

Міністерство освіти і науки України  
Державний заклад  
«Луганський національний університет  
імені Тараса Шевченка»

КОЗУБ Ю. Г.,  
КИРИЧЕВСЬКИЙ Р. В.,  
КАЛАЙДО О. В.

## ОПІР МАТЕРІАЛІВ

*Методичні рекомендації  
для організації самостійної роботи студентів  
спеціальності «Професійне навчання» напрямків підготовки  
«Експлуатація та ремонт місцевого та автомобільного  
транспорту» і «Механізація сільськогосподарського вироб-  
ництва і гідромеліоративних робіт»  
усіх форм навчання*

Луганськ  
ДЗ «ЛНУ імені Тараса Шевченка»  
2010

УДК 539.4.01(076.5)  
ББК 30.121р3  
С64

### Рецензенти:

- Бурцев Г. Г.** – кандидат технічних наук, доцент, завідувач кафедри опору матеріалів і теоретичної механіки Луганського національного аграрного університету.  
**Беляєв Б. В.** – кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри фізики Луганського національного університету Тараса Шевченка.

- Козуб Ю. Г.**  
С64 Опір матеріалів : метод. рек. для організ. сам. роботи студ. спец. «Професійне навчання» напрямків підготовки «Експлуатація та ремонт місцевого та автомобільного транспорту» і «Механізація сільськогосподарського виробництва і гідромеліоративних робіт» усіх форм навчання / Ю. Г. Козуб, Р. В. Киричевський, О. В. Калайдо; Держ. закл. «Луган. нац. ун-т імені Тараса Шевченка». – Луганськ : Вид-во ДЗ «ЛНУ імені Тараса Шевченка», 2010. – 103 с.

Методичні рекомендації містять 12 задач з найбільш важливих тем дисципліни, розподілених за 4 модулями. Кожна задача має 30 варіантів даних, теоретичні відомості, детальний зразок вирішення і рекомендації до розв'язання.

Рекомендації призначені для студентів 2 і 3 курсу спеціальності «Професійне навчання», що навчаються за напрямками підготовки «Експлуатація та ремонт місцевого та автомобільного транспорту» і «Механізація сільськогосподарського виробництва і гідромеліоративних робіт».

УДК 539.4.01(076.5)  
ББК 30.121р3

*Рекомендовано до друку навчально-методичною радою  
Луганського національного університету імені Тараса Шевченка  
(протокол № 6 від 3 лютого 2010 року)*

© Козуб Ю. Г., Киричевський Р. В., Калайдо О. В., 2010  
© ДЗ «ЛНУ імені Тараса Шевченка», 2010

## ЗМІСТ

Вступ.....	4
Питання до курсу.....	5
<b>Модуль 1</b>	
1. Розрахунок стержнів на розтяг і стиск.....	8
Контрольне завдання № 1.....	12
2. Статично невизначні конструкції.....	14
Контрольне завдання № 2.....	17
3. Геометричні характеристики плоских перерізів.....	19
Контрольне завдання № 3.....	23
<b>Модуль 2</b>	
4. Плоский напружений стан.....	25
Контрольне завдання № 4.....	28
5. Кручення.....	32
Контрольне завдання № 5.....	36
6. Згин балки. Підбір і перевірка перерізу балок.....	39
Контрольне завдання № 6.....	44
<b>Модуль 3</b>	
7. Складний опір: згин з крученням.....	56
Контрольне завдання № 7.....	60
8. Складний опір: позацентровий розтяг або стиск.....	62
Контрольне завдання № 8.....	65
9. Розрахунок статично невизначної рами.....	67
Контрольне завдання № 9.....	74
<b>Модуль 4</b>	
10. Стійкість стиснутих стержнів.....	80
Контрольне завдання № 10.....	84
11. Розрахунок балок на ударну дію.....	87
Контрольне завдання № 11.....	90
12. Коливання пружних систем.....	92
Контрольне завдання № 12.....	95
Додатки.....	98
Список використаної та рекомендованої літератури.....	102

## Вступ

*Опір матеріалів* – наука про методи розрахунку на міцність, жорсткість і стійкість елементів інженерних конструкцій. Без глибокого розуміння цих методів неможливе створення безпечних, довговічних і, що дуже важливо, економічних конструкцій.

*Опір матеріалів* історично вважається найбільш складною дисципліною технічного циклу. Причиною тому є дуже широкий круг питань, що вивчаються в рамках курсу. Крім того, опір матеріалів базується на таких фундаментальних дисциплінах, як математика, фізика і теоретична механіка, тобто вимагає серйозної базової підготовки.

Мета курсу «*Опір матеріалів*» - теоретично і практично підготувати майбутніх фахівців в області проектних розрахунків конструкцій та їх частин; навчити їх проектувати та вибирати деталі, які б працювали в заданих умовах протягом необхідного часу, забезпечивши при цьому максимальну економію енергетичних ресурсів і матеріалів.

Невід’ємною і дуже важливою складовою сучасної системи освіти є самостійна робота студентів. Саме організації самостійної роботи присвячене це видання. Самостійна робота при вивченні опору матеріалів полягає в індивідуальному розв’язанні найбільш типових практичних задач.

Методичні вказівки мають зорієнтувати студентів при вивченні курсу, сприяти більш швидкому засвоєнню матеріалу. До видання включено 12 завдань з найбільш практично важливих розділів дисципліни. На початку кожного завдання надано теоретичні відомості, той мінімум, без якого неможливе успішне вирішення даної задачі. Кожне завдання супроводжується детальними прикладами вирішення подібної задачі та рекомендаціями до розв’язання. Контрольні питання, що наведені в кінці кожного завдання, мають вказати студентам на пріоритетні питання при підготовці до контрольно-модульної роботи.

Додаток в кінці рекомендацій дозволяє приступати к вирішенню задач не користуючись довідниковою літературою. За додатком наведено перелік використаної і рекомендованої авторами літератури, якої цілком достатньо не тільки для успішного розв’язання задач, а й для якісної підготовки добудь-яких форм контролю знань.

Курс «*Опір матеріалів*» вивчається в 4 - 5 семестрах студентами денної форми навчання, і в 5 семестрі студентами заочної форми навчання. За один семестр студенти стаціонару самостійно виконують 6 задач – по три до кожного модулю. На заочному відділенні задачі є допуском до екзамену, їх кількість визначається викладачем, але має становити не менше 6 задач.

## Питання курсу

1. Завдання курсу та його зв'язок з іншими дисциплінами.
2. Основні гіпотези про деформоване тіло.
3. Лінійні та кутові деформації та переміщення.
4. Пружність та пластичність. Твердість.
5. Поняття ізотропії та анізотропії.
6. Зовнішні сили, їх класифікація.
7. Метод перерізів. Внутрішні сили в перерізі.
8. Повна, нормальна і дотична напруги.
9. Поняття про напружений стан і його види.
10. Визначення елементів, які вивчаються в курсі.
11. Традиційні та нові матеріали, які застосовуються для конструкцій.
12. Закон Гука. Модуль пружності першого роду.
13. Зв'язок між поєдовжніми і поперечними деформаціями. Коефіцієнт Пуассона.
14. Діаграма напружень при розтягу сталі. Її характерні точки.
15. Діаграма напружень при стиску сталі. Її характерні точки.
16. Коефіцієнт запасу міцності. Підбір перерізів.
17. Врахування власної ваги. Бруси рівного опору розтягу і стиску.
18. Статично невизначувані задачі на розтяг або стиск.
19. Вплив температури та неточності виготовлення.
20. Розрахунок гнучкої ниті.
21. Напруження в похилих перерізах бруса (стержня) при лінійно-напруженому стані.
22. Напруження в похилих перерізах бруса (стержня) при плоско-напруженому стані.
23. Дослідження плоского напруженого стану за допомогою кругів Мору.
24. Максимальне дотичне напруження. Закон парності дотичних напруг.
25. Поняття про головні напруження.
26. Визначення лінійних деформацій для загального випадку напруженого стану.
27. Узагальнений закон Гука. Зміна об'єму тіла.
28. Загальні поняття про гіпотези міцності.
29. Перша, друга і третя класичні теорії міцності.
30. Теорія міцності Мора.
31. Поняття про нові теорії міцності.
32. Явища, що ускладнюють розрахунок на міцність: концентрація напруг, вплив температури на механічні властивості.
33. Статичний момент площі. Осьові, відцентрові і полярні моменти інерції. Радіуси інерції.
34. Залежності між моментами інерції для паралельних осей, їх зміна при повороті координатних осей.
35. Головні осі і моменти інерції, їх знаходження.
36. Моменти інерції складних профілів. Моменти опору.
37. Явища зсуву. Дотичні напруги.
38. Закон Гука для зсуву. Модуль зсуву.
39. Розрахунок на міцність при зсуві.
40. Розрахунок заклепочних з'єднань.
41. Розрахунок зварних з'єднань.
42. Гіпотези деформації кручення прямого бруса круглого поперечного перерізу.
43. Напруження в поперечному перерізі. Кут закручування.
44. Потенціальна енергія деформації при крученні.
45. Побудова епюр крутячих моментів та напружень.
46. Побудова епюри кутів закручування.
47. Статично невизначені задачі при крученні.
48. Опори і опорні реакції балки. Зовнішні сили, які викликають згин.
49. Внутрішні силові фактори у поперечних перерізах балки при згині.
50. Диференціальні залежності між згинаючим моментом, поперечною силою та інтенсивністю розподіленого навантаження.
51. Побудова епюр поперечних сил і згинаючих моментів.
52. Нормальні і дотичні напруження при чистому згині.
53. Головні напруження при згині. Раціональні перерізи балок.
54. Складні балки і балки змінного поперечного перерізу.
55. Прогини та кути повороту.
56. Диференціальне рівняння зігнутої осі балки.
57. Методи визначення деформацій балок при згині.
58. Балки однакового опору згину, їх деформації.
59. Потенціальна енергія при різних видах деформацій.
60. Теорема Кастильяно. Спосіб введення додаткової сили.
61. Теорема Максвела-Мора. Спосіб Верещагіна.
62. Теорема взаємності робіт і переміщень.
63. Статично невизначувані балки та рами. Вибір основної системи.
64. Кінематичний і структурний аналіз невизначуваної рами.
65. Теорема про три моменти та її застосування.

66. Метод сил та його застосування до розрахунку статично незначуваних балок та рам.
67. Косий згин, загальні відомості.
68. Одночасна дія згину і розтягу, чи стиску.
69. Позацентровий розтяг або стиск, ядро перерізу.
70. Одночасна дія згину і кручення, результуючі моменти. Побудова епюр.
71. Розрахунок валів, одночасно працюючих на згин і кручення.
72. Поняття про стійкість. Критична сила.
73. Формула Ейлера для критичної сили.
74. Гнучкість стержня та вплив способів закріплення на величину сили.
75. Розрахунок на стійкість стиснених стержнів.
76. Криві бруси, особливості їх розрахунку.
77. Динамічна дія навантажень. Врахування сил інерції при рівноприскореному русі.
78. Пружні коливання. Вільні і вимушені коливання.
79. Власні коливання систем з лінійним затуханням.
80. Частота і період коливань. Явище резонансу й його значення в техніці.
81. Критична кількість обертань валу.
82. Напруження при пружному ударі.
83. Розтягуючий, скручуючий та згинаючий удари.
84. Поняття про хвильову теорію удару.
85. Механічні властивості матеріалів при ударі.
86. Втомленість матеріалів.
87. Загальні характеристики циклу і межа втомлюваності.
88. Розрахунок матеріалів на витривалість.
89. Коефіцієнт запасу міцності при втомленості матеріалів, його визначення.
90. Поняття про малоциклову втомленість матеріалів.
91. Фактори, що впливають на втомленість матеріалів: концентрація напруг, масштабний ефект, якість обробки поверхні.
92. Загальні поняття механіки руйнування.
93. Крихке руйнування задача Гриффитса.
94. Історія створення і розвитку композиційних матеріалів.
95. Класифікація композиційних матеріалів.
96. Характеристики міцності односпрямованих композиційних матеріалів.
97. Переваги та недоліки сучасних композиційних матеріалів.

98. Визначення власних частот коливань пружних систем.
99. Поняття про чисельні методи розрахунку в опорі матеріалів.
100. Сучасні проблеми опору матеріалів.

## МОДУЛЬ 1

### 1. Розрахунок стержнів на розтяг і стиск

#### Теоретичні відомості

Поздовжня сила в довільному перетині стержня чисельно дорівнює алгебраїчній сумі проєкцій на його поздовжню вісь всіх зовнішніх сил, прикладених до залишеної частини:

$$N = \sum_{\text{частина}} P_i. \quad (1.1)$$

Вважається, що сила, яка розтягує - додатна, а яка стискує - від'ємна. У будь-якому перерізі стержня під дією поздовжніх сил виникає нормальне напруження, яка обчислюється за формулою:

$$\sigma = \frac{N}{F} \quad (1.2)$$

Якщо враховувати власну вагу стержня, то поздовжня сила на основі методу перерізів визначається по формулі:

$$N(x) = N + \gamma F x, \quad (1.3)$$

де  $F$  - площа поздовжнього перерізу;  $\gamma$  - питома вага,  $x$  - координата перерізу по довжині стержня від вільного кінця.

Максимальна поздовжня сила, вочевидь, буде рівна за  $x = l$ :

$$|N(x)|_{\max} = N + \gamma F l, \quad (1.4)$$

де  $l$  - довжина стержня.

Умова міцності має вигляд:

$$\sigma_{\max} = \frac{N}{F} \leq [\sigma], \quad (1.5)$$

а з урахуванням власної ваги

$$\sigma_{\max} = \frac{N}{F} + \gamma l \leq [\sigma], \quad (1.6)$$

де  $[\sigma]$  - напруження, що допускається для матеріалу, з якого виготовлений стержень. Тоді з умови міцності можна обчислити необхідну площу перерізу стержня:

$$F \geq \frac{N}{[\sigma]}, F \geq \frac{N}{[\sigma] - \gamma l}. \quad (1.7)$$

Якщо зовнішні сили відсутні, то умова міцності запишеться у вигляді:

$$\gamma l \leq [\sigma]. \quad (1.8)$$

Звідси гранична довжина, при якій стержень не повинен руйнуватися від дії власної ваги

$$l_{\text{до}} = \frac{[\sigma]}{\gamma}. \quad (1.9)$$

Переміщення будь-якого перерізу, що знаходиться на відстані  $x$  від вільного кінця стержня, до якого прикладена зовнішня сила  $P$ , з врахуванням власної ваги, визначається по формулі:

$$\lambda(x) = \int_x^l \frac{N(x)}{EF} dx = \int_x^l \frac{(P + \gamma F x)}{EF} dx = \frac{P(l-x)}{EF} + \frac{\gamma}{2E} (l^2 - x^2). \quad (1.10)$$

Якщо власну вагу не враховувати, то другий доданок в рівнянні (1.10) відкидають. В тому випадку, якщо сила  $P$  прикладена на якійсь відстані від кінця стержня, його розбивають на ділянки і переміщення обчислюють на кожній з ділянок.

Переміщення нижнього кінця стержня, дорівнюватиме повному подовженню стержня і визначиться формулою

$$\Delta l = \lambda(x)_{x=0} = \frac{Pl}{EF} + \frac{\gamma l^2}{2E}. \quad (1.11)$$

Якщо стержень був розбитий на ділянки, то повне подовження обчислюється як сума переміщень кожної ділянки

$$\Delta l = \sum_{i=1}^n \Delta l_i. \quad (1.12)$$

Умова жорсткості має вигляд

$$\Delta l \leq [\Delta l],$$

де  $[\Delta l]$  - подовження стержня, що допускається. Площу поперечного перерізу стержнів розраховують з умов міцності і жорсткості, а потім беруть найбільше значення.

#### Рекомендації до розв'язання задачі №1

При вирішенні завдань на розтяг-стиск стержнів необхідно мати на увазі наступне:

1. У будь-якому перерізі стержня (бруса) при розтягу чи стиску виникає лише один силовий чинник - поздовжня сила  $N$ , яка визначається методом перерізів.
2. Передбачається, що нормальне напруження по перерізу розподілена рівномірно і обчислюється за формулою (1.2).

- Для побудови епюр необхідно заздалегідь розбити стержень (брус) на ділянки, межі яких визначаються точками, де приложені сили чи змінюються розміри поперечного перерізу.
- При визначенні переміщення перерізів ступінчастих стержнів по формулі (1.10) слід враховувати, що площа  $F$  змінюється.
- Епюри переміщень з урахуванням власної ваги на ділянках мають квадратичний характер, а при дії на стержень (брус) лише зосереджених сил – лінійний.

Приклад розв'язання задачі №1

Побудувати епюри поздовжніх сил, нормальних напружень і переміщень для ступінчастого бруса (мал.1).

Розбиваємо брус на ділянки (мал.1, а) починаючи від вільного кінця. Будемо епюри поздовжніх сил (мал. 1, б) і нормальних напружень (мал. 1, в). Для цього, застосовуючи метод перерізів, залишаємо праву частину і відкидаємо ліву на кожній ділянці бруса. Це дозволяє не визначати реакцію в опорі. Маємо:

$$N_I = P_1 = P; \quad N_{II} = N_I;$$

$$N_{III} = P_1 - P_2 = P - 2P = -P; \quad N_{IV} = N_{III};$$

$$N_V = P_1 - P_2 + P_3 = P - 2P + 4P = 3P.$$

На кожній з ділянок визначимо нормальне напруження, підставляючи значення сил в ньютонгах, а площ в м<sup>2</sup>. Маємо:

$$\sigma_I = N_I / F_1 = P / 2F; \quad \sigma_{II} = N_{II} / F_2 = P / F;$$

$$\sigma_{III} = N_{III} / F_2 = -P / F; \quad \sigma_{IV} = N_{IV} / F_3 = -P / 2,5F;$$

$$\sigma_V = N_V / F_3 = 3P / 2,5F.$$

Для побудови епюри переміщень досить визначити переміщення перерізів, що співпадають з кордонами ділянок, оскільки між ними епюра лінійна.

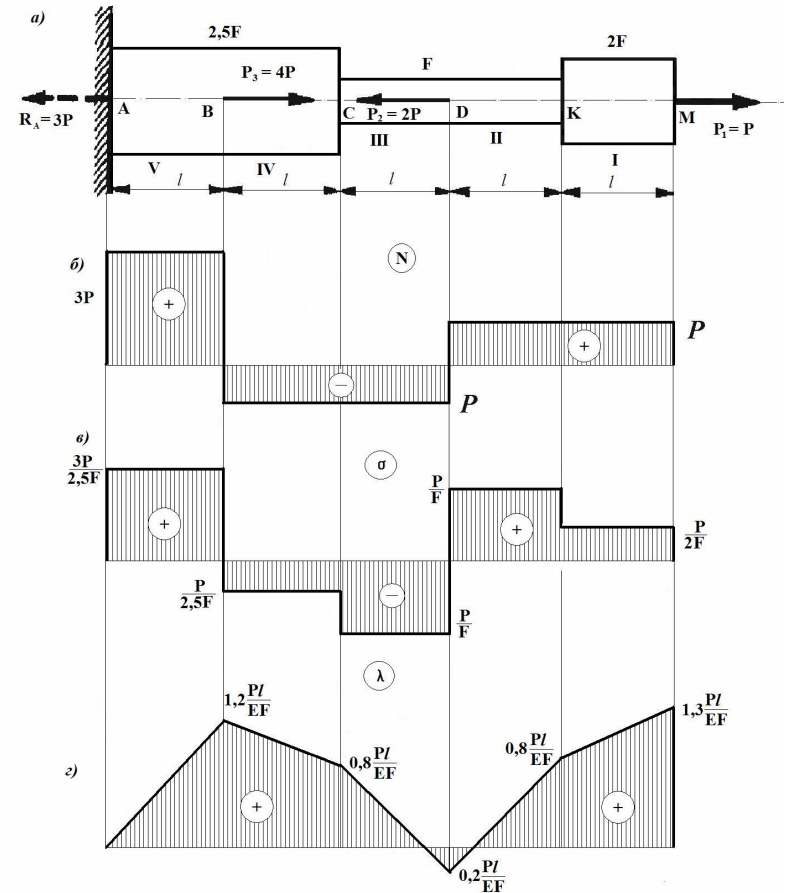
Переріз А не зміщується, тобто  $\lambda_A = 0$ .

Побудову епюр переміщень слід завжди починати від нерухомого або умовно прийнятого нерухомим перерізу.

Переміщення перерізу В дорівнює подовженню ділянки АВ (ділянки V) бруса:

$$\lambda_A = \Delta l_V = \frac{N_V l}{E \cdot 2,5F} = \frac{3Pl}{E \cdot 2,5F} = 1,2 \frac{Pl}{EF}.$$

Переріз В зміщується вправо. Відповідну ординату вважаємо додатною і відкладемо (у вибраному масштабі) вгору по осі епюри (мал. 1, г).



Мал.1. Побудова епюр  
Переміщення перерізу С дорівнює алгебраїчній сумі змін довжин ділянок V і IV бруса:

$$\lambda_C = \lambda_A + \Delta l_{IV} = 1,2 \frac{Pl}{EF} - \frac{Pl}{E \cdot 2,5F} = 0,8 \frac{Pl}{EF}.$$

Аналогічно

$$\lambda_D = \lambda_C + \Delta l_{III} = 0,8 \frac{Pl}{EF} - \frac{Pl}{EF} = -0,2 \frac{Pl}{EF}.$$

Знак мінус вказує, що переріз D переміщується вліво (оскільки раніше було прийнято рахувати переміщення вправо додатним). Далі

$$\lambda_K = \lambda_D + \Delta l_{II} = -0,2 \frac{Pl}{EF} + \frac{Pl}{EF} = 0,8 \frac{Pl}{EF};$$

$$\lambda_M = \lambda_K + \Delta l_I = 0,8 \frac{Pl}{EF} + \frac{Pl}{E2F} = 1,3 \frac{Pl}{EF}.$$

Будуємо епюру переміщень (мал. 1, г).

### Контрольне завдання № 1

Таблиця №1

№	Зусилля в точці, кН						Довжини ділянок стержня, м						Діаметри стержня, м			№ схеми
	P <sub>A</sub>	P <sub>B</sub>	P <sub>C</sub>	P <sub>D</sub>	P <sub>E</sub>	P <sub>F</sub>	a	b	c	d	e	f	D <sub>1</sub>	D <sub>2</sub>	D <sub>3</sub>	
1	100	-200		-300			1	3	2	2	1	1	0,5	0,7	1	1
2	-100	200		300			1	2	1	3	1	3	0,5	0,7	1	2
3	-100	-200		300			2	1	1	3	1	2	0,5	0,7	1	1
4	-100	200		-300			2	1	1	3	1	2	0,5	0,7	1	2
5	-100	-300		200			2	1	1	3	1	2	0,7	0,5	1	1
6		100	200			-400	2	1	1	3	1	2	0,7	0,5	1	2
7		100	300			-300	2	1	1	3	1	2	0,7	0,5	1	1
8		-100	200			-300	1	3	1	3	1	2	0,7	0,5	1	2
9		100	200			-300	1	3	1	2	1	2	1	0,7	0,5	1
10		-100	200			300	1	3	1	2	1	2	1	0,7	0,5	2
11		-100	200			-300	1	3	1	2	1	2	1	0,7	0,5	1
12		-100	200			-300	1	3	1	2	1	2	1	0,7	0,5	2
13		-100	200			300	2	1	2	1	1	2	0,5	1	0,7	1
14	300			100	200		2	1	2	1	1	2	0,5	1	0,7	2
15	300			100	-200		2	1	2	1	1	2	0,5	1	0,7	1
16	-300			100	200		3	1	2	1	1	3	0,5	1	0,7	2
17	-300			100	-200		2	1	2	1	1	2	0,7	0,5	1	1
18	300			-100	200		2	2	2	1	1	3	0,7	0,5	1	2
19	300			-100	-200		2	2	2	1	1	3	0,7	0,5	1	1
20	-300			-100	200		2	2	1	1	1	3	0,7	0,5	1	2
21	-300			-100	-200		2	2	1	1	1	3	1	0,7	0,5	1
22			100	200		-300	2	2	2	1	1	3	1	0,7	0,5	2
23			100	-200		300	1	3	1	2	2	1	1	0,7	0,5	1
24			100	300		-200	1	3	1	3	1	2	1	0,7	0,5	2
25			100	-200		-300	1	3	1	3	1	2	1	0,5	0,7	1
26			100	-200		300	2	1	2	3	1	2	1	0,5	0,7	2
27			200	-300		100	2	1	2	3	1	2	1	0,5	0,7	1
28			200	-300		-300	1	3	1	2	2	2	1	0,5	0,7	2
29			200	-200		300	1	3	1	2	1	2	0,7	1	0,5	1
30			200		300	-200	1	3	1	2	2	1	0,7	1	0,5	2

Виконати розрахунок стержня від дії зосереджених сил, якщо модуль пружності стержня  $E = 2,2 \cdot 10^5$  МПа, щільність  $\gamma = 7,8 \cdot 10^4$  Н/м<sup>3</sup>:

- а) без урахування власної ваги стержня;
- б) з урахуванням власної ваги при постійному діаметром  $D_2$  стержня.

Розв'язання задачі виконати в наступній послідовності:

1. Накреслити стержень в масштабі по заданих розмірах і докласти зусилля у вказаних точках (додатними вважати значення зусиль що розтягують, від'ємними - що стискають);
2. Побудувати епюру поздовжніх сил;
3. Побудувати епюру нормального напруження;
4. Побудувати епюру переміщень поперечних перерізів;
5. Оцінити міцність стержня на розтяг і стиск.

Напруга, що допускається на розтяг  $[\sigma_p] = 160$  МПа, на стиск  $[\sigma_{ст}] = 100$  МПа. Дані узяті з таблиці 1.

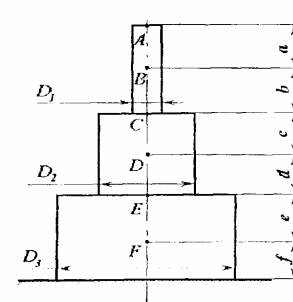


Схема 1

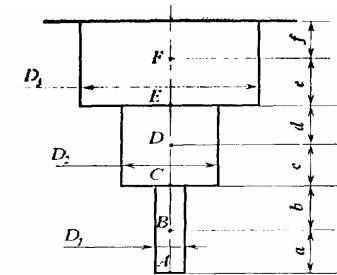


Схема 2

### Контрольні питання

1. Як виглядає умова міцності при деформації розтягу-стиску, які завдання вона вирішує?
2. Що станеться з конструкцією при порушенні умови міцності?
3. В чому полягає суть коефіцієнту запасу міцності.
4. Для чого використовують метод перерізу в стержнях.
5. Яким чином обчислюється поздовжня сила, нормальне напруження і деформація?
6. Залежно від яких чинників стержень ділиться на ділянки?

## 2. Статично невизначні конструкції

### Теоретичні відомості

Статично невизначними називаються конструкції, в елементах яких зусилля не можуть бути визначені тільки з рівнянь статики. Окрім рівнянь статики при вирішенні статично невизначних завдань необхідно використовувати також рівняння, що враховують деформації елементів конструкцій.

Всі статично невизначні конструкції мають так звані зайві зв'язки. «Зайвими» такі зв'язки називаються тому, що вони не є необхідними для забезпечення рівноваги конструкції і її геометричної незмінності, а обумовлені вимогами до міцності і жорсткості конструкції. Кількість зайвих невідомих, або міра статичної невизначності системи являє собою різницю між числом невідомих, що підлягають визначенню, і числом рівнянь статики.

При розрахунку статично невизначних конструкцій на міцність використовується нерівність:

$$\sigma_{\max} \leq [\sigma] = \frac{\sigma_{\text{ад}}}{i},$$

де  $[\sigma]$  - напруга, що допускається,  $\sigma_{\text{сп}}$  - гранична напруга,  $[n]$  - нормативний коефіцієнт запасу міцності.

Умова жорсткості, як і в разі розрахунку статично визначних конструкцій, має вигляд

$$\Delta l \leq [\Delta l]$$

Згідно умовам міцності і жорсткості виділяють задачі трьох типів:

- 1) підбір параметрів стержня, які забезпечать роботу при заданих навантаженнях;
- 2) перевірка існуючої конструкції на міцність і жорсткість;
- 3) визначення допустимих напружень за заданим коефіцієнтом запасу.

### Рекомендації до розв'язання задачі №2

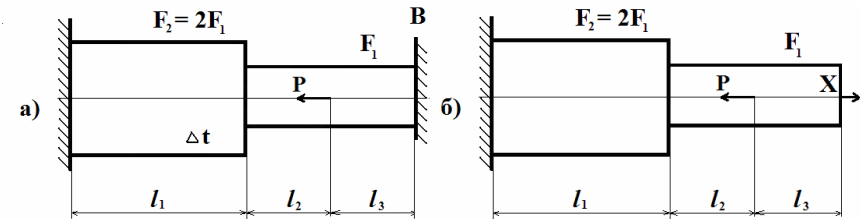
1. Знаходять міру статичної невизначності  $n$ .
2. Складають рівняння рівноваги відсічених елементів конструкції, що містять невідомі зусилля (статична сторона завдання).
3. Встановлюють зв'язок між деформаціями окремих елементів конструкції, виходячи з умов спільності деформацій. Отримані рівняння називаються рівняннями сумісності деформацій (геометрична сторона завдання).
4. У рівняннях сумісності виражають деформації елементів із закону Гука через невідомі зусилля, що діють в них (фізична сторона завдання).
5. Вирішують спільно отримані рівняння відносно шуканих невідомих зусиль (задача синтезу).

### Приклад розв'язання задачі №2

Для стержня ступінчастого поперечного перерізу, закладеного по кінцях (мал. 2,а), перевірити міцність:

- 1) з урахуванням силового навантаження силою  $P = 6 \text{ кН}$ ;
  - 2) при охолодженні стержня на  $10^\circ\text{C}$  за умови, що сила відсутня.
- Прийняти  $F_1 = 10 \text{ см}^2$ ,  $l_1 = 4 \text{ м}$ ,  $l_2 = 2 \text{ м}$ ,  $l_3 = 2 \text{ м}$ ,  $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$ , коефіцієнт теплопровідності  $\alpha = 10 \cdot 10^{-6} \text{ град}^{-1}$ , допустиме напруження  $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$ .

- 1). Дана система є один раз статично невизначною: дві реакції в точках А і В і одне рівняння статики.



Мал. 2.а. Статично невизначувана система

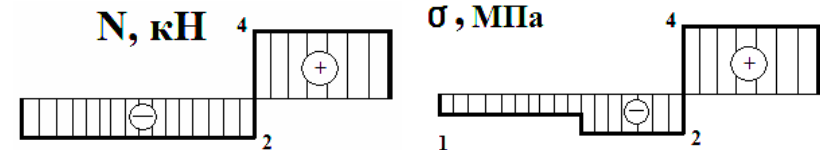
Мал. 2.б. Основна система

Виберемо основну систему, відкинувши закладення В, замінивши його вплив силою  $X$  (мал. 2,б). Умова еквівалентності систем

$$\Delta l_B = 0.$$

З іншого боку

$$\Delta l_B = \frac{Xl_1}{2EF_1} + \frac{X(l_2 + l_3)}{EF_1} - \frac{Pl_1}{2EF_1} - \frac{Pl_2}{EF_1}.$$



Мал. 3а. Епюра поздовжніх сил

Мал. 3б. Епюра нормальних напружень

Підставивши перше рівняння в друге, знаходимо невідому силу

$$X = \frac{P(l_1 + 2l_2)}{(l_1 + 2l_2 + 2l_3)} = \frac{6 \cdot (4 + 2 \cdot 2)}{(4 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2)} = 4(\text{кН}).$$

Розбиваємо конструкцію на три ділянки і визначаємо

$$N_1 = N_2 = -6 \text{ кН} + 4 \text{ кН} = -2 \text{ кН}, N_3 = 4 \text{ кН}.$$



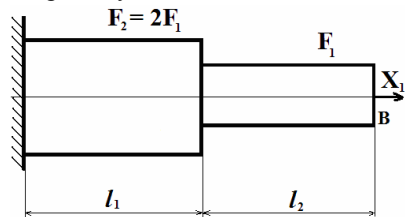
Тепер будемо епюру поздовжніх сил  $N$  (мал. 3,а). Далі знаходимо напруження в перерізах стержня

$$\sigma_1 = -\frac{2 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^{-3}} = -1 \ddot{I} \ddot{a} \quad ,$$

$$\sigma_2 = -\frac{2 \cdot 10^3}{10^{-3}} = -2 \ddot{I} \ddot{a} \quad , \quad \sigma_3 = \frac{4 \cdot 10^3}{10^{-3}} = 4 \ddot{I} \ddot{a} \quad .$$

За отриманими результатами будемо епюру нормальних напружень (мал. 3,б). Найбільше напруження виявилось менше допустимого  $[\sigma] = 160$  МПа. Отже, міцність стержня забезпечена.

2). При розв'язанні температурної задачі виберемо основну систему, зображену на мал. 4. Умова еквівалентності систем



Мал. 4. Основна система

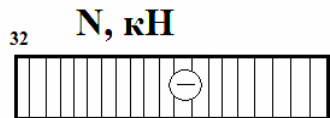
$$\Delta l_B = 0.$$

З іншого боку переміщення точки В повинне складатися з температурного подовження і подовження за рахунок деформації від сили  $X_1$ .

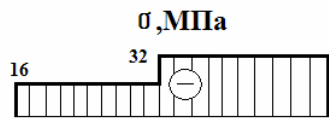
$$\Delta l_A = \Delta l_t + \Delta l_x = \alpha(l_1 + l_2 + l_3)\Delta t + \frac{X_1 l_1}{2EF_1} + \frac{X_1(l_2 + l_3)}{EF_1} = 0,096 + X_1 \cdot 1 \cdot 10^{-3} + X_1 \cdot 2 \cdot 10^{-3} = 0 \Rightarrow \tilde{O}_1 = -32(\dot{e} \dot{I} \dot{a}).$$

Розбиваємо стержень на дві ділянки в місцях зміни поперечного перерізу. На кожній із ділянок поздовжня сила

$$N_1 = N_2 = X_1 = -32(\dot{e} \dot{I} \dot{a}).$$



Мал. 5а. Епюра поздовжніх сил



Мал. 5б. Епюра нормальних напружень

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{2F_1} = \frac{-32 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^{-3}} = -16 \ddot{I} \ddot{a} \quad , \quad \sigma_2 = \frac{N_2}{F_1} = \frac{-32 \cdot 10^3}{10^{-3}} = -32 \ddot{I} \ddot{a} \quad .$$

За результатами розрахунків будемо епюру  $N$  і  $\sigma$  (мал. 5,а і б).

Найбільше напруження виявилось менше допустимого  $[\sigma] = 160$  МПа. Отже, міцність стержня забезпечена.

### Контрольне завдання № 2

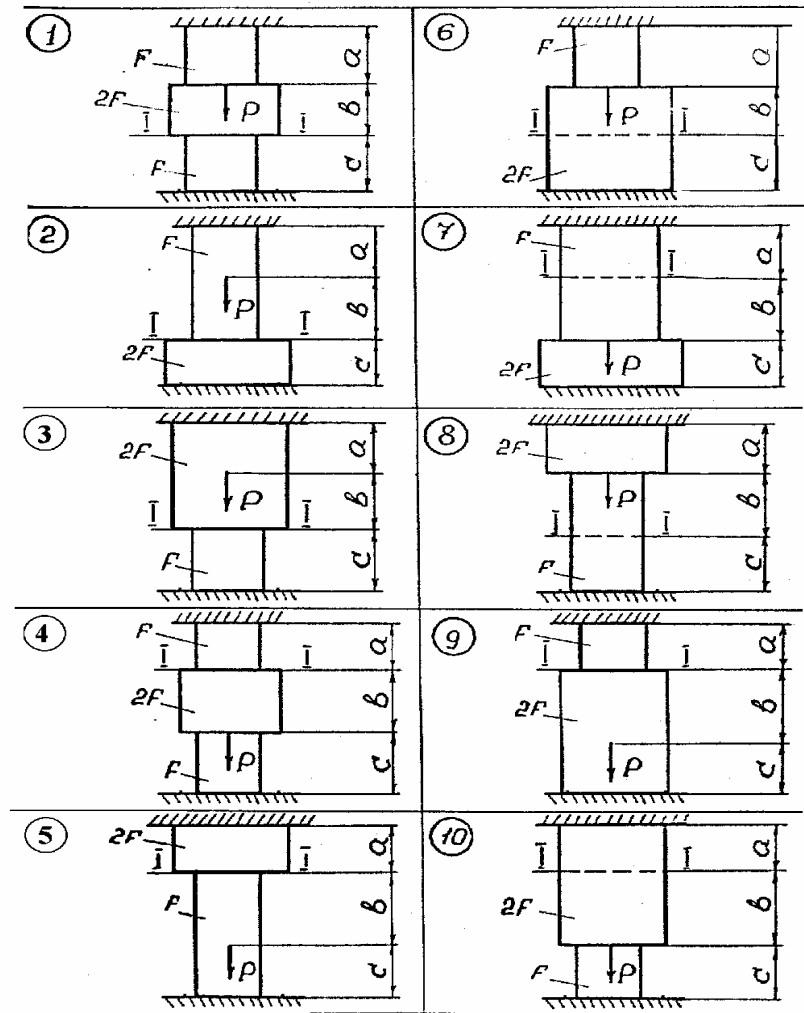
Для заданої схеми вантаження стержня потрібно:

1. Побудувати епюру поздовжніх сил  $N$ , напружень  $\sigma$  і переміщень  $\lambda$  від дії зосередженої сили  $P$ .
2. Побудувати епюру поздовжніх сил, напружень і переміщень, якщо брус нагрівається на  $\Delta T$  градусів за відсутності сили  $P$ .

Коефіцієнт лінійного розширення  $\alpha = 12 \cdot 10^{-6} / \text{град}$ , модуль пружності  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа. Дані узяті з таблиці 2.

Таблиця 2.

№ варіанту	№ схеми (мал. 6)	$F, \text{см}^2$	$a, \text{м}$	$b, \text{м}$	$c, \text{м}$	$\Delta T, \text{град}$	$P, \text{Н}$
1	1	11	2,1	1,2	2,0	15	1000
2	2	12	2,2	1,3	2,1	20	1100
3	3	13	2,3	1,4	2,2	25	1200
4	4	14	2,4	1,5	2,3	30	1300
5	5	15	2,5	1,6	2,4	35	1400
6	6	16	2,6	1,7	2,5	40	1500
7	7	17	2,7	1,8	2,6	45	1600
8	8	18	2,8	1,9	2,0	50	1700
9	9	19	2,9	2,0	1,9	55	1800
10	10	20	3,0	1,1	1,8	60	1900
11	1	10	1,9	1,3	1,7	65	1050
12	2	12	2,1	1,5	1,6	70	1150
13	3	14	2,2	1,6	1,5	75	1250
14	4	16	2,3	1,4	1,4	80	1350
15	5	18	2,4	1,7	1,3	85	1450
16	6	20	2,5	1,2	1,2	90	1550
17	7	22	2,6	1,8	2,1	95	1650
18	8	11	1,7	1,7	1,2	100	1100
19	9	13	1,8	1,5	1,8	105	1200
20	10	15	2,0	1,8	1,4	110	1300
21	1	17	2,4	1,3	1,2	115	1400
22	2	19	2,5	1,5	1,3	120	1500
23	3	21	2,6	1,6	1,5	125	2000
24	4	10	1,7	1,2	1,6	130	1000
25	5	11	1,8	1,8	1,7	135	1100
26	6	12	1,9	1,9	1,8	140	1250
27	7	13	2,1	2,0	1,9	145	1350
28	8	14	2,3	1,3	2,1	150	1450
29	9	15	2,4	1,4	1,2	155	1500
30	10	16	2,6	1,5	1,4	160	1400



Мал. 6. Схеми до задачі 2

Контрольні питання.

1. Які системи називаються статично невизначеними?
2. Що таке умова спільності деформацій і як вона формулюється?
3. Запишіть умови міцності і жорсткості.
4. Що таке коефіцієнт запасу міцності?

### 3. Геометричні характеристики плоских перерізів

#### Теоретичні відомості

Статичним моментом плоского перерізу відносно осі  $Ox$  називається узята за всією площею перерізу сума добутоків площ елементарних ділянок на їх відстань до цієї осі, тобто

$$S_x = \int_F y dF. \quad (3.1)$$

Аналогічно, статичний момент перерізу відносно осі  $Oy$

$$S_y = \int_F x dF. \quad (3.2)$$

Статичний момент має розмірність  $\text{мм}^3, \text{см}^3, \text{м}^3$ .

Залежно від положення осі, відносно якої обчислюється статичний момент, він може бути додатним, від'ємним або рівним нулю. При відомих статичних моментах і площі перерізу координати його центру тяжіння визначаються по формулах

$$\left. \begin{aligned} x_C &= S_y / F; \\ y_C &= S_x / F. \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

В разі відомих координат центру тяжіння статичні моменти визначають за формулами

$$\left. \begin{aligned} S_x &= Fy_C; \\ S_y &= Fx_C. \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

У тих випадках, коли переріз може бути розбитий на прості складові частини, площі і координати центрів тяжіння яких відомі, положення центру тяжіння всього перерізу визначають по формулах

$$x_{\bar{N}} = \frac{F_1x_1 + F_2x_2 + \dots + F_ix_i}{F_1 + F_2 + \dots + F_i}; \quad y_{\bar{N}} = \frac{F_1y_1 + F_2y_2 + \dots + F_iy_i}{F_1 + F_2 + \dots + F_i}, \quad (3.5)$$

де  $F_1, F_2, \dots, F_i$  – площі окремих частин перерізу, а  $x_1, x_2, \dots, x_i$  и  $y_1, y_2, \dots, y_i$  – координати центрів тяжіння кожної частини.

Осьовим моментом інерції плоского перерізу відносно даної осі  $Ox$  називається інтеграл добутоків елементарних площ на квадрати їх відстаней до цієї осі

$$J_x = \int_F y^2 dF. \quad (3.6)$$

Аналогічно, момент інерції відносно осі

$$J_Y = \int_F x^2 dF. \quad (3.7)$$

Сума осьових моментів інерції відносно двох взаємно перпендикулярних осей дорівнює полярному моменту інерції відносно початку координат.

$$J_p = J_X + J_O. \quad (3.8)$$

Відцентровим моментом інерції плоского перерізу називається інтеграл добутків елементарних площ на їх відстані до двох даних взаємно перпендикулярних осей

$$J_{XY} = \int_F yx dF. \quad (3.9)$$

В процесі повороту осей відцентровий момент інерції змінюється безперервно, а при деякому положенні осей він стає рівним нулю. Якщо осі проходять через центр тяжіння перерізу, то вони називаються *центральною осями*. Якщо відцентровий момент інерції відносно цих осей дорівнює нулю, то вони називаються *головними центральними осями* і позначаються  $u$  і  $v$ . Осьовий і відцентровий моменти інерції мають розмірність  $\text{мм}^4$ ,  $\text{см}^4$ ,  $\text{м}^4$ .

Осьові моменти інерції відносно осей, що паралельні до головних

$$J_{X_1} = J_X + a^2 F, \quad J_{Y_1} = J_Y + b^2 F. \quad (3.10)$$

Відцентровий момент інерції відносно осей, що паралельні до головних

$$J_{X_1 Y_1} = J_{XY} + abF, \quad (3.11)$$

де  $a$ ,  $b$  – відстані від головних осей до паралельних.

При повороті центральних осей на кут  $\alpha$ , який вважається додатним проти ходу годинникової стрілки, осьові і відцентрові моменти інерції набувають наступного вигляду:

$$J_{X_1} = J_X \cos^2 \alpha + J_Y \sin^2 \alpha - J_{XY} \sin 2\alpha, \quad (3.12)$$

$$J_{Y_1} = J_X \sin^2 \alpha + J_Y \cos^2 \alpha + J_{XY} \sin 2\alpha, \quad (3.13)$$

$$J_{X_1 Y_1} = -\frac{J_Y - J_X}{2} \sin 2\alpha + J_{XY} \cos 2\alpha. \quad (3.14)$$

Кут нахилу головних центральних осей ( $u$ ,  $v$ ) по відношенню до центральних осей ( $x$ ,  $y$ ) позначають  $\alpha_0$  і його можна отримати, якщо прийняти праву частину рівняння (3.14) такою, що дорівнює нулю:

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2J_{XY}}{J_Y - J_X}. \quad (3.15)$$

Головні центральні моменти інерції відносно головних центральних осей набувають екстремальних значень, величину яких можна обчислити, підставивши  $\alpha_0$  з (3.15) в рівняння (3.12) і (3.13):

$$J_{u,v} = J_{\min} = \frac{1}{2} \left[ (J_Y + J_X) \pm \sqrt{(J_Y - J_X)^2 + 4J_{XY}^2} \right].$$

### Рекомендації до розв'язання задачі №3

1. Переріз необхідно викреслити в масштабі 1:2, вказати всі розміри і осі.
2. При розв'язанні задачі, якщо переріз складний, його розбивають на прості складові частини.
3. Випадкові осі для складного перерізу доцільно проводити так, щоб усі часті складного перерізу мали додатні координати і при цьому, по можливості, торкалися сторін фігури.
4. Користуючись сортаментами (табл. 3 і 4 Додатку), необхідно правильно вибирати значення осьових і відцентрових моментів інерції. Для рівнобокого кутика значення відцентрового моменту інерції обчислюється за формулою:

$$J_{XY} = \frac{J_{\max} - J_{\min}}{2}$$

5. Слід мати на увазі, що вісь «min» пересікає значно більшу частину площі перерізу, чим вісь «max». Також, якщо  $J_{XY} < 0$ , то вісь проходить через I і III квадрати, а якщо  $J_{XY} > 0$ , то через II і IV.

### Приклад розв'язання задачі №3

Для заданого таврового перерізу (мал. 7) визначити координати центра тяжіння, знайти осьові і відцентрові моменти інерції відносно випадкових осей, головні центральні моменти інерції.

Введемо випадкові осі  $u$  і  $v$  як показано на мал.7.

1. Визначаємо координати центра тяжіння фігури.

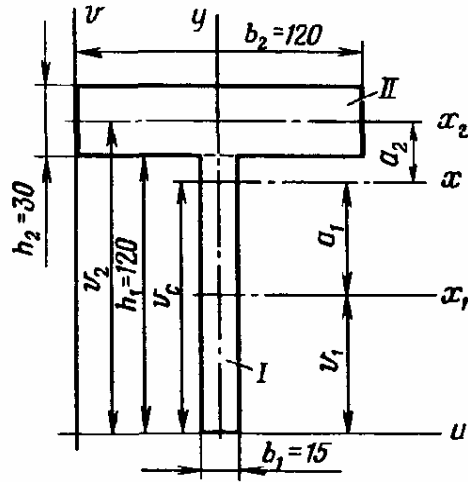
Якщо фігура має вісь симетрії, то координата центру тяжіння обов'язково знаходиться на ній. В даному випадку координату  $u_C$  можна визначити візуально з малюнка, вона рівна  $u_C = 6$  см. Для визначення координати  $v_C$  розіб'ємо переріз на два прямокутники I і II, після чого визначимо центри тяжіння окремих частин і їх площі:

$$F_1 = 1,5 \cdot 12 = 18(\tilde{n}\tilde{i}^2), \quad F_2 = 3 \cdot 12 = 36(\tilde{n}\tilde{i}^2), \quad v_1 = 6 \tilde{n}\tilde{i}, \quad v_2 = 13,5 \tilde{n}\tilde{i}.$$

Знаходимо другу координату центра тяжіння фігури

$$v_N = \frac{F_1 v_1 + F_2 v_2}{F_1 + F_2} = \frac{18 \cdot 6 + 36 \cdot 13,5}{18 + 36} = 11 \tilde{n}\tilde{i},$$

де  $v_1$  і  $v_2$  - відстань від осі  $u$  до центру тяжіння прямокутників. Через отриманий центр тяжіння фігури (6; 11) проводимо осі  $x$  і  $y$  - головні центральні осі перетину.



Мал. 7. Тавровий переріз

Обчислюємо моменти інерції кожного з прямокутників відносно власних центральних осей:

$$J_{x_1}^I = b_1 h_1^3 / 12 = 1,5 \cdot 12^3 / 12 = 216 \tilde{n}\tilde{i}^4;$$

$$J_{o_1}^I = h_1 b_1^3 / 12 = 12 \cdot 1,5^3 / 12 = 3,38 \tilde{n}\tilde{i}^4;$$

$$J_{x_2}^{II} = b_2 h_2^3 / 12 = 12 \cdot 3^3 / 12 = 27 \tilde{n}\tilde{i}^4;$$

$$J_{o_2}^{II} = h_2 b_2^3 / 12 = 3 \cdot 12^3 / 12 = 437 \tilde{n}\tilde{i}^4.$$

Обчислимо моменти інерції кожного з прямокутників відносно головної осі  $x$ . Для прямокутника I:

$$a_1 = v_c - v_1 = 11 - 6 = 5 \tilde{n}\tilde{i},$$

$$J_x^I = J_{x_1}^I + a_1^2 F_1 = 216 + 5^2 \cdot 12 \cdot 1,5 = 666 \tilde{n}\tilde{i}^4.$$

Для прямокутника II:  $a_2 = v_2 - v_c = 13,5 - 11 = 2,5 \tilde{n}\tilde{i};$

$$J_x^{II} = J_{x_2}^{II} + a_2^2 F_2 = 27 + 2,5^2 \cdot 12 \cdot 3 = 252 \tilde{n}\tilde{i}^4.$$

Обчислюємо головні моменти інерції перерізу:

$$J_x = J_x^I + J_x^{II} = 666 + 252 = 918 \text{ см}^4;$$

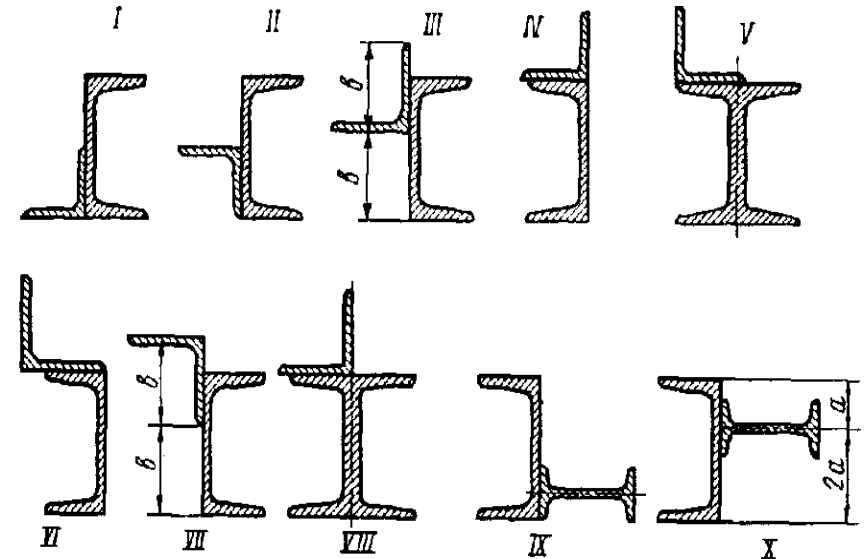
$$J_o = J_o^I + J_o^{II} = 3,38 + 437 = 440,38 \tilde{n}\tilde{i}^4.$$

Головна вісь  $Oy$  збігається з центральними осями частин фігури, тому при обчисленні не знадобилося використовувати залежність між моментами інерції відносно паралельних осей.

### Контрольне завдання №3

Для заданого поперечного перерізу, що складається з двох стандартних перерізів сортаменту (мал. 8, табл. 3), потрібно:

- 1) Визначити положення центру тяжіння;
- 2) Знайти осьові і відцентрові моменти інерції відносно випадкових осей ( $u$  і  $v$ ), що проходять через центр тяжіння;
- 3) Визначити напрям головних центральних осей ( $x$  і  $y$ );
- 4) Знайти моменти інерції відносно головних центральних осей;
- 5) Викреслити перетин в масштабі 1:2 і вказати всі розміри і осі.



Мал. 8. Стандартні профілі

Таблиця 3

№ варіанту	Тип перерізу за мал. 8	Швелер	Рівнобокий куттик	Двутавр
1	I	36	125×125×12	-
2	II	33	125×125×10	-
3	III	30	100×100×12	-
4	IV	27	100×100×10	-
5	V	-	100×100×8	20
6	VI	22	90×90×10	-
7	VII	20	90×90×7	-
8	VIII	-	90×90×8	16
9	IX	16	-	14
10	X	14	-	12
11	I	14	80×80×8	-
12	II	16	80×80×8	-
13	III	18	90×90×8	-
14	IV	20	90×90×8	-
15	V	-	90×90×10	18
16	VI	24	100×100×8	-
17	VII	27	100×100×10	-
18	VIII	-	100×100×12	22
19	IX	33	-	24a
20	X	36	-	24
21	I	30	100×100×10	-
22	II	27	100×100×8	-
23	III	22	90×90×8	-
24	IV	20	90×90×10	-
25	V	-	80×80×8	14
26	VI	16	80×80×8	-
27	VII	24	100×100×8	-
28	VIII	-	100×100×12	22a
29	IX	33	-	24
30	X	12	-	10

Контрольні питання.

1. Яка залежність між осьовими і полярними моментами інерції?
2. Дайте визначення головним центральним осям інерції перерізу?

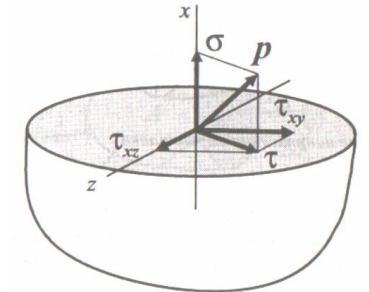
3. Як встановити правильність визначення знаку відцентрового моменту інерції перерізу, несиметричного відносно його центральних осей?

## МОДУЛЬ 2

### 4. Плоский напружений стан

#### Теоретичні відомості

*Напруження* – міра інтенсивності внутрішніх сил, розподілених по перерізу, чисельно рівна зусиллю, віднесеному до одиниці площі перерізу. Одиницею напруження є Паскаль (Па).

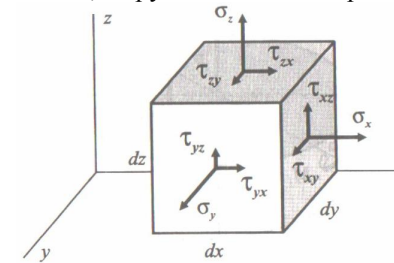


Мал. 9. Розкладання вектора повного напруження

У кожній точці перерізу повне напруження  $P$  можна розкласти на нормальне напруження  $\sigma$ , перпендикулярне площині перерізу, і дотичне  $\tau$ , що лежить в площині перерізу (мал. 9). Для зручності  $\tau$  розкладають на дві складових, напрямки яких паралельні координатним осям.

Нормальному напруженню надається індекс, що показує, якій координатній осі це напруження паралельне. У позначенні дотичного напруження перший індекс вказує, якій осі перпендикулярна дана площинка, а другий – якій осі паралельне дане напруження.

Нормальне напруження, що розтягує, вважається додатним, а що стискає – від'ємним. Таке напруження виникає при спробах атак матеріалу віддалитися або зблизитися одна з одною. Дотичне напруження пов'язане із зсувом часток матеріалу в площині перерізу.



Мал. 10. Система напружень в точці

*Напружений стан* – сукупність нормальних і дотичних напружень, що діють по всіх площинках, які проходять через вибрану точку тіла. Щоб дослідити напружений стан тіла в певній точці, виділяють з цього тіла безмежно малий елемент так, щоб дана точка була розміщена всередині цього елемента. Елемент орієнтують таким чином, щоб його сторони були паралельні до вибраних координатних осей (мал. 10).

Напружений стан у будь-якій точці може вважатися відомим якщо заданий тензор напружень  $\{\sigma\}$ , який являє собою матрицю напружень:

$$\{\sigma\} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix}$$

Тензор напружень позбавлений фізичного змісту, такий зміст мають лише його компоненти. Певні комбінації компонент тензора напружень є інваріантними відносно вибору системи координат (не залежать від вибору системи). Тому інваріанти є основними характеристиками напруженого стану в точці.

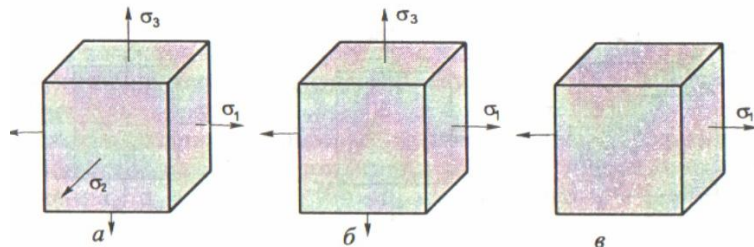
**Закон парності дотичних напружень:** складові дотичних напружень на двох взаємно перпендикулярних площинках, що перпендикулярні спільному ребру, рівні по величині і протилежні по знаку, тобто обидві направлені або до ребра, або від нього:

$$|\tau_{\delta\delta}| = |\tau_{yx}|; |\tau_{\delta z}| = |\tau_{zx}|; |\tau_{yz}| = |\tau_{zy}|.$$

Таким чином, напружений стан в точці можна вважати заданим, якщо відомо шість складових напружень на трьох взаємно перпендикулярних площинках.

**Головні площинки** – площинки, на яких дотичні напруження дорівнюють нулеві.

**Головні напруження** – нормальні напруження, що діють на головних площинках. Залежно від того, скільки головних напружень відмінні від нуля, відрізняють об'ємний (мал. 11, а), плоский (мал. 11, б) і лінійний напружені стани.



Мал. 11. Види напруженого стану.

**Плоский напружений стан** – виникає тоді, коли одна із трьох компонент головних напружень дорівнює нулеві.

Задачі аналізу плоского напруженого стану:

1. Пряма – за відомими головними напруженнями визначити нормальні й дотичні напруження, що виникають на заданій площинці.
2. Обернена – за відомими нормальними й дотичними напруженнями, що виникають на довільних перпендикулярних площинках, знайти положення головних площинок і визначити величину головних напружень.

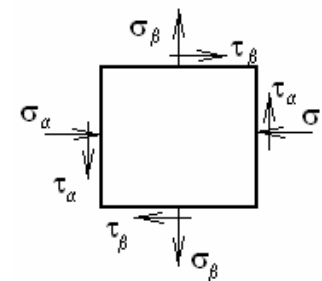
Рекомендації до розв'язання задачі №4

При розв'язанні задачі треба обов'язково дотримуватися правила знаків:

- нормальне напруження є додатним в тому випадку, коли воно викликає розтяг;
- дотичне напруження вважають додатним, якщо воно намагається повернути частину елемента, що розглядається, відносно будь-якої точки всередині неї, за годинниковою стрілкою.

Приклад розв'язання задачі №4

Сталевий кубик (мал. 12) знаходиться під дією сил, що створюють плоский напружений стан (один з трьох компонентів головного напруження дорівнює нулю). Потрібно знайти:



- головні напруження і напрям головних площинок;
- максимальні дотичні напруження, що дорівнюють більшій половині різниці головних напружень;
- відносні деформації  $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$ ;
- відносну зміну об'єму;
- питому потенційну енергію деформації.

Мал. 12. Плоский напружений стан

Вихідні дані:  $\sigma_\alpha = 300$  МПа,  $\sigma_\beta = 300$  МПа,  $\tau_\alpha = \tau_\beta = 300$  МПа,  $\mu = 0,3$ ,  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа.

1) Визначаємо головні напруження і напрям головних площинок. Згідно малюнка:  $\sigma_\alpha = -300$  МПа,  $\sigma_\beta = 300$  МПа,  $\tau_\alpha = -300$  МПа,  $\tau_\beta = 300$  МПа.

По формулі

$$\sigma_{1,3} = \frac{1}{2} \left[ \sigma_\alpha + \sigma_\beta \pm \sqrt{(\sigma_\alpha - \sigma_\beta)^2 + 4\tau_\alpha^2} \right]$$

знаходимо

$$\sigma_1 = \frac{1}{2} \left[ -300 + 300 + \sqrt{(-300 - 300)^2 + 4 \cdot (-300)^2} \right] = 424,3 \text{ МПа} ,$$

$$\sigma_3 = \frac{1}{2} \left[ -300 + 300 - \sqrt{(-300 - 300)^2 + 4 \cdot (-300)^2} \right] = -424,3 \text{ МПа} .$$

2) Максимальні дотичні напруження

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_3) = \frac{1}{2} (424,3 + 424,3) = 424,3 \text{ МПа} .$$

3) Находим относительные деформации

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{A} (\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)) = \frac{1}{2 \cdot 10^5} (424,3 - 0,3 \cdot (-424,3)) = 276 \cdot 10^{-5} ,$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{A} (\sigma_2 - \mu(\sigma_3 + \sigma_1)) = \frac{1}{2 \cdot 10^5} (0 - 0,3 \cdot (-424,3 + 424,3)) = 0 ,$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{A} (\sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2)) = \frac{1}{2 \cdot 10^5} (-424,3 - 0,3 \cdot (424,3 + 0)) = -276 \cdot 10^{-5} .$$

4) Относительное изменение объема

$$\varepsilon_V = \frac{1 - 2\mu}{E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \frac{1 - 2 \cdot 0,3}{2 \cdot 10^5} (424,3 + 0 + 424,3) = 0 .$$

5) Удельная потенциальная энергия деформации:

$$\dot{e} = \frac{1}{2A} \left[ \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1) \right] = \frac{1}{2 \cdot 2 \cdot 10^5} \left[ 424,3^2 + (-424,3)^2 - 2 \cdot 0,3 \cdot 424,3 \cdot (-424,3) \right] = 1,17 \text{ МПа} .$$

#### Контрольне завдання №4

Сталевий кубик знаходиться під дією сил, що створюють плоский напружений стан (одне з трьох головних напружень дорівнює нулю).

Потрібно знайти:

1) головні напруження і напрям головних площинок; 2) максимальні дотичні напруження, що дорівнюють більшій половині різниці головних напружень; 3) відносні деформації  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$ ,  $\varepsilon_z$ ; 4) відносну зміну об'єму; 5) питому потенційну енергію деформації. Прийняти  $\mu = 0,3$  і  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа. Дані узяті з табл. 4.

Таблиця 4

№ варіанту	№ схеми	$\sigma_{\alpha}$ , МПа	$\sigma_{\beta}$ , МПа	$\tau_{\alpha, \beta}$ , МПа
1	1	100	200	300
2	2	200	300	400
3	3	300	400	500
4	4	400	500	600
5	5	500	600	700
6	6	600	700	800
7	7	700	800	900
8	8	800	900	1000
9	9	900	1000	1100
10	10	1000	1100	1200
11	11	150	250	350
12	12	250	350	450
13	5	350	450	550
14	3	450	550	650
15	1	550	650	750
16	2	650	750	850
17	4	750	850	950
18	6	850	950	1050
19	8	950	1050	1150
20	10	1050	1150	1250
21	3	400	500	600
22	2	500	600	700
23	4	600	700	800
24	11	700	800	900
25	9	800	900	1000
26	5	900	1000	1100
27	8	100	200	300
28	12	200	300	400
29	10	300	400	500
30	7	400	500	600

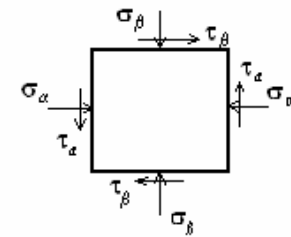


Схема 1

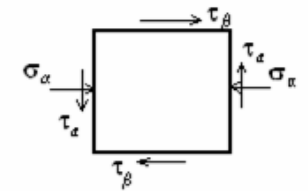


Схема 2

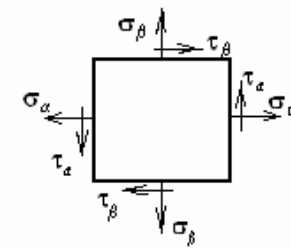


Схема 3

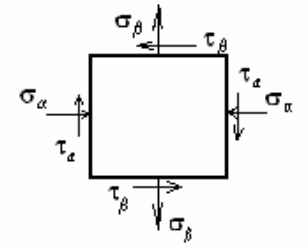


Схема 4

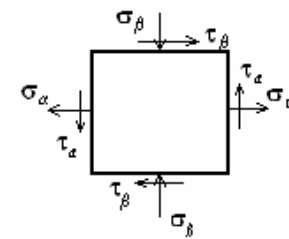


Схема 5

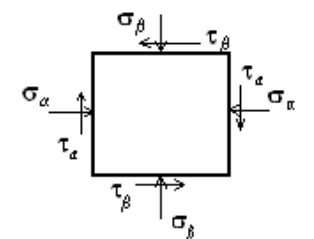


Схема 6

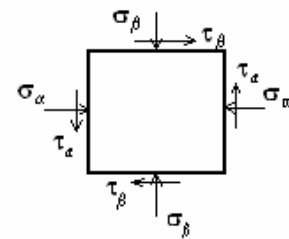


Схема 7

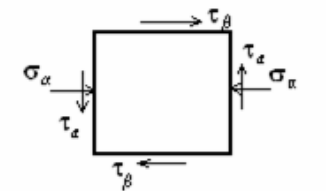
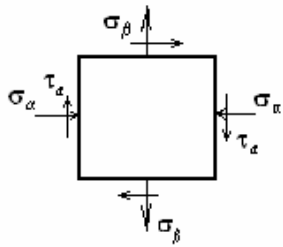
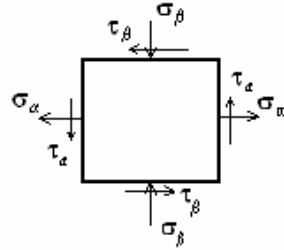


Схема 8

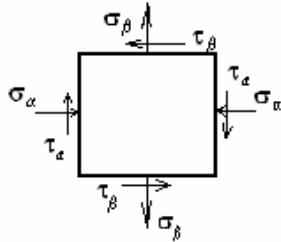




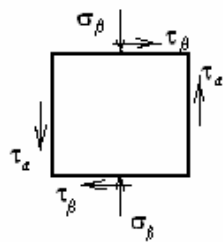
Варіант 9



Варіант 10



Варіант 11



Варіант 12

Контрольні питання

1. Що називається напруженим станом у точці тіла?
2. Що таке тензор напружень?
3. Які площинки і напруження називаються головними?
4. Назвіть види напруженого стану. За яким критерієм напружений стан поділяється на ці види?
5. Сформулюйте постановку прямої задачі при аналізі плоского напруженого стану?
6. Сформулюйте постановку оберненої задачі при аналізі плоского напруженого стану?

## 5. Кручення

### Теоретичні відомості

Кручення характеризується наявністю в стержні єдиного внутрішнього силового чинника – крутного моменту, тобто моменту, що діє в площині поперечного перерізу стержня. Інші компоненти внутрішніх сил дорівнюють нулю:

$$Q_X = Q_Y = N = 0; \quad M_X = M_Y = 0.$$

Поширеним стержневим елементом конструкцій машин, що працює на кручення, є вал. При вивченні чистого кручення приймають наступні **гіпотези кручення**:

1. Поперечні перерізи залишаються плоскими і паралельними до і після деформації, а відстані між ними не міняються.
2. Радіуси поперечних перерізів не змінюють своєї довжини і не скривлюються.
3. Величини моментів і деформацій, відповідають лінійній ділянці діаграми кручення, для якої справедливий закон Гука.

Крутний момент в деякому перерізі валу є рівнодієвим моментом дотичного напруження  $\tau$ , що діє в елементарних майданчиках  $dF$ , розташованих на відстані  $\rho$  від центру перетину. Його можна виразити рівнянням

$$I_{\epsilon\delta} = \int_F \rho \tau \rho dF. \quad (5.1)$$

Формула для визначення відносного кута закручування валу має вигляд

$$\theta = \frac{d\varphi}{dz} = \frac{M_{\epsilon\delta}}{GJ_\rho}, \quad (5.2)$$

де  $GJ_\rho$  - жорсткість поперечного перерізу стержня при крученні – має розмірність Н·см<sup>2</sup> або Н·м<sup>2</sup>.

Повний кут закручування валу довжиною  $l$  рівний

$$\varphi = \int_0^l \frac{M_{\epsilon\delta}}{GJ_\rho} dz = \theta l = \frac{M_{\epsilon\delta} l}{GJ_\rho}, \quad (5.3)$$

де  $GJ_\rho/l$  - жорсткість валу при крученні – має розмірність Н·см або Н·м.

Дотичне напруження в будь-якій точці перерізу стержня:

$$\tau_\rho = \frac{I_{\epsilon\delta} \rho}{J_\rho}. \quad (5.4)$$

Максимальне дотичне напруження, вочевидь, буде

$$\tau_{\max} = \tau_r = \frac{M_{\dot{\epsilon}\delta} r}{J_{\rho}} = \frac{M_{\dot{\epsilon}\delta}}{W_{\rho}}, \quad (5.5)$$

тут  $W_{\rho}$  - полярний момент опору перерізу.

Для суцільного круглого валу діаметром  $d$  максимальне дотичне напруження

$$\tau_{\max} = \frac{16M_{\dot{\epsilon}\delta}}{\pi d^3}. \quad (5.6)$$

Для трубчастого круглого валу з співвідношенням діаметрів  $c = d/D$

$$\tau_{\max} = \frac{16M_{\dot{\epsilon}\delta}}{\pi D^3(1-c^4)}, \quad (5.7)$$

Умова міцності при крученні валу записується у вигляді

$$\tau_{\max} = \frac{M_{\dot{\epsilon}\delta}}{W_{\rho}} \leq [\tau]. \quad (5.8)$$

Закручуючий момент можна виразити через потужність (кВт) і число обертів за хвилину, наприклад

$$M_{\dot{\epsilon}\delta} = \frac{30N}{\pi n}, \quad (I \cdot i). \quad (5.9)$$

Якщо потужність  $N$  задана в кінських силах, то необхідно перевести в систему СІ: 1 к. с. = 0,736 кВт.

Окрім розрахунку на міцність вали розраховують також і на жорсткість, обмежуючи відносні кути закручування деякою граничною величиною  $[\theta]$  (умова жорсткості при крученні):

$$\theta_{\max} = \frac{M_{KP}}{GJ_{\rho}} \leq [\theta]. \quad (5.10)$$

#### Рекомендації до розв'язання задачі №5

При вирішенні завдань на кручення необхідно звернути увагу на наступне:

1. Сума всіх моментів, що діють на вал, дорівнює нулю, тобто вал обертається рівномірно.
2. При побудові епюр моментів, використовують метод перерізів.
3. При підборі діаметрів валу з умов міцності і жорсткості призначається найбільший, розмір якого округляється в більшу сторону і кратний 5.

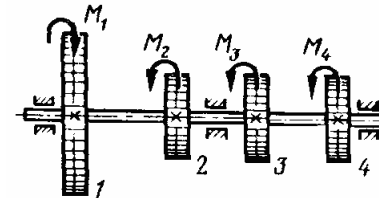
4. При підборі розрахункової схеми розташовують шківів так, аби максимальний момент в перерізі валу був меншим за інші можливі схеми.

#### Приклад розв'язання задачі №5

Визначити з розрахунків на міцність і жорсткість необхідні розміри поперечного перерізу валу в двох варіантах: а) переріз – круг, б) переріз – кільце з відношенням внутрішнього діаметру до зовнішнього  $c = 0,7$  (мал. 13). Відстань між шківками  $a = 0,5$  м.

Переріз валу по всій довжині вважати постійним. Прийняти  $[\tau_k] = 25$  МПа и  $[\varphi_0] = 0,5$  град/м. Вал обертається з постійною кутовою швидкістю  $\omega = 23$  рад/с. Потужності на ведених шківках  $N_2 = 22$  кВт,  $N_3 = 14$  кВт,  $N_4 = 12$  кВт. Модуль пружності другого роду  $G = 4 \cdot 10^4$  МПа.

Вибрати найбільш раціональну послідовність розташування шківів на валу.



Мал. 13. Схема валу

Знаходимо закручуючі моменти на кожному з ведених шківів:

$$\dot{I}_2 = \frac{N_2}{\omega} = \frac{22}{23} = 0,955 \dot{I} \cdot i, \quad \dot{I}_3 = \frac{N_3}{\omega} = \frac{14}{23} = 0,609 \dot{I} \cdot i,$$

$$\dot{I}_4 = \frac{N_4}{\omega} = \frac{12}{23} = 0,522 (\dot{I} \cdot i).$$

Знайдемо закручуючий момент на шківі, що веде. Оскільки вал обертається з постійною швидкістю, то умова рівноваги

$$\Sigma \dot{I} = 0. \Rightarrow \dot{I}_1 - \dot{I}_2 - \dot{I}_3 - \dot{I}_4 = 0.$$

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_2 + \dot{I}_3 + \dot{I}_4 = 955 + 609 + 522 = 2086 \dot{I} \cdot i.$$

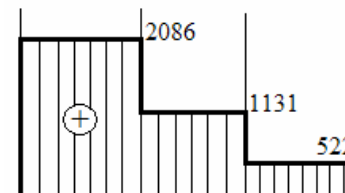
Крутні моменти на ділянках валу знаходимо за методом перерізів:

$$\dot{I}_{II} = \dot{I}_1 = 2086 \dot{I} \cdot i;$$

$$\dot{I}_{III} = \dot{I}_1 - \dot{I}_2 = 2086 - 955 = 1131 \dot{I} \cdot i;$$

$$\dot{I}_{IV} = \dot{I}_1 - \dot{I}_2 - \dot{I}_3 = 2086 - 955 - 609 = 522 \dot{I} \cdot i.$$

М, Н·м



За даними розрахунку будемо епюру крутних моментів (мал. 14).

Мал. 14. Епюра крутних моментів

1. Визначення діаметру суцільного валу.

Необхідний полярний момент опору з розрахунку на міцність

$$W_P \geq \frac{M_{\max}}{[\tau_K]} = \frac{2086}{25 \cdot 10^6} = 8,34 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3 = 8,34 \cdot 10^4 \text{ мм}^3.$$

Знаходимо діаметр суцільного валу круглого перерізу

$$d_{i\delta} = \sqrt[3]{\frac{16W_P}{\pi}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 8,34 \cdot 10^4}{3,14}} = 75,2 \text{ мм}.$$

Необхідний полярний момент інерції перерізу валу з розрахунку на жорсткість ( $[\varphi_0] = 0,5$  град/м  $= 0,5 \cdot 3,14/180 = 8,7 \cdot 10^{-3}$  рад/м):

$$J_P = \frac{M_{\max}}{G[\varphi_0]} = \frac{2086}{8 \cdot 10^{10} \cdot 8,7 \cdot 10^{-3}} = 3 \cdot 10^{-6} \text{ м}^4 = 3 \cdot 10^6 \text{ мм}^4.$$

Діаметр валу круглого перерізу з вимог жорсткості

$$d_{ei\delta} = \sqrt[4]{\frac{32J_P}{\pi}} = \sqrt[4]{\frac{32 \cdot 3 \cdot 10^6}{3,14}} = 74,4 \text{ мм}.$$

Необхідний розмір перерізу з розрахунку на жорсткість вийшов більше, ніж з розрахунку на міцність, тому його і приймаємо як остаточний

$$d_{ei\delta} = 74,4 \text{ мм}.$$

Отриманий розмір остаточно округлюємо до найближчого стандартного

$$d = 75 \text{ мм}.$$

Знаходимо полярний момент інерції площі поперечного перерізу вибраного валу:

$$J_\rho = \frac{\pi d^4}{32} = \frac{3,14 \cdot 75^4}{32} = 3,1 \cdot 10^6 \text{ мм}^4 = 3,1 \cdot 10^{-6} \text{ м}^4.$$

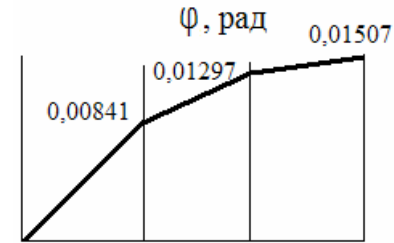
Знаходимо кути закручування по довжині валу:

$$\varphi_1 = \frac{\dot{I}_1 a}{GJ_\rho} = \frac{2086 \cdot 0,5}{4 \cdot 10^{10} \cdot 3,1 \cdot 10^{-6}} = 8,41 \cdot 10^{-3} \text{ рад};$$

$$\varphi_{22} = \frac{\dot{I}_{22} a}{GJ_\rho} = \frac{1131 \cdot 0,5}{4 \cdot 10^{10} \cdot 3,1 \cdot 10^{-6}} = 4,56 \cdot 10^{-3} \text{ рад};$$

$$\varphi_{222} = \frac{\dot{I}_{222} a}{GJ_\rho} = \frac{522 \cdot 0,5}{4 \cdot 10^{10} \cdot 3,1 \cdot 10^{-6}} = 2,10 \cdot 10^{-3} \text{ рад}.$$

За результатами розрахунків будемо епюру кутів закручування (мал. 15).



Мал. 15. Епюра кутів закручування

Зовнішній діаметр кільцевого перерізу також необхідно розраховувати з умови міцності і умови жорсткості.

Діаметр кільцевого перерізу з умови міцності знаходять по формулі:

$$d_{i\delta} = \sqrt[3]{\frac{16W_P}{\pi(1-c^4)}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 8,34 \cdot 10^4}{3,14(1-0,7^4)}} = 82,4 \text{ мм}.$$

Зовнішній діаметр валу кільцевого перерізу з умови жорсткості

$$d_{ei\delta} = \sqrt[4]{\frac{32J_P}{\pi(1-c^4)}} = \sqrt[4]{\frac{32 \cdot 3 \cdot 10^6}{3,14(1-0,7^4)}} = 79,6 \text{ мм}.$$

Необхідний розмір перерізу з розрахунку на міцність вийшов більше, ніж з розрахунку на жорсткість, тому його і приймаємо за остаточний

$$d_{i\delta} = 82,4 \text{ мм}.$$

Отриманий розмір остаточно округлюємо до найближчого стандартного

$$d = 85 \text{ мм}.$$

Більш раціональним було б розташування шківів, за якого шків з максимальним моментом  $M_1$  знаходився між шківками  $M_2$  і  $M_3$  або між шківками  $M_3$  або  $M_4$ .

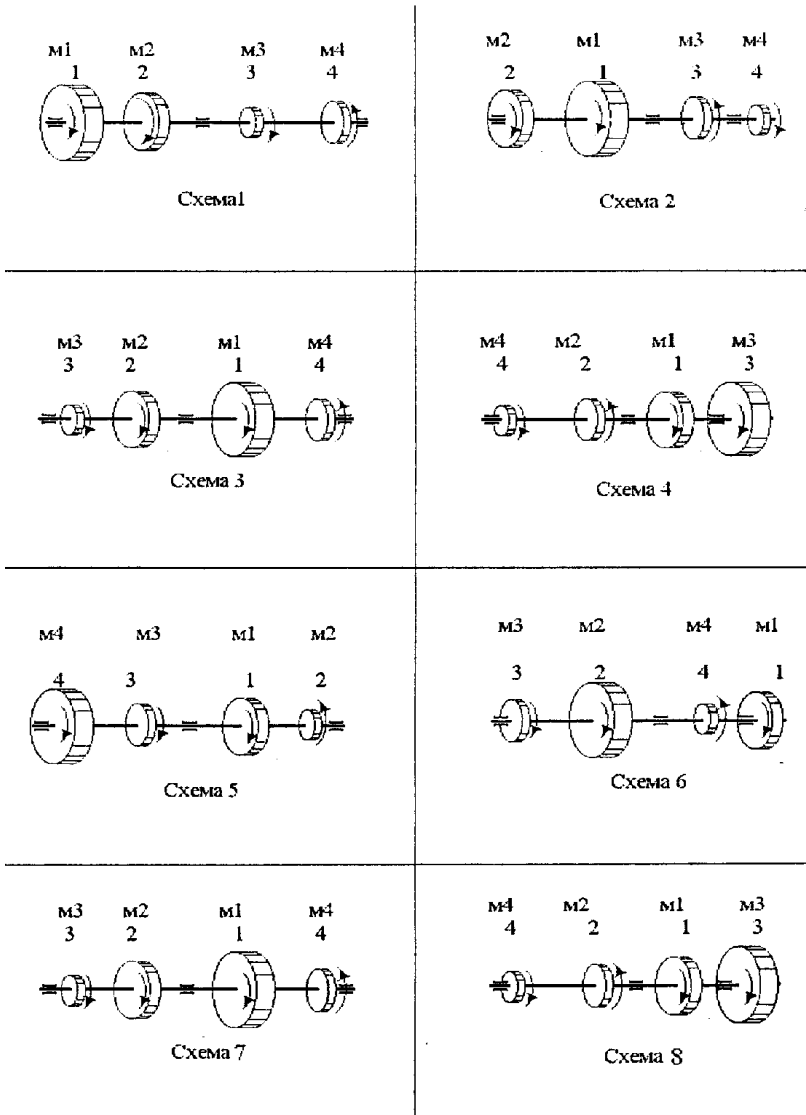
**Контрольне завдання №5**

Для сталевого трансмісійного валу (мал. 16) потрібно:

1. Визначити величини моментів, що підводяться до шківка 1 і знімаються із шківів 2, 3 і 4.
2. Визначити необхідний діаметр валу з розрахунку на міцність і жорсткість. Діаметр валу вважати постійним по всій довжині. Отримане значення діаметру валу округлювати до найближчого стандартного значення. Відстань між шківками рівна  $a$ , таблиця №4.
3. Побудувати епюру крутних моментів і кутів закручування.

4. Визначити також з умови міцності і жорсткості зовнішній діаметр трубчастого валу із співвідношенням діаметрів  $c = 0,4$ . Обчислити економію матеріалу в порівнянні з суцільним у відсотках.

Мал. 16. Схеми валів



Таблиця 5

№ варіанту	№ схеми	$N_1$ , кВт	$N_2$ , кВт	$N_3$ , кВт	$n$ , об/хв	$[\tau]$ , МПа	$a$ , м	$[\varphi]$ , град/м
1	1	25	15	20	100	30	0,4	0,3
2	1	35	25	30	200	40	0,5	0,4
3	1	45	30	10	300	50	0,6	0,4
4	1	55	45	25	400	60	0,7	0,4
5	2	20	25	35	500	70	0,5	0,5
6	2	30	20	50	600	80	0,4	0,3
7	2	40	60	30	700	30	0,5	0,4
8	2	50	40	45	800	40	0,6	0,5
9	3	60	30	30	900	50	0,5	0,3
10	3	25	35	45	200	60	0,4	0,2
11	3	35	50	25	300	70	0,5	0,3
12	3	45	70	55	400	80	0,4	0,5
13	4	55	80	45	500	30	0,6	0,6
14	4	65	50	35	600	40	0,5	0,7
15	4	60	40	25	700	60	0,4	0,1
16	4	30	35	45	800	40	0,5	0,2
17	5	40	65	50	900	30	0,4	0,3
18	5	50	25	65	800	40	0,5	0,2
19	5	65	30	40	700	50	0,6	0,3
20	5	55	70	40	500	60	0,4	0,1
21	6	75	80	25	600	70	0,5	0,4
22	6	70	90	30	400	25	0,6	0,5
23	6	35	40	90	300	35	0,4	0,2
24	6	45	35	55	200	45	0,5	0,6
25	7	80	20	45	100	55	0,4	0,3
26	7	75	30	45	500	65	0,5	0,6
27	7	85	30	55	600	75	0,6	0,1
28	8	20	60	45	700	30	0,4	0,2
29	8	45	35	40	800	60	0,6	0,5
30	8	60	20	35	300	50	0,5	0,6

Контрольні питання

1. Яке напруження виникає при чистому крученні?
2. Як визначається зовнішній закручуючий момент по заданій потужності і кутовій швидкості обертання?
3. Що називається повним і відносним кутами закручування?
4. Чому при крученні вал кільцевого перерізу є більш економічним, ніж вал суцільного перерізу?

5. Запишіть вираз для полярного моменту інерції і полярного моменту опору круга і кільця.
6. Як проводиться розрахунок валу на міцність і жорсткість?

### 6. Згин балки. Підбір і перевірка перерізу балок

#### Теоретичні відомості

Згин – це такий вид деформації бруса, при якому в його поперечних перерізах виникають згинальні моменти. В більшості випадків одночасно із згинальними моментами виникають і поперечні сили; такий згин називають поперечним; якщо поперечні сили не виникають, згин називають чистим.

У випадку коли всі навантаження, а отже, і реакції зв'язків діють в одній площині, згин називають плоским.

При прямому поперечному згині в поперечних перерізах балки виникають два внутрішні силові чинники: поперечна сила  $Q_y$  і згинальний момент  $M_x$ . Залежності між цими внутрішніми силовими чинниками і напругою в поперечному перерізі мають вигляд:

$$Q_y = \int_F \tau_{zy} dF; \quad M_x = \int_F \sigma_z y dF. \quad (6.1)$$

Для більш наочного уявлення про характер зміни внутрішніх силових чинників ( $Q_y$  і  $M_x$ ) по довжині бруса і для знаходження найбільш небезпечних перерізів будують відповідні графіки – епюри поперечних сил і згинальних моментів.

*Поперечна сила*  $Q_y$  в довільному поперечному перерізі бруса чисельно дорівнює алгебраїчній сумі зовнішніх сил, що прикладені до відсіченої частини.

*Згинальний момент*  $M_x$  в довільному поперечному перерізі бруса чисельно дорівнює алгебраїчній сумі моментів всіх зовнішніх сил, що прикладені до відсіченої частини, відносно тієї точки подовжньої осі бруса, через яку проходить даний переріз.

*Нейтральною лінією* називається пряма, по якій перетинається кожен поперечний переріз з нейтральним шаром.

*Нейтральним шаром* називається сукупність волокон, які не міняють своєї довжини при згині балки.

Напруження при згині на відстані  $y$  від нейтральної лінії

$$\sigma = (M_x / J_x) y, \quad (6.2)$$

Максимальне напруження при згині має місце в крайніх волокнах перерізу, тобто в точках, що найбільш віддалені від нейтральної лінії. Його величина має бути менша за напруження, що допускається  $[\sigma]$  (умова міцності при згині):

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{x \max}}{J_x} y_{\max} \leq [\sigma]. \quad (6.3)$$

Якщо до балки прикладене значне поперечне навантаження або балка має тонкостінний переріз, то необхідно проводити повний розрахунок на міцність, враховуючи вплив дотичного напруження. В такому випадку друга умова міцності запишеться у вигляді:

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{\max} \cdot S_{d^2y}}{b \cdot J} \leq [\tau], \quad (6.4)$$

де  $Q_{\max}$  – поперечна сила в даному перерізі;  $S_{d^2y}$  – статичний момент площі відкинutoї частини перерізу відносно нейтральної осі (дорівнює нулю в крайніх волокнах);  $b$  – ширина шару, де визначається дотична напруга;  $J$  – момент інерції площі перерізу.

Як видно з формули, дотичне напруження в крайніх волокнах дорівнює нулю, а зона максимальних дотичних напружень розташована в середній частині перерізу.

*Момент опору при згині*  $W_x$  – геометрична характеристика поперечного перерізу, що є відношенням моменту інерції відносно даної осі до половини висоти перерізу. Нижче приведені моменти опорів простих перерізів:

а) круг

$$W_x = \frac{\pi d^3}{32} \approx 0,1d^3;$$

б) кільце

$$W_x = \frac{(\pi d^4 / 64)(1 - c^4)}{d/2} = (\pi d^3 / 32)(1 - c^4) \approx 0,1d^3(1 - c^4).$$

в) прямокутник

$$W_x = \frac{J_x}{h/2} = \frac{bh^3/12}{h/2} = \frac{bh^2}{6}.$$

#### Рекомендації до розв'язання задачі №6

1. При побудові епюр поперечних сил і згинальних моментів необхідно керуватися правилом знаків: поперечні сили вважаються додатними, якщо вони прагнуть обернути елемент за годинниковою стрілкою; момент вважається додатним, якщо елемент бруса згинається опуклістю вниз (верхні волокна стиснуті).
2. Балки розраховують на міцність по найбільшим нормальним напруженням, що виникають в поперечних перерізах. При поперечному згині в перерізах балок разом з нормальними напруженнями виникають і дотичні, але вони в переважній

нями виникають і дотичні, але вони в переважній більшості випадків невеликі і при розрахунках на міцність не враховуються.

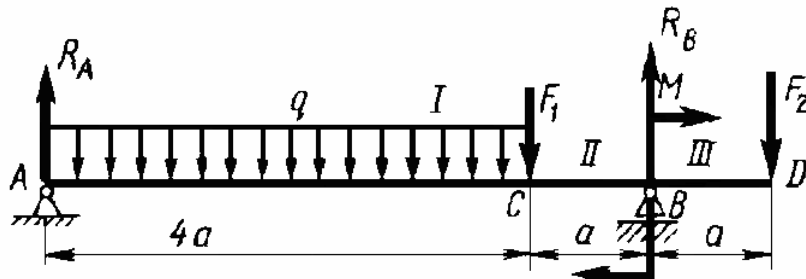
### 3. Порядок перевірного розрахунку балок на міцність:

- знайти небезпечний переріз за максимальним моментом;
- визначити момент опору  $W$  перерізу відносно нейтральної лінії, застосовуючи основну умову міцності;
- підбирати по сортаменту (табл. 3, 4 Додатку) номер профілю перерізу.

#### Приклад розв'язання задачі №6

Для балки, схема навантаження якої показана на мал. 17, потрібно:

- 1) побудувати епюри поперечних сил  $Q_y$  і згинальних моментів  $M_x$  для двохопорної балки;
  - 2) підібрати переріз двотаврової сталеві балки.
- Вихідні дані:  $a = 2$  м,  $F_1 = 10$  кН,  $F_2 = 5$  кН,  $q = 1$  кН/м,  $M = 20$  кН·м. Допустиме напруження для сталі  $[\sigma] = 160$  МПа.



Мал. 17. Схема навантаження балки

Дана система є статично визначною, оскільки дві невідомі опорні реакції можна знайти з двох незалежних рівнянь статки. Визначаємо опорні реакції:

$$1. \sum M_A = 0.$$

$$q \cdot 4a \cdot 2a + F_1 \cdot 4a + M - R_B \cdot 5a + F_2 \cdot 6a = 0;$$

$$5R_B = 8qa + M + 4F_1 + 6F_2 = 8 \cdot 1 \cdot 2 + 20 + 4 \cdot 10 +$$

$$+ 6 \cdot 5 = 106; \quad R_B = \frac{106}{5} = 21,2 (\text{кН}).$$

$$2. \sum F_y = 0.$$

$$R_A + R_B - q \cdot 4a - F_1 - F_2 = 0 \Rightarrow R_A = 4qa + F_1 + F_2 - R_B;$$

$$R_A = 4 \cdot 1 \cdot 2 + 10 + 5 - 21,2 = 1,8 (\text{кН}).$$

Знаходимо поперечні сили на ділянках балки методом перерізів. У перерізі на лівій опорі поперечна сила дорівнює відповідній опорній реакції:

$$Q_A = R_A = 1,8 (\text{кН}).$$

На ділянці I поперечна сила змінюється по лінійному закону. Для побудови епюри на цій ділянці треба знайти значення сили в перерізі, узятому нескінченно близько зліва від точки С:

$$Q_{\tilde{N} \text{чє}^3 \tilde{a}} = R_A - 4qa = 1,8 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = -6,2 (\text{кН}).$$

В точці С епюра поперечних сил має скачок. Знаходимо значення сили в перерізі, узятому нескінченно близько справа від точки С:

$$Q_{\tilde{N} \text{і} \tilde{d} \tilde{a} \tilde{a}} = Q_{\tilde{N} \text{чє}^3 \tilde{a}} - F_1 = -6,2 - 10 = -16,2 (\text{кН}).$$

До точки В поперечна сила в перерізі балки має незмінне значення

$$Q_{\tilde{A} \text{чє}^3 \tilde{a}} = Q_{\tilde{N} \text{і} \tilde{d} \tilde{a} \tilde{a}} = -16,2 (\text{кН}),$$

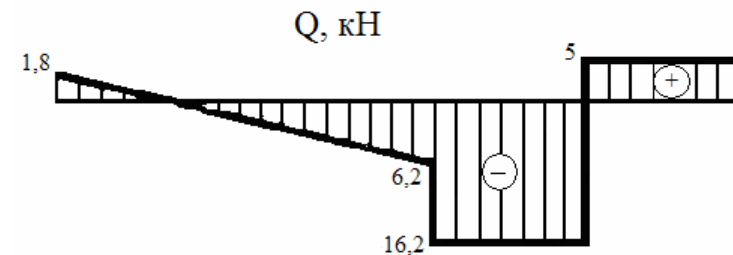
а в самій точці В епюра сил знову отримує стрибок

$$Q_{\tilde{A} \text{і} \tilde{d} \tilde{a} \tilde{a}} = Q_{\tilde{A} \text{чє}^3 \tilde{a}} + R_B = -16,2 + 21,2 = 5 (\text{кН}).$$

До точки D поперечна сила в перерізі балки має незмінне значення, аж доки в цій точці не отримує зміну від зосередженої сили:

$$Q_D = Q_{\tilde{B} \text{і} \tilde{d} \tilde{a} \tilde{a}} - F_2 = 5 - 5 = 0 (\text{кН}).$$

За даними розрахунків будемо епюру поперечних сил.



Мал. 18. Епюра поперечних сил

Знаходимо згинальні моменти на ділянках балки методом перерізів. У перерізі на лівій опорі згинальний момент дорівнює нулю:

$$M_A = 0 (\text{кН} \cdot \text{м}).$$

На ділянці I згинальний момент змінюється по квадратичному закону, при цьому в перерізі, де епюра сил проходить через нуль, епюра моментів (парабола) має максимум. Визначимо величину  $M_{max}$ , для чого знайдемо абсцису  $x$  перерізу, в якому  $Q_y = 0$ :

$$R_A - qx = 0 \Rightarrow x = \frac{R_A}{q} = \frac{1,8}{1} = 1,8 (\text{м}).$$

Тепер безпосередньо знаходимо максимальний момент

$$M_{\max} = R_A \cdot \delta - q \cdot \delta \cdot \delta / 2 = 1,8 \cdot 1,8 - 1 \cdot 1,8 \cdot 1,8 / 2 = 1,62 (\text{кН} \cdot \text{м}).$$

Визначасмо згинальний момент в перерізі С:

$$M_C = R_A \cdot 4a - q \cdot 4a \cdot 2a = 1,8 \cdot 4 \cdot 2 - 1 \cdot 8 \cdot 4;$$

$$\dot{M}_C = -17,6 (\text{кН} \cdot \text{м}).$$

По трьох знайдених значеннях на ділянці I вже можна побудувати параболу.

На ділянці II епюра моментів буде змінюватися за лінійним законом. Для побудови епюри на цій ділянці треба знайти значення моменту в перерізі, узятому нескінченно близько зліва від точки В:

$$M_{A \text{ чітко зліва}} = R_A \cdot 5a - q \cdot 4a \cdot 3a - F_1 \cdot a = 1,8 \cdot 5 \cdot 2 - 1 \cdot 8 \cdot 4 -$$

$$- 10 \cdot 2 = -34 (\text{кН} \cdot \text{м}).$$

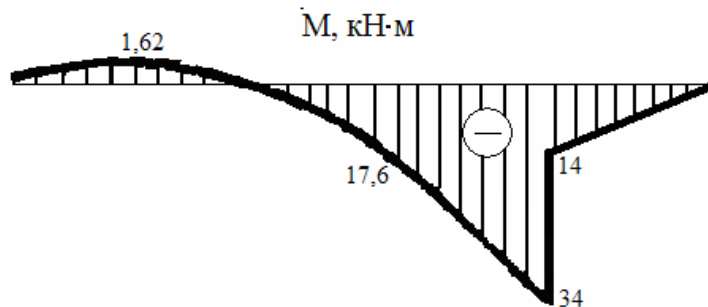
В самій точці В епюра моментів отримує стрибок, тому

$$\dot{M}_{A \text{ чітко зліва}} = \dot{M}_{A \text{ чітко зліва}} + \dot{M}_B = -34 + 20 = -14 (\text{кН} \cdot \text{м}).$$

На ділянці III епюра змінюється за лінійним законом до нульового значення на правому краю балки:

$$\dot{M}_D = 0.$$

За результатами розрахунків будуюмо епюру згинальних моментів.



Мал. 19. Епюра згинальних моментів

Максимальний згинальний момент з епюри  $M_{\max} = 34 \text{ кН} \cdot \text{м}$ .

Необхідний момент опору поперечного перерізу двотаврової балки визначається з формули

$$W_x \geq \frac{M_{x \max}}{[\sigma]} = \frac{34 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 0,21 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 = 212,5 \text{ см}^3.$$

З табл. 3 Додатку вибираємо двотавр № 20а, що має  $W_x = 203 \text{ см}^3$ .

#### Контрольне завдання №6

Для наданих схем навантаження балок необхідно:

- побудувати епюри поперечних сил  $Q_y$  і згинальних моментів  $M_x$ ;
- підібрати необхідний переріз з умови міцності:

а) сталеві балка двотаврового поперечного перерізу з допустимим напруженням  $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$ ;

б) сталеві конструкція, що складається з двох швелерів з допустимим напруженням  $[\sigma] = 180 \text{ МПа}$ ;

в) дерев'яна балка прямокутного поперечного перерізу із співвідношенням сторін  $h:b$  і межею міцності на згин  $[\sigma_{зг}] = 80 \text{ МПа}$ ;

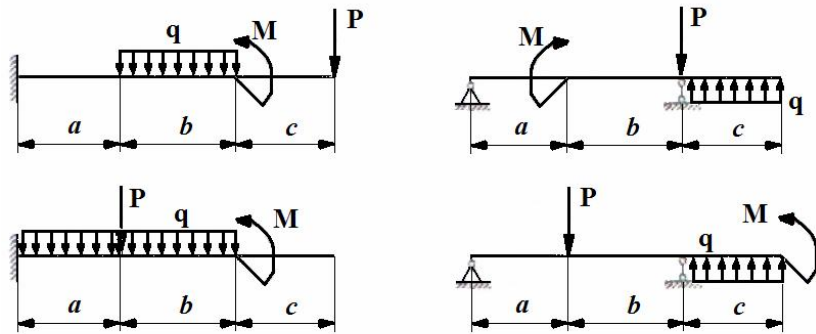
г) чавунна балка трубчастого поперечного перерізу із співвідношенням внутрішнього і зовнішнього діаметрів  $c$  і допустимим напруженням  $[\sigma_+] = 120 \text{ МПа}$ ,  $[\sigma_-] = 500 \text{ МПа}$ .

Таблиця 6

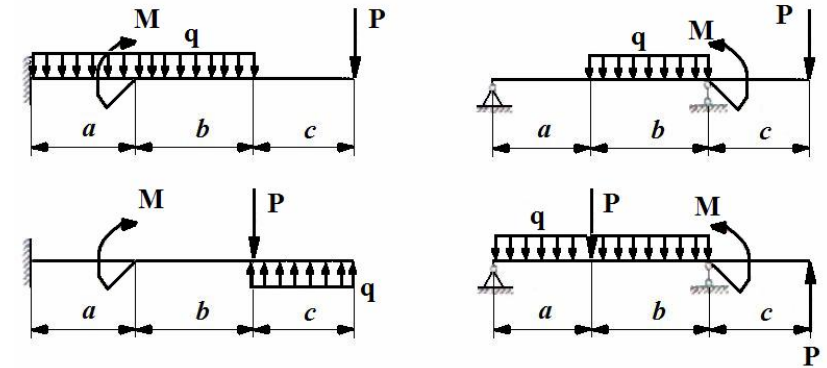
№ варіанту	Розміри балки, м			Величини силових чинників			Відношення сторін, $h:b$	Відношення діаметрів, $c$
	A	b	c	M, кН·м	P, кН	q, кН/м		
1	2,8	2,2	1,2	26	28	16	2,0	0,85
2	2,8	2,2	1,2	26	28	16	2,0	0,85
3	2,8	2,2	1,2	26	28	16	2,0	0,85
4	2,8	2,2	1,2	26	28	16	2,0	0,85
5	2,8	2,2	1,2	26	28	16	2,0	0,85
6	2,8	2,2	1,2	26	28	16	2,0	0,85
7	2,8	2,2	1,2	26	28	16	2,0	0,85
8	2,8	2,2	1,2	26	28	16	2,0	0,85
9	2,8	2,2	1,2	26	28	16	2,0	0,85
10	2,8	2,2	1,2	26	28	16	2,0	0,85
11	2,2	1,8	2,6	14	30	18	2,5	0,75
12	2,2	1,8	2,6	14	30	18	2,5	0,75
13	2,2	1,8	2,6	14	30	18	2,5	0,75
14	2,2	1,8	2,6	14	30	18	2,5	0,75
15	2,2	1,8	2,6	14	30	18	2,5	0,75
16	2,2	1,8	2,6	14	30	18	2,5	0,75
17	2,2	1,8	2,6	14	30	18	2,5	0,75

18	2,2	1,8	2,6	14	30	18	2,5	0,75
19	2,2	1,8	2,6	14	30	18	2,5	0,75
20	2,2	1,8	2,6	14	30	18	2,5	0,75
21	2,4	1,6	2,0	20	16	14	3,0	0,70
22	2,4	1,6	2,0	20	16	14	3,0	0,70
23	2,4	1,6	2,0	20	16	14	3,0	0,70
24	2,4	1,6	2,0	20	16	14	3,0	0,70
25	2,4	1,6	2,0	20	16	14	3,0	0,70
26	2,4	1,6	2,0	20	16	14	3,0	0,70
27	2,4	1,6	2,0	20	16	14	3,0	0,70
28	2,4	1,6	2,0	20	16	14	3,0	0,70
29	2,4	1,6	2,0	20	16	14	3,0	0,70
30	2,4	1,6	2,0	20	16	14	3,0	0,70

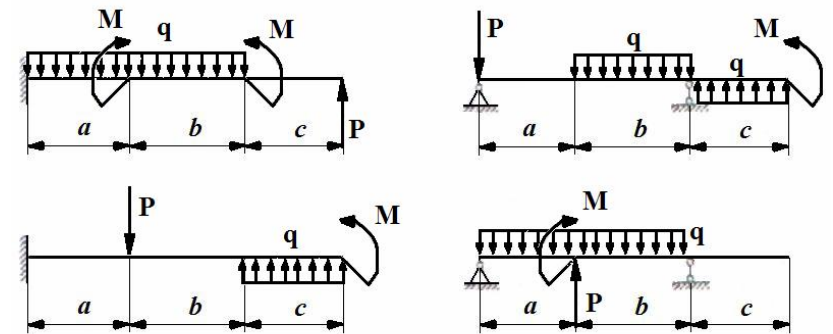
Вариант 1



Вариант 2

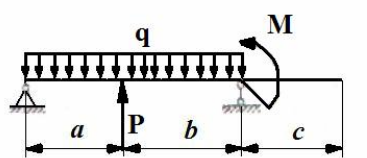
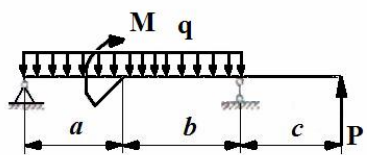
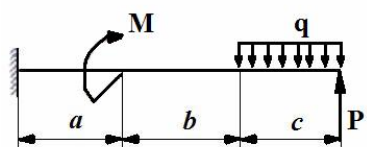
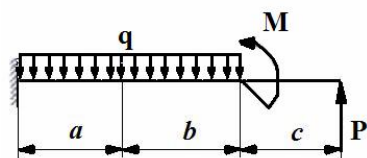
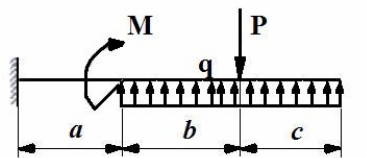
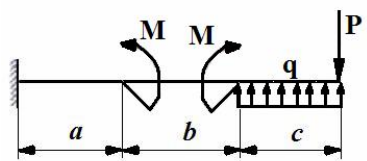


Вариант 3

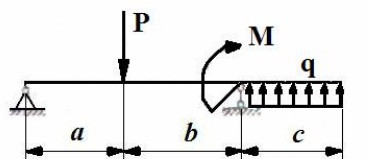
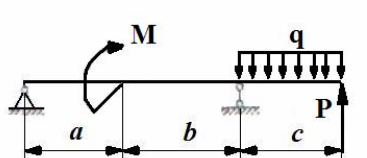


Вариант 4

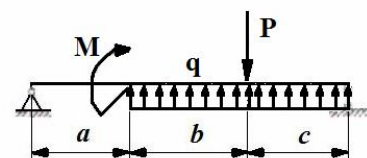
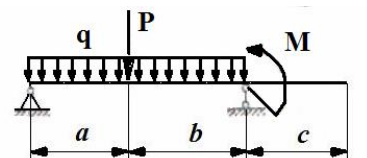
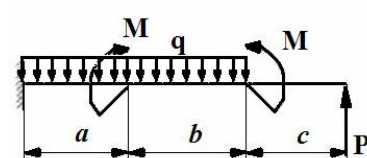
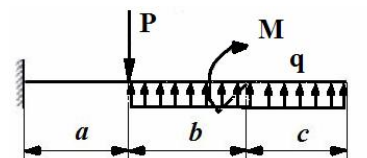




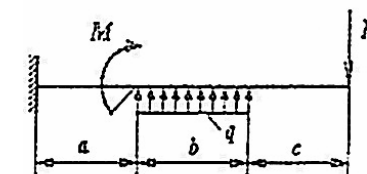
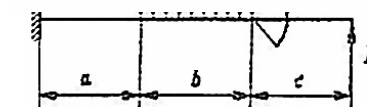
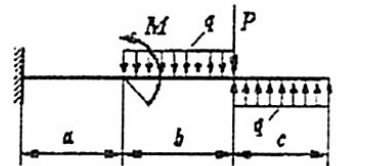
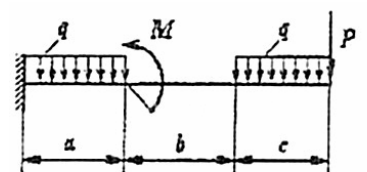
Вариант 5



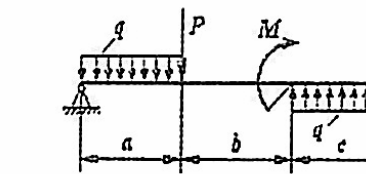
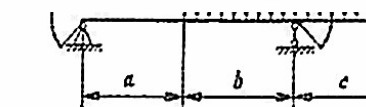
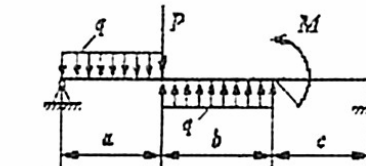
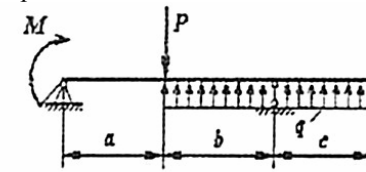
Вариант 6



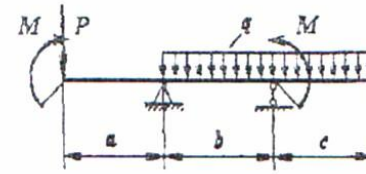
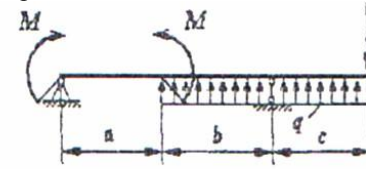
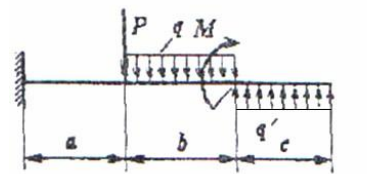
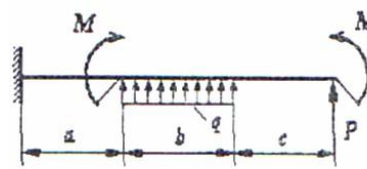
Вариант 7



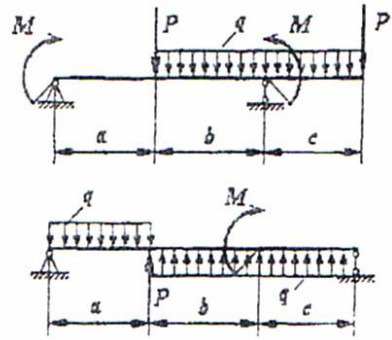
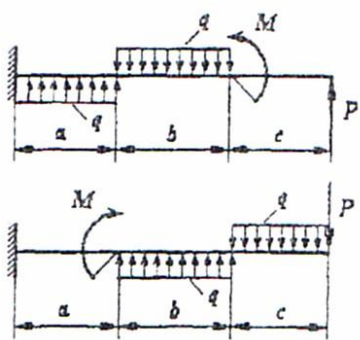
Вариант 8



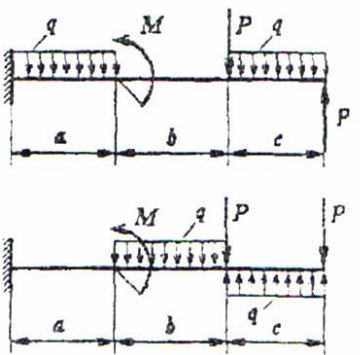
Вариант 9



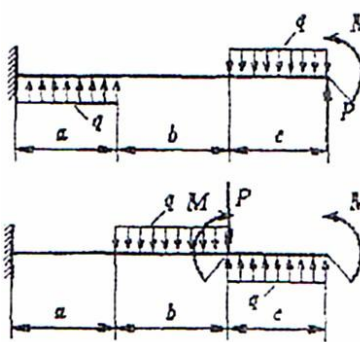
Вариант 10



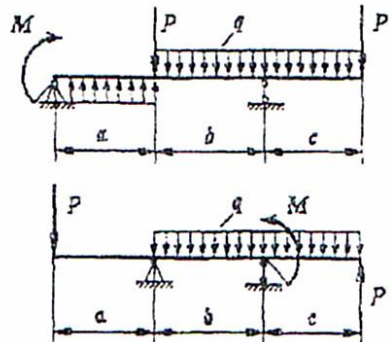
Варіант 11



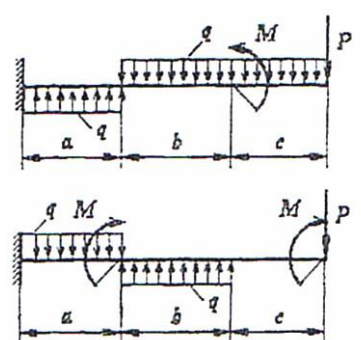
Варіант 12



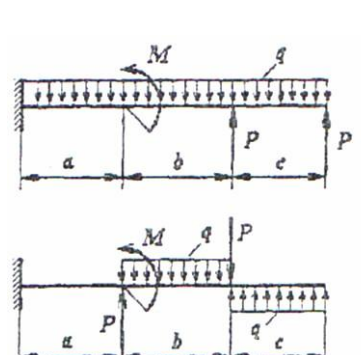
Варіант 13



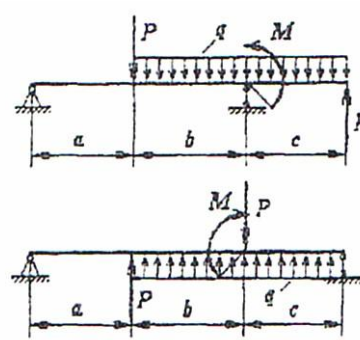
Варіант 14

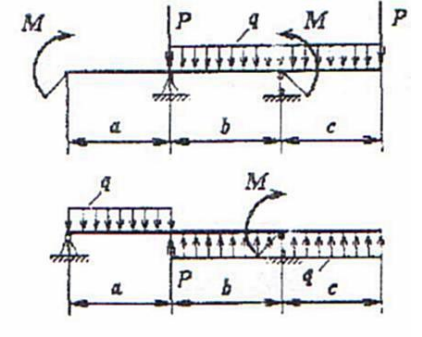
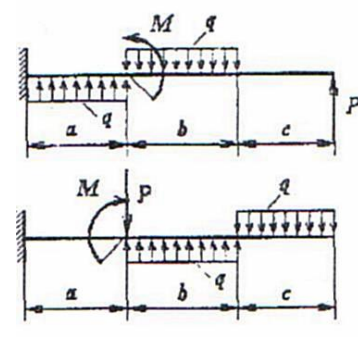
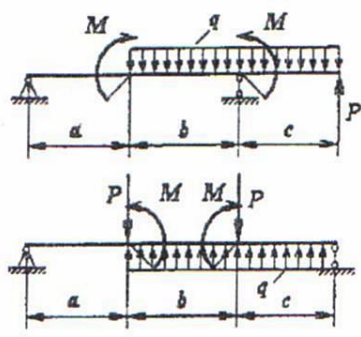
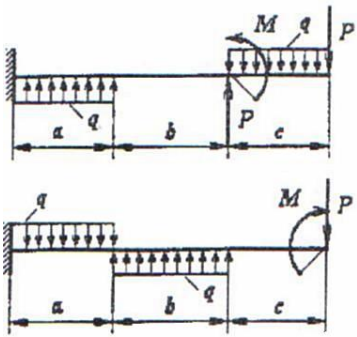


Варіант 15

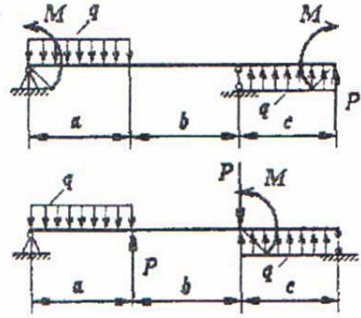
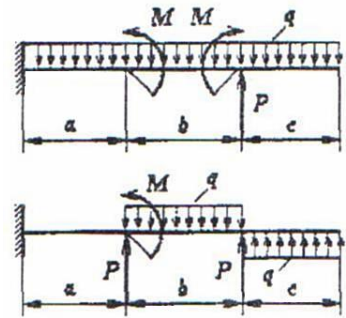


Варіант 16

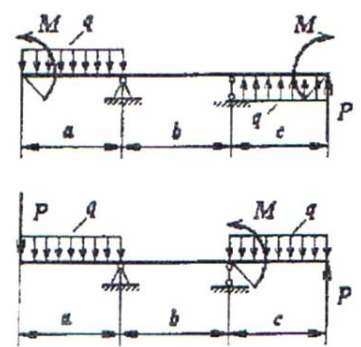
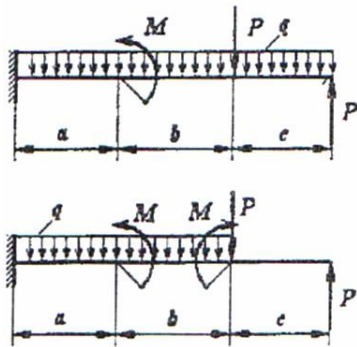




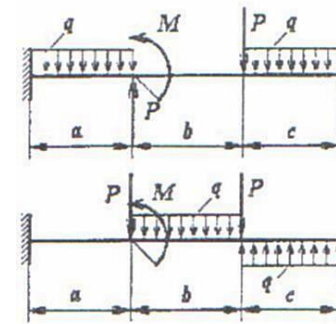
Вариант 17



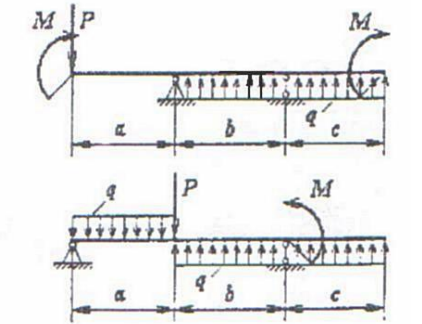
Вариант 18



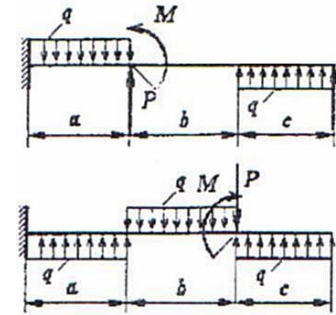
Вариант 19



Вариант 20

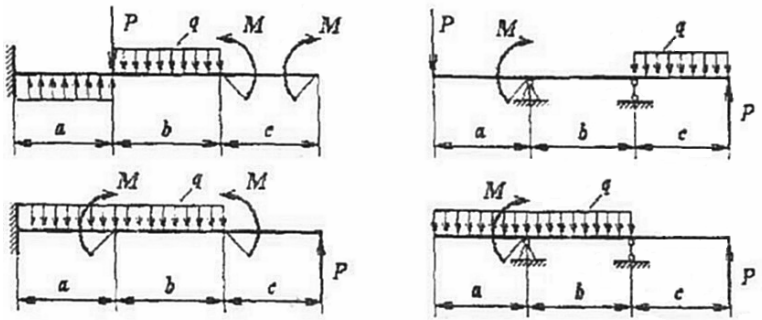


Вариант 21

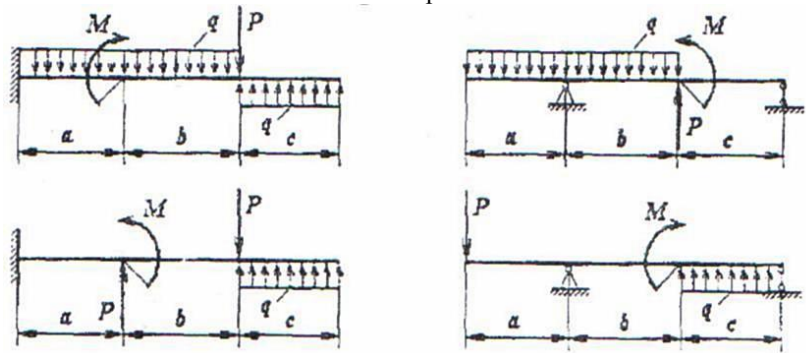


Вариант 22

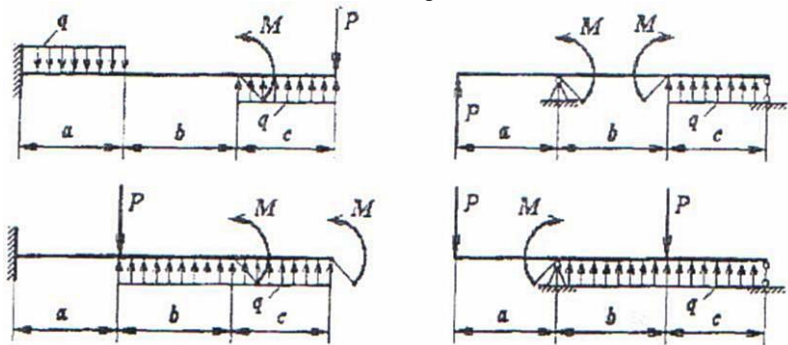




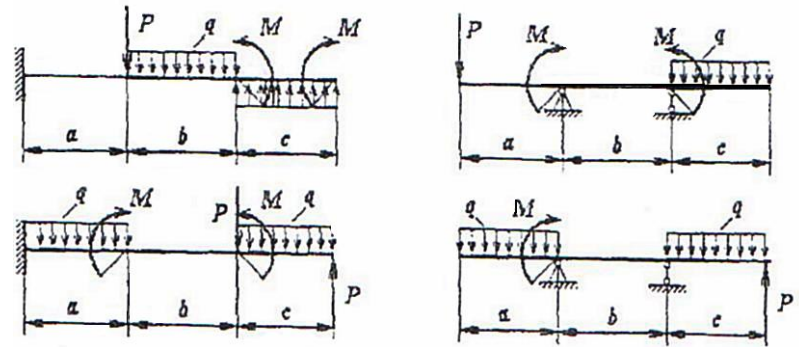
Варіант 23



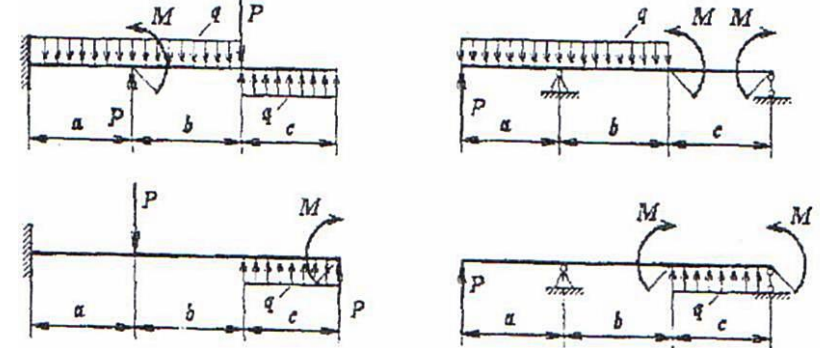
Варіант 24



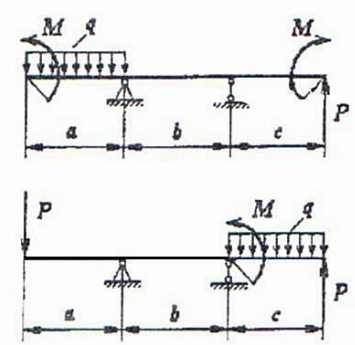
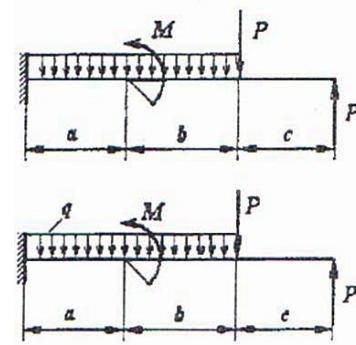
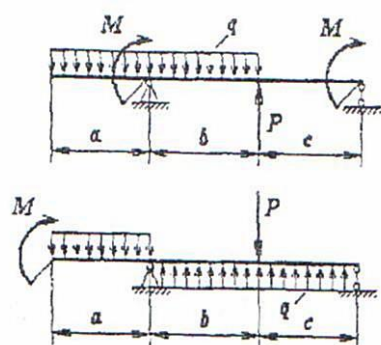
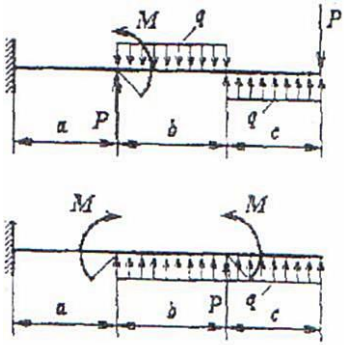
Варіант 25



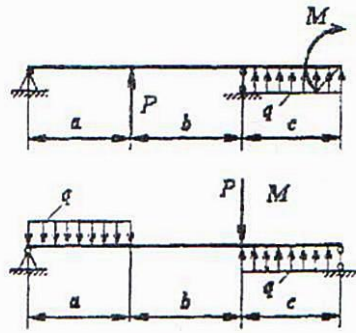
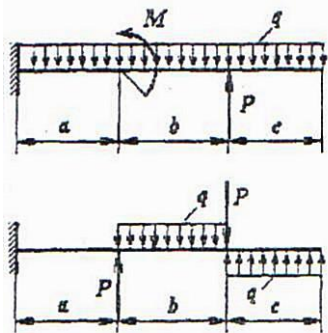
Варіант 26



Варіант 27



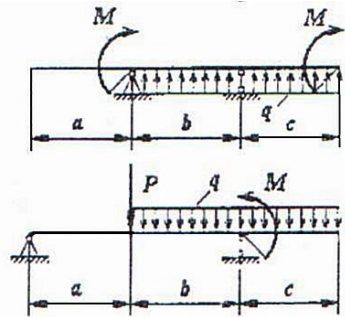
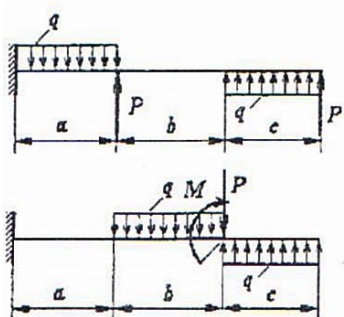
Варіант 28



Контрольні питання

1. Що називається чистим згином балки?
2. Які внутрішні зусилля виникають в поперечних перерізах балки?
3. Назвіть правила знаків, що прийняті для кожного з внутрішніх зусиль?
4. Що таке нейтральний шар і нейтральна лінія, як вони розташовані?
5. Яка існує залежність між згинальним моментом, поперечною силою і інтенсивністю розподіленого навантаження?
6. Який вигляд мають епюри нормального і дотичного напруження в поперечних перерізах прямокутної і двотаврової форми?
7. Запишіть умови міцності за головним напруженням по третій і четвертій теоріях міцності.

Варіант 29



Варіант 30

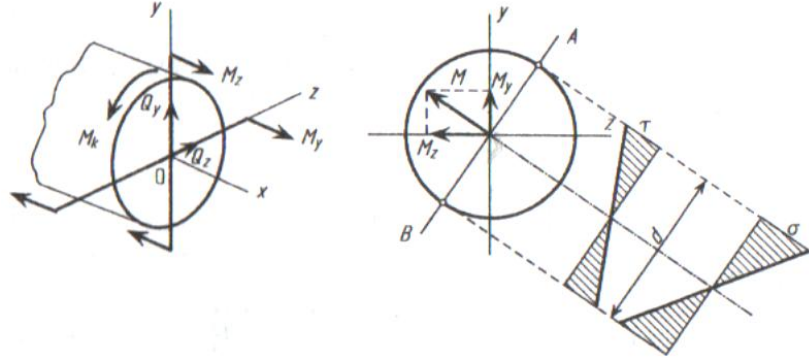
### МОДУЛЬ 3

#### 7. Складний опір: згин з крученням

##### Теоретичні відомості

Згин із крученням – це такий вид деформації бруса, при якому в його поперечних перерізах виникають згинальний і крутний моменти.

При згині з крученням в поперечних перерізах балки виникають п'ять внутрішніх силових чинників: поперечні сили  $Q_y$  і  $Q_z$ , згинаючі моменти  $M_y$  і  $M_z$  і крутний момент  $M_k = M_x$ . З наявністю цих моментів пов'язані напруження  $\sigma_{gr}$  і  $\tau_k$ . При цьому матеріал стержня знаходиться в плоскому напруженому стані.



Мал. 20. Силові чинники при згині з крученням

В разі стержня круглого поперечного перерізу діаметром  $d$  дотичне напруження від поперечних сил  $Q_y$  і  $Q_z$  невелике, і при розрахунку його зазвичай не враховують.

Дотичне напруження від крутного моменту набуває максимальних значень  $\tau_{max}$  в усіх точках контуру перерізу

$$\tau_{\dot{\sigma}\dot{\sigma}\dot{\sigma}} = \frac{\dot{I}_{\dot{\epsilon}}}{W_{\rho}} = \frac{16\dot{I}_{\dot{\epsilon}}}{\pi d^3}. \quad (7.1)$$

Найбільше нормальне напруження  $\sigma$  від згинальних моментів  $M_y$  і  $M_z$  має місце в двох точках (А і В) контуру перерізу. Ці точки лежать на кінцях діаметру, перпендикулярного вектору результуючого згинального моменту

$$\dot{I} = \sqrt{\dot{I}_y^2 + \dot{I}_z^2}, \quad (7.2)$$

а величина нормального напруження визначається за формулою

$$\sigma_{\dot{\sigma}\dot{\sigma}} = \frac{\pm \dot{I}}{W} = \frac{\pm 32\dot{I}}{\pi d^3}. \quad (7.3)$$

Еквівалентне напруження при згині з крученням має бути менше за напруження, що допускається  $[\sigma]$  (умова міцності) і визначається:

- за III теорією міцності (теорії Мора)

$$\sigma_{\dot{\sigma}\dot{\sigma}\dot{\sigma}} = \sqrt{\sigma_{\dot{\sigma}\dot{\sigma}}^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma], \quad (7.4)$$

- за III теорією міцності

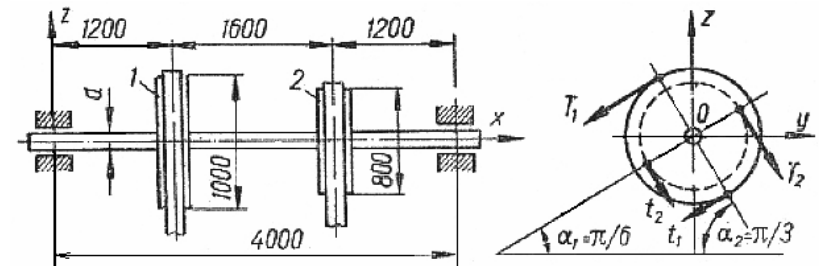
$$\sigma_{\dot{\sigma}\dot{\sigma}\dot{\sigma}}^{\nu} = \sqrt{\sigma_{\dot{\sigma}\dot{\sigma}}^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma] \quad (7.5)$$

##### Рекомендації до розв'язання задачі №7

1. В першу чергу необхідно визначити зовнішні крутні моменти, прикладені до шківів.
2. Визначити зусилля в пасах шківів, після чого завантажити цими силами вал як двоопорну балку і визначити реакції опор в горизонтальній та вертикальних площинах.
3. За отриманими реакціями побудувати епюри згинальних моментів в обох площинах, а також сумарну епюру моментів та перевірити міцність вала за III і IV гіпотезами.

##### Приклад розв'язання задачі №7

Вал трансмісії (мал. 21) обертається з кутовою швидкістю  $\omega = 41$  рад/с і передає потужність  $N = 70$  кВт. Підібрати діаметр вала при допустимому напруженні  $[\sigma] = 80$  МПа, округливши його величину до стандартного розміру. Зусилля в частині паса, що збігає, прийняти в два рази більше, ніж у тій, що набігає. Відстані на малюнку  $a = 1,2$  м;  $b = 1,6$  м;  $c = 1,2$  м. Діаметри шківів  $D_1 = 1,0$  м і  $D_2 = 0,8$  м. Кути нахилу віток ремня відповідно  $\alpha_1 = 30^\circ$ ,  $\alpha_2 = 60^\circ$ .



Мал. 21. Вал трансмісії

Визначаємо зовнішні закручуючі моменти, прикладені до шківів 1 і 2

$$\dot{I}_{\epsilon_1} = \dot{I}_{\epsilon_2} = \frac{N}{\omega} = \frac{70000}{60 \cdot 41} = 1707 (\dot{I} \cdot \dot{i}).$$

Колові зусилля в частинах пасів, що набігають

$$t_1 = \frac{M_{\epsilon 1}}{D_1/2} = \frac{1707}{0,5} = 3414(H); \quad t_2 = \frac{M_{\epsilon 2}}{D_2/2} = \frac{1707}{0,4} = 4268(H).$$

Колові зусилля в частинах пасів, що збігають

$$T_1 = 2t_1 = 2 \cdot 3414 = 6828(H), \quad T_2 = 2t_2 = 2 \cdot 4268 = 8536(H).$$

Визначаємо горизонтальні складові поперечних сил, які згинають вал

$$\dot{I}_1 = (\dot{O}_1 + t_1) \cos \alpha_1 = (6828 + 3414) \cdot 0,866 = 8870(H);$$

$$\dot{I}_2 = (\dot{O}_2 + t_2) \cos \alpha_2 = (4268 + 8536) \cdot 0,5 = 6400(H).$$

Визначаємо вертикальні складові поперечних сил, які згинають вал

$$V_1 = (\dot{O}_1 + t_1) \sin \alpha_1 = (6828 + 3414) \cdot 0,5 = 5120(H);$$

$$V_2 = (\dot{O}_2 + t_2) \sin \alpha_2 = (4268 + 8536) \cdot 0,866 = 11090(H).$$

Завантажуємо цими силами вал як балку, що лежить на двох опорах, і знаходимо реакції від сил, які діють в горизонтальній площині

$$\dot{A}_{\dot{a}\dot{a}\dot{o}} = \frac{\dot{I}_1(b+c) - H_2c}{a+b+c} = \frac{8870 \cdot 2,8 - 6400 \cdot 1,2}{4} = 4289(H);$$

$$B_{\dot{a}\dot{a}\dot{o}} = \frac{\dot{I}_1a - H_2(a+b)}{a+b+c} = \frac{8870 \cdot 1,2 - 6400 \cdot 2,8}{4} = -1819(H).$$

Знаходимо реакції від сил, які діють в вертикальній площині

$$\dot{A}_{\dot{a}\dot{a}\dot{o}} = \frac{V_1(b+c) + V_2c}{a+b+c} = \frac{5120 \cdot 2,8 + 11090 \cdot 1,2}{4} = 6911(H);$$

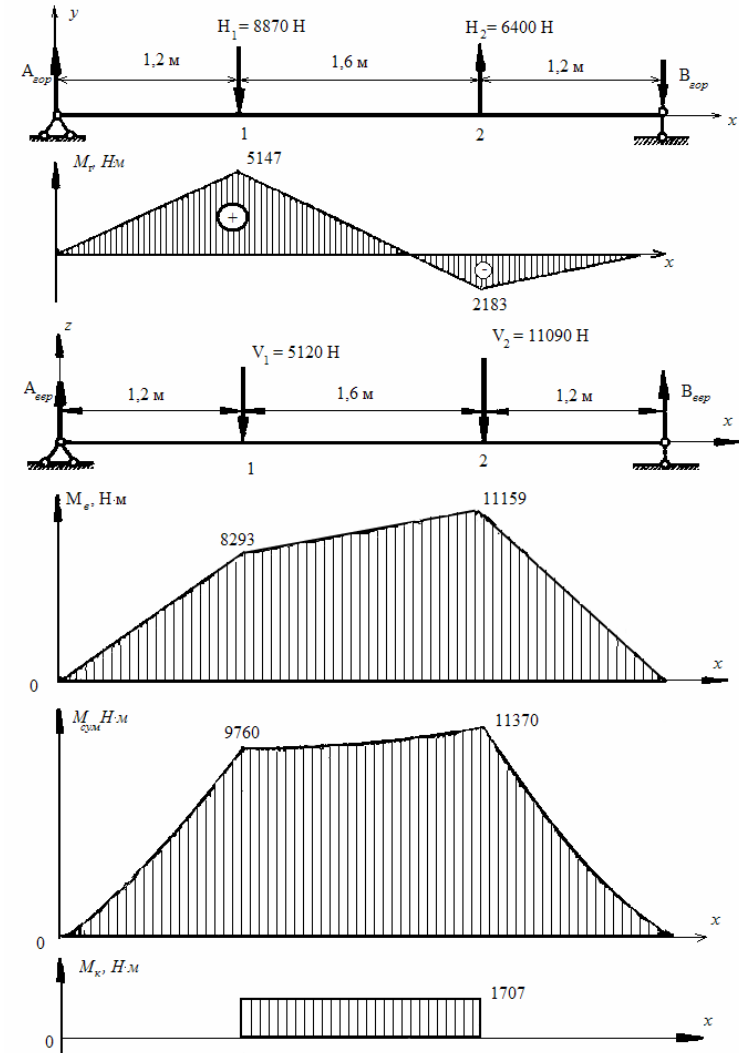
$$B_{\dot{a}\dot{a}\dot{o}} = \frac{V_1a + V_2(a+b)}{a+b+c} = \frac{5120 \cdot 1,2 + 11090 \cdot 2,8}{4} = 9299(H).$$

Визначаємо згинальні моменти в перерізах під шківками 1 і 2:

- від дії горизонтальних сил

$$\dot{I}_{a1} = \dot{A}_{\dot{a}\dot{a}\dot{o}} \dot{a} = 4289 \cdot 1,2 = 5147(\dot{I} \cdot i);$$

$$\dot{I}_{a2} = -\dot{A}_{\dot{a}\dot{a}\dot{o}} \dot{b} = -1819 \cdot 1,2 = -2183(\dot{I} \cdot i).$$



Мал. 22. Епюри моментів

- від дії вертикальних сил

$$\dot{I}_{a1} = \dot{A}_{\dot{a}\dot{a}\dot{o}} \dot{a} = 6911 \cdot 1,2 = 8293(\dot{I} \cdot i);$$

$$\dot{I}_{a2} = \dot{A}_{\dot{a}\dot{a}\dot{o}} \dot{b} = 9299 \cdot 1,2 = 11159(\dot{I} \cdot i).$$

Сумарні згинальні моменти в перерізах під шківками

$$\dot{I}_1 = \sqrt{\dot{I}_{a1}^2 + \dot{I}_{a1}^2} = \sqrt{5147^2 + 8293^2} = 9760(\dot{I});$$

$$\dot{I}_2 = \sqrt{\dot{I}_{a2}^2 + \dot{I}_{a2}^2} = \sqrt{2183^2 + 11159^2} = 11370(\dot{I}).$$

Будуємо в довільному масштабі епюри згинальних моментів в горизонтальній та вертикальній площинах, епюру сумарних згинальних моментів та епюру крутних моментів (мал. 22).

З сумарної епюри видно, що найбільший згинаючий момент буде в перерізі під другим шківом. Цей переріз вважаємо за небезпечний. За третьою теорією міцності розрахунковий момент дорівнює

$$\dot{I}_\delta = \sqrt{\dot{I}_2^2 + \dot{I}_\epsilon^2} = \sqrt{11370^2 + 1707^2} = 11498(\dot{I}).$$

Визначасмо діаметр валу за заданим допустимим напруженням

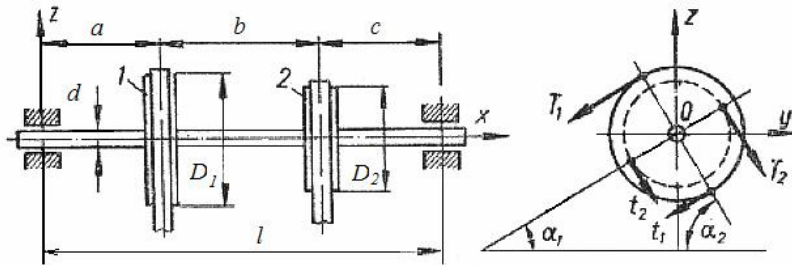
$$d = \sqrt[3]{\frac{32M_\delta}{\pi[\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 11498}{3,14 \cdot 80 \cdot 10^6}} = 0,114(i) = 114(ii).$$

Округляємо одержаний розмір до стандартного, прийнявши його рівним

$$d = 115(ii).$$

#### Контрольне завдання №7

Вал трансмісії (мал. 23) обертається з кутовою швидкістю  $\omega$  рад/с і передає потужність  $N$  кВт.



Мал. 23. Вал трансмісії

Підібрати діаметр валу при допустимому напруженні  $[\sigma] = 80$  МПа, округливши його величину до стандартного розміру. Зусилля в частині паса, що збігає, прийняти в два рази більше, ніж у тій, що набігає. Дані узяті з таблиці 7.

Таблиця 7

номер варіанту	$N$ , кВт	$n$ , об/хв	$a$ , м	$b$ , м	$c$ , м	$D_1$ , м	$D_2$ , м	$\alpha_1$ , град	$\alpha_2$ , град
1	10	100	1,1	1,1	0,6	1,1	1,1	30	45
2	20	200	1,2	0,6	0,7	1,2	1,6	45	60
3	30	300	1,3	0,7	0,8	1,3	1,7	60	30
4	40	400	0,4	0,8	0,9	1,4	1,8	30	45
5	50	500	0,5	0,9	1,0	1,5	1,9	45	60
6	60	600	0,6	1,0	1,2	1,6	1,0	60	30
7	70	700	0,7	1,2	1,3	1,7	1,2	30	45
8	80	800	0,8	1,3	1,4	1,8	1,3	45	60
9	90	900	0,9	1,4	1,5	1,9	1,4	60	30
10	100	100	1,0	1,5	1,6	1,0	1,5	30	45
11	110	200	1,2	1,6	1,1	1,2	1,6	45	60
12	120	300	1,3	1,1	1,2	1,3	1,1	60	30
13	130	400	1,4	1,2	0,6	1,4	1,2	30	45
14	140	500	1,5	1,3	0,7	1,5	1,3	45	60
15	140	600	1,6	0,4	0,8	1,6	1,4	60	30
16	130	700	1,1	0,5	0,9	1,1	1,5	30	45
17	120	800	1,2	0,6	1,0	1,2	1,6	45	60
18	110	900	1,3	0,7	1,2	1,3	1,7	60	30
19	100	100	0,4	0,8	1,3	1,4	1,8	30	45
20	90	200	0,5	0,9	1,4	1,5	1,9	45	60
21	80	300	0,6	1,5	1,5	1,6	1,5	60	30
22	70	400	0,7	1,6	1,6	1,7	1,6	30	45
23	60	500	0,8	1,1	1,1	1,8	1,1	45	60
24	50	600	0,9	1,2	1,2	1,9	1,2	60	30
25	40	700	1,0	1,3	1,3	1,0	1,3	30	45
26	30	800	1,2	0,4	0,4	1,2	1,4	45	60
27	20	900	1,3	0,5	0,5	1,3	1,5	60	30
28	10	1000	1,4	0,6	0,6	1,4	1,6	30	45
29	50	1200	1,5	0,7	0,6	1,5	1,7	45	60
30	70	1400	1,6	0,8	0,7	1,6	1,8	60	30

#### Контрольні питання

1. Коли у стержні має місце згин і кручення?
2. Назвіть загальні умови міцності за III і IV теоріями при згині з крученням.
3. Вкажіть порядок розрахунку міцності валу при згині з крученням.
4. Скільки силових чинників виникає при згині з крученням.

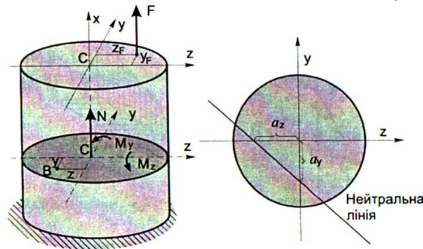


## 8. Складний опір: позацентровий розтяг або стиск

### Теоретичні відомості

Позацентровий розтяг (стиск) зумовлений навантаженням, рівнодійна якого  $F$ , що паралельна до осі  $x$ , прикладена в точці  $z_F, y_F$  (мал. 24). Якщо точка, де прикладена внецентрено сила  $F$ , не лежить на жодній з головних осей поперечного перерізу, то матиме місце одночасний згин відносно обох головних осей. У цьому випадку в перерізах стержня виникають:

- поздовжня сила  $N = F$ ;
- згинальні моменти  $M_z = F \cdot y_F$  і  $M_y = F \cdot z_F$ .



Мал. 24. Позацентровий розтяг стержня.

Нормальне напруження в точці В перерізу (8.1)

$$\sigma(\delta, z) = \pm \frac{N}{A} \pm \frac{I_{\delta z}}{I_y} \pm \frac{I_{\delta z}}{I_z},$$

де  $A$  – площа поперечного перерізу. При позацентровому розтягу у формулі залишають знак «+», а при стиску «-».

*Ексцентриситет лінії дії* – відстань від точки, де прикладена сила, до його осі.

*Нейтральна лінія* – лінія, на якій нормальні напруження дорівнюють нулю. Це завжди пряма лінія, що відсікає на осях  $y, z$  відрізки

$$\delta_y = \frac{I_z}{A z_F}, \quad \delta_z = \frac{I_y}{A y_F}. \quad (8.2)$$

При позацентровому розтягу (стиску) нейтральна лінія не проходить через центр тяжіння перерізу. Залежно від координат точки прикладання сили  $F$  нейтральна лінія може проходити поза перерізом, дотикатись до нього або перетинати його. В останньому випадку в перерізі виникають як розтягуючі, так і стискуючі напруження. Найбільші значення напружень виникають у точках, найбільш віддалених від нейтральної лінії.

*Ядро перерізу* – область навколо центра перерізу, яка характерна тим, що будь-яка позацентрово прикладена в ній сила викликає по всьому перерізу напруження того самого знаку, що і прикладена сила.

Напруження в точках поперечного перерізу стержня залежать від координат точки прикладання сили, характеристик поперечного перерізу та розраховуються по формулі

$$\sigma = \frac{P}{F} \left( 1 + \frac{y_p y}{i_z^2} + \frac{z_p z}{i_y^2} \right), \quad (8.3)$$

де  $i_y$  та  $i_z$  – радіуси інерції перерізу.

Для позацентрово стиснутих стержнів, виготовлених із крихких матеріалів, є небажаною поява розтягуючі напружень, оскільки це може призвести до появи тріщин. Щоб цього не сталося, позацентрову силу слід прикладати в межах ядра перерізу.

Умова міцності для матеріалу, що неоднаково працює на розтяг і стиск

$$\sigma_{\delta} \leq [\sigma_{\delta}], \quad \sigma_{\delta} \leq [\sigma_{\delta}] \quad (8.4)$$

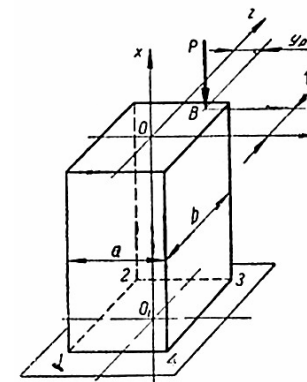
Умова міцності для матеріалу, що однаково працює на розтяг і стиск

$$|\sigma| \leq [\sigma] \quad (8.5)$$

### Приклад розв'язання задачі №8

Цегляний стовп квадратного поперечного перерізу ( $a = b = 80$  см)

навантажений поздовжньою стискуючою силою  $P = 240$  кН, прикладеною в точці В з координатами  $y_p = 25$  см,  $z_p = 35$  см (мал. 25). Треба: побудувати ядро перерізу; визначити напруження в точках 1, 2, 3 і 4 поперечного перерізу стовпа (без врахування його сили ваги); побудувати епюри нормальних напружень для контурних точок перерізу 1, 2, 3 і 4; знайти положення нейтральної осі перерізу.



Мал. 25. Приклад розв'язання задачі

1. Побудова ядра перерізу.

Знаходимо розміри ядра перерізу, тобто тієї частини перерізу, при прикладанні всередині якої стискуючої сили  $P$  в перерізі не виникнуть розтягуючі напруження.

Момент інерції квадратного перерізу

$$I_z = \frac{ab^3}{12} = \frac{a^4}{12}.$$

Радіуси інерції для квадратного перерізу мають однакову величину

$$i_y = i_z = \sqrt{\frac{I_z}{F}} = \sqrt{\frac{a^4}{12a^2}} = \sqrt{\frac{a^2}{12}}.$$

Координати точок контуру ядра перерізу знаходимо за формулами:

$$y_p = \frac{i_z^2}{a_y}; \quad z_p = \frac{i_y^2}{a_z}.$$

Оскільки нейтральна лінія повинна дотикатись до контуру перерізу, то вважаємо координатні відрізки

$$a_y = a_z = \frac{a}{2} \Rightarrow y_p = z_p = \frac{a}{2} = \frac{a^2 \cdot 2}{12 \cdot a} = \frac{a}{6} = \frac{80}{6} = 13,3(\text{нї}).$$

2. Напруги в точках 1, 2, 3 і 4 поперечного перерізу стовпа знаходимо за формулою:

$$\sigma = -\frac{P}{F} \left( 1 + \frac{y_p y}{i_z^2} + \frac{z_p z}{i_y^2} \right) = -\frac{P}{a^2} \left[ 1 + \frac{12}{a^2} (y_p y + z_p z) \right].$$

Для точки 1 з координатами  $y_1 = -40$  см,  $z_1 = -40$  см:

$$\sigma_1 = -\frac{240\,000}{80^2 \cdot 10^{-4}} \left( 1 - \frac{12}{80^2 \cdot 10^{-4}} (0,25 \cdot 0,4 + 0,35 \cdot 0,4) \right) = 1,31(\text{нїа}).$$

Для точки 2 з координатами  $y_2 = -40$  см,  $z_2 = 40$  см:

$$\sigma_2 = -\frac{240\,000}{80^2 \cdot 10^{-4}} \left[ 1 + \frac{12}{80^2 \cdot 10^{-4}} (-0,25 \cdot 0,4 + 0,35 \cdot 0,4) \right] = -0,66(\text{нїа}).$$

Для точки 3 з координатами  $y_3 = 40$  см,  $z_3 = 40$  см:

$$\sigma_3 = -\frac{240\,000}{80^2 \cdot 10^{-4}} \left[ 1 + \frac{12}{80^2 \cdot 10^{-4}} (0,25 \cdot 0,4 + 0,35 \cdot 0,4) \right] = -2,06(\text{нїа}).$$

Для точки 4 з координатами  $y_4 = 40$  см,  $z_4 = -40$  см:

$$\sigma_4 = -\frac{240\,000}{80^2 \cdot 10^{-4}} \left( 1 + \frac{12}{80^2 \cdot 10^{-4}} (0,25 \cdot 0,4 - 0,35 \cdot 0,4) \right) = -0,09(\text{нїа}).$$

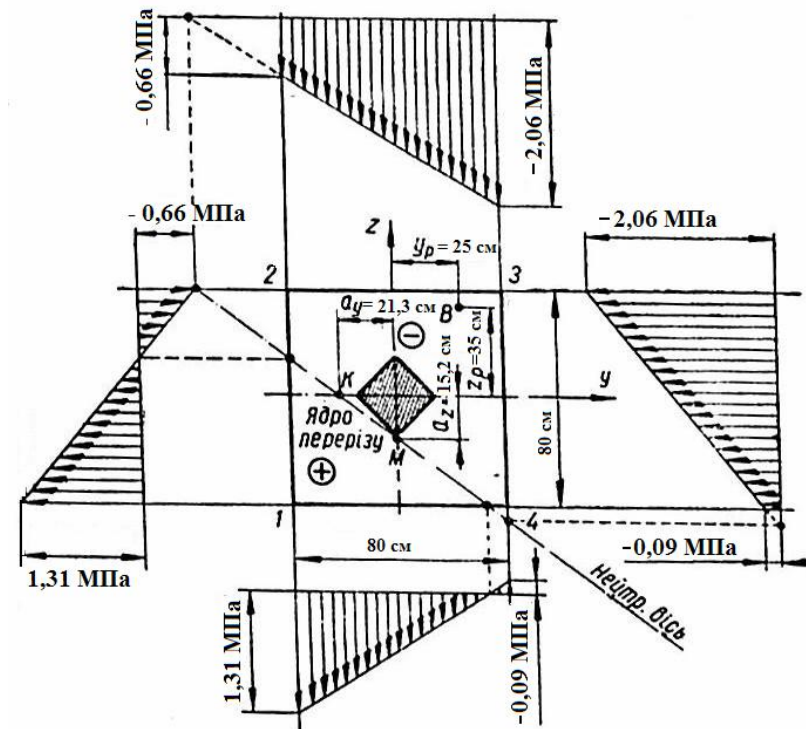
3. Будуємо епюри нормальних напружень для контурних точок перерізу (мал. 26).

$$a_y = -\frac{i_z^2}{y_p} = -\frac{a^2}{12y_p} = -\frac{80^2}{12 \cdot 25} = -21,3(\text{нї});$$

$$a_z = -\frac{i_y^2}{z_p} = -\frac{a^2}{12z_p} = -\frac{80^2}{12 \cdot 35} = -15,2(\text{нї}).$$

4. Положення нейтральної осі перерізу знаходимо за допомогою відрізків, які вона відсікає на координатних осях:

Відкладаємо отримані відрізки на координатних осях, після чого отримуємо точки К і М. Через ці точки і проводимо нейтральну вісь.



Мал. 26. Графічна інтерпретація розрахунків

### Контрольне завдання №8

Цегляний стовп прямокутного поперечного перерізу навантажений поздовжньою стискуючою силою  $P$ , прикладеною в точці В з координатами  $y_p, z_p$  (мал. 25). Треба:

- 1) побудувати ядро перерізу;
  - 2) визначити напруження в точках 1, 2, 3 і 4 поперечного перерізу стовпа (без врахування його сили ваги);
  - 3) побудувати епюри нормальних напружень для контурних точок перерізу 1, 2, 3 і 4;
  - 4) знайти положення нейтральної осі перерізу.
- Розрахункові дані взяти з табл. 8.

Таблиця 8

№ варіанту	$P, \text{кН}$	$a, \text{см}$	$b, \text{см}$	$y_D, \text{см}$	$z_D, \text{см}$
1	100	30	35	6,0	8,0
2	110	31	36	6,2	8,2
3	120	32	37	6,4	8,4
4	130	33	38	6,6	8,6
5	140	34	39	6,8	8,8
6	150	35	40	7,0	9,0
7	160	36	41	7,2	9,2
8	170	37	42	7,4	9,4
9	180	38	43	7,6	9,6
10	190	39	44	7,8	9,8
11	200	40	45	8,0	10,0
12	210	41	46	8,2	10,2
13	220	42	47	8,4	10,4
14	230	43	48	8,6	10,6
15	240	44	49	8,8	10,8
16	250	45	50	9,0	11,0
17	240	46	51	9,2	11,2
18	230	47	52	9,4	11,4
19	210	48	53	9,6	11,6
20	200	49	54	9,8	11,8
21	190	50	55	10,0	12,0
22	180	49	54	10,2	12,2
23	170	48	53	10,4	12,4
24	160	47	52	10,6	12,6
25	150	46	51	10,8	12,8
26	140	45	50	11,0	13,0
27	130	44	49	10,0	13,2
28	120	43	48	9,5	13,4
29	110	42	47	9,0	13,6
30	100	41	46	8,5	13,8

## Контрольні питання

1. Що таке позacentровий розтяг (стиск)?
2. Поясніть формулу для нормальних напружень при позacentровому розтягу (стиску).
3. Що таке нейтральна лінія?
4. В яких точках виникають найбільші напруження при позacentровому розтягу (стиску)?

## 9. Розрахунок статично невизначної рами

## Теоретичні відомості

*Стержнева система* – всяка конструкція, що складається з елементів у формі бруса. Якщо елементи стержневої системи працюють в основному на згин або кручення, то система називається *рамою*.

У плоскій рамі осі всіх складових елементів розташовані в одній площині. У цій же площині діють всі зовнішні сили, включаючи і реакції опор.

*Статично визначні рами* – системи, для яких всі реакції опор можуть бути знайдені за допомогою рівнянь статички, а потім через реакції можуть бути знайдені всі внутрішні силові чинники в будь-якому перерізі.

*Статично невизначні рами* – системи, для яких реакції опор не можуть бути знайдені лише за допомогою рівнянь статички.

Найбільш широко вживаним в машинобудуванні методом розрахунку статично невизначних систем є метод сил. Він полягає в тому, що вихідна система звільняється від додаткових зв'язків, дія яких замінюється силами і моментами. Їх величина повинна відповідати обмеженням, які накладалися на систему відкинутими зв'язками. При даному способі розрахунку невідомими виявляються сили, що і дало назву методу.

## Рекомендації до розв'язання задачі №9

1. Встановити ступінь статичної невизначності системи, тобто кількість зайвих зв'язків.
2. Вибрати для заданої системи основну систему – статично визначну та геометрично незмінну. Завантажити основну систему заданими навантаженнями і зайвими невідомими.
3. Записати рівняння переміщень, прирівнявши до нуля переміщення точок основної системи в напрямках відкинутих зайвих зв'язків:

- для один раз невизначної системи

$$\delta_{11} \tilde{O}_1 + \Delta_{1F} = 0; \quad (9.1)$$

-для два рази невизначної системи

$$\delta_{11} \tilde{O}_1 + \delta_{12} X_2 + \Delta_{1F} = 0; \quad \delta_{21} \tilde{O}_1 + \delta_{22} X_2 + \Delta_{2F} = 0. \quad (9.2)$$

4. Користуючись способом Верещагіна визначити переміщення  $\delta_{ij}$  і  $\Delta_{iF}$ .
5. З рівнянь переміщень визначити зайві невідомі  $X_i$ .

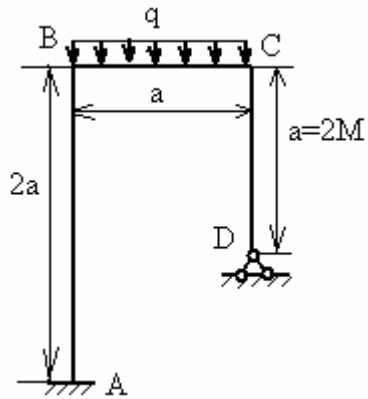
6. Знайти значення згинальних моментів у характерних точках рами, побудувати епюри поздовжніх сил  $N$ , поперечних сил  $Q(x)$  і згинальних моментів  $M(x)$  для заданої рами.

Приклад розв'язання задачі №9

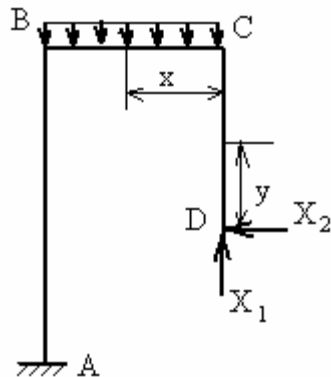
Необхідно розрахувати раму, зображену на мал. 27. Жорсткість всіх елементів вважати постійною:  $EI = \text{const}$ .

1. Встановлюємо міру статичної невизначності рами. Знаходимо загальне число невідомих, яке дорівнює п'яти:

- а) горизонтальна реакція в опорі А;
- б) вертикальна реакція в опорі А;
- в) реактивний момент в опорі А;
- г) горизонтальна реакція в опорі D;
- д) вертикальна реакція в опорі D.



Мал. 27. Задана система



Мал. 28. Основна система

Для плоскої системи сил можна скласти три рівняння рівноваги:

$$\sum X = 0; \sum Y = 0; \sum M = 0.$$

Число невідомих на два перевищує число рівнянь, тому дана рама двічі статично невизначна.

2. Вибираємо основну систему, тобто таку раму, яка є статично визначною і може бути отримана із заданої рами шляхом відкидання зайвих зв'язків і заміни їх невідомими реакціями.

На мал. 28 зображена основна система у вигляді рами, затисненої в точці А і з вільним кінцем в точці D. Опора в точці D відкинута і її дія на раму замінена невідомими реакціями  $X_1$  і  $X_2$ .

3. Для визначення зайвих невідомих складаємо канонічні рівняння, які в разі двох невідомих виглядають так:

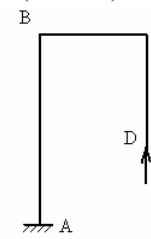
$$X_1\delta_{11} + X_2\delta_{12} + \Delta_{1p} = 0;$$

$$X_1\delta_{21} + X_2\delta_{22} + \Delta_{2p} = 0,$$

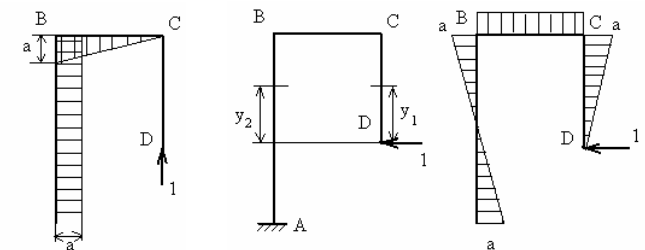
де  $\delta_{11}$  – вертикальне переміщення точки D від сили  $X_1 = 1$ ;  $\delta_{12}$  – вертикальне переміщення точки D від горизонтальної одиничної сили;  $\delta_{21}$  – горизонтальне переміщення точки D від вертикальної одиничної сили;  $\delta_{22}$  – горизонтальне переміщення точки D від горизонтальної одиничної сили;  $\Delta_{1p}$  – вертикальне переміщення точки D від заданого навантаження;  $\Delta_{2p}$  – горизонтальне переміщення точки D від заданого навантаження.

Перше рівняння показує, що сумарне вертикальне переміщення точки D від заданого навантаження і від сил  $X_1$  і  $X_2$  дорівнює нулю; друге рівняння показує, що сумарне горизонтальне переміщення від заданого навантаження і від сил  $X_1$  і  $X_2$  дорівнює нулю.

4. Визначення переміщень, що входять в канонічні рівняння, проводять за способом Верещагіна. Для цього прикладають в точці D вертикальну одиничну силу і будують епюру згинальних моментів (мал. 29). Далі прикладають в точці D горизонтальну одиничну силу і будують епюру M (мал. 30).



Мал. 29. Згин від вертикальної сили



Мал. 30. Згин від горизонтальної сили

Коротко пояснимо побудову однієї з епюр, наприклад під дією горизонтальної сили (мал. 30). Роблячи обхід по контуру рами, враховуємо сили, розташовані лише по одну сторону від даного перерізу і починаємо побудову з правої стійки CD. Згинальний момент для цієї стійки викликає розтягування зовнішніх волокон, тому його умовно вважаємо від'ємним; у точці D момент дорівнює нулю. По мірі наближення до

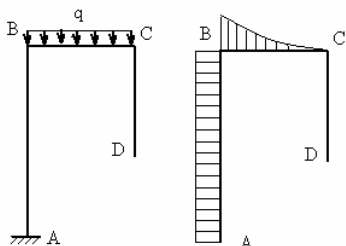
точки С плече сили зростає за законом прямої лінії, згинальний момент також змінюється по прямолінійному закону:

$$M_{DC} = -I \cdot y_l \text{ при } 0 \leq y_l \leq a; \quad M = 0 \text{ при } y_l = 0; \quad M = -a \text{ при } y_l = a.$$

Переходимо до горизонтального елемента – ригеля СВ. Тут плече одиничної сили залишається весь час постійним, отже

$$M_{CB} = -a.$$

Для стійки ВА (мал. 30) плече одиничної горизонтальної сили для довільного перерізу, рівне  $y_2$ , змінюється згідно із законом прямої лінії; для верхньої половини стійки розтягнуті волокна розташовані з лівого боку, для нижньої – з правого. Абсолютні величини згинальних моментів в точках А і В однакові і рівні  $a$ , але їх знаки різні.



Побудова останніх двох епюр М проведена аналогічно: ригель в обох випадках працює як консольна балка. Згинальний момент на лівій стійці є величиною, постійною як від вертикальної одиничної сили, так і від заданого навантаження.

Мал. 31. Згин від заданого навантаження

Далі окремо розглядають дію заданого навантаження і також будують епюру М (мал. 31). Всі епюри М побудовані з боку розтягнутого волокна.

Переходимо до визначення переміщень. Спосіб Верещагіна зводить цю операцію до перемноження епюр. Воно полягає в тому, що для кожної ділянки рами, в межах якої хоч би одна з цих епюр є прямолінійною, обчислюють площу  $F_M$  і помножують її на ординату іншої епюри, відповідну центру тяжіння першої епюри:

$$\delta = \frac{F_M \cdot y_c}{EI}.$$

Наприклад, для обчислення переміщення  $\delta_{11}$  потрібно епюру М, що зображена на мал. 18, помножити на таку ж епюру.

По ригелю СВ площа епюри М (мал. 29) дорівнює  $0,5a \cdot a = 0,5a^2$ . Центр тяжіння трикутника знаходиться на відстані  $2a/3$  від точки С. Ордината такої ж епюри М на відстані  $2a/3$  від точки С дорівнює  $2a/3$ . Отже, по ригелю

$$\frac{F_M \cdot y_c}{EI} = \frac{r}{2} \cdot r \cdot \frac{2r}{3} \cdot \frac{1}{EI} = \frac{a^3}{3EI}.$$

Здійснивши подібне множення по стійці, отримаємо

$$\frac{F_M \cdot y_c}{EI} = \frac{a \cdot 2a \cdot a}{EI} = \frac{2a^3}{EI}.$$

Остаточно отримуємо

$$\delta_{11} = \frac{a^3}{3EI} + \frac{2a^3}{EI} = \frac{7a^3}{EI}.$$

Для обчислення  $\delta_{12}$  треба епюру М, зображену на мал. 29 помножити на епюру М, зображену на мал. 30. По правій стійці отримаємо нуль, оскільки всі ординати першої епюри тут дорівнюють нулю. По лівій стійці отримаємо нуль: площа прямокутника (мал. 29) рівна  $a \cdot 2a = 2a^2$ , але ордината другої епюри (мал. 30), відповідна центру тяжіння прямокутника, дорівнює нулю. По ригелю отримаємо:

$$\delta_{12} = \frac{-1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot a \cdot a = -\frac{a^3}{2EI}.$$

Знак мінус поставлений тому, що ординати епюр М відкладені в різні боки.

По теоремі про взаємність переміщень

$$\delta_{21} = \delta_{12} = -\frac{a^3}{2EI}.$$

При обчисленні  $\delta_{22}$  треба помножити саму на себе епюру М, зображену на мал. 30. Тут є три однакові трикутники і один прямокутник:

$$\delta_{22} = \frac{1}{EI} \left( 3 \cdot \frac{a}{2} \cdot a \cdot \frac{2a}{3} + a \cdot a \cdot a \right) = \frac{2a^3}{EI}.$$

Переміщення  $\delta_{11}$  і  $\delta_{22}$  називаються головними переміщеннями. Вони завжди є додатними величинами.

При обчисленні переміщень від навантаження  $\Delta_{1p}$  і  $\Delta_{2p}$  площу  $F_M$  треба брати обов'язково з криволінійної епюри, а ординату  $y_c$  – з прямолінійної:

$$\Delta_{1p} = -\frac{1}{EI} \left( \frac{1}{3} \cdot \frac{qa^2}{2} \cdot a \cdot \frac{3a}{4} + \frac{qa^2}{2} \cdot 2a \cdot a \right) = -\frac{9qa^4}{8EI}.$$

У першому доданку в дужках коефіцієнт  $1/3$  вводитьься при визначенні площі параболи, величина  $3a/4$  означає ординату трикутної епюри М, відповідну центру тяжіння параболічної епюри, що знаходиться на відстані  $3a/4$  від точки С:

$$\Delta_{2p} = \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{qa^2}{2} \cdot a \cdot a = \frac{qa^4}{6EI}.$$

5. Підставляємо знайдені величини переміщень в канонічні рівняння

$$X_1 \frac{7a^3}{3EI} - X_2 \frac{a^3}{2EI} - \frac{9qa^4}{8EI} = 0;$$

$$-X_1 \frac{a^3}{2EI} + X_2 \frac{2a^3}{EI} - \frac{qa^4}{6EI} = 0.$$

Після спрощення отримуємо

$$56X_1 - 12X_2 - 27qa = 0$$

$$-3X_1 + 12X_2 + qa = 0$$

Розв'язання цих рівнянь дає

$$\check{O}_1 = \frac{26qa}{53} = \frac{26 \cdot 3 \cdot 2}{53} = 2,94 (\text{Г}),$$

$$\check{O}_2 = \frac{25qa}{636} = \frac{26 \cdot 3 \cdot 2}{636} = 0,235 (\text{Г}).$$

У обох випадках отримали знак +. Це означає, що напрям реакцій збігається з наперед вибраним.

6. Подальший хід рішення такий же, як і в статично визначному завданні. Для побудови епюр врахуємо вплив вже відомих сил  $X_1$  і  $X_2$ .

При побудові епюри  $M$  для правої стійки отримуємо:

$$M_{CD} = -X_2 y_1 = -0,235 y_1 \text{ при } 0 \leq y_1 \leq 2 \text{ м}; M = 0 \text{ при } y_1 = 0;$$

$$M = -0,47 \text{ Н}\cdot\text{м при } y_1 = 2 \text{ м}.$$

Для ригеля

$$\check{E}_{\check{N}A} = -\check{O}_2 r + \check{O}_1 \check{o} - \frac{qx^2}{2} = -0,47 + 2,94x - 1,5x^2; 0 \leq x \leq 2 \text{ м}.$$

Задаючи  $x$  різні значення, будемо по точках епюру  $M$ .

Для визначення  $M_{max}$  знаходимо першу похідну:

$$\frac{dM}{dx} = X_1 - qx.$$

Прирівняв до нуля цей вираз, визначимо значення  $x$ , при якому згинальний момент є максимальним:

$$0 = X_1 - qx \Rightarrow x = \frac{X_1}{q} = \frac{2,94}{3} = 0,98 \text{ м}.$$

Далі знаходимо

$$M_{max} = -0,47 + 2,94 \cdot 0,98 - 1,5 \cdot 0,98^2 = 0,97 \text{ Н}\cdot\text{м}.$$

На лівій стійці момент, що вигинає, змінюється за лінійним законом.

Згори стійки:

$$\check{I}_A = -\frac{qa^2}{2} - X_2 a + X_{1a} = -1,5 \cdot 2^2 - 0,235 \cdot 2 + 2,94 \cdot 2 = -0,59$$

Н·м.

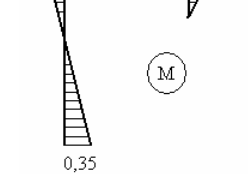
Абсолютна величина перших два доданків виявилася більша за величину третього доданку, отже, розтягнутими є зовнішні волокна.

Внизу стійки:

$$\check{I}_A = -\frac{qa^2}{2} + X_2 a + X_{1a} = -1,5 \cdot 2^2 + 0,235 \cdot 2 + 2,94 \cdot 2 = 0,35 \text{ Н}\cdot\text{м}.$$

Тут розтягнуті внутрішні волокна.

Остаточно епюра  $M$  зображена на мал. 21. При множенні цієї епюри на будь-яку з одиничних епюр виходить нуль, оскільки переміщення точки  $D$  заданої рами і по вертикалі і по горизонталі дорівнює нулю.



Мал. 32. Остаточна епюра моментів

Використовуємо цю властивість з метою перевірки епюри  $M$ . Помножимо її на другу одиничну епюру (мал. 30). По правій стійці потрібно буде помножити трикутник на трикутник. Епюру  $M$

по ригелю (мал. 32) можна представити як суму двох епюр: трапецієвидної, побудованої зовні, і симетричної параболічної, побудованої усередині рами (максимальна ордината останньої епюри рівна  $qa^2/8$ ). По лівій стійці епюру  $M$  (мал. 32) можна теж представити як суму двох епюр: трикутної, побудованої зовні на всій довжині стійки, з максимальною ординатою в точці  $B$ , і трикутної, побудованої усередині, з максимальною ординатою в точці  $A$ .

Враховуючи все, сказане вище і відкидаючи постійний множник  $1/EI$ , отримуємо:

$$\frac{1}{2} \cdot 0,47 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 + \frac{1}{2} (0,59 + 0,47) \cdot 2 \cdot 2 - \frac{2}{3} \cdot \frac{3 \cdot 2^2}{8} \cdot 2 \cdot 2 +$$

$$\frac{1}{2} \cdot 0,59 \cdot 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 0,35 \cdot 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot 2 = 0,627 + 2,12 - 4 + 0,787 + 0,467$$

$$4,001 - 4 \approx 0.$$

Майже точна рівність вказує на правильність розрахунків.

Перейдемо до побудови епюри поперечних сил  $Q$ . По правій стійці поперечна сила постійна:

$$Q_{DC} = X_2 = 0,235 (\text{Н}).$$

По ригелю величина  $Q$  змінюється за лінійним законом:

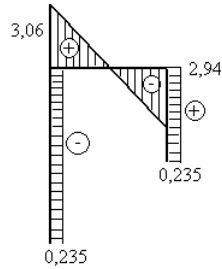
$$Q_{CB} = -X_1 + qx \text{ при } 0 \leq x \leq 2 \text{ м}; Q = -X_1 = -2,94 \text{ Н при } x = 0$$

$$Q = -2,94 + 3 \cdot 2 = 3,05 \text{ Н при } x = 2 \text{ м} .$$

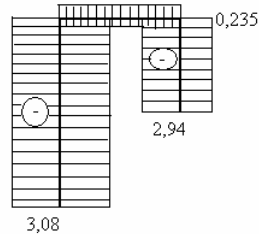
По лівій стійці поперечна сила постійна і дорівнює горизонтальній опорній реакції в точці А, яка дорівнює силі  $X_2$ :

$$Q_{AB} = -X_2 = -0,235 \text{ Н}.$$

Для перевірки  $Q_{AB}$  можна знайти як тангенс кута нахилу епюри М по лівій стійці до осі відліку:



Мал. 33. Епюра Q



Мал. 34. Епюра N

$$Q_{AB} = -\frac{0,59 + 0,35}{4} = -0,235 \text{ (І)} .$$

Епюра  $Q$  зображена на малюнку 33.

Будуємо епюри поздовжніх сил  $N$ . По правій стійці:

$$N_{DC} = -X_1 = -2,94 \text{ Н (стиск)}.$$

По ригелю

$$N_{CB} = -X_2 = -0,235 \text{ Н (стиск)}.$$

По лівій стійці поздовжня сила дорівнює алгебраїчній сумі сили  $X_1$ , направленої вгору, і рівнодійної вертикального навантаження, направленого вниз:

$$N_{BA} = 2,94 - 3 \cdot 2 = -3,06 \text{ Н (стиск)}.$$

Епюра  $N$  зображена на мал. 34. Вона побудована симетрично відносно осі кожного стержня.

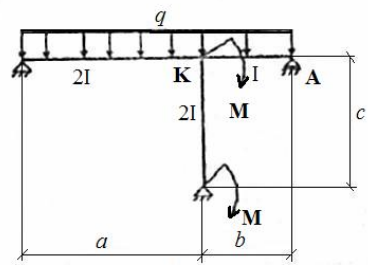
### Контрольне завдання № 9

Потрібно розрахувати статично невизначну конструкцію рамного типу, схема якої наведена в відповідному варіанті завдання. При розрахунку

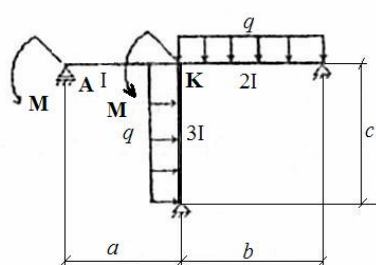
прийняти жорсткість всіх елементів постійною:  $EI = \text{const}$ . Дані для розрахунку узяті з табл. 9.

Таблиця 9

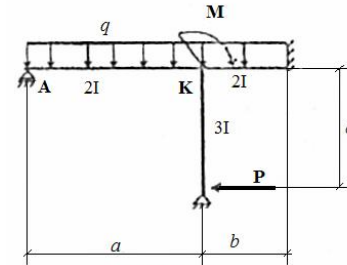
№ варіанту	M, кН·м	P, кН	q, кН/м	a, м	b, м	c, м	Коефіцієнт запасу міцності, n
1	10	10	8	2	3	1,5	2
2	12	12	8	2	3	1,5	2
3	14	14	8	2	3	1,5	2
4	16	16	8	2	3	1,5	2
5	18	14	8	2	3	1,5	2
6	20	12	8	2	3	1,5	2
7	22	10	8	2	3	1,5	2
8	24	12	8	2	3	1,5	2
9	26	14	8	2	3	1,5	2
10	28	16	8	2	3	1,5	2
11	30	14	6	2,2	2,8	1,8	1,5
12	28	12	6	2,2	2,8	1,8	1,5
13	26	10	6	1,8	2	1,6	1,5
14	24	12	8	1,8	2	1,6	1,5
15	22	14	6	1,8	2	1,6	1,5
16	20	16	8	1,8	2,2	2	1,5
17	18	18	6	2	2,4	1,8	1,5
18	16	20	8	2	2,4	1,8	1,5
19	14	18	10	2	2,4	1,8	1,5
20	12	16	12	2	1,8	2,4	2
21	10	14	10	2	1,8	2,4	2
22	12	12	8	2	1,6	1,8	2
23	14	10	6	1,8	1,8	2	2
24	16	8	4	1,6	1,6	2	2
25	18	10	6	1,8	2	2	2
26	20	12	8	1,8	1,8	1,6	1,5
27	22	14	10	2	2,2	1,6	1,5
28	24	16	6	2	2,2	2,4	1,5
29	26	18	8	2	2	1,8	1,5
30	28	20	4	2,2	1,6	1,8	1,5



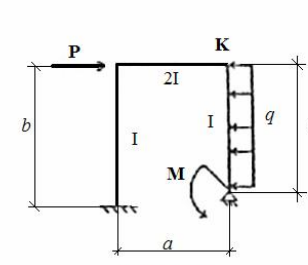
Вариант 1



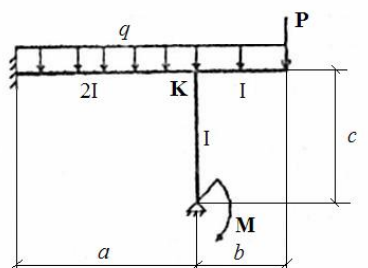
Вариант 2



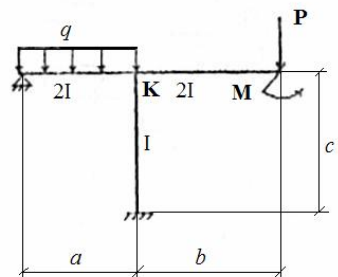
Вариант 9



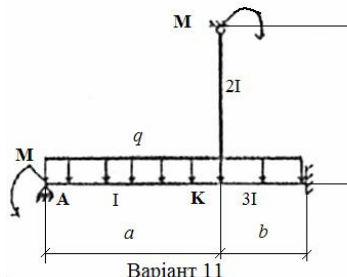
Вариант 10



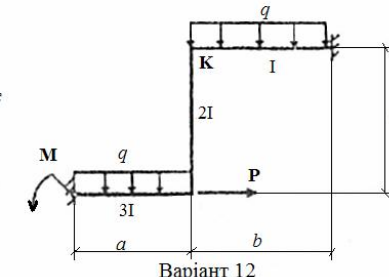
Вариант 3



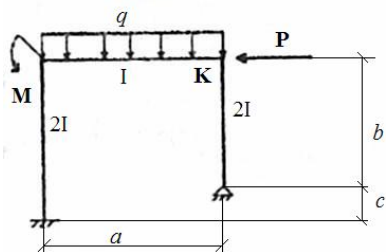
Вариант 4



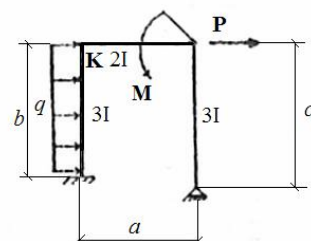
Вариант 11



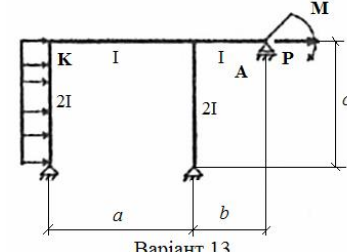
Вариант 12



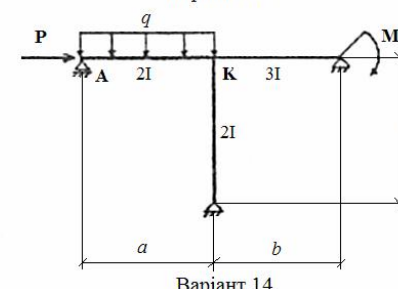
Вариант 5



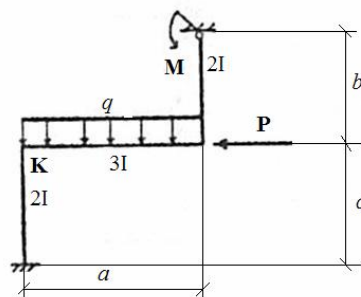
Вариант 6



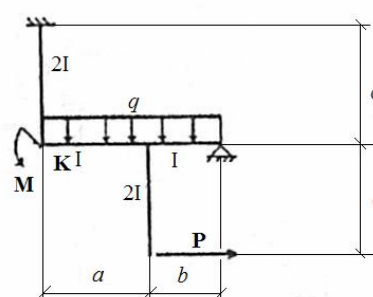
Вариант 13



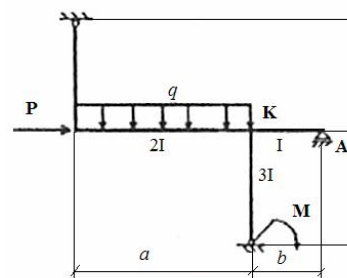
Вариант 14



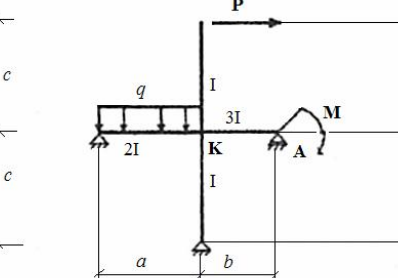
Вариант 7



Вариант 8

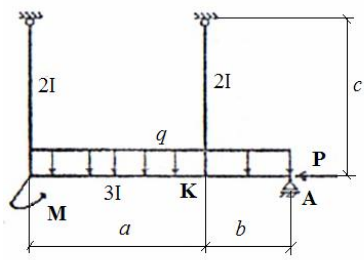


Вариант 15

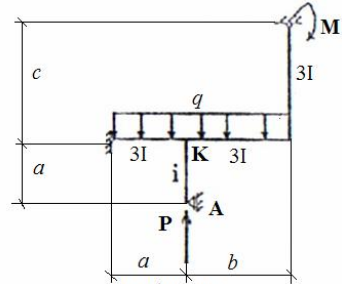


Вариант 16

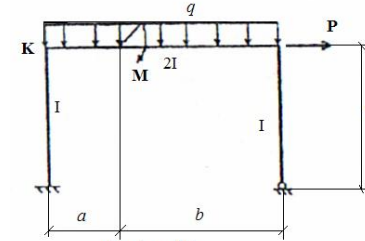




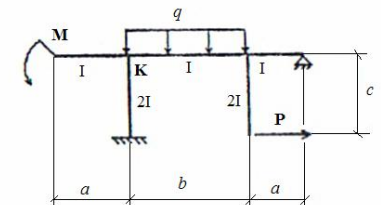
Варіант 17



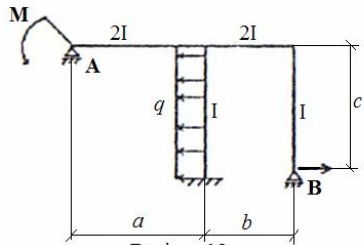
Варіант 18



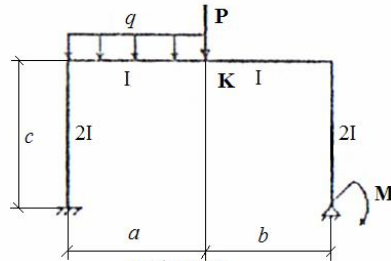
Варіант 25



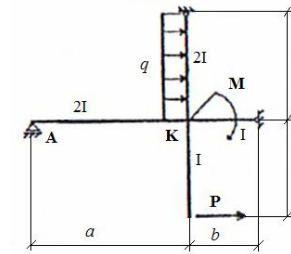
Варіант 26



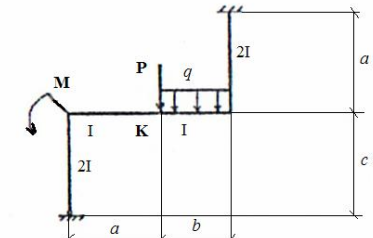
Варіант 19



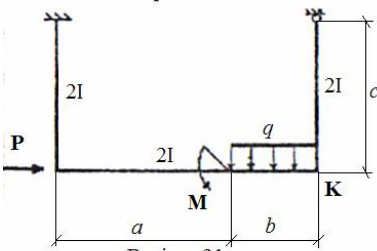
Варіант 20



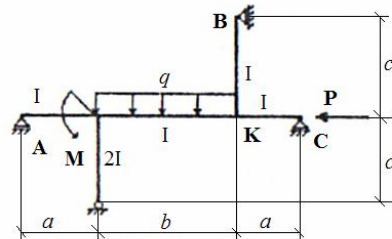
Варіант 27



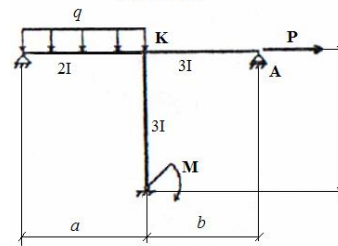
Варіант 28



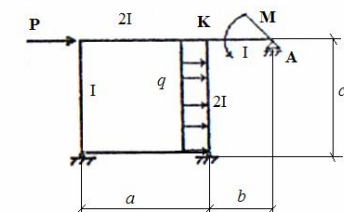
Варіант 21



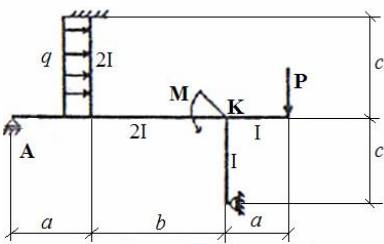
Варіант 22



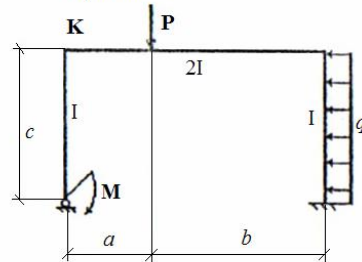
Варіант 29



Варіант 30



Варіант 23



Варіант 24

### Контрольні питання

1. Які конструкції називаються рамами?
2. Які види напружень мають місце в стержнях навантаженої рами? Якими силовими чинниками ці напруження викликані?
3. Назвіть методи розрахунку рамних конструкцій.
4. В чому полягає різниця між рамою і фермою?
5. Сформулюйте правило Верещагіна для визначення переміщень.
6. Яким чином розраховується рамна конструкція по правилу трьох моментів?

## МОДУЛЬ 4

### 10. Стійкість стиснутих стержнів

#### Теоретичні відомості

При стиску довгого тонкого стержня осьовою силою він може вийти з ладу не через те, що напруження в поперечних перерізах стануть більші за допустимі, а через те, що стержень втратить свою початкову прямолінійну форму. Для таких стержнів, окрім розрахунку на міцність, потрібно виконувати розрахунок на стійкість.

При дії на стержень стискуючої сили можна спостерігати три форми його рівноваги:

1. *Стійка рівновага* – при будь-якому малому відхиленні від положення рівноваги тіло повертається в початкове положення при усуненні причини, що викликала це відхилення.
2. *Нестійка рівновага* – після малого відхилення від початкового прямолінійного положення він не тільки не повертається в початкове положення, а й отримує додаткове переміщення.
3. *Байдужа рівновага* – після малого відхилення від початкового прямолінійного положення він залишається в цьому новому положенні рівноваги.

Розрахунок на стійкість повинен забезпечити роботу елемента конструкції при первинній формі його пружної рівноваги, тобто при навантаженнях, менших критичних.

Стискуюча сила, що фактично діє або допускається, має бути в деяке число разів менше критичною. Це умова стійкості прямолінійної форми рівноваги стержня може бути представлена так:

$$D = \frac{P_{\text{ед}}}{i_{\text{о}}}, \quad (10.1)$$

де  $P$  – допустиме значення сили, що стискує;  $P_{\text{кр}}$  – критичне значення стискуючої сили для стержня, що розраховується;  $n_y$  – заданий коефіцієнт запасу стійкості.

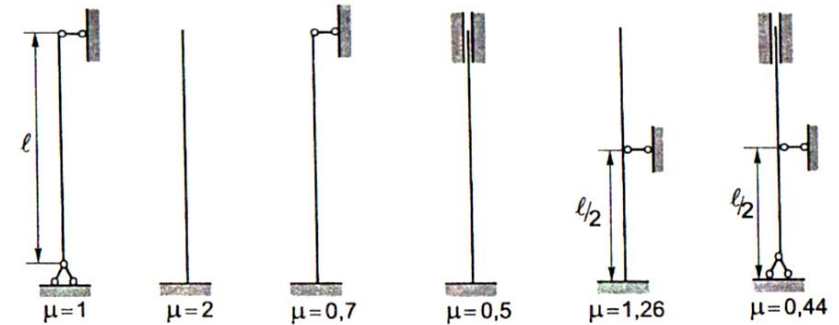
Критична сила обчислюється за формулою Ейлера:

$$P_{\text{ед}} = \frac{\pi^2 E I_{\text{min}}^2}{(\mu l)^2}, \quad (10.2)$$

де  $\mu$  – коефіцієнт зведеної довжини стержня, що залежить від способу закріплення.

При втраті стійкості згин стержня відбувається в площині найменшої жорсткості. Кожен з поперечних перерізів обертається довкола тієї з головних осей, відносно якої момент інерції мінімальний, тому у формулу Ейлера входить величина  $I_{\text{min}}$ .

На мал. 35 наведені значення коефіцієнтів зведеної довжини для деяких способів закріплення стержня



Мал. 35. Способи закріплення стержня

Знайдемо критичну напругу  $\sigma_{\text{кр}}$  з формули Ейлера. За визначенням критичної напруги

$$\sigma_{\text{ед}} = \frac{P_{\text{ед}}}{F}. \quad (10.3)$$

З врахуванням радіусу інерції

$$i_x = \sqrt{\frac{I_x}{F}} \quad (10.4)$$

для нормального напруження маємо

$$\sigma_{\text{ед}} = \frac{\pi^2 E i_{\text{min}}^2}{(\mu l)^2}. \quad (10.5)$$

*Гнучкість стержня* – відношення зведеної довжини стержня до мінімального радіусу інерції його поперечного перерізу. Це безрозмірна геометрична характеристика стиснутого стержня, що характеризує його здатність до втрати стійкості. Згин стержня відбувається в площині найбільшої гнучкості

$$\lambda_{\text{ед}} = \frac{\mu l}{i_{\text{min}}}. \quad (10.6)$$

Максимальна гнучкість залежить лише від фізико-механічних властивостей матеріалу стержня і не залежить від його розмірів. Це постійна величина для даного матеріалу.

Використовуючи поняття гнучкості  $\lambda$  стержня, отримуємо остаточну формулу для критичної напруги:

$$\sigma_{\text{ед}} = \frac{\pi^2 A}{\lambda^2}. \quad (10.7)$$

Формула Ейлера справедлива лише в межах застосування закону Гуку, тобто за умови, що критична напруга не перевищує межі пропорційності матеріалу стержня

$$\sigma_{\text{кр}} \leq \sigma_{\text{мц}}. \quad (10.8)$$

#### Рекомендації до розв'язання задачі №10

1. Після визначення  $I_{\text{min}}$ ,  $F$  та  $i_{\text{min}}$  слід перевірити гнучкість стержня і порівняти її з граничною, тобто встановити, чи правильно була застосована формула Ейлера. Якщо виявиться, що при прийнятих розмірах

$$\lambda < \lambda_{\text{ад}},$$

то необхідно провести перерахунок.

2. Для стержнів великої гнучкості

$$\lambda \geq \lambda_{\text{ад}}$$

розрахунок на стійкість ведеться по формулі Ейлера і залежність напруження від гнучкості гіперболічна (так звана гіпербола Ейлера).

3. Для стержнів середньої гнучкості

$$\lambda_0 \leq \lambda \leq \lambda_{\text{ад}}$$

розрахунок на стійкість виконують по емпіричній формулі Ф.С. Ясинського. Для них залежність напруження від гнучкості лінійна:

$$\sigma_{\text{кр}} = a - b\lambda. \quad (10.12)$$

4. Стержні малої гнучкості

$$\lambda_0 \leq \lambda \leq \lambda_{\text{ад}}$$

розраховуються не на стійкість, а на міцність.

В таблиці 1 Додатку приведені характеристики гнучкості для деяких матеріалів.

5. При розв'язанні задачі необхідно знати коефіцієнт поздовжнього згину. Його значення приведені в таблиці 2 Додатку.

6. Значення необхідного коефіцієнта запасу стійкості залежить в основному від призначення стержня, що розраховується, і його матеріалу. Так, для сталевих стержнів приймають:

- у будівельних конструкціях  $[n_y] = 1,7 - 2$ ;

- для елементів машинобудівних конструкцій, наприклад для ходових гвинтів металоріжучих верстатів  $[n_y] = 3,5 - 5$ ;

- для чавунних стержнів в середньому  $[n_y] = 5$ ;

- для дерев'яних стержнів в середньому  $[n_y] = 3$ .

#### Приклад розв'язання задачі №10

Підібрати по сортаменту двотавровий поперечний переріз стержня довжиною 5 м, що знаходиться під дією центрального стискуючого навантаження 320 кН (мал. 36, схема закріплення III). Матеріал – Ст3. Напруга, що допускається  $[\sigma] = 160$  МПа.

Визначаємо розрахункову довжину стержня:

$$l_{\text{ид}} = \mu l = 0,5 \cdot 500 = 250 (\text{нї}^2).$$

Підбираємо поперечний переріз шляхом послідовних наближень. Перша спроба: приймаємо коефіцієнт поздовжнього згину

$$\varphi_1 = 0,5.$$

Необхідна площа поперечного перерізу

$$F = \frac{P}{\varphi[\sigma]} = \frac{320 \cdot 10^3}{0,5 \cdot 160 \cdot 10^6} = 4 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 = 40 \text{ нї}^2.$$

По сортаменту (табл. 3 Додатку) підбираємо двотавр №27 з площею і мінімальним радіусом інерції відповідно

$$F = 40,2 \text{ нї}^2; i_{\text{д}^2} = i_0 = 2,54 \text{ нї}.$$

Гнучкість стержня

$$\lambda = \frac{l_{\text{ид}}}{i_{\text{д}^2}} = \frac{250}{2,54} = 98,5.$$

По табл. 2 Додатку за допомогою лінійної інтерполяції

$$\varphi_1 = 0,69 - \frac{0,69 - 0,60}{10} \cdot 8,5 = 0,614 \gg \varphi_1 = 0,5.$$

Перейдемо до другого наближення, прийнявши

$$\varphi_2 = \frac{0,5 + 0,614}{2} \approx 0,557.$$

Необхідна площа поперечного перерізу стержня

$$F = \frac{320}{0,557 \cdot 1,6 \cdot 10^5} \text{ м}^2 = 3,6 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 = 36 \text{ см}^2.$$

По сортаменту (табл. 3 Додатку) підбираємо двотавр №24а з площею і мінімальним радіусом інерції відповідно

$$F = 37,5 \text{ нї}^2; i_{\text{д}^2} = i_0 = 2,63 \text{ нї}.$$

Гнучкість стержня

$$\lambda = \frac{l_{i\delta}}{i_{\delta\pi}} = \frac{250}{2,63} = 95.$$

По табл. 2 Додатку за допомогою лінійної інтерполяції

$$\varphi_2 = 0,69 - \frac{0,69 - 0,60}{10} \cdot 5 = 0,645 \gg \varphi_2 = 0,557.$$

Перейдемо до третього наближення, прийнявши

$$\varphi_3 = \frac{0,557 + 0,645}{2} \approx 0,60.$$

Необхідна площа поперечного перерізу стержня

$$F = \frac{320}{0,60 \cdot 1,6 \cdot 10^5} = 3,33 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 = 33,3 \text{ см}^2.$$

По сортаменту (табл. 3 Додатку) підбираємо двотавр №24 з площею і мінімальним радіусом інерції відповідно

$$F = 34,8 \text{ см}^2; i_{\delta\pi} = i_{\delta} = 2,37 \text{ см}.$$

Гнучкість стержня

$$\lambda = \frac{l_{i\delta}}{i_{\delta\pi}} = \frac{250}{2,37} = 105.$$

По табл. 2 Додатку за допомогою лінійної інтерполяції остаточно знаходимо

$$\varphi = 0,60 - \frac{0,60 - 0,52}{10} \cdot 5 = 0,56.$$

Обчислюємо напруження

$$\sigma = \frac{P}{\varphi F} = \frac{320 \cdot 10^{-3}}{0,56 \cdot 34,8 \cdot 10^{-4}} = 164 \text{ МПа}.$$

Перенапруження складає

$$\frac{164 - 160}{160} \cdot 100\% \approx 2,5\%.$$

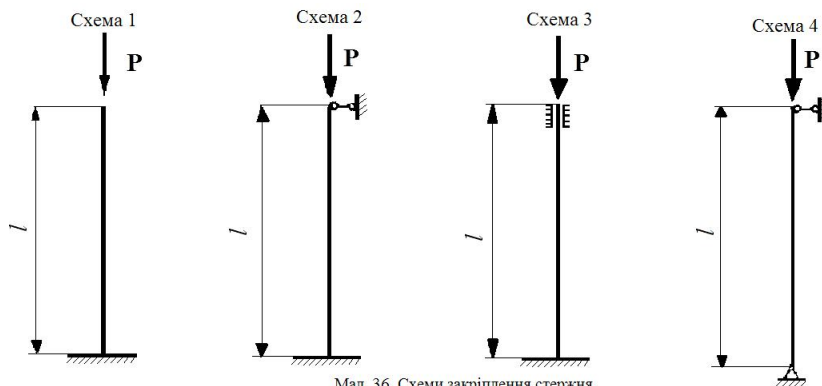
Остаточно приймаємо для стержня двотавр №24.

### Контрольне завдання №10

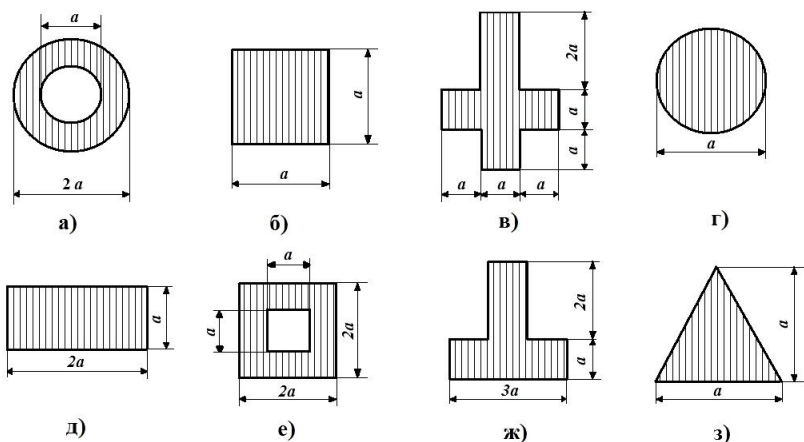
1. Визначити величину критичної сили ( $\sigma_{\text{кр}}=240$  МПа) і фактичний коефіцієнт запасу стійкості, порівнявши його з допустимим.
2. Підібрати методом послідовних наближень площу перерізу стержня по допустимій напрузі на стискування ( $[\sigma_-]=160$  МПа. За початковий узяти коефіцієнт  $\varphi = 0,5$ ).
3. Розрахункові дані взяти з табл. 10.

Таблиця 10.

№ варіанту	Схема закріплення (мал. 36)	Стискуюче зусилля P, кН	Розміри стержня		Коефіцієнт запасу стійкості, [n <sub>y</sub> ]	Форма перерізу стержня (мал. 37)
			l, м	a, см		
1	3	250	4,8	6	2,75	в
2	4	300	4,0	6	3,0	з
3	1	350	6,0	6	3,25	д
4	2	400	5,2	6	3,5	е
5	3	200	4,8	6	3,75	а
6	4	250	4,0	6	2,0	б
7	1	300	6,0	6	2,25	ж
8	2	350	5,2	6	2,5	з
9	3	400	4,8	6	2,75	д
10	4	200	4,0	6	3,0	е
11	1	250	6,0	8	3,25	а
12	2	300	5,2	8	3,5	б
13	3	350	4,8	8	3,75	в
14	4	400	4,0	8	2,0	з
15	1	200	6,0	8	2,25	ж
16	2	250	5,2	8	2,5	з
17	3	300	4,8	8	2,75	а
18	4	350	4,0	8	3,0	б
19	1	400	6,0	8	3,25	в
20	2	200	5,2	8	3,5	з
21	3	250	4,8	5	3,75	д
22	4	300	4,0	5	2,0	е
23	1	350	6,0	5	2,25	ж
24	2	400	5,2	5	2,5	з
25	3	200	4,8	5	2,75	в
26	4	250	4,0	5	3,0	з
27	1	300	6,0	5	3,25	д
28	2	350	5,2	5	3,5	е
29	3	400	4,8	5	3,75	а
30	4	200	4,0	5	2,0	б



Мал. 36. Схеми закріплення стержня



Мал. 37. Форма поперечного перерізу стержня

#### Контрольні питання.

1. Що мається на увазі під втратою стійкості конструкції?
2. Запишіть формулу для гнучкості стержня.
3. Як залежить величина критичної сили від гнучкості стержня?
4. Запишіть умову стійкості стержня.
5. Як визначається допустимий коефіцієнт пониження основної напруги?
6. Чому при підборі розмірів поперечного перерізу необхідно користуватися методом послідовних наближень?

## 11. Розрахунок балок на ударну дію

### Теоретичні відомості

Задачі на удар, згідно з технічною теорією удару, розв'язуються при таких допущеннях:

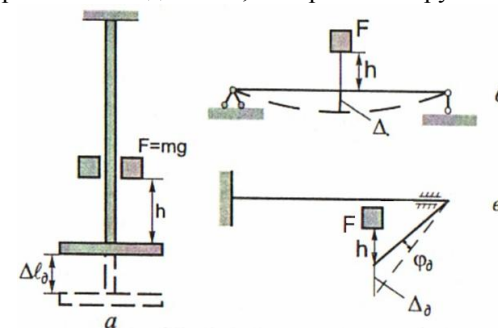
1. Матеріал пружної системи (елементу конструкції, що розраховується) при деформаціях, викликаних ударним навантаженням, слідує закону Гука. Система є лінійно-деформованою, при цьому модуль пружності має те ж значення, що і при статичному навантаженні.

2. Кінетична енергія падаючого тіла повністю переходить в потенційну енергію деформації елементу конструкції, тобто не враховуються місцеві деформації.

3. Маса пружної системи (елементу конструкції), що сприймає дію ударного навантаження, мала в порівнянні з масою падаючого тіла, тобто система розглядається як невагома.

4. Удар вважається непружним, тобто після зіткнення падаючого тіла з системою він не відскакує, а при її деформації рухається з нею спільно.

Залежно від напрямку прикладання ударного навантаження до стержня розрізняють поздовжній, поперечний і крутильний удари.



Мал. 38. Види ударів

*Поздовжній удар* – удар, при якому напрям сили паралельний до осі стержня (мал. 38, а). Він може бути розтягуючим, або стискуючим.

*Поперечний удар* – удар, при якому діючої напрям сили перпендикулярний до осі стержня (мал. 38, б).

*Крутильний удар* – удар, в результаті якого під дією зовнішніх сил виникає скручуючий момент відносно осі стержня (мал. 38, в).

Матеріали конструкції інакше реагують на ударні навантаження, ніж на статичні. Відбувається значне зменшення пластичності матеріалу з одночасним збільшенням значень механічних характеристик міцності.

Рекомендації до розв'язання задачі №11

1. При розв'язанні задач на ударну дію необхідно прикласти статичну силу, рівну вазі падаючого вантажу і побудувати епюру згинаючих моментів.

2. По епюрі згинаючих моментів треба знайти максимальний згинаючий момент і обчислити максимальну напругу.

3. Переміщення і напруження, викликані дією ударного навантаження, дорівнюють переміщенням і напруженням від цього ж статично прикладеного навантаження, помноженим на динамічний коефіцієнт:

$$f_d = k_d f_{CT}; \quad \sigma_d = k_d \sigma_{CT}, \quad (11.1)$$

де  $k_d$  – динамічний коефіцієнт

$$k_d = 1 + \sqrt{1 + 2h / f_d}, \quad (11.2)$$

$h$  – висота, з якої падає вантаж.

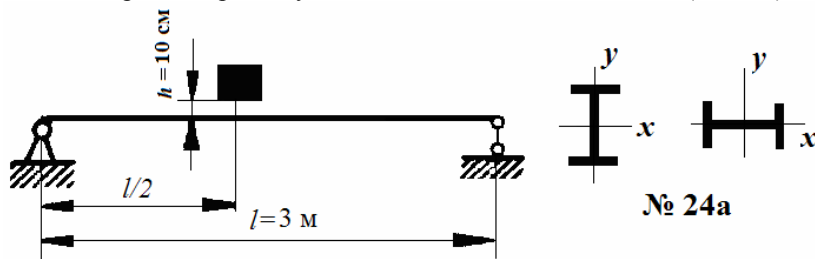
4. Найбільше нормальне напруження в поперечному перерізі балки при статичному навантаженні обчислюється за формулою:

$$\sigma_{CT} = \frac{M_{x \max}}{W_x}. \quad (11.3)$$

Статичний прогин в точці удару визначається за правилом Верещагіна. Для цього будується епюра згинаючих моментів від одиничного навантаження, прикладеного в точці удару з подальшим перемноженням на епюру згинаючих моментів від статичної сили, що дорівнює вазі падаючого тіла.

#### Приклад розв'язання задачі №11

На сталеву балку двотаврового поперечного перерізу з висоти  $h = 10$  см посередині прольоту падає вантаж масою  $m = 100$  кг (мал. 39).



Мал. 39. Балка під дією ударного навантаження

Зіставити найбільші статичну і динамічну напруження в поперечному перерізі балки і прогини під вантажем для випадків згину балки в площині найбільшої і найменшої жорсткості.

Розглянемо спочатку випадок згину балки в площині найбільшої жорсткості. Визначимо найбільше нормальне напруження в поперечному перерізі балки:

$$\sigma_{\dot{n}o} = \frac{M_{x \max}}{W_x} = \frac{mgl}{4W_x} = \frac{100 \cdot 9,81 \cdot 3}{4 \cdot 317 \cdot 10^{-6}} = 2,32 \text{ МПа}.$$

Момент опору і момент інерції поперечного перерізу двотавра 24а в площині найбільшої жорсткості відповідно

$$W_x = 317 \text{ см}^3, \quad J_o = 3800 \text{ см}^4.$$

Прогин в середині прольоту балки при статичному навантаженні

$$f_{\dot{N}o} = \frac{mgl^3}{48EJ_x} = \frac{100 \cdot 9,81 \cdot 3^3}{48 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 3800 \cdot 10^{-8}} = 7,27 \cdot 10^{-5} \text{ м},$$

де  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа – модуль пружності сталі.

Динамічний коефіцієнт

$$k_A = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{f_{\dot{N}o}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 0,1}{7,27 \cdot 10^{-5}}} \approx 17,7.$$

Динамічний прогин і динамічне напруження визначимо по формулах:

$$f_d = k_d f_{CT} = 17,7 \cdot 7,27 \cdot 10^{-2} = 1,29 \text{ мм};$$

$$\sigma_d = k_d \sigma_{CT} = 17,7 \cdot 2,32 = 41,1 \text{ МПа}.$$

Момент опору і момент інерції поперечного перерізу двотавра 24а в площині найменшої жорсткості відповідно

$$W_o = 41,6 \text{ см}^3, \quad J_o = 260 \text{ см}^4.$$

Нормальне напруження в поперечному перерізі балки:

$$\sigma_{o\dot{o}} = \frac{mgl}{4W_o} = \frac{100 \cdot 9,81 \cdot 3}{4 \cdot 41,6 \cdot 10^{-6}} = 17,7 \text{ МПа}.$$

$$f_{\dot{N}o} = \frac{mgl^3}{48EJ_o} = \frac{100 \cdot 9,81 \cdot 3^3}{48 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 260 \cdot 10^{-8}} = 1,06 \cdot 10^{-3} \text{ м};$$

$$k_A = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{f_{\dot{N}o}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 0,1}{1,06 \cdot 10^{-3}}} = 5,46.$$

Динамічний прогин і динамічне напруження

$$f_d = k_d f_{CT} = 5,46 \cdot 1,06 = 5,78 \text{ мм};$$

$$\sigma_d = k_d \sigma_{ст} = 5,46 \cdot 17,7 = 96,8 \text{ МПа.}$$

При статичній дії навантаження напруження в другому випадку більше, ніж в першому в 7,63 разу, а при її ударній дії – лише в 2,36 разу. Ця відмінність пояснюється тим, що в другому випадку жорсткість балки у 14,6 разу менша, ніж в першому, що приводить до істотного зменшення динамічного коефіцієнта.

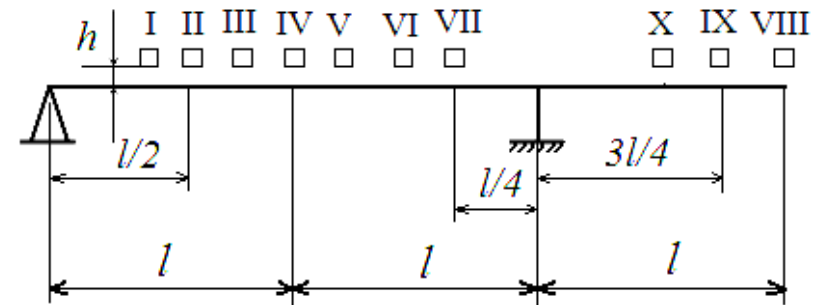
### Контрольне завдання №11

На двотаврову сталеву балку з модулем Юнга  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа вільно лежачу на двох жорстких опорах, з висоти  $H$  падає вантаж вагою  $Q$  (мал. 40). Визначити статичне і динамічне напруження і прогини в поперечному перетині балки під вантажем в площині найбільшої і найменшої жорсткості. Дані узяті з таблиці 11.

Таблиця 11

№ варіанту	№ схеми	№ двотавра	$l, \text{ м}$	$Q, \text{ кН}$	$H, \text{ см}$
1	I	20	2,1	1,1	8
2	II	20a	2,2	1,2	7
3	III	24	2,3	1,0	6
4	IV	24a	2,4	0,4	5
5	V	27	2,5	0,5	8
6	VI	27a	2,6	0,3	11
7	VII	30	2,7	0,6	10
8	VIII	30a	2,8	0,7	9
9	IX	33	2,9	0,8	8
10	X	27	2,1	1,1	6
11	II	27a	2,2	1,2	8
12	III	30	2,3	1,0	7
13	IV	30a	2,4	0,4	9
14	V	33	2,5	0,5	8
15	VI	27a	2,6	0,3	7
16	VII	20	2,7	0,6	10
17	VIII	20a	2,8	0,7	11
18	I	24	2,1	1,1	6
19	X	24a	2,2	1,2	5
20	III	27	2,3	1,0	8
21	IV	27a	2,4	0,4	10
22	V	30	2,5	0,5	9
23	VI	30a	2,6	0,3	8
24	VII	33	2,7	0,6	7
25	VIII	30a	2,8	0,7	5
26	IX	27a	2,9	0,8	8
27	I	20	2,1	1,1	6

28	II	20a	2,2	1,2	5
29	X	24	2,3	1,0	5
30	IV	24a	2,4	0,4	9



Мал. 40. Схеми до завдання 11

### Контрольні питання

1. Яке явище називається ударом і результатом чого воно є?
2. Які ви знаєте види ударів?
3. Що називається динамічним коефіцієнтом при ударі?
4. Яким чином визначаються напруження і деформація при розв'язанні задач на динамічну дію навантажень?
5. Як записується умова міцності при ударній дії навантаження?
6. Чи відрізняються властивості матеріалу під дією ударного навантаження від аналогічних показників при статичному навантаженні?



## 12. Коливання пружних систем.

### Теоретичні відомості

Залежно від характеру сил, що підтримують коливання, вони поділяються на власні та вимушені.

*Власні коливання* відбуваються в системі лише за рахунок внутрішніх сил і викликаються відхиленнями системи в початковий момент часу. Такі коливання є затухаючими.

*Вимушені коливання* відбуваються за рахунок зовнішніх збуджуючих сил, або переміщень опор системи — кінематичне збудження.

*Число ступенів вільності* - кількість незалежних параметрів, які визначають положення мас системи в кожен даний момент часу. В даному завданні розглядаються коливання системи з одним ступенем вільності.

Залежно від напрямку коливань розрізняють *поздовжні*, *поперечні* та *крутильні* коливання.

*Вільні коливання* системи з одним ступенем вільності без згасання (сили опору малі і в увагу не беруться) відбуваються по гармонійному закону з власною частотою  $\omega$

$$x = A \sin(\omega t + \alpha), \quad (12.1)$$

де  $x$  - узагальнена координата, амплітуда  $A$  і початкова фаза  $\alpha$  визначаються з початкових умов при  $t = 0$ . Кругова частота власних коливань визначається по формулі

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{\tilde{n}}{\delta}} = \sqrt{\frac{g}{\delta_{\tilde{n}\delta}}}, \quad (12.2)$$

де  $c$  – жорсткість системи, що коливається,  $\delta_{cm}$  - статична деформація під дією вантажу вагою  $Q$ .

*Лінійна частота* — число коливань в секунду, а також *період* власних коливань визначаються по формулах

$$f = \frac{1}{T}, \quad T = \frac{2\pi}{\omega}. \quad (12.3)$$

Хай на систему з одним ступенем вільності діє сила

$$P = P_o + P_a \cos pt \quad (12.4)$$

Тоді в системі встановлюються коливання з частотою, що співпадає з частотою зовнішньої сили  $p$ :

$$x = x_o + \beta x_a \cos pt, \quad (12.5)$$

де  $x_o$ ,  $x_a$  - статичні відхилення системи від положення статичної рівноваги під дією сил  $P$  і  $P_a$  відповідно.

Коефіцієнт зростання амплітуди рівний

$$\beta = \frac{1}{\left|1 - \frac{p^2}{\omega_0^2}\right|}. \quad (12.6)$$

У випадку, коли частота власних коливань збігається з частотою збуджуючої сили, настає *резонанс*, при якому коефіцієнт  $\beta$  і амплітуда  $A$  необмежено зростають.

### Рекомендації до розв'язання задачі №12

1. При визначенні частоти власних коливань необхідно враховувати, що статична деформація для коливальних систем з одним ступенем вільності обчислюються по різних формулах:

- для пружної системи (пружина з вантажем)

$$\delta_{\tilde{n}\delta} = \frac{Q}{c},$$

де  $c$  - жорсткість пружини,  $Q = mg$  - вага вантажу;

- для стержня

$$\delta_{\tilde{n}\delta} = \frac{Ql}{EF};$$

- при поперечних коливаннях  $\delta_{cm}$  являє собою прогин під вантажем  $Q$  при його статичній дії.

- при крутильних коливаннях частота власних коливань визначається по формулі:

$$\omega = \sqrt{\frac{c}{J}}.$$

Тут  $c$  – крутильна жорсткість вала, яка дорівнює

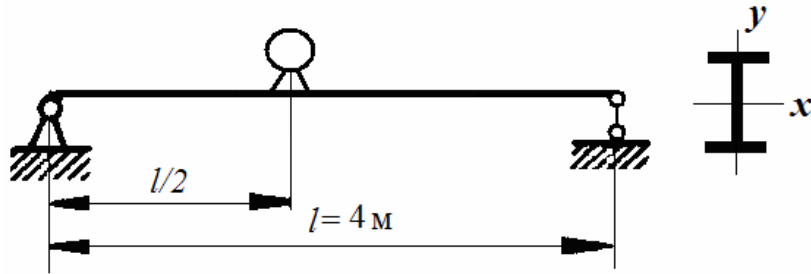
$$c = \frac{G \cdot \pi \cdot d^4}{l \cdot 32},$$

де  $d$  – діаметр стержня,  $l$  – довжина,  $G$  - модуль пружності 2 роду,  $J$  - момент інерції диска відносно стержня, перпендикулярного до площини диска.

2. Для визначення статичного прогину доцільно користуватися правилом Верещагіна.

Приклад розв'язання задачі №12

Посередині прольоту довжиною  $l = 4$  м двотаврової балки на двох опорах (мал. 41) працює двигун вагою  $Q = 25$  кН, що робить  $n_0 = 420$  обертів за хвилину. З умови відстройки від резонансу  $\omega = 1,3p$  підібрати відповідний двотавр. Враховуючи, що вага неврівноважених частин складає 25% від ваги двигуна, визначити допустимий ексцентриситет з умови міцності при  $[\sigma] = 160$  МПа,  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа.



Мал. 41. Розрахункова схема задачі

Частота вимушених коливань визначається швидкістю обертання двигуна

$$p = \frac{\pi n_0}{30} = \frac{3,14 \cdot 420}{30} = 44,0 \text{ (с}^{-1}\text{)}.$$

Тоді частота власних коливань

$$\omega = 1,3p = 1,3 \cdot 44 = 57,2 \text{ (с}^{-1}\text{)}.$$

Знаходимо необхідний момент інерції поперечного перерізу двотавра

$$\omega = \sqrt{\frac{48EJg}{l^3Q}} \Rightarrow J = \frac{Ql^3\omega^2}{48Eg} = \frac{25000 \cdot 64 \cdot 57,2^2}{48 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 9,81} = 5559 \text{ (нм}^4\text{)}.$$

З табл. 3 Додатку вибираємо двотавр №27а, що має характеристики

$$J_x = 5500 \text{ см}^4, \quad W_x = 407 \text{ см}^3.$$

Власна частота вибраної балки і двигуна

$$\omega = \sqrt{\frac{48EJg}{l^3Q}} = \sqrt{\frac{48 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 5500 \cdot 9,81}{64 \cdot 25000}} = 56,87 \text{ (н}^{-1}\text{)},$$

що складає 1,293 від робочої частоти. Статичні напруження визначаємо по формулі

$$\sigma_{\dot{n}o} = \frac{Ql}{4W_x} = \frac{25000 \cdot 4}{4 \cdot 407 \cdot 10^{-6}} = 61,4 \text{ (нн}^2\text{)}.$$

Додаткові динамічні напруження виникають від сили інерції

$$P_{ei} = 0,25 \frac{Q}{g} \varepsilon p^2 = 0,25 \cdot \frac{25 \cdot \varepsilon \cdot 44,0^2}{9,81} = 206,25 \varepsilon \text{ (нн}^2\text{)},$$

де 0,25 – коефіцієнт, що враховує вагу неврівноважених 25% від ваги двигуна,  $\varepsilon$  - ексцентриситет,  $p$  – частота вимушених коливань.

Знаходимо коефіцієнт зростання амплітуди

$$\beta = \frac{1}{\left|1 - \frac{p^2}{(1,3p)^2}\right|} = \frac{1}{1 - \frac{44^2}{57,2^2}} = 2,45.$$

Напруження знаходимо по формулі

$$\sigma_p = \frac{P_{ei}l}{4W_x} \beta = \frac{206,25 \varepsilon \cdot 4 \cdot 2,45}{4 \cdot 407 \cdot 10^{-6}} = 1241 \varepsilon \text{ (нн}^2\text{)}.$$

Повне напруження дорівнює

$$\sigma = \sigma_{\dot{n}o} + \sigma_p = (61,4 + 1241 \varepsilon) \text{ (нн}^2\text{)}.$$

Із умови міцності  $\sigma \leq [\sigma]$ , знаходимо допустимий ексцентриситет

$$[\varepsilon] \leq \frac{160 - 61,4}{1241} \leq 0,08 \text{ (i)}.$$

**Контрольне завдання №12**

На двотавровій балці довжиною  $l$  (мал. 42) закріплений двигун вагою  $Q$ , що робить  $n$  об/хв. Вага неврівноваженої частини складає 25% від ваги двигуна. Необхідно:

- З умови відстройки від резонансу 
$$\omega = 1,3p$$
 підібрати номер двотавра, який задовольняє експлуатаційним умовам.
- Виписати розгорнуте вираження для максимального динамічного напруження з ексцентриситетом  $\varepsilon$ .
- З умови міцності

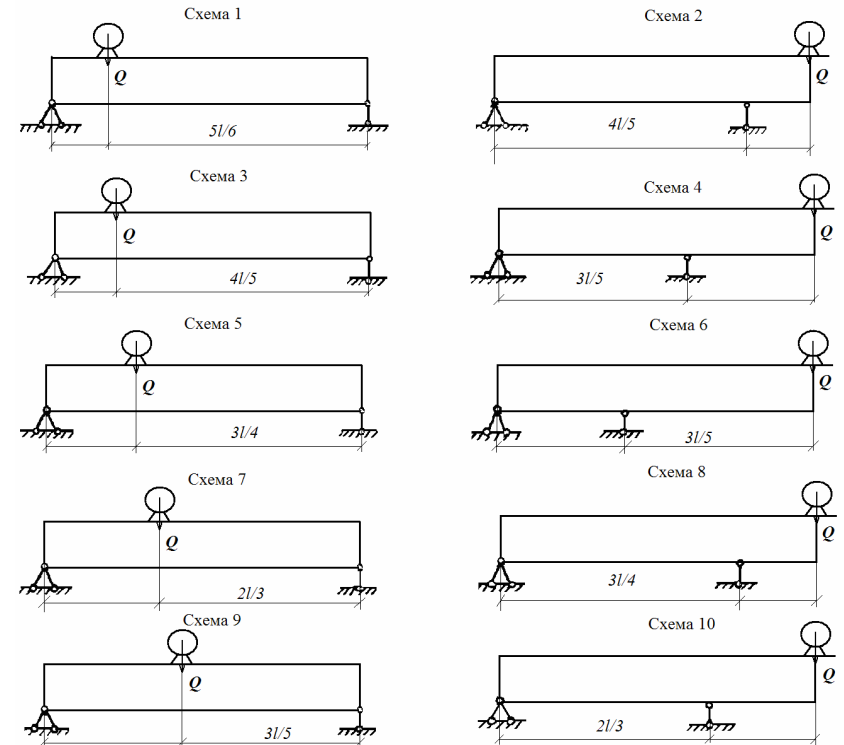
$$\sigma_{\max} \leq [\sigma]$$

знайти допустиме значення  $[\varepsilon]$ , прийнявши модуль пружності 1 роду  $E = 2,1 \cdot 10^5$  МПа.

- Розрахункові дані взяти з таблиці 12.

Таблиця 12

№ варіанту	№ схеми	$l$ , м	$Q$ , кН	$n$ , об/хв	$[\sigma]$ , МПа
1	1	1,1	21	1000	110
2	2	1,2	22	900	120
3	3	1,3	20	950	130
4	4	1,4	23	850	140
5	5	1,5	24	700	150
6	6	1,6	26	750	160
7	7	1,7	21	800	170
8	8	1,8	23	600	180
9	9	1,9	28	650	190
10	10	2,0	24	750	200
11	1	1,6	13	800	100
12	2	1,7	14	850	110
13	3	1,4	17	900	120
14	4	1,3	20	950	130
15	5	1,2	24	1000	140
16	6	1,0	27	950	180
17	7	1,8	29	650	190
18	8	1,6	13	500	110
19	9	1,4	17	550	120
20	10	1,2	15	900	130
21	1	1,7	16	850	140
22	2	1,9	12	550	180
23	3	2,0	11	600	190
24	4	1,3	13	650	170
25	5	1,6	16	700	150
26	6	1,8	18	750	160
27	7	1,3	19	800	170
28	8	1,5	21	850	160
29	9	1,6	17	900	180
30	10	1,5	20	950	200



Мал. 42. Схеми балок

## Контрольні питання.

1. Які коливання називаються власними і вимушеними?
2. Що називається системою з одним ступенем вільності?
3. Що таке резонанс і в чому полягає його небезпека?
4. Що таке коефіцієнт зростання коливань, в чому його фізичний сенс?
5. По якій формулі визначається амплітуда вимушених коливань?

Додатки

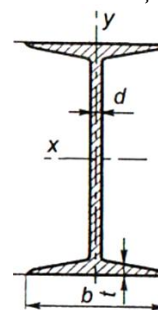
Таблиця 1. Показники гнучкості деяких матеріалів

Матеріал	$a$ , МПа	$b$ , МПа	$\lambda_0$	$\lambda_{cp}$
Ст.2	264	0,70	60	105
Ст.3	310	1,14	60	100
20, Ст.4	328	1,15	60	96
45	449	1,67	52	85
Дюралюміні	406	1,83	30	53
Сосна, ялина	29,3	0,194	-	70

Таблиця 2. Значення коефіцієнта  $\phi$

Гнучкість стержня	Матеріал			
	Сталь Ст2, Ст3, Ст4	Сталь Ст5	Чавуни СЧ12-28 СЧ15-32	Дерево (сосна, Ялина)
0	1,00	1,00	1,00	1,00
10	0,99	0,98	0,97	0,99
20	0,96	0,95	0,91	0,97
30	0,94	0,92	0,81	0,93
40	0,92	0,89	0,69	0,87
50	0,89	0,86	0,57	0,80
60	0,86	0,82	0,44	0,71
70	0,81	0,76	0,34	0,61
80	0,75	0,70	0,26	0,49
90	0,69	0,62	0,20	0,38
100	0,60	0,51	0,16	0,31
110	0,52	0,43	-	0,25
120	0,45	0,36	-	0,22
130	0,40	0,33	-	0,18
140	0,36	0,29	-	0,16
150	0,32	0,26	-	0,14
160	0,29	0,24	-	0,12
170	0,26	0,21	-	0,11
180	0,23	0,19	-	0,10
190	0,21	0,17	-	0,09
200	0,19	0,16	-	0,08
210	0,17	0,14	-	-
220	0,16	0,13	-	-

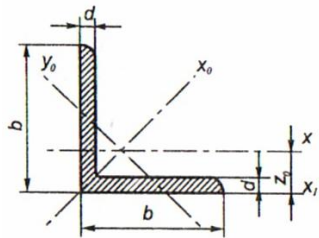
Таблиця 3. Сортакмент прокатної сталі. Балки двотаврові.



$h$  – висота балки;  
 $b$  – ширина полки;  
 $d$  – товщина стінки;  
 $t$  – середня товщина полки.

№ профілю	Розміри, мм				Площа п/п $A$ , см <sup>2</sup>	Моменти інерції, см <sup>4</sup>		Моменти опору, см <sup>3</sup>	
	$h$	$b$	$d$	$t$		$I_x$	$I_y$	$W_x$	$W_y$
10	100	55	4,5	7,2	12,0	198	17,9	39,7	6,49
12	120	64	4,8	7,3	14,7	350	27,9	58,4	8,72
14	140	73	4,9	7,5	17,4	572	41,9	81,7	11,5
16	160	81	5,0	7,8	20,2	873	58,6	109	14,5
18	180	90	5,1	8,1	23,4	1290	82,6	143	18,4
18a	180	100	5,1	8,3	25,4	1430	114	159	22,8
20	200	100	5,2	8,4	26,8	1840	115	184	23,1
20a	200	110	5,2	8,6	28,9	2030	155	203	28,2
22	220	110	5,4	8,7	30,6	2550	157	232	28,6
22a	220	120	5,4	8,9	32,8	2790	206	254	34,3
24	240	115	5,6	9,5	34,8	3460	198	289	34,5
24a	240	125	5,6	9,8	37,5	3800	260	317	41,6
27	270	125	6,0	9,8	40,2	5010	260	371	41,5
27a	270	135	6,0	10,2	43,2	5500	337	407	50,0
30	300	135	6,5	10,2	46,5	7080	337	472	49,9
30a	300	145	6,5	10,7	49,9	7780	436	518	60,1
33	330	140	7,0	11,2	53,8	9840	419	597	59,9
36	360	145	7,5	12,3	61,9	13380	516	743	71,1
40	400	155	8,3	13,0	72,6	19062	667	953	86,1
45	450	160	9	14,2	84,7	27696	808	1231	101
50	500	170	10	15,2	100	39727	1043	1589	123
55	550	180	11	16,5	118	55962	1356	2035	151
60	600	190	12	17,8	138	76806	1725	2560	182

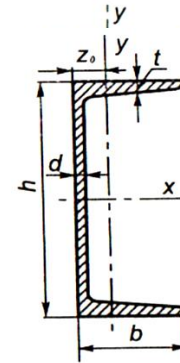
Таблиця 4. Сортамент прокатної сталі. Кутки рівнобічні.



$b$  – ширина полки;  
 $d$  – товщина стінки.

№ профілю	Моменти інерції, $\text{см}^4$				Площа $n/n$ $A, \text{см}^2$	Розміри, мм		Радіуси інерції, $\text{см}$		
	$I_x$	$I_{x0(\max)}$	$I_{y0(\min)}$	$I_{x1}$		$b$	$d$	$i_{x0}$	$i_{y0}$	
5	7,11	11,3	2,95	12,4	2,96	50	3	1,95	1,00	
	9,21	14,6	3,80	16,6			3,89	4	1,94	0,99
	11,2	17,8	4,63	20,9			4,80	5	1,92	0,98
5,6	13,1	20,8	5,41	23,3	4,38	56	4	2,18	1,11	
	16,0	25,4	6,59	29,2			5,41	5	2,16	1,10
6,3	18,9	29,9	7,81	33,1	4,96	63	4	2,45	1,25	
	23,1	36,6	9,52	41,5			6,13	5	2,44	1,25
	27,1	42,9	11,2	50			7,28	6	2,43	1,24
7	29,0	46,0	12,0	51	6,20	70	4,5	2,72	1,39	
	31,9	50,7	13,2	56,7			6,86	5	2,72	1,39
	37,6	59,6	15,5	68,4			8,15	6	2,71	1,38
	43,0	68,2	17,8	80,1			9,42	7	2,69	1,37
	48,2	76,4	20,0	91,9			10,7	8	2,68	1,37
7,5	39,5	62,6	16,4	69,9	7,39	75	5	2,91	1,49	
	46,6	73,9	19,3	83,9			8,78	6	2,90	1,48
	53,3	84,6	22,1	98,3			10,1	7	2,89	1,48
	59,8	94,6	24,8	113			11,5	8	2,87	1,47
	66,1	105	27,5	127			12,8	9	2,86	1,46
8	52,7	83,6	21,8	93,2	8,63	80	5,5	3,11	1,59	
	57,0	90,4	23,5	102			9,38	6	3,11	1,58
	65,3	104	27,0	119			10,8	7	3,09	1,58
	73,4	116	30,3	137			12,3	8	3,08	1,57

Таблиця 5. Сортамент прокатної сталі. Швелери.



$h$  – висота швелера;  
 $b$  – ширина полки;  
 $d$  – товщина стінки;  
 $t$  – середня товщина полки.

№ профілю	Розміри, мм				Площа $n/n$ $A, \text{см}^2$	Моменти інерції, $\text{см}^4$		Моменти опору, $\text{см}^3$	
	$h$	$B$	$d$	$t$		$I_x$	$I_y$	$W_x$	$W_y$
5	50	32	4,0	7,0	6,16	22,8	5,61	9,1	2,75
6,5	65	36	4,0	7,2	7,51	48,6	8,7	15,0	3,68
8	80	40	4,5	7,4	8,98	89,4	12,8	2,4	4,75
10	100	46	4,5	7,6	10,9	174	20,4	34,8	6,46
12	120	52	4,8	7,8	13,3	304	31,2	50,6	8,52
14	140	52	4,9	8,1	15,6	491	45,4	70,2	11,0
14a	140	62	4,9	8,7	17,0	545	57,5	77,8	13,3
16	160	64	5,0	8,4	18,1	747	63,6	93,4	13,8
16a	160	68	5,0	9,0	19,5	823	78,8	103	16,4
18	180	70	5,1	8,7	20,7	1090	86	11	17,0
18a	180	74	5,1	9,3	22,2	1190	105	132	20,0
20	200	76	5,2	9,0	23,4	1520	113	152	20,5
20a	200	80	5,2	9,7	25,2	1670	139	167	24,2
22	220	82	5,4	9,5	26,7	2110	151	192	25,1
22a	220	87	5,4	10,2	28,8	2330	187	212	30,0
24	240	90	5,6	10,0	30,6	2900	208	242	31,6
24a	240	95	5,6	10,7	32,9	3180	254	265	37,2
27	270	95	6,0	10,5	35,2	4160	262	308	37,3
30	300	100	6,5	11,0	40,5	5810	324	387	43,6
33	330	105	7,0	11,7	46,5	7980	410	484	51,8
36	360	110	7,5	12,6	53,4	10820	513	601	61,7
40	400	115	8,0	13,5	61,5	15220	642	761	73,4

## СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ТА РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Корольов П.Г. Опір матеріалів : [методичні вказівки і контрольні роботи з прикладами розв'язання типових задач] / Корольов П.Г. – К. : Видавництво УСГА, 1968. – 176 с.
2. Гуліда Е.М., Дзюба Л.Ф., Ольховий І.М. Прикладна механіка : [підручник для студ. вищ. навч. закладів]/ Гуліда Е.М., Дзюба Л.Ф. – Львів : Світ, 2007. – 384 с.
3. Писаренко Г.С., Квитка А.Л., Уманський Э.С. Сопротивление материалов : [ученик для студ. машиностр. спец.] / Под редакцией академика АН УССР Писаренко Г.С. – К. : «Вища школа», 1986. – 775 с.
4. Федосьев В. И. Сопротивление материалов : [ученик для студ. высш.техн. учеб. заведений]/ Федосьев В. И. — М. : Наука, 1979. - 560 с.
5. Тимошенко С., Gere Дж. Механика материалов/ Степан Тимошенко, Джеймс Гере : [пер. с англ.]. – М. : Лань, 2002. – 672 с.
6. Дарков А. В., Шпиро Г. С. Сопротивление материалов : [ученик для студ. машиностр. спец.] / Дарков А. В., Шпиро Г. С. – М.: Высшая школа. 1975. – 654 с.
7. Смирнов А. Ф. Сопротивление материалов : [ученик для студ. машиностр. спец.] / Смирнов А. Ф. – М.: Высшая школа, 1975. – 479 с.
8. Ицкович Г. М., Винокуров А. И., Минин Л. С. Руководство к решению задач по сопротивлению материалов. – М.: Высшая школа, 1970. - 542 с.
9. Александров А.В. Сопротивление материалов: [ученик для студ. трансп. спец. высш. тех. учеб. заведений] / Александров А.В. – М.: Высшая школа, 2004. - 570 с.
10. Мовнин М.С., Израелит А.Б. Сопротивление материалов: [ученик для немашиностр. техникумов] / Мовнин М.С., Израелит А.Б.– Ленинград: «Судостроение», 1972. – 328 с.

Навчально-методичне видання

**Козуб Юрій Гордійович**  
**Киричевський Ростислав Вікторович**  
**Калайдо Олександр Віталійович**

## ОПІР МАТЕРІАЛІВ

*Методичні рекомендації  
для організації самостійної роботи студентів  
спеціальності «Професійне навчання» напрямків підготовки  
«Експлуатація та ремонт місцевого та автомобільного  
транспорту» і «Механізація сільськогосподарського  
виробництва і гідромеліоративних робіт»  
усіх форм навчання*

За редакцією авторів  
Комп'ютерний макет – Калайдо О. В.

---

Здано до склад. 04.01.2010 р. Підп. до друку 03.02.2010 р.  
Формат 60x84 1/16. Папір офсет. Гарнітура Times New Roman.  
Друк ризографічний. Ум. друк. арк. 6. Наклад 200 прим. Зам. № 20.

---

**Видавець і виготовлювач**  
**Видавництво Державного закладу**  
**«Луганський національний університет імені Тараса Шевченка»**  
вул. Оборонна, 2, м. Луганськ, 91011. т/ф: (0642) 58-03-20.  
e-mail: alma-mater@list.ru  
*Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 3459 від 09.04.2009 р.*