Решить неоднородное уравнение $y'' + y' - 2y = cosx - 3\sin x$.

6. Решить уравнение, понизив его степень $y'' = \dfrac{2}{\sin^2 x}$.

Вариант 6

1. Составить дифуравнение четвертого порядка, для которого корни характеристического уравнения равны 1 и -1, 7 и -7.

2. Решение уравнения имеет вид $y = C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x + C_3 + C_4 x$. Составьте соответствующее ему дифференциальное уравнение.

3. Не решая дифуравнение, определить вид его частного решения, если известны корни характеристического уравнения и задана правая часть: $k_1 = -4, k_2 = 6, f(x) = (4 - x)e^{6x}$.

4. Решить уравнение $y'' + y' - 20y = 0, y(0) = \dfrac{9}{5}; y'(0) = 0$.

5. Решить уравнение $y'' - 6y' + 9y = x^2 - x - 3$.

6. Решить уравнение, понизив его степень $y'' = \dfrac{4}{x^2}$.

Вариант 7

1. Решение дифуравнения имеет вид $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-3x} + C_3 e^{x}$. Составить это уравнение.
2. Решить однородное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами $y'' + y' + 2\sin 15^0 \cos 15^0 y = 0$.
3. Решить однородное уравнение $y^{(V)} - y^{(IV)} + 6y''' = 0$.
4. Не решая дифуравнение, определить вид его частного решения, если известны корни характеристического уравнения и задана правая часть $k_1 = -1, k_2 = 2, f(x) = (4 - 2x)e^{2x}$.
5. Решить неоднородное уравнение $y'' - 5y' + 6y = 13\sin 3x$.
6. Решить уравнение, понизив его степень $y''' = \dfrac{4}{x^5}$.

Вариант 8

1. Решение дифуравнения имеет вид $y = C_1 + xC_2 + x^2 C_3 + C_4 e^{5x}$. Составить соответствующее ему дифуравнение.

2. Решить однородное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами $y'' - 6y' + 9y = 0$, $y(0) = 0, y'(0) = -1$.

3. Решить однородное уравнение $y^{(IV)} - 4y = 0$.

4. Не решая дифуравнение, определить вид его частного решения, если известны корни характеристического уравнения и задана правая часть $k_1 = -2, k_2 = 6, f(x) = (x^2 + 5)e^{2x}$.

5. Решить неоднородное уравнение $y'' + y = -\sin 2x$.

6. Решить уравнение, понизив его степень $y''' = 23e^{2x} - 120x^6$

Вариант 9

1. Решение уравнения имеет вид $y = C_1 e^x + C_2 e^{4x} + C_3 + C_4 x$. Составьте соответствующее ему дифуравнение.

2. Решить однородное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами $y'' + 5y' + 6y = 0, y(0) = 1, y'(0) = -6$.

3. Не решая дифуравнение, определить вид его частного решения, если известны корни характеристического уравнения и задана правая часть $k_1 = -9, k_2 = 2, f(x) = (4 - x^2)e^{3x}$ ..

4. Решить уравнение, понизив его степень $y'' = \sqrt{x}$

5. Решить однородное уравнение $y^{(IV)} - 8y'' + 16y = 0$.

6. Решить неоднородное уравнение $y'' + y = 2xe^{3x}$

Вариант 10

1. Решить однородное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами $y'' + 4y' + 29y = 0$, $y(0) = 2, y'(0) = 0$.

2. Решить неоднородное уравнение $y'' + 16y = cos4x + \sin 4x$.

3. Известно решение ДУ: $y = C_1 + xC_2 + C_3 e^{4x}$. Составить само ДУ.

4. Не решая дифуравнение, определить вид его частного решения, если известны корни характеристического уравнения и задана правая часть $k_1 = -5, k_2 = 1, f(x) = (4x)e^{2x}$.

5. Решить однородное уравнение $y^{(V)} - 4y^{(IV)} + 3y''' = 0$.

6. Решить уравнение, понизив его степень $\sqrt{1 + x^2}\, y'' = 1$

Структура модульной работы

1) Теоретический вопрос.

2) Проверить, является ли заданная функция решением заданного дифференциального уравнения

3) Определить тип уравнения первого порядка

4) Решить дифуравнение

а) с разделяющимися переменными

б) линейное

в) однородное

г) в полных дифференциалах

д) допускающее понижение порядка

е) однородное второго порядка с постоянными коэффициентами

ж) однородное высших порядков с постоянными коэффициентами

з) неоднородное второго порядка с постоянными коэффициентами

5) Найти общее решение и решить задачу Коши для одного из видов уравнений из задания 4)

6) Решить систему уравнений с постоянными коэффициентами.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1

Дифференцирование

Таблица производных

1. $y = x^n;\ y' = n\,x^{n-1}$

2. $y = a^x;\ y' = a^x \ln a$

3. $y = e^x;\ y' = e^x$

4. $y = \log_a x;\ y' = \frac{1}{x} \ln a$

5. $y = \ln x;\ y' = \frac{1}{x}$

6. $y = \sin x;\ y' = \cos x$

7. $y = \cos x;\ y' = -\sin x$

8. $y = tgx;\ y' = \frac{1}{cos^2 x}$

9. $y = \arcsin x;\ y' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

10. $y = \arccos x;\ y' = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}$

11. $y = arctgx;\ y' = \frac{1}{1 + x^2}$

12. $y = arcctgx;\ y' = \frac{-1}{1 + x^2}$

Правила дифференцирования

1. Постоянный множитель можно выносить за знак производной:

$$(Cu)' = Cu'$$

2. Производная суммы двух или нескольких функций равна сумме производных этих функций:

$$(u+v)' = u' + v'.$$

3. Производная произведения вычисляется по формуле: $(uv)' = u'v + uv'$.

4. Производная частного (дроби) вычисляется по формуле: $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.

Следствия:

а) $\left(\frac{u}{C}\right)' = \frac{1}{C}u'$;

б) $\left(\frac{C}{u}\right)' = -\frac{C}{u^2}u'$.

5. Производная сложной функции вычисляется по формуле:

$$[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Приложение 2

Интегрирование

Таблица интегралов

1) $\int 0dx = C$

2) $\int dx = x + C$

3) $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$

4) $\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$

5) $\int e^x dx = e^x + C$;

6) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$;

7) $\int \sin xdx = -\cos x + C$;

8) $\int \cos xdx = \sin x + C$;

9) $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$;

10) $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$

11) $\int \frac{dx}{1+x^2} = arctgx + C = -arcctgx + C$;

12) $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C$;

13) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C = -\arccos x + C$;

14) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$;

15) $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a} + C\right|$;

16) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + a^2}\right| + C$

Основные правила интегрирования

1. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла:

$\int Af(x)dx = A\int f(x)dx$ **;**

2. Интеграл суммы функций равен сумме интегралов от каждой из функций-слагаемых:

$\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

3. Если $\int f(x)dx = F(x) + C$, то $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$

4. Формула интегрирования по частям: $\int udv = uv - \int vdu$ **.**

Таблица рекомендованных обозначений при интегрировании по частям

№	Вид интеграла	Множитель u	Множитель dv	Замечания
1	$\int P_n(x)\begin{Bmatrix}\sin ax\\ \cos ax\\ e^{ax}a^x\end{Bmatrix}dx$	$P_n(x)$	$dv = \begin{Bmatrix}\sin ax\\ \cos ax\\ e^{ax}a^x\end{Bmatrix}dx$	n раз интегрируем по частям, каждый раз выбирая за и многочлен $P_n(x)$

2	$\int P_n(x)\left\{\begin{matrix}\arccos ax\\ \arcsin ax\\ arctg\,ax\\ \ln^m ax\end{matrix}\right.$	$u = \begin{Bmatrix}\arccos ax\\ \arcsin ax\\ arctgax\\ \ln^m ax\end{Bmatrix}$	$dv = P_n(x)dx$	$m \in N$
3	$\int e^{ax}\begin{Bmatrix}\sin bx\\ \cos bx\end{Bmatrix}dx$	Возможен произвольный выбор		Интегрируем по частям дважды, причем при втором интегрировании делаем аналогичное разбиение на и и dv
4	$\int \begin{Bmatrix}\sin(\ln x)\\ \cos(\ln x)\end{Bmatrix}dx$	$u = \begin{Bmatrix}\sin(\ln x)\\ \cos(\ln x)\end{Bmatrix}$	$dv = dx$	Дважды интегрируем по частям

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

ПЕРЕЧЕНЬ ИНТЕРНЕТ-РЕСУСОВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

С помощью представленных в этом разделе сайтов и программ вы сможете проверить правильность решения вами дифференциального уравнения. На некоторых сайтах есть возможность наблюдать ход решения уравнения, в основном на английском языке. Если такой возможности нет, то имейте в виду, что общее решение дифференциального уравнения может быть записано разными способами. То, что решение, найденное вами, не совпадает с тем, который вы видите на экране, еще не означает, что вы решили уравнение неправильно. Попытайтесь преобразовать функцию, и только потом делайте выводы.

Правила ввода решаемого уравнения практически везде описаны на сайте либо дан пример такого ввода.

Не рекомендуем использовать эти сайты, если вы хотите приобрести навыки решения дифференциальных уравнений. Они полезны лишь для самопроверки правильности решения, а так же в случаях, если решение дифференциального уравнения является лишь средством для решения прикладной задачи.

Характеристика некоторых сайтов и программ представлена ниже.

1. Он-лайн калькулятор, расположенный по адресу: Reshit-online.ru / diff-equation. Уравнение вводится вручную, в одну строку. Производная набирается как апостроф с английской раскладки клавиатуры. Ход решения доступен пользователю на английском языке. Решает все типы дифференциальных уравнений. Есть возможность решать задачу Коши. Не решает системы уравнений.

2. Matematikam.ru. Работает он-лайн, без обязательной регистрации. Под строкой для ввода есть пример ввода уравнений, есть цифровая клавиатура. Есть возможность прослеживать ход решения, но на английском языке.

3. Лови ответ. Адрес: loviotvet.ru. Он-лайн калькулятор для разных типов уравнений и задач, в том числе и для дифференциальных уравнений. В режиме он-лайн доступна только демо-версия программы. Для того, чтобы воспользоваться возможностями в полной мере, необходимо скачать и установить этот калькулятор на компьютер или телефон. Уравнения вводятся с помощью виртуальной клавиатуры. Есть видеоинструкция по вводу уравнений и функций. Есть возможность проследить ход решения. Нет возможности решать задачу Коши.

4. Он-лайн сервис для решения дифуравнений www.matcabi.net/differencial_equation.php. Ввод уравнений осуществляется полностью с клавиатуры. Пользователь не может наблюдать ход решения, ему сразу выдается ответ. Возможности решать задачу Коши нет.

5. Он-лайн программа для решения дифуравненйи второй степени с постоянными коэффициентами. Адрес - Webmath.ru. Пользователь вводит только коэффициенты. Доступна возможность просмотра подробного решения и решения задачи Коши. Недостаток – возможность решать уравнения только одного типа.

6. math.semestr.ru/math/diffurline/php. Данный он-лайн калькулятор служит для решения линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами вида $ay(n)+by+c=R(x)$. Например, $y''-2y=0$, $2y''+y'-2y=x^2$. Решение оформляется в формате Word. Ввод уравнения вводится пошагово. Для получения онлайн решения сначала необходимо ввести максимальную степень производной n. Например, для дифференциального уравнения $y''-2y=0$ максимальная степень равна двум, поэтому нужно ввести $n = 2$ в соответствующем диалоговом окне. После этого открывается новое окно, в которое вводятся соответствующие коэффициенты при переменных. Например, для дифференциального уравнения $y''+2y=0$, необходимо ввести: 1, 0, 2. Если уравнение записано в виде, отличном от $ay(n)+by+c=R(x)$, то пользователь должен привести его к такому виду, а только потом воспользоваться сервисом для решения уравнения. Ниже поля для ввода решаемого уравнения дается видеоинструкция по правильному вводу данных.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

ЛИТЕРАТУРА

1. Берман Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа / Георгий Николаевич Берман. – М.: Наука, 1975. – 416 с.
2. Данко П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах :учеб. пособие для втузов / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова. – М.: Высш. шк,2000. – 416 с.
3. Жовтан Л. В. Практикум з вищої математики : навч. посіб. / Л. В. Жовтан. – Луганськ : Вид-во ДЗ «ЛНУ імені Тараса Шевченка», 2009. – 120 с.
4. Журавлев С. Г. Дифференциальные уравнения: Сборник задач: Учеб. пособие для вузов / С. Г. Журавлев, В. В. Аниковский. – М.: Издательство «Экзамен», 2005. – 128 с.
5. Каплан И. А. Практические занятия по высшей математике / Илья Абрамович Каплан. – Х., 1965. – 374 с.
6. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов. / Николай Семенович Пискунов. – М.: Наука, 1965. – 552 с.
7. Понтрягин Л. С. Обыкновенные дифференциальные уравнения / Лев Семенович Понтрягин. – М.: Наука, 1970. – 332 с.
8. Филиппов А. Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям / Алексей Федорович Филиппов. – М.: Наука, 1970. – 96 с.

Панішева О.В. Практикум з диференційних рівнянь. - Навчальний посібник

Диференційні рівняння є тим необхідним математичним апаратом, за допомогою якого розв'язуються задачі з різних галузей знань. Зміст дисципліни має різноманітні застосування і є одним з фундаментів майбутньої практичної і наукової діяльності спеціаліста.

Даний посібник укладено у відповідності до навчальної робочої програми дисципліни. У ньому використано матеріали, які пройшли апробацію при викладанні диференційних рівнянь студентам різних форм навчання. Прийняті у посібнику позначення відповідають тим, які використовуються у більшості підручників з математичного аналізу та диференційних рівнянь.

Мета посібника – надати студентам допомогу в оволодінні основними поняттями курсу, використовуючи для цього оволодіння методами розв'язання практичних задач. Посібник призначений для підготовки до практичних занять й виконанню самостійної роботи студентами усіх спеціальностей, у навчальному плані яких є дисципліна «Диференційні рівняння» Цим обумовлено його структуру.

Кожен параграф побудовано за такою схемою: основні теоретичні відомості, зразки розв'язання задач, тренувальні вправи. У посібнику чотири розділи. Перший присвячено рівнянням першого порядку, другий – рівнянням вищих порядків, третій – основним застосуванням рівнянь та їх систем. У четвертому розділі наведено матеріали для самоперевірки та контролю засвоєння знань. Їх можна використовувати при підготовці до кожного заняття і для систематизації знань з усього курсу. Усі необхідні відомості з математичного аналізу, які використовуються для розв'язання диференційних рівнянь, наведено у додатках.

Ключові слова: диференційні рівняння, загальний та частий розв'язок, задача Коші, однорідні рівняння, лінійні рівняння, метод невизначених коефіцієнтів.

Панишева О.В. Практикум по дифференциальным уравнениям. - Учебное пособие

Дифференциальные уравнения являются необходимым математическим аппаратом, с помощью которого решаются задачи из различных отраслей знаний. Содержание дисциплины имеет многочисленные приложения и является одним из фундаментов будущей практической и научной деятельности специалиста.

Данное пособие составлено в соответствии с рабочей программой дисциплины. В нем использованы материалы, которые прошли апробацию при преподавании дифференциальных уравнений студентам разных форм обучения. Принятые в пособии обозначения соответствуют тем, которые используются в большинстве учебников по математическому анализу и дифференциальным уравнениям.

Цель данного пособия – помочь студентам в освоении основных понятий курса, используя для этого овладение методами решения практических задач. Сборник предназначен для подготовки к практическим занятиям и выполнения самостоятельной работы студентами всех специальностей, в учебном плане которых есть дисциплина «Дифференциальные уравнения». Этим обусловлена его структура.

Каждый параграф составлен по такой схеме: основные теоретические сведения, образцы решения задач, тренировочные упражнения. В пособии четыре раздела. Первый посвящен дифференциальным уравнениям первого порядка, второй – уравнениям высших порядков, третий – основным применениям уравнений и их систем. Четвертый раздел представляет собой материал для контроля и самоконтроля усвоения изучаемого материала. Их можно использовать при подготовке к каждому занятию и для систематизации знаний по всему курсу. Все необходимые сведения из математического анализа используемые для решения дифференциальных уравнений, приведены в приложении.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение, общее и частное решение, задача Коши, однородные уравнения, линейные уравнения, метод неопределенных коэффициентов.

Olga Panisheva. Practicum on Differential Equations. - Textbook

The differential equations are a necessary mathematical apparatus with the help of which problems from various branches of knowledge are solved. The maintenance of discipline has numerous additionals and is one of the bases of the future practical and scientific activity of the expert.

This grant is made according to the working program of discipline. The materials, which have passed approbation at teaching of the differential equations to students of different forms of training are used in it. The designations, which are accepted in the grant correspond to what are used in the majority of textbooks under the mathematical analysis and the differential equations.

The purpose of the given textbook is to help students on learning of development of the basic concepts of a course, using for this purpose mastering by methods of the decision of practical problems. The collection is intended for the preparation for a practical training and performance of independent work by students of all specialities in which curriculum is a discipline «the Differential equations». It causes its structure.

Each paragraph is made under such scheme: the basic theoretical data, examples of the solving of problems, training exercises. There are four chapters in the textbook. The first part is devoted the differential equations of the first order, the second is devoted to the equations of the higher usages, the third is devoted to the basic applications of the equations and their systems. The fourth section represents a material for the control and self-checking of mastering of a studied material. They can be used by preparation for each employment and for ordering of knowledge at all course. All necessary data from the mathematical analysis which are using for the solving of the differential equations, are resulted in the additional.

Keywords: differential equation, general and particular solution, the Cauchy problem, homogeneous equations, linear equations, the method of undetermined coefficients.

Навчальне видання

ПАНІШЕВА Ольга Вікторівна

ПРАКТИКУМ
З ДИФЕРЕНЦІЙНИХ РІВНЯНЬ

Навчальний посібник

Російською мовою

Навчальний посібник призначений для підготовки студентів спеціальності 6.040302 «Інформатика» до практичних занять та організації самостійної роботи з дисципліни «Диференційні рівняння». Посібник містить короткий виклад основних методів розв'язання типових рівнянь, приклади їх розв'язання, тренувальні вправи, завдання для самостійної роботи, контрольні питання та тести для самоперевірки і контролю знань.

За редакцією автора
Комп'ютерне макетування – О. В. Панішева

Здано до склад 08.01.2014 р. Підп. до друку 5.02.2014 р.
Формат 60х84 1/16. Папір офсет. Гарнітура Times New Roman.
Друк ризографічний. Ум. друк. арк. 7,27. Наклад 300 прим. Зам. № 29.

Видавець і виготовлювач
Видавництво Державного закладу
"Луганський національний університет імені Тараса Шевченка"
вул. Оборонна, 2, м. Луганськ, 91011. т/ф: (0642) 58-03-20.
e-mail: alma-mater@list.ru
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК 3459 від 09.04.2009 р.