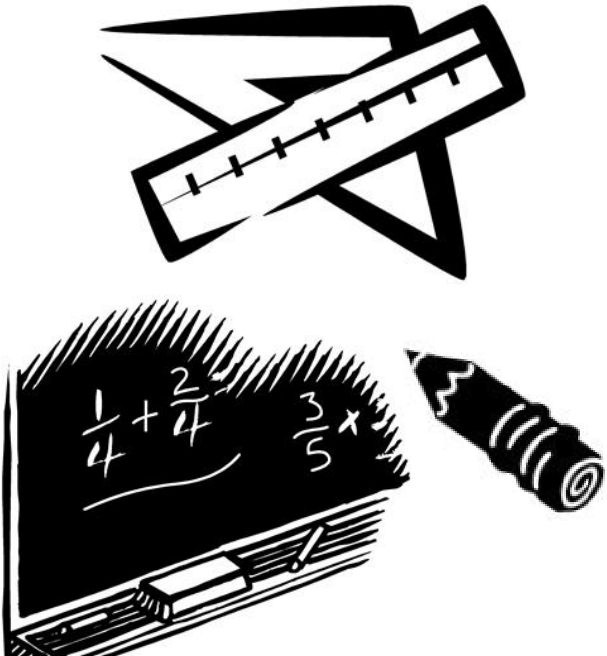
В. Г. Божко, О. В. Іванова

МАТЕМАТИКА



Міністерство освіти і науки України
Державний заклад
„Луганський національний університет
імені Тараса Шевченка”

В. Г. Божко, О. В. Іванова

Математика

Навчально-методичний посібник
для студентів 1 курсу спеціальності 6.010102
„Початкова освіта”

Луганськ
ДЗ „ЛНУ імені Тараса Шевченка”
2010

УДК 51(076)
ББК 22.1р3
Б76

Рецензенти:

Гавриш Н. В. – доктор педагогічних наук, професор, завідувач кафедри дошкільної та початкової освіти Луганського національного університету імені Тараса Шевченка.

Хмель В. П. – кандидат педагогічних наук, доцент кафедри загальної математики, директор Інстиуту економіки та бізнесу Луганського національного університету імені Тараса Шевченка.

Жучок Ю. В. – кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри математичного аналізу та алгебри Луганського національного університету імені Тараса Шевченка.

Божко В. Г.

Б76 Математика : навч.-метод. посіб. для студ. 1 курсу спец. 6.010102 „Початкова освіта" / В. Г. Божко, О. В. Іванова ; Держ. закл. „Луган. нац. ун-т імені Тараса Шевченка". – Луганськ : Вид-во ДЗ „ЛНУ імені Тараса Шевченка", 2010. – 141 с.

Навчально-методичний посібник містить теоретичні та практичні матеріали для засвоєння двох змістовних модулів програми курсу „Математика" для студентів 1 курсу 6.010102 „Початкова освіта" освітньо-кваліфікаційного рівня „бакалавр" денної та заочної форми навчання. Зміст посібника спрямований на вдосконалення самостійної роботи студентів, якісне засвоєння теоретичного матеріалу курсу, оволодіння певними практичними вміннями.

Призначено для студентів педагогічних спеціальностей, слухачів ІПО, викладачів, учителів початкових класів.

УДК 51(076)
ББК 22.1р3

Рекомендовано до друку навчально-методичною радою Луганського національного університету імені Тараса Шевченка (протокол № 4 від 1 грудня 2010 року)

ЗМІСТ

РОЗДІЛ IV. ЕЛЕМЕНТИ МАТЕМАТИЧНОЇ ЛОГІКИ

ПОЯСНЮВАЛЬНА ЗАПИСКА

Соціально-економічні зміни в нашому суспільстві обумовлюють потребу сформованості гнучкості, варіативності, критичності мислення, здатності висувати гіпотези перебігу подій та реальності їх підтвердження. Успішне навчання математики учнів початкових класів потребує від учителя не тільки методичної майстерності, а й глибокого розуміння суті математичних понять і фактів. У початкових класах закладаються основи таких важливих понять, як «число», «величина», проходить ознайомлення з елементами буквеної символіки і геометрії, розвиваються логічні уміння та навички. Усе це висуває особливі вимоги до математичної підготовки учителя початкових класів.

Навчально-методичний посібник створено відповідно до програми курсу „Математика” для студентів 1 курсу спеціальності 6.010102 „Початкове навчання” освітньо-кваліфікаційного рівня „бакалавр” денної та заочної форми навчання. Зміст посібника відповідає двом із змістовних модулів програми курсу „Математика”.

Ураховуючи вимоги сучасного етапу розвитку вищої освіти, посібник розроблено з урахуванням вимог кредитно-модульної системи організації навчально-виховного процесу.

Мета даної роботи – допомогти студентам в організації їх навчальної діяльності під час проведення практичних занять з математики та при організації їх самостійної роботи, що є особливо актуальним в умовах кредитно-модульного навчання.

Навчально-методичний посібник складається з двох модулів, кожний з яких містить два розділи. У кожному розділі подано теоретичний матеріал, приклади розв’язання типових задач, завдання для розв’язування на практичних заняттях, завдання для самостійного опрацювання. До кожної теми розроблено питання, які дають змогу читачеві перевірити власний рівень засвоєння матеріалу.

Користуючись посібником студент, студент повинен:

- вивчити теоретичний матеріал, що стосується заняття;
- підготувати відповіді на всі питання;
- розглянути розв'язання типових задач;
- після кожного практичного заняття розібрати та проаналізувати всі розв'язані на занятті завдання;
- виконати завдання для самостійного опрацювання.

Наприкінці кожного модуля наведено перелік запитань до теоретичного звіту та основні типи задач для підготовки до модульної роботи.

Фрагмент робочої програми

№	Змістовні модулі та їх структура	Загальна 72	Лекції 18	Практичні 18	Сам. робота 36
	Модуль А. Елементи теорії множин. Відповідності, відображення та відношення.				
1	Основні поняття теорії множин. Операції над множинами	8	2	2	4
2	Декартовий добуток множин, кортежі. Поняття розподілу множин на класи за допомогою 1,2,3 властивостей.	8	2	2	4
3	Відповідності та операції над ними. Типи відповідностей. Бінарні відповідності, граф бінарної відповідності. Відображення. Еквівалентні множини	8	2	2	4
4	Відношення еквівалентності. Відношення порядку.	8	2	2	4
	Модуль В. Елементи комбінаторики. Елементи математичної логіки				
5	Основні поняття комбінаторики, правила множення та додавання	8	2	2	4
6	Сполуки без повторень та з повтореннями	8	2	2	4
7	Висловлення, властивості. Операції над висловленнями.	8	2	2	4
8	Предикати та операції над ними. Квантори	8	2	2	4
9	Теореми, їх структура та види.	8	2	2	4

План практичних занять

Модуль А

1. Елементи теорії множин. Операції над множинами.
2. Поняття розподілу множини на класи. Декартовий добуток множин, кортежі.
3. Відповідність та відображення.
4. Відношення.

Модуль В

5. Основні поняття комбінаторики, правила множення та додавання.
6. Сполуки без повторень та з повтореннями.
7. Висловлення та операції над ними.
8. Предикати, кванторні операції, поняття логічного слідування.
9. Структура теореми. Види теорем. Необхідні та достатні умови.

Модуль А
РОЗДІЛ І
ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ МНОЖИН

ТЕМА №1
ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ТЕОРІЇ МНОЖИН. ОПЕРАЦІЇ НАД МНОЖИНАМИ

План

1. **Поняття множини та її елементів.**
2. **Способи завдання множин.**
3. **Відношення між множинами.**
4. **Універсальна множина. Діаграми Ейлера-Венна.**
5. **Числові множини.**
6. **Операції над множинами.**

1. Поняття множини та її елементів. Часто в житті ми в своєму лексиконі використовуємо слово “множина”, розуміючи під цим, як правило, велику кількість предметів. Але з математичної точки зору це не буде коректним.

Взагалі людині властиво розглядати те або інше зібрання предметів, споріднених за певною ознакою. Коли поєднують в одну групу предмети або поняття за певною ознакою, то розглядають цю групу об’єктів як одне ціле, та говорять про *множину*.

Основи теорії множин було закладено відомим німецьким математиком Георгом Кантором (1845-1918). Поява теорії множин була зустрінута з ентузіазмом багатьма авторитетними математиками. Вони побачили в ній можливість створення метамови математики, тобто формальної одностайної системи понять і принципів, за допомогою якої можна було б викласти з єдиних позицій зміст різноманітних традиційно далеких один від одного розділів математики. Перші такі досить успішні спроби були виконані вже незабаром після виникнення канторівської теорії множин. Сьогодні теорія множин - це математична теорія, на якій ґрунтується більшість розділів сучасної математики, як неперервної, так і дискретної.

Поняття множини в математиці є первинним і не означається. На його основі базуються інші математичні поняття. Канторівський вираз: „Множина - це зібрання в єдине ціле визначених об'єктів, які чітко розрізняються нашою інтуїцією або нашою думкою" – безумовно, не може вважатися строгим математичним означенням, а є скоріше поясненням поняття множини, яке заміняє термін „множина" на термін „зібрання". Іншими синонімами основного слова „множина" є „сукупність", „набір", „колекція", „об'єднання" тощо.

Нині під *множиною* в математиці розуміють сукупність предметів, об'єктів, об'єднаних між собою певною спільною для них усіх ознакою, властивістю.

Наприклад, множина книг у бібліотеці, множина людей на планеті тощо.

Означення. Предмети (об'єкти), з яких складається множина, називаються її *елементами*. Для позначення множин використовуються великі букви латинського алфавіту $A,B,C,\ldots$, для позначення елементів – маленькі a, b, c. Позначення:

$a\in A$	• a є елементом множини A • a належить множині A • a міститься (лежить) в множині A • Множина A містить елемент a
$a\notin A$	• a не є елементом множини A • a не належить множині A • a не міститься (лежить) в множині A • Множина A не містить елемент a

Наприклад, якщо A - множина дільників числа 30, то $1\in A$, $3\in A$, $5\in A$, $6\in A$, $10\in A$, $30\in A$; $12\notin A$, $4\notin A$, $7\notin A$

A — множина зірок на небі, B — множина студентів групи *1ПО*, *С* — натуральних чисел менших 1. Що можна сказати про кількість елементів у цих трьох множинах?

Означення. Множина називається *скінченною*, якщо вона містить обмежену кількість елементів, тобто таку, якій відповідає певне натуральне число. У протилежному випадку множину називають *нескінченною*.

Означення. Скінченну множину, яка містить *k* елементів, називають *k-елементною множиною*.

У скінченної множини обов'язково є перший та останній елементи. Кількість елементів скінченної множини позначають *n(A)* (читається «ен від А).

Наприклад, множина студентів групи *1ПО (А) – 26*-елементна множина, *n(A) = 26.* Наведіть приклад одноелементної множини.

А як, скориставшись введеним позначенням, записати кількість елементів у складі Вашої родини?

Означення. Множина, що не містить жодного елемента, називається *порожньою* та позначається ∅.

Символ ∅ походить від грецької літери *Ф* (фі). Очевидно, кількість елементів порожньої множини дорівнює 0, тобто *n(∅) = 0*. Наведіть свій приклад порожньої множини.

2. Способи завдання множин. Множину вважають заданою, якщо про будь-який об'єкт можна сказати, чи належить він даній множини, чи ні.

Існують два загальних методи, за допомогою яких можна задавати множини:

1. Завдання множини за допомогою переліку її елементів.

Наприклад, множина студентів в групі задається списком в журналі; множина країн на земній кулі задається їх списком в географічному атласі тощо.

У цьому випадку назви всіх елементів множини записують у рядок, відокремлюють між собою знаком ";" та беруть у фігурні дужки.

Тобто, якщо $a_1, a_2, \ldots, a_n$ - деякі об’єкти, то множина A позначається через $A = \{ a;, a_2; \ldots; a_n \},$ де у фігурних дужках міститься перелік усіх елементів відповідної множини.

У такий спосіб можуть бути задані тільки скінченні множини. Наприклад, якщо A - множина дільників числа 30, то $A = \{1; 2; 3; 5; 6; 10; 15; 30\}$.

Зауваження:

1) При записі множини переліком елементів дуже важливим є те, щоб не втратити жодного з елементів і щоб один і той самий елемент у множині записувати лише один раз, порядок елементів при цьому не є істотним.

2) Спосіб запису множин переліком підходить для скінченних множин з невеликою кількістю елементів (наприклад, хоча множина всіх звірів на землі скінченна, але навряд її можна задати переліком, оскільки вона містить велику кількість елементів).

3) Іноді використовують знак “...” але лише тоді, коли зрозуміло, які елементи цей знак замінює. Наприклад, $D = \{10;20;...,80;90\}$ - множина десятків.

2. Завдання множини за допомогою характеристичної властивості.

Означення. *Характеристична властивість* - це властивість, якою володіє кожний елемент, що належить множині, і не володіє жодний елемент, що їй не належить.

Наприклад, множина A - множина натуральних чисел менше 6. Але математично це зручно робити так: у фігурних дужках записують спочатку елемент множини (його позначають літерою), потім після вертикальної риски записують характеристичну властивість, тобто $A = \{x / x \in N, x < 6\}$

Приклади. A - множина чисел, що задовольняють нерівності $-3 \le x \le 4$, запишеться $A = \{x / x \in N, -3 \le x \le 4\}$,; B - усі дійсні числа, запишеться $B = \{x / x \in R\}$.

3. Відношення між множинами.

Розглянемо дві множини: A – множина студентів 1ПО, B – множина студентів ЛНУ імені Тараса Шевченка. Що можна сказати про ці множини по відношенню одна до одної?

Порівнюючи ці множини, помітимо, що всі елементи множини A є елементами і множини B.

Означення. Якщо будь-який елемент множини A належить множині B, то множину A називають *підмножиною множини B* і записують $A \subset B$.

Означення. Множини A і B вважаються *рівними*, якщо будь-який елемент множини A належить множині B, і навпаки, будь-який елемент множини B належить множині A. Зокрема, якщо $A = B$, то $A \subset B$ і $B \subset A$.

Зауваження. Позначення $B \subseteq A$ означає, що $B \subset A$ або $A = B$.

Кожна не порожня множина A має принаймні дві підмножини: порожню множину і саму себе, тобто $\varnothing \subset A$, $A \subset A$.

Наприклад, випишемо усі підмножини множини $M = \{a; b; c\}$. Отримаємо наступні: $\varnothing$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{a,b\}$, $\{b,c\}$, $\{a,c\}$, $\{a,b,c\}$

Означення. Підмножину B множини A *називають власною підмножиною або правильною* частиною множини A, якщо B не порожня множина, і в A знайдеться хоча б один елемент, якого немає в B.

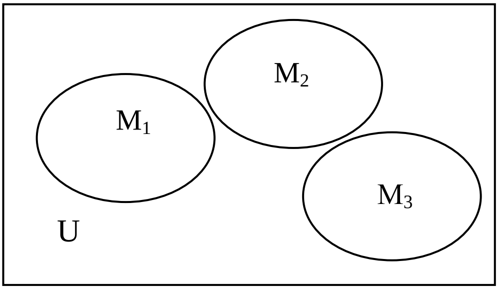
Так, *власними підмножинами* множини $M = \{a; b; c\}$, є усі її підмножини, окрім $\varnothing$ й самої множини M. Тобто $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{a;b\}$, $\{b;c\}$, $\{a;c\}$. Множини $\varnothing$, $\{a,b,c\}$ називають *невласними підмножинами*.

4. Універсальна множина. Діаграми Ейлера-Венна.

Домовилися, множини, що розглядаються у кожному конкретному випадку, вважати підмножинами деякої більш об'ємної множини. Цю множину називають універсальною і позначають U. У кожному конкретному випадку визначається універсальна множина, що складається з елементів певного типу.

Для наочності користуються графічними схемами, які часто називають *діаграмами Ейлера - Венна* (діаграми Ейлера, діаграми Венна). У цьому випадку множини зображують за допомогою замкнутих кривих, що не мають самоперетинів.

Універсальну множину на діаграмі зображують прямокутником, усі підмножини універсальної великої кількості зображують кругами, розміщеними в середині прямокутника. Наприклад, якщо $M_1, M_2, M_3 \subset U$, то діаграма має вид:



Приклад. Для геометричних фігур можна скласти таку діаграму:

5. Числові множини.

У математиці використовують множини, елементами яких є числа. Такі множини називають *числовими множинами*.

1) множина *натуральних чисел* (числа, що використовують при лічбі);

$$N = \{1; 2; 3; \ldots\}$$

2) множина *цілих чисел* (включають натуральні числа, їм протилежні та число 0);

$$Z = \{\ldots; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; \ldots\}$$

3) множина *раціональних чисел* (числа, які можна подати у вигляді нескоротного дробу де m — ціле, n — натуральне число);

$$Q = \{\frac{m}{n}\},\ де\ m\in Z,\ n\in Q$$

Особливістю цих множин є те, що кожній наступній числовій множині належать також і елементи попередньої, тобто $N \subset Z \subset Q$. Дійсно, якщо $x\in N$, то $x\in Z$. Крім того, оскільки будь-яке ціле число y можна записати як відношення $\frac{y}{1}$, то y буде і раціональним числом.

Основна властивість раціональних чисел: раціональне число завжди можна представити у вигляді десяткового дробу (скінченного або нескінченного періодичного).

Наприклад, $\frac{13}{4} = 3{,}25$; $\frac{5}{11} = 0{,}454545\ldots = 0,(45)$.

Математично доведено, що раціональні числа не забезпечують потреб вимірювання величин. Наприклад, діагональ квадрата зі сторонами, рівними одиниці, не може бути виражена раціональним числом. Саме тому було введено поняття ірраціонального числа.

4) множина *ірраціональних чисел* (числа, які можна записати у вигляді нескінченних, але неперіодичних десяткових дробів);

$$\pi = 3{,}141592\ldots;\ \sqrt{2} = 1{,}414213\ldots$$

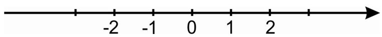
5) множина дійсних чисел (усі раціональні та ірраціональні числа);

$$R = Q\cup I$$

Для зручності вважають, що до множини дійсних чисел R належать також елементи, які позначають $-\infty$ (мінус нескінченність) і $+\infty$ (плюс нескінченність). За означенням, для будь-якого іншого елемента $x \in R$ виконуються нерівності $-\infty < x < +\infty$.

Дійсні числа можна зображати точками числової осі.

Означення. *Числовою віссю* називається нескінченна пряма, на якій вибрано початок відліку (точка 0), додатний напрям (указується стрілкою) та масштаб (для відображення значень).



Між усіма дійсними числами і усіма точками числової осі існує взаємно однозначна відповідність: кожній точці відповідає єдине число і, навпаки, кожному числу відповідає єдина точка. Отже, множина дійсних чисел є неперервною та нескінченною так само, як є неперервною та нескінченною числова вісь.

Окремі підмножини множини дійсних чисел називають *числовими проміжками*.

Елементами числового проміжку є числа $x \in R$, які задовольняють певній нерівності.

Нехай $a \in R$, $b \in R$ і $a \le b$. Тоді різновиди проміжків можуть бути такими:

1) інтервал (a,b), записується $a < x < b$;

2) відрізок $[a,b]$, записується $a \le x \le b$;

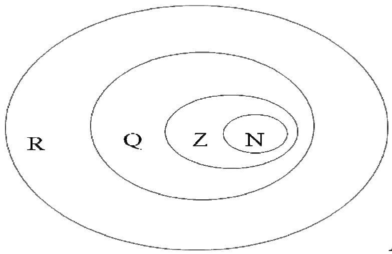
3) напівінтервали $[a,b)$, (a,b}, записується $a \le x < b$ і $a < x \le b$ відповідно;

4) проміні $[a; +\infty)$, $(-\infty, b]$, записується $a \le x < +\infty$ і $-\infty < x \le b$ відповідно;

5) відкритий промінь $(a; +\infty)$, $(-\infty, b)$, записується $a < x < +\infty$ і $-\infty < x < b$ відповідно;

6) числова пряма $(-\infty; +\infty)$, записується $-\infty < x < +\infty$.

Для всіх числових множин можна побудувати таку діаграму Ейлера-Венна.



$N \subset Z \subset Q \subset R$

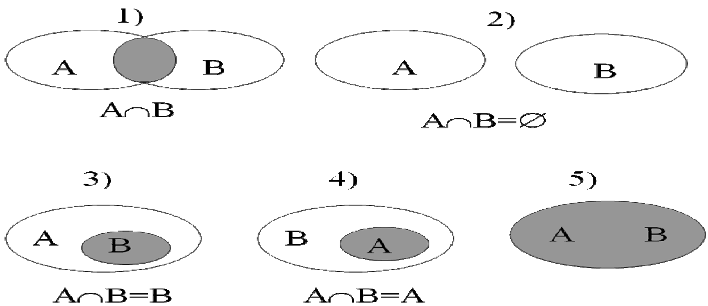
6. Операції над множинами. Для множин можна ввести ряд операцій (теоретико-множинних операцій), результатом виконання яких будуть також множини. За допомогою цих операцій можна конструювати із заданих множин нові множини.

Означення. *Перетином множин* A та B називається нова множина, яка позначається $A \cap B$ і складається з тих елементів і тільки тих, які належать одночасно кожній із множин A та B.

$$A \cap B = \{x \mid x \in A,\ x \in B\}$$

Наприклад, якщо $A = \{a;b;c;d\}$, $B = \{a;c;m;n;p\}$, то $A \cap B = \{a;c\}$.

Розглянемо п'ять можливих випадків розміщення двох множин між собою:



Заштрихована частина буде перетином множин A і B.

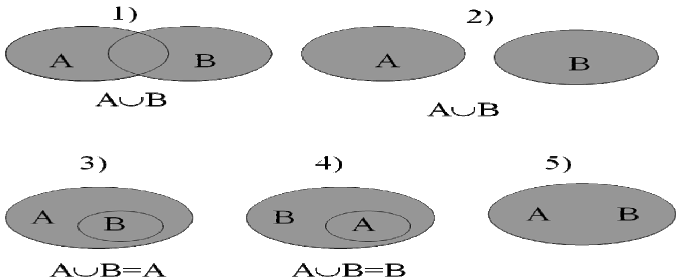
Зауваження. Операцію перетину часто використовують в математиці, наприклад, при розв'язуванні нерівностей і їх систем, систем рівнянь тощо.

Означення. *Об'єднанням множин A* та *B* називається нова множина, яка позначається $A \cup B$ та складається з тих елементів і тільки тих, які належать хоча б одній з множин *A*, *B* (або множині *A*, або множині *B*, або їм обом)

$$A \cup B = \{x | x \in A, x \in B\}$$

Наприклад, якщо $A = \{a;b;c;d\}$, $B = \{a;c;m;n;p\}$, то $A \cup B = \{a; b; c; d; m; n; p\}$.

Розглянемо п'ять можливих випадків розміщення двох множин між собою:



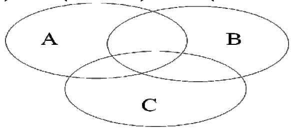
Заштрихована частина буде об'єднанням.

Легко побачити, що:

$n(A \cup B) = n(A)+n(B) - n(A \cap B)$

$n(A \cup B) = n(A)+n(B)$ $(A \cap B = \varnothing)$

Відповідно для трьох множин буде $n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(A \cap C) + n(A \cap B \cap C)$



Закони перетину і об'єднання множин

1	$A \cap B = B \cap A$	Комутативний закон
2	$A \cup B = B \cup A$	

3	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$	Асоціативний закон
4	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	

Перетин й об'єднання множин пов'язані один з одним дистрибутивними законами

5	$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$	Перший дистрибутивний закон
6	$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$	Другий дистрибутивний закон
7	$A \cup \varnothing = A$	Закони про перетин і об'єднання не порожньої множини з порожньою множиною
8	$A \cup A = A$	
9	$A \cap \varnothing = \varnothing$	
10	$A \cap A = A$	

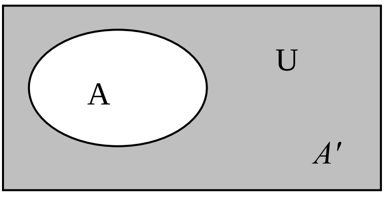
Означення. Якщо A та B - множини, то *різницею* множин B та A (порядок множин важливий) називається нова множина, яка позначається $B \backslash A$ (читається: «*B* без *A*») і яка складається з тих елементів B, що не належать A.

Наприклад, якщо $A = \{a;b;c;d\}$, $B = \{a;c;m;n;p\}$, то $A \backslash B = \{a;b\}$, $B \backslash A = \{m;n;p\}$

Розгляньте самостійно п’ять можливих випадків розміщення двох множин між собою та заштрихуйте різницю $B \backslash A$.

Означення. *Доповненням даної множини A до універсальної множини U* називають таку множину, яка містить всі ті й тільки ті елементи множини U, які не належать множині A. Доповнення множини A до U позначають A'.

$$A' = \{x \,/\, x \in U \wedge x \notin A\}$$



Питання для самоконтролю:

1. Яким словом можна замінити слово “множина”?
2. Хто є засновником теорії множин?
3. Що таке елемент множини?
4. Як позначаються множини та їх елементи?
5. Як позначається порожня множина?
6. Які множини називаються скінченними та нескінченними?
7. Які ви знаєте способи завдання множин?
8. Наведіть приклад числової множини та її підмножини.
9. Як позначається кількість елементів?
10. Наведіть по два приклади скінченних та нескінченних множин.
11. Універсальна множина. Діаграми Ейлера.
12. Перетин множин. Властивості перетину множин.
13. Об'єднання множин. Властивості об'єднання множин.
14. Різниця множин. Доповнення множин. Закони де Моргана.

Приклади розв’язання типових задач

Завдання 1. Запишіть відповідники до:
а) множини птахів (зграя); б) множини квітів у вазі (букет);
в) множини коней на галявині (табун); г) множини людей у поїзді (пасажири).

Завдання 2. Назвіть будь-який елемент:
а) множини місяців року (вересень); б) множини міст нашої країни (Луганськ).

Завдання 3. Визначте, які з наведених множин скінченні:
а) множина студентів вашої групи (так); б) множина студентів вашого університету (так); в) множина міст України (так); г) множина натуральних чисел (ні); д) множина днів у квітні (так); е) множина непарних чисел (ні).

Завдання 4. Запишіть множину цифр чисел та визначте кількість елементів кожної з множин:
а) 157051 (*A = {0; 1; 5; 7;}, n(A) = 4*);
б) 222330 (*B = {0; 2; 3}, n(B) = 3*);
в)100011 (*C = {0; 1}, n(C) = 2*).

Завдання 5. Запишіть переліком елементів множини:
а) одноцифрових додатних непарних чисел *(A={1; 3; 5; 7; 9});*
б)двоцифрових додатних непарних чисел *(B={11;13;15;...;19});*
в) одноцифрових парних чисел *(C ={2; 4; 6; 8;}).*

Завдання 6. Задати за допомогою характеристичної властивості множину всіх натуральних чисел, кратних 6 ($C = x / x \in N, x \vdots 6\}$).

Завдання 7. Задайте переліком всіх елементів множини:
а) $A = \{x \in N \mid x<6\}$ (*A = {1; 2; 3; 4; 5; }*);
б) $B = \{x \in Z \mid 0 \le x \le 7\}$ (*B = {0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7});*
в) $C = \{x \in Z^+ \mid x \le 7\}$ (*C = {1; 2; 3; 4; 5; 6; 7}*);
г) $D = \{x \in Z \mid |x| < 10\}$ (*D = {-9; -8; -7; …; 7; 8; 9}*.

Завдання 8. Запишіть за допомогою характеристичної властивості:
а) A = {5; 10; 15; 20; 25} ($A = \{x \in N \mid x:5\}$);
б) $B = \{\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8;} \frac{1}{16}\}$ ($B = \{\frac{1}{x} \mid x = 2^n, n = 1,2,3,4\}$).

Завдання 9. $A = \{x \in Z \mid 40 \vdots x\}$.Чи правильні записи:
а) $4 \in A$ (так); б) $10 \in A$ (так); в) $-8 \in A$ (так); г) $4 \notin A$ (ні); д) $0 \in A$ (ні); е) $3 \notin A$ (так); ж) $0 \notin A$ (так).

Завдання 10. Об'єднайте множини *A ={1; 2; 3; 4}* та *B = {2; 3; 5}* (*A∪B = {1; 2; 3; ;4 5}).*

Завдання 11. Які будуть елементи множини С, якщо *C = A∪B,* де:

а) *A* – множина дівчат Вашої групи, *B* – множина хлопчиків Вашої групи? (*C* – множина всіх студентів Вашої групи).

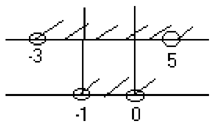
б) *A* – множина натуральних парних чисел, *B* – множина натуральних непарних чисел? (С – множина всіх натуральних чисел).

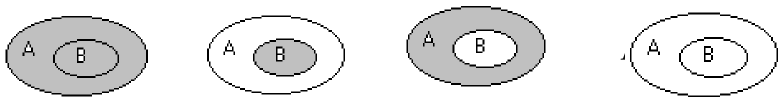
Завдання 12. Назвіть множину С, яка є перерізом *A* і *B*, якщо *A* – множина учнів 8-х класів, *B* – множина всіх хлопчиків школи ($C = A \cap B$ *- множина хлопчиків 8-х класів*).

Завдання 13. Знайдіть $A \cap B$, $A \cup B$, $A \backslash B$, $B \backslash A$, якщо:
а) $A = (-3;5)$, $B = (-1;\ 0)$;

Розв'язання:

а) $A \cup B = (-3;5)$, $A \cap B = (-1;0)$, $A \backslash B = (-3;-1) \cup (0;5)$, $B \backslash A = \varnothing$.





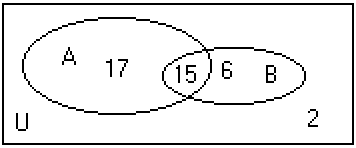
$A \cup B$ $A \cap B$ $A \backslash B$ $B \backslash A$

Завдання 14. Нехай $A = \{x / x \in Z,\ -5 \le x \le 10\}\}$, $B = \{x / x \in N,\ 3 \le x \le 15\}$. Знайдіть множини, які дістанемо в результаті операцій $A \cap B$, $A \cup B$, $A \backslash B$, $B \backslash A$.

Розв'язання. $A \cap B = \{3;4;5;6;7;8;9;10\}$, $A \cup B = \{-5;-4;-3;-2;\ldots;13;14;15\}$, $A \backslash B = \{-5;-4;-3;-2;-1;0;1;2\}$, $B \backslash A = \{11;12;13;14;15\}$.

Завдання 15. З 40 учнів шостого класу 32 відвідують математичний гурток, 21 – спортивну секцію, 15 – спортивну секцію та математичний гурток одночасно. Скільки учнів не беруть участь ні в секції, ні в гуртку?

Розв'язання. Нехай *U* – множина учнів шостого класу (n(U)=40), *A* – множина учнів, які займаються в математичному гуртку (*n(A)=32*), *B* – множина учнів, які займаються в спортивній секції (n(B)=21), $A \cap B$ – множина учнів, які займаються і в математичному гуртку, і в спортивній секції ($n(A \cap B)=15$).

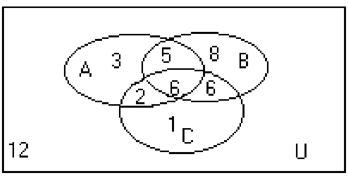


Зобразимо кожну із множин за допомогою діаграм Ейлера-Венна. Кожній з утворених діаграм поставимо у відповідність число – кількість елементів множини, зображеної діаграмою. Оскільки всього в класі 40 учнів, з них 17 - в математичному гуртку, 6 – у спортивній секції, 15 - в обох, то жодної секції або гуртка не відвідують 40 –15-17-6 = 2 учні.

Завдання 16. У класі навчаються 42 учні. Із них 16 відвідують секцію з легкої атлетики, 24 футбольну, 15 шахову, 11 – з легкої атлетики і футболу одночасно, 8 – шахову і з легкої атлетики, 12 – футбольну і шахову, а 6 – усі три секції. Решта учнів займаються лише туризмом. Скільки учнів займаються туризмом?

Розв'язання. Розв'яжемо цю задачу схематично за допомогою діаграм Ейлера-Венна.

Нехай U – множина всіх учнів класу, A – множина учнів, які відвідують секцію з легкої атлетики, B – множина учнів, які відвідують секцію з футболу, C – множина учнів, які відвідують шахову секцію.



n(A) = 16, n(B) = 24, n(C) = 15, $n(A\cap B) = 11$, $n(A\cap C) = 8$, $n(B\cap C) = 12$,

$n(A\cap B\cap C) = 6$, $n(U) = 42$.

$n(A\cup B\cup C) = n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(B\cap C)-n(A\cap C)+n(A\cap B\cap C)=16+24+15-11-12-8+6=30$.

$n(U)-n(A\cup B\cup C)=42-30=12$ учнів займаються туризмом.

Практичне заняття №1
ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ТЕОРІЇ МНОЖИН. ОПЕРАЦІЇ НАД МНОЖИНАМИ

Опрацюйте лекцію №1 та підготуйте відповіді на питання:

1.Множина, елемент множини, скінченна та нескінченна множина, порожня множина.

2. Способи завдання множин. Числові множини, числові проміжки.

3. Відношення між множинами, підмножини.

4. Універсальна множина, діаграми Ейлера-Венна.

5. Перетин множин, властивості перетину множин.

6.Об'єднання множин, властивості об'єднання множин.

7. Різниця множин, доповнення до множини.

8. Зв'язок з початковим курсом математики.

Завдання 1. Перевірте, чи правильні записи: а) $\frac{2}{3}\in N$; б) $5\in Z$; в) $0 \in N$; г) $0 \notin N$; д) $-\frac{3}{7}\in Q^{+}$; е) $\frac{3}{7}\notin Q^{-}$;

Завдання 2. Задайте переліком елементи множини:
а) множина голосних букв слова "математика";
б) множина коренів рівняння $x^4 - 4x^2 = 0$;
в) множина пір року.

Завдання 3. Перерахуєте декілька елементів кожної множини: а) $A = \{x / x\in Z,\ x = 2m\}$; б) $B = \{x / x\in Z,\ x = 2n+1\}$;

в) $C = \{x / x \in R,\ 0 \le x \le 1\}$.

Завдання 4. Укажіть серед вказаних нижче множин порожню:

а) множина коренів рівняння $x^2 - 4 = 0$;

б) множина коренів рівняння $x = x + 2$;

в) множина коренів рівняння $x + 1 = 1 + x$;

г) множина кіл, діаметр яких менше радіусу.

Завдання 5. Зобразити за допомогою діаграм: якщо $A \subset B$ і $B \subset C$, то $A \subset C$.

Завдання 6. У якому відношення знаходяться множини:

а) $A = \{x |\ x \in N,\ x \le 7\}$ и $B = \{x |\ x \in N,\ 3 \le x < 7\}$;

б) $A = \{x |\ x \in Z,\ -3 < x \le 8\}$ и $B = \{4, 5, 6\}$;

в) $A = \{x |\ x = 2k,\ k \in N\}$и $B = \{x |\ x = 7k,\ k \in N\}$.

Завдання 7. Зобразити за допомогою діаграм Ейлера множини A, B, C, якщо:

а) $A \subset B$, $B \subset C$; б) $A \subset C$, $B \subset C$, $A \cap B = \varnothing$;

в) $A \subset C$, $B \subset C$, $A \cap B \ne \varnothing$; г) $A \cap B = \varnothing$, $A \cap C \ne \varnothing$, $B \cap C = \varnothing$.

Завдання 8. Зобразити за допомогою діаграм Ейлера:

M - множина двоповерхових будинків у місті;

N - множина будинків з залізним дахом;

P - множина триповерхових будинків;

K - множина житлових будинків;

U - множина усіх будинків у місті.

Завдання 9. Складіть усі можливі підмножини множини: а) $A = \{k\}$; б) $A = \{k, m, n\}$.

Завдання 10. Для множин $A = \{x |\ x \in Z,\ -2 \le x < 6\}$; $B = \{x |\ x \in Z_0,\ x < 5\}$; $C = \{x |\ x \in N,\ x \le 7\}$

Знайти: $A \cap C$, $A \cup B$, $A \setminus B$, $C \setminus A$, $A \cap B \cap C$, $A \cup B \cup C$.

Завдання 11. Зобразити на числовій вісі множини

$A = \{x | \ x \in R, x \leq 5\}$; $B = \{x | \ x \in R, -2 < x < 2\}$; $C = \{x | \ x \in R, x > -3\}$. Знайти $A \cup B$; $B \cap C$; $A \cap B \cap C$; $A \cup B \cup C$; $A \setminus B$, $B \setminus A$; $A \cap N$; $B \cap Z_0$.

Завдання 12. Розташувати прямокутник і трикутник так, щоб перетином були крапка, відрізок, трикутник, чотирикутник.

Завдання 13. В одній родині було багато дітей. Семеро з них любили капусту, шість – моркву, п'ять – горох. Четверо дітей любили капусту та моркву, три – капусту та горох, два – моркву та горох, а один – і капусту, і моркву, і горох. Скільки дітей було в сім'ї?

Завдання 14. Знайдіть $A \cap B$, $A \cup B$, $B \setminus A$ $A \setminus B$ якщо:
$A = [-11;4]$, $B = (2;8]$.

Завдання для самостійного опрацювання
Теоретичні завдання:

1. Підготуйте історичні відомості про одного з учених Г. Кантора, Л. Ейлера, Д. Венна

2. Доведіть за допомогою діаграм Ейлера-Венна властивості операцій об'єднання та перетину двох множин.

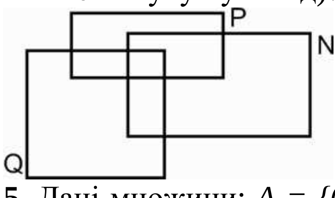
Практичні завдання:

1. Запишіть переліком елементів множину:
а) двоцифрових додатних парних чисел; б) двоцифрових цілих чисел; в) одноцифрових додатних непарних чисел;

2. Дано множини: *A* - множина натуральних чисел, *B* - множина парних натуральних чисел, *C* - множина непарних натуральних чисел, *D* - множина чисел, кратних 2 и 3 одночасно; *E* - множина чисел, десятковий запис яких закінчується нулем; *F* - множина чисел, кратних 6, *K* - множина чисел, кратних 3, *M* - множина чисел, кратних 2 й 5 одночасно. Укажіть, які з даних множин є підмножинами інших даних множин. Чи є серед даних множин рівні?

3. Серед наступних пар множин знайдіть пари рівних множин: а) $X=\{3, 5, 7, 9\}$, Y - множина непарних чисел, більших 2 й менших 10; б) $X=\{4, 6, 8\}$, Y - множина парних чисел, більших 1 й менших 9; в) X - множина плоских чотирикутників, Y - множина плоских фігур, обмежених замкнутою ламаною з чотирьох відрізків; г) X - множина двоцифрових чисел, кратних 9, Y - множина двоцифрових чисел, сума цифр запису яких кратна 9; д) X - множина сум двох непарних натуральних чисел, Y - множина парних натуральних чисел; е) X - множина точок площини, рівновіддалених від точок M і K, Y - множина точок прямої, що проходить через середину відрізка MK перпендикулярно цьому відрізку; ж) X - множина точок, що лежать на колі з центром O й радіусом 5, Y - множина точок, відстань яких від точки O дорівнює 5; з) X - множина точок, що лежать усередині кола з центром O і радіусом 5, Y- множина точок, відстань яких від точки O більша, ніж 5.

4. Три множини P, N и Q зображені трьома прямокутниками, що мають загальні частини. Заштрихуйте області, що визначають наступні множини (для кожного випадку зробіть окреме креслення): а) $N \cap Q$; б) $P \cap N$; в) $P \cap Q$; г) $P \cap N \cap Q$; д) $(P \cap N) \cap (N \cap Q)$. Як коротше записати множину у пункті д)?



5. Дані множини: *A = {0; 1; 2; 3; 4; 5; 6}*, *B= {3; 4; 5; 6; 7; 8; 9}*, *C = {-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4}*, *D = {2; 3; 4; 5; 6}*. Напишіть елементи, що входять в множину:

а) $A \cup B \cup C \cup D$; б) $A \cap B \cap C \cap D$; в) $(A \cap B) \cup (C \cap D)$;

6. 1)Знайдіть для кожної даної пари множин відповідну універсальну множину;

2) виберіть пари множин, які пов'язані одним із

співвідношень: $=, \subset, \supset$;

3) знайдіть перетин кожної пари множин;

4) знайдіть різницю першої і другої множини в кожній парі;

5) знайдіть об'єднання кожної пари множин;

6) зобразить кожну пару множин за допомогою діаграм Ейлера-Венна.

а) *A = {а; б; в; г; д; е}, B = {а; в; д; ж};*

б) *A = {2; 4; 6; 8}, B = {2};*

в) *A = {8; 10; 12;…}, B = {2; 4; 6; 8;…};*

г) $A = \{x \mid x = 2n, n \in N, n \le 30\},\ B = \{x \mid x = 3n, n \in N, n \le 20\}$;

е) *A* - множина квадратів, *B* - множина прямокутників;

ж) *A* - множина паралелограмів, *B* - множина прямокутників.

7. *У* класі 35 учнів. Усі в цьому класі займаються спортом: 25 – волейболом, 15 – баскетболом, 19 - футболом. У трьох секціях одночасно займаються 4 учні, волейболом та баскетболом – 10, баскетболом та футболом – 7, волейболом та футболом – 11. Скільки дітей займаються тільки в одній секції і у якій?

8. Серед абітурієнтів, які витримали вступні іспити до вузу, 10 балів одержали: з математики – 48, з фізики – 37, з української мови – 42, з математики або фізики – 75, з математики або української мови – 76, з фізики або української мови – 66, з усіх трьох предметів – 4 абітурієнти. Скільки абітурієнтів одержали принаймні одну оцінку 10 балів? Скільки серед тих, хто отримав лише одну оцінку 10 балів?

9. Знайдіть $A \cap B$, $A \cup B$, $B \setminus A$, $A \setminus B$ якщо $A = [-2;0)$, $B = (-5; 6]$.

10. Нехай *A* – множина цифр числа 701263557, а *B={1; 7; 6; 5; 2; 3; 0}*. Знайдіть елементи $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$. Зобразіть за допомогою діаграм Ейлера-Вена.

ТЕМА №2
ПОНЯТТЯ РОЗПОДІЛУ МНОЖИНИ НА КЛАСИ. ДЕКАРТОВИЙ ДОБУТОК МНОЖИН, КОРТЕЖІ

План

1. Розподіл множини на класи за допомогою 1, 2, 3 властивостей.

2. Розподіл множини на класи, що попарно не перетинаються.

3. Кортеж.

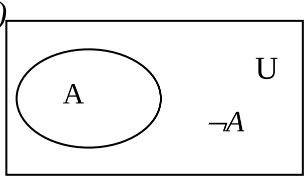
4. Прямий (декартовий) добуток множин.

5. Зображення декартового добутку двох числових множин.

1. Розподіл множини на класи за допомогою 1, 2, 3 властивостей.

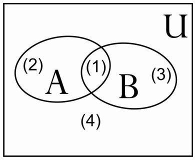
1) Розподіл множини на класи за допомогою однієї властивості. Нехай універсальна множина *U* - множина всіх трикутників. За допомогою властивості «бути прямокутним» (тобто мати прямий кут) виділяємо підмножину *A* - прямокутних трикутників (тобто елементи *U*, яким притаманна ця властивість) і підмножину $\neg A$ – непрямокутних трикутників (тобто елементи *U*, яким не притаманна ця властивість).

Ці дві підмножини універсальної множини *U* - не перетинаються $(A \cap \neg A = \varnothing)$ та їх об’єднання утворює множину U $(A \cup \neg A = U)$.



Кажуть, що властивість «бути прямокутним» визначає розподіл множини *U* на два класи: *A* і $\neg A$.

2) Розподіл множини на класи за допомогою двох *властивостей.* Нехай, як і раніше, універсальна множина U - множина всіх трикутників. За допомогою властивості «бути прямокутним» ми виділяємо підмножини A - прямокутних і $\neg A$ – непрямокутних трикутників, за допомогою властивості «бути рівнобедреним» - підмножини B - рівнобедрених і $\neg B$ - нерівнобедрених трикутників.



Указані дві властивості визначають розподіл множини U на чотири підмножини, що попарно не перетинаються (на чотири класи):

(1) $A \cap B$; (2) $A \cap \neg B$; (3) $\neg A \cap B$; (4) $\neg A \cap \neg B$.

На малюнку бачимо, що всі чотири множини попарно не перетинаються, і їх об'єднання утворює множину U. Це можна легко довести. У якості приклада доведемо, що множини (1) і (2) – не перетинаються:

$$(A \cap B) \cap (A \cap \neg B) = (A \cap A) \cap (B \cap \neg B) = A \cap \varnothing = \varnothing$$

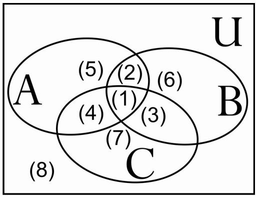
В окремих випадках деякі з множин (1) – (4) можуть бути порожніми. Наприклад, якщо U - множина всіх трикутників, A - множина прямокутних трикутників, B - множина правильних трикутників, то:

(1) $A \cap B = \varnothing$; (2) $A \cap \neg B = A$; (3) $\neg A \cap B = B$; (4) $\neg A \cap \neg B$ - множина не прямокутних неправильних трикутників, і ми отримали розподіл універсальної множини U на 3 класи.

3) Розподіл множини на класи за допомогою трьох властивостей. Нехай U - множина студентів першого курсу. За допомогою властивостей «бути відмінником», «бути спортсменом», «бути учасником художньої самодіяльності» виділимо підмножини: A - відмінників, $\neg A$ - студентів, що не є відмінниками, B - спортсменів, $\neg B$- студентів, що не є спортсменами, C - учасників художньої самодіяльності і $\neg C$ -

студентів, що не є учасниками художньої самодіяльності.

За допомогою цих трьох властивостей здійснюється розбиття множини U на 8 підмножин (класів), що попарно не перетинаються.



(1) $A \cap B \cap C$ - множина студентів, що є відмінниками, спортсменами і учасниками художньої самодіяльності;

(2) $A \cap B \cap \neg C$ - множина студентів, що є відмінниками і спортсменами, але не є учасниками художньої самодіяльності;

(3) $\neg A \cap B \cap C$ - множина студентів, що є спортсменами і учасниками художньої самодіяльності, але не відмінниками;

(4) $A \cap \neg B \cap C$ - множина студентів, що є відмінниками і учасниками художньої самодіяльності, але не спортсменами;

(5) $A \cap \neg B \cap \neg C$ - множина студентів, що є **тільки** відмінниками, тобто відмінниками, але не спортсменами і не учасниками художньої самодіяльності

(6) $\neg A \cap B \cap \neg C$ - множина студентів, що є **тільки** спортсменами

(7) $\neg A \cap \neg B \cap C$ - множина студентів, що є **тільки** учасниками художньої самодіяльності

(8) $\neg A \cap \neg B \cap \neg C$ - множина студентів, що не є ні відмінниками, ні спортсменами, ні учасниками художньої самодіяльності.

Зрозуміло, деякі з множин (1) - (8) можуть виявитися порожніми, і тоді отримаємо розбиття множини U на менше, ніж 8, число класів.

2. Розподіл множини на класи, що попарно не перетинаються.

Означення. *Класифікація* (від лат. classis – розряд, fasio - роблю) – розподіл об'єктів за класами, залежно від їх загальних ознак. У термінах теорії множин класифікація – це розбиття множини об'єктів на підмножини, які не перетинаються.

Наприклад, множину натуральних чисел можна розбити на такі класи, тобто класифікувати таким чином: A={$3n \mid n \in N$ }, B={ $3n-1 \mid n \in N$ }, C={ $3n-2 \mid n \in N$ }. Тоді:

1) $A \cup B \cup C = N$;

2) $A \cap B = \varnothing$, $B \cap C = \varnothing$, $A \cap C = \varnothing$;

3) $A \neq \varnothing$, $B \neq \varnothing$, $C \neq \varnothing$.

Але множину натуральних чисел можна класифікувати ще таким чином:

$N = A \cup B$, *де* $A = \{2n \mid n \in N\}$, $B = \{2n \pm 1 \mid n \in N\}$.

Таким чином, розподіл множини *U* на класи $K_1, K_2, ..., K_n$ визначається наступними трьома умовами:

1. $K_i \neq \varnothing$ для усіх $i = 1,2,...,n$.

2. $K_i \cap K_j = \varnothing$ для усіх $i, j = 1,2,...,n$, $i \neq j$.

3. $\bigcup_{i=1}^{n} K_i = K_1 \cup K_2 \cup ... \cup K_n = U$.

Будь-яку систему множин $\{K_1, K_2, ..., K_n\}$, що задовольняють умовам 1-3, назвемо розподілом множини *U*.

3. Кортеж.

Означення. *Упорядкованою* п*арою* називають таку множину з двох довільних елементів *a* і *b*, у якій істотним є не тільки самі елементи, а й порядок їх розміщення у множині. Пару з елементів *a* і *b* позначають *(a, b)*, *a* називають першою компонентою, *b* - другою компонентою пари *(a,b).*

Означення. Дві пари *(a,b)* і *(c,d)* називають *рівними*, якщо відповідні компоненти їх рівні, тобто

$(a,b) = (c,d) \Leftrightarrow a=c;\ b=d.$

Нехай дані множини $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Якщо взяти елемент a_1 з множини A_1, a_2 з A_2, …. a_n з A_n та розмістити їх $(a_1, a_2,\ldots,a_m)$, то отримаємо упорядковану n-ку елементів. Замість слів «упорядкована n-ка» говорять *«кортеж»* (французьке слово «кортеж» означає «урочистий хід»). Число n називають *довжиною* кортежу, а елементи - *компонентами*.

Множини $A_1, A_2, \ldots, A_n$ можуть мати спільні елементи або навіть співпадати одна з іншою. Тому, в кортежах компоненти можуть повторюватись.

Приклад. Напишіть множину букв в слові „барабан” та складіть кортеж букв цього слова.

{б;а;р;н} – множина букв цього слова, (б;а;р;а;б;а;н) – кортеж з букв слова „барабан”.

У математиці прикладом кортежів може слугувати набір цифр, що входять у десятковий запис будь-якого числа.

За допомогою поняття кортежу довжини 2 можна визначити поняття кортежу будь-якої скінченної довжини m, де під довжиною кортежу розуміють кількість його елементів.

Означення. *Кортежем* $(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ *довжини* m (*упорядкованою* m*-кою*) називається такий кортеж довжини 2 $((a_1, a_2, \ldots, a_{m-1}), a_m)$, де $(a_1, a_2, \ldots, a_{m-1})$ є кортеж довжини $m-1$.

Якщо компонентами кортежу $(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ є елементи множини M, то його називають *кортежем над множиною М*.

Розглядають також *порожній кортеж*. Його вважають кортежем довжини 0.

Утворення впорядкованих m-ок (або кортежей довжини m) пов’язано з певною операцією над множинами. Цю операцію називають знаходженням прямого або декартового добутку m множин.

4. Прямий (декартовий) добуток множин. Розглянемо випадок, коли $m = 2$.

Означення. *Прямим (декартовим)* добутком двох множин A і B називають множину всіх пар (a, b) таких, що перша компонента належить множині A, а друга множині B. Позначають $A \times B$.

Вважають, що $A \times \varnothing = \varnothing \times A = \varnothing$, для будь-якої множини A.

Операцію, за допомогою якої знаходять декартовий добуток, називають *декартовим множенням множин*.

Властивості:

1) $A \times B \neq B \times A$
2) $(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$
3) $(A \cup B) \times C = (A \times) \cup (B \times C$

Приклад. Нехай дані множини $A = \{1;2;3\}$, $B = \{3;5\}$. Тоді декартовий добуток дорівнює

$A \times B = \{(1,3); (2,3); (2,5); (3,3); (3,5)\}$

$B \times A = \{(3,1); (3,2); (5,2); (5,1); (3,3)\}$

Приклад. A = {7;8;9}, B = {3;2}. Зручно декартовий добуток розміщувати у таблиці.

A/B	7	8	9
3	(3,7)	(3,8)	(3,9)
2	(2,7)	(2,8)	(2,9)

Якщо $A=B$, то $A \times A$ позначають A^2 і називають прямим добутком (декартовим квадратом) множини A.

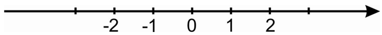
Означення. *Декартовим добутком* множин $A_1, A_2, \ldots, A_n$ називається множина $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$, елементами якої є всі упорядковані n-кі такі, що $a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \ldots, a_n \in A_n$.

Властивості декартового добутку

1) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$;
2) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$;
3) $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$;
4) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$;
5) $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$;

6) $A\times(B\backslash C) = (A\times B) \backslash (A\times C)$.

5. Зображення декартового добутку двох числових множин. Нагадаємо, координатна пряма *l* - це пряма із заданим на ній початком відліку (т.*O*), одиницею довжини (відрізок *OE*) і додатним напрямом.



Означення. Візьмемо на прямій *l* точку *M* *(M≠0)* і поставимо їй у відповідність таке число, *x* що:

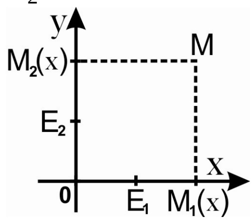
1) його модуль дорівнює відстані від 0 до *M*;

2) воно додатне, якщо точка *M* лежить на промені *OE*, і від'ємне, коли точка лежить на протилежному промені.

Таке число називають *координатою точки* і пишуть *M(x)*.

З уведенням координатної прямої встановлюється зв'язок між точками прямої і дійсними числами.

Означення Візьмемо дві взаємно перпендикулярні координатні прямі *OX* і *OY* із загальним початком і одиницями довжини $E_1 = E_2$.



Такі прямі *OX* і *OY* називають *осями прямокутної системи координат*, причому пряму *OX* називають *віссю абсцис*, а пряму *OY* - *віссю ординат*. Площина з побудованими на ній осями координат, що мають загальний початок відліку і одну і ту саму одиницю довжини, називають *координатною площиною*.

Візьмемо на координатній площині довільну точку *M*. Її положення визначається абсцисою (координата M_1 на осі *OX*) і ординатою (координата M_2 на осі *OY*)

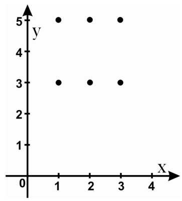
Якщо число *x* - абсциса точки *M*, *y* - її ордината, то пишуть *M(x,y)* і говорять, що точка *M* має координати *x* і *y*.

Прямокутна система координат кожній точці площини ставить у відповідність єдину пару чисел - координати цієї точки.

Нехай A і B числові множини. Тоді елементами декартового добутку $A \times B$ будуть упорядковані пари чисел. Зобразивши кожну пару чисел точкою на координатній площині, отримаємо фігуру, яка наочно представлятиме декартовий добуток множин A і B.

Приклад. $A = \{1; 2; 3\}$; $B = \{3; 5\}$.

Розв'язання. На осі OX відмітимо елементи множини A; на осі OY – множини B. Зобразимо кожну пару чисел $A \times B$ точкою на площині. Фігура з 6 точок – декартовий добуток $A \times B$.



Питання для самоконтролю:

1. Як можна розбити множину на класи за допомогою однієї властивості? Двох? Трьох? Наведіть приклади.
2. Що таке упорядкована пара? Упорядкована n-ка? Наведіть приклади кортежів довжини 3, 5, m.
3. Що таке декартовий добуток двох множин? Наведіть приклади.
4. Що таке декартовий добуток трьох множин? Наведіть приклади.
5. Що таке декартовий добуток m множин? Наведіть приклади.

4. Назвіть властивості декартового добутку множин.

5. Що називають координатами точки, координатною площиною?

6. Як можна графічно зобразити декартовий добуток двох множин?

Приклади розв'язання типових задач

Завдання 1. З 40 учнів класу 34 людини виписують газету "Факти", 23 – журнал "Добрі поради", 17 – і газету, і журнал. Чи є в класі учні, які не виписують ані газету, ані журнал?

Розв'язання. Позначимо A - множину учнів класу $(n(A) = 40)$; B - множина учнів, які виписують газету $(n(B) = 34)$; C - множину учнів, які виписують журнал $(n(C) = 23)$. Очевидно, $B \subset A$, $C \subset A$, $n(B \cap C) = 17$.

Дві властивості: «виписувати газету «Факти» і «виписувати журнал «Добрі поради» розподіляють множину A на 4 класи:

1) $B \cap C$ – учні, які виписують газету і журнал (17 осіб);

2) $B \cap \neg C$ - учні, які виписують газету і не виписують журнал (34-17=17 чоловік);

3) $\neg B \cap C$ – учні, які виписують журнал і не виписують газету (23-17=6 чоловік);

4) $\neg B \cap \neg C$ – учні, які не виписують ані журнал, ані газету (їх кількість потрібно знайти).

Щоб знайти число учнів, що не виписують ані газету, ані журнал, необхідно з числа усіх учнів класу відняти число учнів, що виписують газету або журнал, тобто число елементів об'єднання множин B і C.

$n(B \cup C) = n(B) + n(C) - n(B \cap C) = 34 + 23 - 17 = 40$ (учнів)

У класі вчиться всього 40 чоловік, тому число учнів, які не виписують жодного видання, дорівнює 0.

Завдання 2. Записати всі двоцифрові числа, цифри десятків яких належать множині $A = \{3, 6, 1\}$, а цифри одиниць – множині $B = \{0,7\}$.

Розв'язання. Розв'язання зводиться до знаходження прямого добутку множин A і B:

$$A \times B = \{(3,0); (3,7); (6,0); (6,7); (1,0); (1,7)\}$$

Тобто, шуканими числами є: 30, 37, 60, 67, 10, 17.

Завдання 3. Знайти $A \times B \times C$, якщо $A = \{1,2\}$; $B = \{a, b\}$; $C = \{3,7,9\}$.

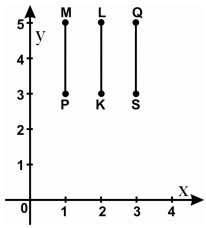
Розв'язання:

A×B×C = {(1,a,3); (1,a,7); (1,a,9); (1,b,3); (1,b,7); (1,b,9); (2,a,3); (2,a,7); (2,a,9); (2,b,3); (2,b,7); (2,b,9) }

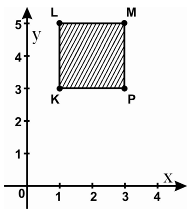
Завдання 4. Зобразіть декартовий добуток на координатній площині:

а) *A = {1; 2; 3; B = [3;5].*

Розв'язання. Множина *B* - нескінченна. У кожній парі перша компонента або 1, або 2, або 3, а друга – «пробігає» значення від 3 до 5. Отримані відрізки *MP, LK, QS* - декартовий добуток *A×B*.

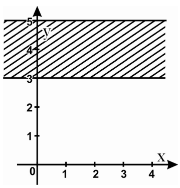


б) *A = [1; 3]; B = [3; 5].*

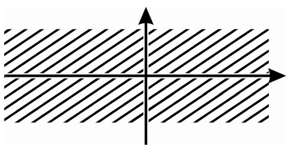


Розв'язання. У даному випадку обидві множини нескінченні, тому і декартовий добуток так само буде множиною нескінченною.

в) *A = R; B = [3; 5].*



г) *A = R; B = R.*



Практичне заняття №2
ПОНЯТТЯ РОЗПОДІЛУ МНОЖИН НА КЛАСИ, ДЕКАРТОВИЙ ДОБУТОК МНОЖИН, КОРТЕЖІ

Опрацюйте лекцію №2 та підготуйте відповіді на питання:

1. Кортеж довжини m.
2. Декартовий добуток двох множин. Властивості декартового добутку.
3. Графічне зображення декартового добутку двох числових множин.
4. Декартовий добуток n множин.
5. Розподіл множин на класи.
6. Розподіл множин на класи за допомогою однієї, двох, трьох властивостей.

Завдання 1. Множину натуральних чисел розбити на класи за допомогою властивостей:

а) «бути парним числом»;

б) «$x \vdots 2$» і «$x \vdots 3$»;

в) «$x \vdots 2$», «$x \vdots 3$»,«$x \vdots 5$».

Описати отримані множини.

Завдання 2. Складіть множини $A \times B$ и $B \times A$, якщо

а) $A = \{x \mid (x^2 - 3x + 2)x = 0\}$, $B = \{3, 4\}$;

б) $A = \varnothing$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$;

в) $A = \{a, b, c\}$, $B = \{d, f\}$.

Завдання 3. Перевірте справедливість рівності:

а) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$;

б) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$;

в) $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$,

якщо $A = \{3, 4, 5\}$; $B = \{0, 1\}$; $C = \{1, 2\}$.

Завдання 4. Знайдіть декартові добутки множин і зобразіть їх елементи на координатній площині:

а) $A=\{x|\ x\in N,\ x<4\},\ B=\{y|\ y\in N,\ 2<y<5\}$;

б) $A=\{x|\ x\in R, -2\le x\le 4\},\ B=\{y|\ y\in R,\ 2\le y\le 5\}$;

в) $A=\{x|\ x\in R, -3<x<-2\},\ B=\{y|\ y\in R, 1<y<3\}$;

г) $A=\{x|\ x\in R,\ x<0\},\ B=\{y|\ y\in R,\ y\ge 0\}$;

д) $A=\{x|\ x\in R, -2<x<2\},\ B=\{y|\ y\in R,\ y>2\}$.

Завдання 5. У відділі інституту працює кілька співробітників, причому кожний з них знає хоча б одну іноземну мову. Крім того, 6 співробітників знають англійську мову, 6 – німецьку, 7 – французьку, 4 – англійську й німецьку, 3 – німецьку й французьку, 2 – французьку й англійську, 1 – усі три мови. Скільки співробітників у відділі інституту? Скільки співробітників знають лише англійську мову? Скільки співробітників знають лише одну мову?

Завдання для самостійного опрацювання
Теоретичні завдання:

1. Підготуйте історичні відомості про Р. Декарта.

Практичні завдання:

1. Знайдіть декартові добутки множин і зобразіть їх елементи на координатній площині:

а) $A=\{x|\ x\in R,\ x>0\},\ B=\{y|\ y\in R,\ y<0\}$;

б) $A=\{x|\ x\in R,\ x=0\},\ B=\{y|\ y\in R,\ y>0\}$;

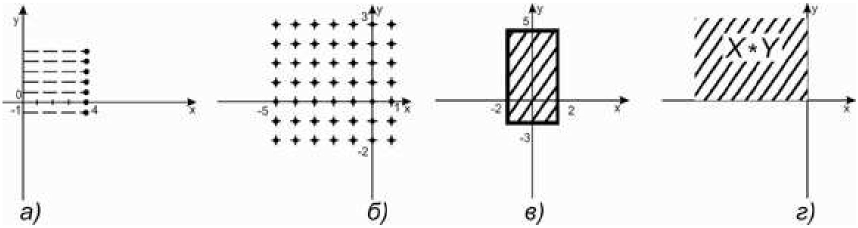
в) $A=\{x|\ x\in R,\ x=2\},\ B=\{y|\ y\in R\}$;

г) $A=\{x|\ x\in R, 1\le x\le 2\},\ B=\{y|\ y\in R,\ 0\le y\le 1\}$;

д) $A=\{x|\ x\in R, -1<x<1\},\ B=\{y|\ y\in R,\ 0<y<1\}$;

е) $A=N$, $B=N$; ж) $A=Z$, $B=Z$; з) $A=R$, $B=R$.

2. Усі елементи декартового добутку двох множин X і Y зображені в прямокутній системі координат. Запишіть множини X і Y.



3. Зобразіть в прямокутній системі координат множину $P \times B$, якщо:

а) $P = \{x |\ x \in N,\ x = 2\},\ B = \{y |\ y \in R, -2 \le y \le 3\}$;

б) $P = \{x |\ x \in R, -2 \le x \le 3\},\ B = \{y |\ y \in N,\ y = 2\}$;

в) $P = \{x |\ x \in N,\ x \le 2\},\ B = \{y |\ y \in R, -2 \le y \le 3\}$;

г) $P = \{x |\ x \in R, -2 \le x \le 3\},\ B = \{y |\ y \in N,\ y \le 2\}$.

4. На пікнік поїхало 92 особи. Бутерброди з ковбасою взяли 47 осіб, із сиром – 38, з баликом – 42, із сиром і ковбасою – 28, з ковбасою та з баликом – 31, із сиром та з баликом – 26. Усі три види бутербродів узяли 25 осіб, а кілька замість бутербродів узяли з собою пиріжки. Скільки осіб взяли пиріжки, тільки бутерброди з ковбасою, тільки з сиром, тільки з баликом?

5. З 80 туристів, які поїхали за кордон, володіють німецькою 30 осіб, англійською – 20, французькою – 32, англійською та німецькою – 5, англійською та французькою – 6, німецькою та французькою 3, трьома мовами володіють 2 особи. Скільки туристів не володіють жодною мовою; володіють лише англійською, лише німецькою, лише французькою?

РОЗДІЛ ІІ
ВІДПОВІДНОСТІ, ВІДОБРАЖЕННЯ, ВІДНОШЕННЯ

ТЕМА №3
ВІДПОВІДНІСТЬ ТА ВІДОБРАЖЕННЯ

План

1. Відповідність між елементами двох множин.
2. Наочні способи подання відповідностей.
3. Образи й прообрази елементів множин.
4. Типи відповідностей.
5. Обернені функції й відображення.
6. Потужність множин.
7. Зчисленні множини.

1. Відповідність між елементами двох множин. Усе, що оточує нас у реальному світі, перебуває в певних залежностях, зв'язках, зазнає вплив або спричиняє їх. Наукові, зокрема математичні поняття, які відображають певні сторони реальної дійсності, також перебувають між собою в певних зв'язках, або, як говорять, у певних відповідностях. Ці відповідності мають різноманітний характер.

Щоб можна було застосовувати теорію множин до розв'язування практичних задач, а також для побудови математичних теорій, потрібно розглядати множини, між елементами яких визначені певні відповідності та відношення.

Наприклад, M_1 - множина мешканців села, а M_2 - множина будинків цього села. Між елементами множин M_1 і M_2 існує відповідність «проживати»: кожному мешканцеві села відповідає будинок, в якому він проживає.

Іншими відповідностями, які можуть існувати між елементами цих множин, є «брав участь у будівництві», «є власником» та ін.

Відповідності можна розглядати і між елементами однієї й тієї самої множини. Наприклад, гра в назви міст (назва наступного міста має починатися з букви, на яку закінчувалась назва попереднього міста) являє собою відповідність між елементами множини міст.

Приклад. $M = \{-3;-1;0;2;6;11\}$. Якщо кожному числу множини M поставити у відповідність більше число цієї самої множини, то дістанемо відповідність «більше» для елементів множини M.

Розглянемо *бінарні відповідності* (слово «бінарний» походить від латинського bis – «двічі»), тобто відповідності між елементами двох множин.

Означення. *Бінарною відповідністю*, визначеною у множинах A і B, називається кожна підмножина декартового добутку $A \times B$.

Іншими словами, відповідність R – це трійка множин (A, B, Γ), де $\Gamma \subset A \times B$. Якщо $a \in A$ і $b \in B$, а R – це відповідність, що задана у цих множинах, то записують aRb та читають: «елемент a знаходиться у відповідності R з елементом b»

Приклад. $A = \{3;5;8\}$, $B = \{1;4;11\}$, R – «елемент a ділиться на b».

Тоді, множина $\Gamma = \{(3,1); (5,1); (8,1); (8,4)\}$, перша компонента якої ділиться на другу. Очевидно, $\Gamma \subset A \times B$.

Множину A називають *множиною відправлення*, B - *множиною прибуття відповідності* R. Разом їх називають *базовими множинами відповідності* R.

Запис aRb є узагальненим записом багатьох відповідностей та відношень, що використовуються у математиці. Порівняємо, наприклад, запис aRb з записом відношення рівності та нерівності дійсних чисел: $a=b$, $a>b$, $a<b$, або з записом відношення паралельності та перпендикулярності прямих: $a||b$, $a \perp b$.

Формування майже всіх понять початкового курсу математики супроводжується розглядом тих відповідностей та відношень, які існують між об’єктами, що вивчаються. Так, вивчаючи поняття натурального числа, ми говоримо про відношення «більше», «менше», «рівно». З багатьма відповідностями та відношеннями учні початкових класів зустрічаються і при розв’язуванні задач. Це відношення «бути старшим», «бути вище», «нижче» на множині людей і т.д.

2. Наочні способи подання відповідностей. Для бінарних відповідностей застосовується наступна термінологія:

А – область відправлень відповідності *R*,

В – область прибуття відповідності *R*,

Г – графік відповідності *R*.

Таким чином, графік *Г* відповідності *R* – це сукупність всіх пар (*a, b*), де $a \in A$, $b \in B$, для яких виконується *aRb*.

Приклад. А = {2;3;6;12}, В = {2;3;4}, R - відповідність «*a ділиться на b*».

Г = {(2,2); (3,3); (6,2); (6,3); (12,2); (12, 3); (12,4)} – графік цієї відповідності.

Графік відповідності легко побудувати у ПДСК, зобразивши кожну пару точкою на координатній площині з координатами *(a,b)*.

Випишемо по вертикалі всі елементи множини *А*, а по горизонталі – множини *В*. Якщо пара *aRb* де $a \in A$, $b \in B$, то на перетині відповідного рядка і стовпця записуємо 1, у противному разі записуємо 0. Одиниці та нулі визначають істинність висловлень про належність пар даній відповідності.

	2	3	4
2	1	0	0
3	0	1	0
6	1	1	0
12	1	1	1

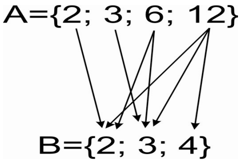
Так, у рядку, в якому міститься елемент 6, є дві одиниці та один нуль. Це означає, що висловлення 6⋮2, 6⋮3 істинні, а висловлення 6⋮4 хибне. Таку прямокутну таблицю з нулів і одиниць називають *матрицею даної відповідності*.

Якщо множини A та B скінченні, то бінарні відповідності зручно задавати таблицями. Наприклад, відповідність «Учень a чергує в день b» можна задати таблицею:

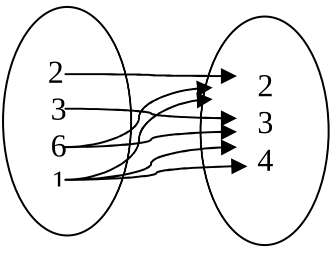
	Понеділок	Вівторок	Середа
Іванов	∨		
Григор’єва		∨	
Петров			∨
Єфремова	∨		
Лагутін		∨	
Потапова			∨

Для скінченних множин відповідності також зручно подавати за допомогою особливих креслень, що складаються з точок та стрілок, які йдуть від однієї точки до іншої.

Означення. *Графом* (від грецького «графо» - пишу») називають систему точок (вершин графа) і стрілок (орієнтованих ребер графа), які сполучають деякі з цих точок.



Розглянемо попередній приклад. Випишемо елементи множини A, а під ними елементи множини B. Якщо aRb, то проводимо стрілку від a до b. Виконавши таку побудову для всіх пар, дістанемо граф відповідності R



Граф відповідності між елементами двох множин попереднього прикладу можна зобразити і так.

Таким чином, відповідність можна подати різними способами: теоретико-множинною мовою (у вигляді пар), мовою матриць (таблиць) та мовою графів.

3. Образи й прообрази елементів множин.

Означення. Нехай маємо відповідність R. *Образом* елемента $a \in A$ при відповідності R називають множину таких $b \in B$, для яких aRb. *Прообразом* елемента $b \in B$ називають множину тих $a \in A$ для яких aRb.

Позначимо образ елемента $a \in A$ при відповідності R через $R(a)$, а прообраз елемента $b \in B$, при цій самій відповідності через $R^{-1}(a)$ За означенням $R(a)$ є множиною тих елементів з B, з якими a перебуває у відповідності R. У графі – це ті елементи з B, до яких спрямовані стрілки від елемента a.

Аналогічно $R^{-1}(b)$ – множина тих елементів з A які перебувають у відповідності R з b. У графі – це ті елементи з A, від яких виходять стрілки до елемента b.

Наприклад, якщо $A = \{2;3;6;12\}$, $B = \{2;3;4\}$, R - *в*ідповідність «*a ділиться на b*», то маємо:

$Г = \{2,2); (3,3); (6,2); (6,3); (12,2); (12, 3); (12,4)\}$ – графік;

$R(2) = \{2\}; R(3) = \{3\}; R(6) = \{2;3\}; R(12) = \{2;3;4).$

$R^{-1}(2) = \{2;6;12\}; R^{-1}(3) = \{3;6;12\}; R^{-1}(4) =\{12).$

В утворені пар (a,b) певної відповідності R можуть брати участь не всі елементи множин A і B. Тому в базових множинах A і B виділяють такі *підмножини*:

1) $R(A) = \{b \mid b \in B,$ *і існує таке* $a \in A$, *що* $aRb\}$, тобто множина тих елементів з B для яких існують елементи в A, які перебувають з ними у відповідності R. Множину $R(A) \subseteq B$ називають *множиною значень* відповідності R;

2) $R^{-1}(B) = \{a \mid a \in A,$ *і існує таке* $b \in B$, *що* $aRb\}$, тобто така підмножина елементів з A, які перебувають у відповідності R з елементами множини B. Множину $R^{-1}(B)$

називають *областю визначення* відповідності R. Очевидно, що $R^{-1}(B) \subseteq A$.

4. Типи відповідностей

Серед великої різноманітності відповідностей виділяють деякі характерні їхні типи:

1. *Порожня відповідність*. Матриця цієї відповідності складається тільки з нулів, а граф – з одних точок (жодної стрілки немає).

2. *Повна відповідність*. Її матриця немає жодного нуля, у графі від кожного елемента множини A йдуть стрілки до кожного елемента множини B.

3. *Відповідність всюди визначена у множині відправлення*. Це відповідність, для якої $R^{-1}(B) = A$. Кожен рядок матриці цієї відповідності містить принаймні одну одиницю, проте стовпці можуть складатися лише з нулів.

4. *Сюр'єктивна відповідність*. Це відповідність на всю множину прибуття, причому $R(A) = B$. У графі такої відповідності стрілки спрямовані до кожного елемента множини B.

5. *Ін'єктивна відповідність*. Це відповідність така, що прообрази елементів з B містять не більше одного елемента, тобто різні елементи з $R^{-1}(B)$ відображаються в різні елементи з $R(A)$.

6. *Функціональна відповідність або функція*. Це така відповідність, коли образи елементів з A або порожні, або містять лише один елемент. Характерною особливістю функціональної відповідності, є її однозначність: кожному елементу з A відповідає не більше як один елемент з B або жодного, або тільки один.

7. *Відображення.* Це всюди визначена функціональна відповідальність. При цьому говорять, що відповідність R відображає A в B.

Іншими словами, відображенням множини A в множину B називають таку відповідність між цими множинами, що образ будь-якого елемента $a \in A$ складається з одного і тільки одного елемента $b \in B$.

Таким чином, графік відображення множини A в множину B не може містити двох різних пар з однаковою першою компонентою. Якщо зобразити відображення A в B графом, то з кожної точки множини A буде виходити одна і тільки одна стрілка.

Позначають відображення так: $f: a \to b$ або $b = f(a)$.

Розрізняють відображення **в** В (якщо в B є елементи, які не мають прообразів в A) і відображення A **на** B (якщо кожен елемент з B має прообрази в A).

8. *Бієктивна відповідність.* Це відповідність – одночасно всюди визначена і сюр'єктивна, і ін'єктивна і функціональна, тобто це сюр'єктивне та ін'єктивне відображення.

5. Обернені функції й відображення. У математиці часто мають справу з оберненими об'єктами: оберненими числами, функціями, перетвореннями тощо.

Означення. *Відповідністю, оберненою до відповідності R,* називають таку відповідність, яка є підмножиною прямого добутку $B \times A$ і складається з тих і тільки тих пар (b,a), для яких справедливо aRb.

Відповідність, обернену до R позначають через R^{-1} Таким чином, $(b,a) \in R^{-1} \Leftrightarrow (a,b) \in R$.

Наприклад, $\Gamma_R = \{(3,3); (4,2); (4,4); (6,2); (6, 3)\}$ – графік відповідності, що визначена на множинах $A = \{3;4;6;7\}$, $B = \{2;3;4\}$. Тоді $R^{-1} = \{(3,3); (4,4); (2,6); (3, 6)\}$.

Означення. *Відображенням, оберненим до відображення $f: A \to B$,* називають таке відображення f^{-1}, що коли для кожного $x \in A$ і кожного $y \in B$ $f(x) = y$, то $f^{-1}(y) = x$, тобто $f^{-1}(f(x)) = x$.

Теорема. Відображення $f \subset A \times B$ має обернене відображення f^{-1} тоді і тільки тоді, коли f- бієктивне.

Доведення. **І.** Нехай $f \subset A \times B$ - бієктивне відображення A на B і $f(x) = y$, тобто $(x,y) \in f$. Тоді $(y,x) \in f^{-1}$ і не існує такого $x_1 \in A$, що $(y,x_1) \in f^{-1}$, бо в противному разі $(x,y) \in f$ і $(x_1,y) \in f$, це суперечить припущенню про те, що f є бієктивним відображенням. Отже, $f^{-1}(y) = x$, $f^{-1}(f(x)) = x$ і відображення f має обернене відображення.

ІІ. Нехай $f \subset A \times B$ має обернене відображення $f^{-1}: B \to A$. Покажемо, що f - бієктивне. Припустимо, що $a_1, a_2 \in A$, $a_1 \neq a_2$ *і* $f(a_1) = f(a_2)$. Тоді, згідно з означенням, $f^{-1}(f(a_1) = f^{-1}(f(a_2))$, тобто $a_1 = a_2$, що суперечить припущенню. Отже, $a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$, тобто відображення f – ін’єктивне.

Нехай $b \in B$ *і* $f^{-1}(f(b)) = a$, тобто $(b,a) \in f^{-1}$. Тоді $(a,b) \in f$, тобто $f(a) = b$. Отже, кожний елемент $b \in B$ має прообраз в A. Таким чином, відображення f^{-1} - сюр’єктивне, а f - бієктивне. Якщо відображення $f: A \to B$ має обернене $f^{-1}: B \to A$, то f називають *оборотним відображенням*. Таким чином, кожне бієктивне відображення є оборотним і навпаки.

Щ.Т.Д.

Означення. Множини A і B називаються *рівнопотужними* або *еквівалентними* тоді і тільки тоді, коли існує хоча б одне бієктивне відображення $f: A \to B$.

Вираз «множина A рівнопотужна множині B» символічно записують так: $A \sim B$, де $\sim$ – символ рівнопотужності множин.

З означення випливає, що відношення рівнопотужності множин має такі ***властивості***:

1. *Рефлексивність:* $A \sim A$.
2. *Симетричність:* $A \sim B \Rightarrow B \sim A$.
3. *Транзитивність:* $A \sim B$ *і* $B \sim C$, то $A \sim C$.

6. Потужність множин. Користуючись поняттям рівнопотужності множин, можна уточнити поняття скінченної й нескінченної множин.

Означення. Множина A називається *скінченною*, якщо в ній жодним способом не можна виділити правильної частини B, рівнопотужної всій множині A. Якщо в A можна виділити рівнопотужну їй правильну частину B, то тоді A називається *нескінченною* множиною.

Означення. Систему S непорожніх підмножин даної множини M називають розбиттям множини M, якщо кожний елемент з M належить одній і тільки одній підмножині з S, тобто якщо:

1) $A_i \in S \Rightarrow A_i \subseteq M$ (кожний елемент з S є підмножиною множини M);

2) $A_i \in S \Rightarrow A_i \neq \varnothing$ (кожний елемент з S є непорожньою множиною);

3) $A_i \in S, A_j \in S, A_i \neq A_j \Rightarrow A_i \cap A_j = \varnothing$ (елементи з S не перетинаються);

4) $M = \cup A_i, A_i \in S$ (об'єднання всіх елементів з S утворює множину M, тобто кожний елемент з M належить одній з підмножин розбиття S).

Кожна не порожня множина M допускає два розбиття: поелементне, коли кожний об'єкт з S є одноелементною множиною $\{a\}$, і ціле розбиття, коли $S = \{M\}$.

Елементи множини S часто називають *класами*. За допомогою розбиття множини на класи здійснюють різноманітні класифікації множин за певними критеріями та ознаками.

Означення. *Кардинальним числом* або *потужністю* певної множини M називають той клас K_α рівнопотужних множин, в якому ця множина міститься.

Усім множинам одного класу приписується одна й та сама потужність. Позначивши потужність множини M через

$n(M)$, дістанемо $n(A) = n(B) \Rightarrow A \sim B$

Якщо в класі K_α містяться скінченні рівнопотужні множини, то потужністю кожної з них є натуральне число – кількість елементів кожної множини класу.

Нехай А і B– дві довільні не порожні множини. Якщо множини A і B не рівнопотужні, але множина A рівнопотужна деякій правильній частині $B_1 \subset B$, то говорять, що потужність множини B більша від потужності множини A, і записують $n(B) > n(A)$ або $n(A) < n(B)$

7. Зчисленні множини. Серед нескінченних множин є безліч нерівнопотужних між собою множин, для яких можна ввести шкалу потужностей аналогічно тому, як це зроблено для скінченних множин.

Найменша нескінченна потужність – це той клас, в якому міститься множина натуральних чисел, або, як часто говорять, потужність множини натуральних чисел.

***Означення*.** Множина називається *зчисленною*, якщо вона рівнопотужна множині натуральних чисел.

Наприклад, множина $M = \{1;4;9;16;25;\ldots;n^2;\ldots\}$ усіх квадратів натуральних чисел зчисленна, тому що відображення $f:N \rightarrow M$, де $f(n) = n^2$ є взаємнооднозначним (бієктивним).

Питання для самоконтролю:

1. Що таке бінарна відповідність? Наведіть приклади.
2. Які є наочні способи подання бінарної відповідності?
3. Що таке графік та граф бінарної відповідності? Наведіть приклад.
4. Що таке образ і прообраз елемент?
5. Що таке область значення і визначення відповідності?
6. Які Ви знаєте типи відповідностей? Наведіть

приклади.

7. Що таке обернена відповідність? Наведіть приклад.

8. Які множини називають еквівалентними? Наведіть приклади.

9. Що таке потужність множини?

10. Які множини називають зчисленними?

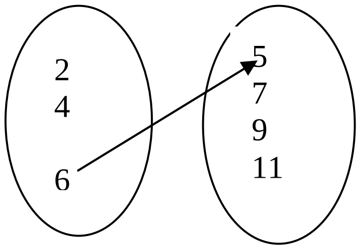
Приклади розв'язання типових задач

Завдання 1. Дані множини $A = \{2;4;6\}$, $B = \{5;7;9;11\}$. Між ними встановлено відповідність R – «число a більше числа b». Побудуйте граф і графік цієї відповідності. Знайдіть область відправлення та прибуття. Визначте область значення та визначення. Випишіть обернену відповідність та побудуйте для неї граф і графік.

Розв'язання. $A = \{2;4;6\}$, $B = \{5;7;9;11\}$, R = «$a>b$».

$Г_R = \{(6,5)\}$ – графік відповідності.

Побудуємо граф.



$A = \{2;4;6\}$ – область відправлень, $B = \{5;7;9;11\}$ – область прибуття.

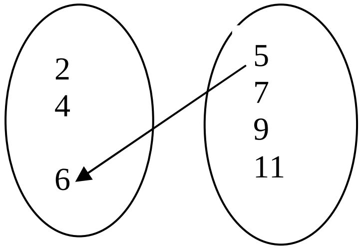
$R(A) = \{5\}$ – область значень відповідності R.

$R^{-1}(B) = \{6\}$ – область визначення відповідності R.

R^{-1} = «Число b менше числа a» - обернена відповідність.

$Г_R^{-1} = \{(5, 6)\}$ – графік оберненої відповідності.

Граф оберненої відповідності буде містити стрілку в зворотному напрямі.



Завдання 2. Дані дві множини: А = {Париж; Москва; Варшава; Ташкент; Краків; Рига}, В = {Росія; Франція; Польща; Великобританія}. Випишіть графік відповідності «Місто *a* знаходиться в державі *b*». Чи є ця відповідність відображенням?

Розв'язання. $Г_R$ = {(Париж, Франція); (Москва, Росія); (Варшава, Польща); (Краків, Польща)} – графік відповідності.

Ця відповідність є відображенням, оскільки образ будь-якого елемента $a \in A$ складається з одного і тільки одного елемента $b \in B$.

Завдання 3. Доведіть, що множина непарних натуральних чисел зчисленна.

Розв'язання. Множина *M* = {1;3;5;7;…}- множина непарних натуральних чисел. Вона буде зчисленною, оскільки відображення $f{:}N \rightarrow M$, де $f(n) = 2n\text{-}1$ є взаємнооднозначним (бієктивним).

Завдання 4. Дані множини *A = {Андрій; Борис; Михайло; Микола; Валентина; Семен; Софія; Ольга; Тимур; Трохим; Юрій; Яків}*, *B* - множина букв українського алфавіту. Між цими множинами встановлена відповідність, за якою кожному прізвищу зіставляється його перша буква. Чи є ця відповідність відображенням множини *A* в множину *B*? Чи сюр'єктивне воно? Чи ін'єктивне воно? Знайдіть повний прообраз множини голосних букв.

Розв'язання. Ця відповідність є відображенням, оскільки образ будь-якого елемента $a \in A$ складається з одного і тільки одного елемента $b \in B$. Це відображення не сюр′єктивне, оскільки не всі образи з B мають прообрази в A. Воно також не є ін′єктивним, оскільки кожному елементу $b \in B$ відповідає один і тільки один елемент $a \in A$

Завдання 1. Учень придбав книгу за 70 грн, зошит за 4 грн, олівець за 2 грн. Відповідність між якими двома множинами встановлено? Випишіть графік цієї відповідності. Чи буде ця відповідність відображенням? Чи сюр'єктивне воно? Чи ін'єктивне воно?

Розв'язання. Можна визначити дві множини A = *{книга; зошит; олівець;}*, B = *{70; 4; 2}*. Тоді між цими множинами встановлена відповідність R = « предмет a коштує b гривен.

Випишемо графік $Г_R$ = *{(книга, 70); (зошит, 4), (олівець, 2)}*. Ця відповідність є відображенням оскільки образ будь-якого елемента $a \in A$ складається з одного і тільки одного елемента $b \in B$. Це відображення і сюр'єктивне, і ін'єктивне а значить воно бієктивне.

Практичне заняття №3
ВІДПОВІДНІСТЬ ТА ВІДОБРАЖЕННЯ

Опрацюйте лекцію № 3 та підготуйте відповіді на питання:

1. Бінарна відповідність між елементами двох множин. Позначення.
2. Способи завдання відповідностей.
3. Графік відповідності.
4. Граф відповідності.
5. Образи і прообрази елементів множин.
6. Множина значень і множина визначень відповідності.
7. Типи відповідностей.

8. Відображення.
9. Потужність множини
10. Еквівалентні множини
11. Зчисленні множини

Завдання 1. Дані множини $M = \{-1;1;-2;2;-3;3;-;-4;4\}$ и N - множина натуральних чисел. Відповідність R = *«квадрат числа m дорівнює числу n», де* $m \in M$, $n \in N$. Випишіть графік, побудуйте граф цієї відповідності. Знайдіть область значення і визначення відповідності R. Випишіть область прибуття та відправлення.

Завдання 2. Дані множини $A = \{10;\ 20;\ 30\}$, $B = \{2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6\}$ і відповідність R = «Число a ділиться на b».

1) Випишіть графік цієї відповідності та побудуйте його в ПДСК. Побудуйте граф цієї відповідності.

2) Знайдіть область визначення і значення відповідності, область відправлень та прибуття.

3) Випишіть обернену відповідність, побудуйте її граф і випишіть графік.

Завдання 3. Доведіть, що множина кубів натуральних чисел зчисленна.

Завдання 4. Кожній людині ставиться у відповідність його мати. Чи є ця відповідність відображенням множини людей А в себе? Чи сюр'єктивне воно? Чи ін'єктивне воно?

Завдання 5. Кожному відвідувачу кінотеатру поставимо у відповідність кресло, у якому він сидить. За якої умови ця відповідність є відображенням множини відвідувачів в множину кресал? За якої умови це відображення сюр'єктивне? Чи завжди воно ін'єктивне?

Завдання для самостійного опрацювання
Практичні завдання:

1. У підручнику з математики (1-4 класи) для учнів початкової школи знайдіть три задачі, у яких іде мова про бінарну відповідність між елементами двох множин. Визначте множини та відповідність, що між ними встановлюється.

2. Дані множини $A = \{3; 4; 5; 6; 7\}$, $B = \{1; 2; 3; 4; 5;6\}$ і відповідність R = « Число a більше b *на 2* ».

1) Випишіть графік цієї відповідності та побудуйте його в ПДСК. Побудуйте граф цієї відповідності.

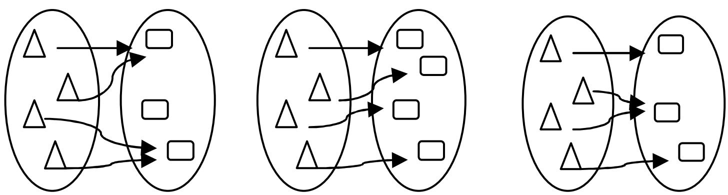
2) Знайдіть область визначення і значення відповідності, область відправлень та прибуття.

3) Випишіть обернену відповідність, побудуйте її граф і випишіть графік.

3. Чи є відповідність «Людина y – син людини x» відображенням $f\colon x \to y$ множини всіх людей в себе? Чи є таким відображення відповідність «Людина y – старший син людини x»? Чи є відображенням $f\colon x \to y$ відповідність «Людина y – батько людини x»?

4. Доведіть, що множина точок відрізку AB еквівалентна множині точок будь-якого іншого відрізку.

5. На рисунку стрілками показані відображення множини трикутників в множину чотирикутників. Які з цих відображень сюр'єктивні, ін'єктивні? Чи є серед цих відображень бієктивне відображення?



ТЕМА №4
ВІДНОШЕННЯ

План

1. **Відношення у множині.**
2. **Обернене та протилежне відношення.**
3. **Властивості відношень.**
4. **Відношення еквівалентності.**
5. **Відношення порядку.**

1. Відношення у множині. Якщо розглядати відповідність між елементами однієї множини, то говорять про відношення між елементами цієї множини.

Означення. *Бінарним відношенням,* визначеним у множині *M,* називають кожну підмножину декартового добутку $M \times M$ або декартового квадрата M^2.

Якщо елементи a і b множини M знаходяться у відношенні R, то записують aRb.

Наприклад, відношення «a паралельна b», «a перпендикулярна до b» розглядають у множині прямих на площині; відношення «a ділиться на b», «a взаємнопросто з b» - у множині натуральних чисел тощо. Кожне рівняння (нерівність) з двома змінними, а також їхні системи у фіксованій числовій множині M є прикладами відношень у M.

Іншими словами, бінарним відношення R на множині M – це пара множин $(M; Г)$, де $Г \subset M \times M$. Множину M називають *областю завдання* відношення R, а множину $Г$ – *графіком* відношення R.

Відношення, як і відповідності, можна зображати за допомогою таблиць (матриць) і графів. При зображені за допомогою графів елементи множини, на якій розглядається відношення, зображуються на площині один раз і розміщуються довільно, на графі також можуть бути стрілки від a до a (петлі).

2. Обернене та протилежне відношення.

Означення. Оберненим відношенню R називають відношення $bR^{-1}a$ на множині M, таке, що $bR^{-1}a$ тільки у тому випадку, коли aRb.

Наприклад, для відношення «*число x ділиться на y*» оберненим буде відношення «*число y є дільником числа x*» - в тому випадку, і тільки в тому, коли число x ділиться на y.

Щоб отримати графік оберненого відношення, потрібно взяти графік прямого відношення та поміняти місцями компоненти в кожній парі.

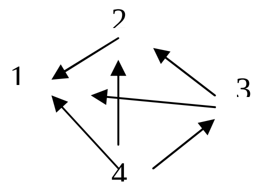
Щоб отримати граф оберненого відношення, потрібно поміняти напрямок всіх стрілок у графі прямого відношення.

Приклад. $M = \{1;2;3;4\}$, R – «$x>y$»

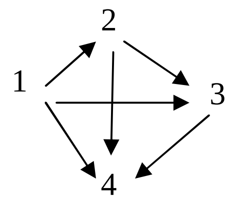
$Г_R = \{(2,1); (3,1); (3,2); (4,1); (4,2); (4,3)\}$

R^{-1} = «$y<x$» - обернене відношення

$Г_R^{-1} = \{(1,2); (1,3); (2,3); (1,4); (2,4); (3,4)\}$



Граф R



Граф R^{-1}

Може статися так, що графіки відношень xRy, xQy – є доповнення один одного до $M\times M$ (тобто вони не перетинаються, а їх об'єднання є декартовим добутком $M\times M$). Такі відношення називають *протилежними*. Наприклад, відношення «Число x більше числа y» протилежне відношенню «Число x не більше числа y». Позначається протилежне відношення $\overline{R}$.

Приклад. $M = \{2; 4; 5; 6\}$, R – «Число x менше числа у».

$Г_R = \{(2,4); (2,5); (2,6); (4,5); (4,6); (5,6)\}$ – графік прямого відношення.

$\overline{R}$ - «Число не менше числа у» (тобто $x \geq y$)

$Г_{\overline{R}}$ = {(2,2); (4,4); (5,5); (6,6); (4,2); (5,2); (5,4); (6,2); (6,4); (6,5)} – графік протилежного відношення.

$R \cup \overline{R} = M^2$.

3. Властивості відношень. Відношення *R* на множині *M* називають:

Рефлексивним, якщо для кожного $a \in M$ aRa (*a* знаходиться у відношенні *R* сам до себе).

Наприклад, відношення «подільності», «паралельності прямих», «рівності» є рефлексивними, а відношення «більше», «менше», «перпендикулярності» - ні.

Антирефлексивним, якщо для кожного $a \in M$ твердження aRa не виконується (*a* не знаходиться у відношенні *R* само до себе).

Наприклад, антирефлексивними є відношення «більше», «менше» у числових множинах і «перпендикулярність» - у множині прямих на площині.

Симетричним, якщо для будь-яких $a, b \in M$ виконується властивість $aRb \Rightarrow bRa$ (якщо *a* перебуває у відношенні *R* з *b*, то *b* також перебуває у відношенні *R* з *a*).

Наприклад, відношення «паралельності», «перпендикулярності» прямих на площині, «подібності» геометричних фігур є симетричними.

Антисиметричним, якщо для будь-яких $a, b \in M$ не виконується $aRb \Rightarrow bRa$ (якщо *a* перебуває у відношенні *R* з *b*, і *b* перебуває у відношенні *R* з *a*, то значить $a = b$)

Наприклад, відношення «подільності», «більше», «менше» є антисиметричними відношеннями.

Транзитивним, якщо для будь-яких $a, b \in M$ виконується властивість (*aRb та bRc)* $\Rightarrow$ *bRc* (якщо *a* перебуває у відношенні *R* з *b*, а *b* перебуває у відношенні *R* з *c*, то елемент *a* перебуває у відношенні *R* з елементом *c*).

Наприклад, відношення «більше», «менше» є транзитивними.

Зв'язним, якщо для будь-яких $a,b \in M$ виконується властивість $a \neq b \Rightarrow aRb$ або bRa (якщо $a \neq b$, то a перебуває у відношенні R з b або навпаки).

Наприклад, зв'язними є відношення «більше», «менше», а відношення «подільності», «паралельності», «перпендикулярності» - ні.

Очевидно, різні за змістом відношення можуть мати спільні властивості. Це дає змогу класифікувати певні відношення за тими або іншими властивостями.

У процесі практичної діяльності виокремлено найважливіші групи відношень, зокрема відношення еквівалентності, порядку, функціональне (функція).

4. Відношення еквівалентності

Означення. Відношення R, визначене у множині M, називають *відношенням еквівалентн*ості або *еквівалентністю* в M, якщо воно рефлексивне, симетричне й транзитивне.

Наприклад, відношення подібності на множині усіх трикутників на площині; відношення «навчатися в одному класі» на множині учнів школи; відношення рівносильності на множині рівнянь та ін.

За допомогою відношення еквівалентності виконується операція розбиття не порожньої множини на підмножини, які називають класами.

Теорема. Кожне розбиття S множини M визначає, при тому тільки єдине, відношення еквівалентності R, і навпаки, кожному відношенню еквівалентності R на M відповідає, при тому тільки єдине, розбиття S множини M.

Відношення еквівалентності наочно зображуються системою повних графів, побудованих на класах еквівалентності. *Повним* називають граф, в якого всі точки сполучено стрілками і всі вершини мають петлі. Між кожною парою точок проходять дві протилежні стрілки.

5. Відношення порядку. Часто ми розглядаємо порядок слів у реченні, порядок запису рівнянь, порядок виконання дій тощо. У слово «порядок» вкладається такий зміст: воно позначає, який елемент тієї або іншої множини за яким слідує (або передує)

Означення. Відношення *R*, визначене у множині *M*, називають *відношенням строго порядку*, якщо воно транзитивне і антисиметричне.

Приклад. Відношення «бути меншим» на множині натуральних чисел буде відношенням строго порядку.

Означення. Відношення *R*, визначене на множині *M*, називають відношенням нестрогого порядку, якщо воно рефлексивне, антисиметричне та транзитивне.

Приклад. Відношення «число *x* кратне числу *y*» на множині натуральних чисел буде відношенням нестрогого порядку.

На графі відношення нестрогого порядку будуть петлі.

Якщо на множині визначено відношення порядку, то її називають *упорядкованою множиною*.

Якщо відношення порядку зв'язне, то впорядковану ним множину називають *лінійно впорядкованою*.

Питання для самоконтролю:

1. Що таке відношення на множині *M?* Наведіть приклад.
2. Яке відношення називається оберненим? Наведіть приклад.
3. Яке відношення називається протилежним? Наведіть приклад.
4. Яке відношення називається рефлексивним (анти рефлексивним)? Наведіть приклад.
5. Яке відношення називається симетричним (антисиметричним)? Наведіть приклад.
6. Яке відношення називається транзитивним? Наведіть приклад.
7. Яке відношення називається відношенням еквівалентності? Наведіть приклад.

8. Які відношення є відношеннями строго і нестрогого порядку? Наведіть приклади.

Приклади розв'язання типових задач

Завдання 1. Задати різними способами відношення $R =$ «бути менше» на множині $X = \{1,2,3,4\}$.

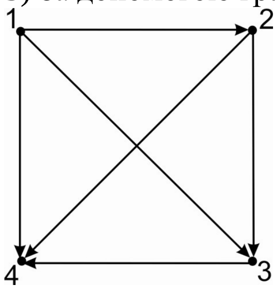
Розв'язання. 1) За допомогою графіка:

$\Gamma_R=\{(1,2); (1,3); (1,4); (2,3); (2,4); (3,4)\}$

2) За допомогою таблиці:

	1	2	3	4
1	0	1	1	1
2	0	0	1	1
3	0	0	0	1
4	0	0	0	0

3) За допомогою графа:



Завдання 2. На множині людей задані відношення:

R - «*x* та *y* живуть в одному місті»; *Q* - «*x* та *y* вчаться в одній школі», *S* - «*x* та *y* займаються в одному гуртку». Визначте, які з відношень є наслідками іншого.

Розв'язання. *Q* є наслідком *S; R* є наслідком *Q* і є наслідком *S*. $(S \Rightarrow Q \Rightarrow R)$.

Завдання 3. Дана множина $X = \{12;8;4;2;\}$, і відношення *R – «x ділиться на y»*. Випишіть графік цього відношення. Знайдіть обернене і протилежне відношення, та випишіть їх графіки.

Розв'язання. $\Gamma_R = \{(12,2); (12,4); (8,2); (8,4); (4,2); (2,2); (4,4); (8,8); (12,12)\}$.

R^{-1} – *«у дільник числа х»* - обернене відношення

$Г_R^{-1} = \{(2,12); (4,12); (2,8); (4,8); (2,4); (2,2); (4,4); (8,8); (12,12)\}$

$\overline{R}$ - *«х не ділиться на у»* - протилежне відношення

$Г_{\overline{R}} = \{(12,8); (8,12); (4,8); (4,12); (4,2); (2,12); (2,8); (2,12)\}$.

Завдання 4. Визначте властивості відношення *R* – «число *x* більше числа *y* на 2» на множині натуральних чисел.

Розв'язання.

1) Відношення *R* антирефлексивне, оскільки будь-яке натуральне число не може бути більше самого себе на 2, тобто кожний елемент множини *N* не знаходиться у відношенні *R* сам з собою.

2) Відношення *R* антисиметричне, оскільки, якщо одне натуральне число більше другого на 2, то це не означає, що друге число буде більше першого на 2 (наприклад, 4 більше 2 на 2, але 2 не більше 4 на 2). Тобто, якщо *aRb*, то неправильно, що *bRa*.

3) Відношення *R* не транзитивне, оскільки, якщо одне натуральне число більше другого на 2, а друге більше третього на 2, то це не означає, що перше число буде більше третього на 2 (наприклад, 6 більше 4 на 2, 4 більше 2 на 2, але 6 не більше 2 на 2) .

Завдання 5. На множині людей задано відношення *R* – «x сестра y». З'ясуйте, які з наступних висловлень істинні: а) відношення *R* симетричне (істина); б) відношення *R* антисиметричне (істина); в) відношення *R* транзитивне (істина).

Практичне заняття №4

ВІДНОШЕННЯ

Опрацюйте лекцію №4 та підготуйте відповіді на такі питання:

1. Бінарне відношення.
2. Обернене та протилежне відношення.
3. Властивості відношень.
4. Відношення строго та нестрогого порядку.
5. Лінійно упорядкована множина.

Завдання 1. На множини Х = {0;3;6;9;12;15;18} задані відношення:

1) «х більше у в 3 рази»; 2) «х більше у на 3».

Випишіть графіки цих відношень, побудуйте їх у ПДСК, побудуйте графи даних відношень.

Завдання 2. Множина *М* членів родини Волкових складається з батька, матери и дітей: Анатолія, Катерини, Петра и Марії. Побудуйте графи: 1) «бути дочкою»; 2) «бути братом»; 3) «бути матір'ю».

Завдання 3. Задайте різними способами будь-яке відношення між елементами множини *А = {3;6;9;18;27}*.

Завдання 4. Елементи множини *Х = {0;13;4;6}* знаходяться у відношенні, графік якого *Г = {(0,1); ((0,3); (0,4); (0,6); (1,4); (6,6)}*. Побудуйте граф даного відношення.

Завдання 5. На множині *Х = {1;2;4;8;12}* задано відношення «*х кратне у*». Випишіть графік, побудуйте граф цього відношення. Знайдіть обернене та протилежне відношення, випишіть їх графіки та побудуйте графи.

Завдання 6. На множині *А = {3;6;9;12;15}* задано відношення «*х* дільник *у*». Покажіть, що це відношення упорядковує множину *А*.

Завдання 7. На множині *Х = {3;4;5;6}* задано відношення «$x \geq y$». Визначте властивості цього відношення та побудуйте графік на координатній площині. Порівняйте графіки відношень «$x > y$» та «$x \geq y$».

Завдання для самостійного опрацювання
Практичні завдання:

1. Для кожного з наступних відношень укажіть множини, пари елементів яких воно може пов'язувати: а) «x дорівнює y»; б) «x є однокласником y»; в) «x знайом з y».

2. Дана множина $B = \{1;3;5;7;9\}$. Елементи цієї множини пов'язані відношенням «число x більше числа y на 2». Запишіть графік цього відношення, зобразіть його на координатній площині. Побудуйте граф цього відношення. Знайдіть обернене та протилежне відношення. Випишіть їх графіки та побудуйте графи.

3. У наступних задачах визначте назви відношень та об'єктів, що пов'язані цим відношенням.

а) У магазині за 3 дні продали 1 т цукру; у перший день продали 300 кг, у другий – в 2 рази більше, ніж в перший. Скільки кілограмів цукру продали у третій день?

б) Альбом коштує 10 грн, книга в 3 рази дорожче за альбом. Скільки коштує книга?

4. Розв'яжіть наступні задачі з початкового курсу математики, використовуючи графи відношень, що розглядаються в цих задачах.

а) Складіть всі можливі приклади на ділення (без остачі) з числами: 12, 26, 4, 96, 13, 78, 3.

б) Запишіть дві рівності і дві нерівності, використовуючи вираз 23+12, 40-26, 12+23, 40-5. Скільки всіх можливих рівностей може бути з даних виразів?

5. Наведіть приклади розбиття на класи наступних множин: а) множина учнів певної школи; б) множина слів у словнику; в) множина дерев у садку.

6. Наведіть приклади класифікацій, що виконуються в різних областях людської діяльності.

7. Визначте властивості наступних відношень: а) «пряма х перетинає пряму у» (на множині прямих); б) число х ділить на число у» (на множині натуральних чисел).

ПИТАННЯ ДО ТЕОРЕТИЧНОГО ЗВІТУ №1

1. Множина, елемент множини, скінченна та нескінченна множина, порожня множина.
2. Способи завдання множин. Числові множини, числові проміжки.
3. Відношення між множинами, підмножини.
4. Універсальна множина, діаграми Ейлера-Венна.
5. Перетин множин, властивості перетину множин.
6. Об’єднання множин, властивості об’єднання множин.
7. Різниця множин, доповнення до множини.
8. Зв'язок з початковим курсом математики.
9. Кортеж довжини m.
10. Декартовий добуток двох множин. Властивості декартового добутку.
11. Графічне зображення декартового добутку двох числових множин.
12. Декартовий добуток n множин.
13. Розподіл множин на класи.
14. Розподіл множин на класи за допомогою однієї, двох, трьох властивостей.
15. Бінарна відповідність між елементами двох множин. Позначення.
16. Способи завдання відповідностей.
17. Графік відповідності.
18. Граф відповідності.
19. Образи і прообрази елементів множин.
20. 6.Множина значень і множина визначень відповідності.
21. Типи відповідностей.
22. Відображення.
23. Потужність множини.
24. Еквівалентні множини.
25. Зчисленні множини.
26. Бінарне відношення.

27. Обернене та протилежне відношення.
28. Властивості відношень.
29. Відношення строго та нестрогого порядку.
30. Лінійно упорядкована множина.

ПРИКЛАД МОДУЛЬНОЇ РОБОТИ №1

1. $A = (-\infty; 5)$, $B = [-3; 7]$. Знайти $A \cup B$, $A \cap B$, $A \backslash B$, $B \backslash A$. Зобразіть за допомогою діаграм Ейлера-Вена.

2. З 80 туристів, які поїхали за кордон, володіють німецькою мовою 30 осіб, англійською – 20, французькою – 32, англійською та німецькою – 5, англійською та французькою – 6, німецькою та французькою – 3, трьома мовами володіють – 3 особи. Скільки туристів не володіють жодною мовою?

3. Дана множина $X = \{x | x \in Z, 0 \le x \le 5\}$, $У = \{x | x \in Z, -4 < x < 3\}$. Побудувати графік декартового добутку

4. Дана множина $X = \{2, 3, 4, 5\}$. Випишіть графік відношення R = "x більше або дорівнює y", побудуйте граф цього відношення, визначте властивості. Задайте протилежне та обернене відношення та випишіть їх графіки, побудуйте графи.

5. Дані множини $A = \{3,6,9,12\}$, $B = \{2,4,8,11\}$. Задайте граф та графік відповідності "Число *а* більше числа *в*".

6. Виділить з множини N натуральних чисел три підмножини, рівнопотужні множині N.

7. X — множина відрізків. Які з наступних відношень є відношеннями порядку на цій множині: 1) "х дорівнює у"; 2) "х довше у"; 3) " х коротше у на 2 см"; 4) " х довше у в 3 рази"?

Модуль В
РОЗДІЛ ІІІ
ЕЛЕМЕНТИ КОМБІНАТОРИКИ

ТЕМА №5
ІСТОРІЯ ВИНИКНЕННЯ КОМБІНАТОРИКИ. КОМБІНАТОРНІ ПРАВИЛА ДОДАВАННЯ ТА МНОЖЕННЯ

План

1. **Історія виникнення та розвитку комбінаторики.**
2. **Комбінаторне правило додавання.**
3. **Комбінаторне правило множення.**

1. Історія виникнення комбінаторики. У практичному житті серед різних математичних задач часто зустрічаються такі, в яких треба вибирати з деякої множини об'єктів підмножини елементів, які мають ті чи інші властивості, розміщувати їх у певному порядку за певними правилами і знаходити число способів, за якими таке розташування можливе. Наприклад, керівнику підприємства потрібно відрядити певну групу спеціалістів, вчителю потрібно скласти варіанти контрольної роботи чи підібрати команду учнів на олімпіаду, завучу потрібно скласти розклад занять, агроному - розмістити сільськогосподарські культури на полях і так далі.

Оскільки в таких задачах йдеться про ті чи інші варіанти, комбінації об'єктів, то їх називають *комбінаторними задачами*. Розділ математики, в якому обґрунтовується теорія розв'язування комбінаторних задач, називається математичною комбінаторикою або просто *комбінаторикою*. За останні десятиріччя інтерес до комбінаторики значно посилився, адже багато важливих проблем, пов'язаних з розробкою оптимальних планів виробництва, транспортування, розміщення підприємств, зводиться до задач комбінаторного характеру. Хоч ці математичні задачі, як правило, досить складні і вимагають надзвичайно великої кількості варіантів, сучасні комбінаторні методи, пов'язані з застосування швидкодіючих електронних обчислювальних машин, комп'ютерної техніки.

Задачі, які згодом отримали назву комбінаторних, були відомі людям ще в глибокій давнині. Вже декілька тисячоліть тому в стародавньому Китаї захоплювались складанням магічних квадратів, в яких задані числа розміщувалися так, що їх сума по всіх горизонталях, вертикалях та головних діагоналях була одною і тою самою. У стародавній Греції підраховували кількість різних комбінацій довгих та коротких складів у віршованих розмірах, займалися теорією фігурних чисел, вивчали фігури, які можливо скласти з частин особливим чином розрізаного квадрату і т.д.

У XVI столітті у житті привілейованих людей велике місце відводилося азартним іграм. У карти і кості вигравалися і програвалися золото і діаманти, палаци й маєтки, породисті коні та дорогі прикраси. Були розповсюджені всілякі лотереї. Спочатку комбінаторні задачі стосувалися в основному азартних ігор – питань, скількома способами можна викинути потрібну кількість очків чи скількома способами можна одержати двох королів у грі в карти. Ці та інші проблеми азартних ігор були рушійною силою в розвитку комбінаторики і теорії ймовірностей, що розвивалася одночасно з нею.

Одним із перших зайнявся підрахунком кількості різних комбінацій при грі в кості італійський математик Тарталья. Він склав таблицю, що показує, скількома способами можуть випасти r очків. Однак при цьому не враховувалося, що та сама сума очків може бути отримана різними способами (наприклад, $1 + 3 + 4 = 4 + 2 + 2$).

Теоретично досліджувати питання комбінаторики почали в XVII столітті французькі вчені Паскаль і Ферма.

Вихідним пунктом їхніх досліджень також були проблеми азартних ігор.

Термін "комбінаторика" був уведений у математику знаменитим вченим Лейбніцем. У 1666 році Лейбніц опублікував "Міркування про комбінаторне мистецтво". Протягом усього життя Лейбніц багаторазово повертався до ідей “комбінаторного мистецтва”. Комбінаторику він розумів дуже широко, зокрема, як складову будь-якого дослідження, що потребує спочатку аналізу (розчленовування цілого на частини), а потім синтезу (з'єднання частин у ціле). Мрією Лейбніца, залишалася побудова загальної комбінаторної теорії. Комбінаториці Лейбніц пророкував блискуче майбутнє, широке застосування.

У XVIII столітті до розв’язування комбінаторних задач зверталися видатні математики. Так, Леонард Ейлер розглядав задачі про парокомбінації, циклічні розміщення, побудову магічних і латинських квадратів.

У 1713 році опубліковано роботу Я.Бернуллі (1654-1720) "Мистецтво припущень", у якій з достатньою повнотою були викладені відомі на той час комбінаторні факти. "Мистецтво припущень" з'явилося після смерті автора й не було завершене. Робота складалася з 4-х частин. Комбінаториці була присвячена друга частина, у якій містяться формули для числа перестановок з n елементів, для числа сполучень (названого Я.Бернуллі класовим числом) без повторень і з повторенням, для числа розміщень з повтореннями й без повторень.

Для виведення формул автор використовував максимально прості й наочні методи, супроводжуючи міркування численними таблицями і прикладами. Робота Я.Бернуллі відрізнялася від інших систематичністю, простотою методів, строгістю викладу. Протягом XVIII століття вона користувалася популярністю не тільки як науковий трактат, а й як навчально-довідкове видання. У роботах Я.Бернуллі і Г.Лейбніца ретельно розглянуті властивості сполучень, розміщень, перестановок; комбінаторні об'єкти віднесені до основних комбінаторних конфігурацій. У XIX столітті в лекціях з проективної геометрії професор університету в Страсбурзі К.Т.Рейе (1882) вводить термін "геометрична конфігурація”.

Наприкінці XVIII - початку XIX століть математики комбінаторної школи Гіндербурга спробували побудувати загальну комбінаторну теорію. Деякі комбінаторні проблеми набули при цьому настільки розвиненої форми, а їх дослідження породили настільки великий обсяг інформації і дали суттєві результати, що стало можливим розглядати їх як самостійні математичні дисципліни.

У XX столітті завдяки роботам Дж.К. Рота (1964), а потім Р. Стенлі відбувається стрімкий процес алгебраїзації комбінаторики. Вивчення ними частково упорядкованих множин, властивостей функції Мебіуса, абстрактних властивостей лінійної залежності, виявлення їхньої ролі під час розв’язування комбінаторних задач сприяли збагаченню комбінаторних методів дослідження і подальшої інтеграції комбінаторики в сучасну математику.

Існують різні рівні комбінаторних задач: на відшукання хоча б одного розв’язку, на відшукання всіх розв’язків, на відшукання кількості розв’язків, на вибір серед різних варіантів оптимального. Але більшість із них розв’язуються за допомогою двох основних правил: правила додавання та множення.

У розділі 1 ми розглядали поняття декартового добутку та кортежей

Нагадаємо, що пара елементів *(а, в)* в указаному порядку називається *упорядкованою* парою, *а* та *в* називаються *компонентами* або *координатами* цієї пари.

Аналогічно можна ввести поняття *упорядкованої* трійки, четвірки і т.д., *n* – кі .

Означення. *Декартовим добутком* двох множин A та B називають множину $A \times B$, елементами якої є всі упорядковані пари *(а, в)* такі, що $a \in A$, $в \in B$.

Вважають, що $A \times \varnothing = \varnothing \times A = \varnothing$, для будь-якої множини *А*.

Операцію знаходження декартового добутку множин *А* та *В* називають декартовим множенням.

Властивості:

4) $A \times B \neq B \times A$
5) $(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$
6) $(A \cup B) \times C = (A \times) \cup (B \times C$

Означення. *Декартовим добутком* множин $A_1, A_2, \ldots, A_n$ називається множина $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$, елементами якої є всі упорядковані *n*-кі такі, що $a_1 \in A_1$, $a_2 \in A_2$, …, $a_n \in A_n$.

Нехай дані множини $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Якщо взяти елемент a_1 з множини A_1, a_2 з A_2, …. a_n з A_n та розмістити їх $(a_1, a_2, \ldots, a_m)$, то отримаємо упорядковану *n*-ку елементів. Замість слів «упорядкована *n*-ка» говорять *«кортеж»* (французьке слово «кортеж» означає «урочистий хід». Число *n* називають *довжиною* кортежу, а елементи -*компонентами*.

Множини $A_1, A_2, \ldots, A_n$ можуть мати спільні елементи або навіть співпадати одна з іншою. Тому, в кортежах компоненти можуть повторюватись.

2. Правила додавання. У навчальній літературі зустрічаються різні формулювання правила додавання.

Формулювання 1. Якщо множина *А* містить *m* елементів, а множина *В –n* елементів, і ці множини не мають спільних елементів, то число елементів об'єднання множин *А* і *В* дорівнює сумі чисел елементів цих множин. Отже, якщо $n(A) = m$, $n(B) = n$, а $A \cap B = \varnothing$, то $n(A \cup B) = n(A) + n(B) = m+n$

Цю формулу можна узагальнити:

$n(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k) = n(A_1) + n(A_2) + \ldots + n(A_k)$, де $((A_i \cap A_j) = \varnothing$, i≠ j) (1)

$$n(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k) = n(A_1) + n(A_2) + \ldots + n(A_k) -$$
$$- n(A_1 \cap A_2) - n(A_1 \cap A_3) - \ldots - n(A_1 \cap A_k) - \ldots - n(A_{k-1} \cap A_k) +$$

$$+n(A_1 \cap A_2 \cap A_3) + ... + (-1)^{k-1} n(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_k) \quad (2)$$

де $n(A_i)$ - кількість елементів множини A_i, $n(A_i \cap A_j)$ – кількість елементів множини $A_i \cap A_j$. (2)

Формула (2) називається *формулою перекриттів*. До цієї формули, крім самих множин, належать їх усілякі перетини з двох, трьох,... m множин. Якщо в перерізі кількість множин непарна, то відповідний доданок входить до формули зі знаком “+”, а якщо парна – то зі знаком “-“. Формули (1) і (2) доводяться методом математичної індукції

Деякі автори, які пов’язують суть правила суми з числом виборів елемента даної множини.

Формулювання 2. Якщо елемент a можна вибрати m способами, а елемент $в$ – n способами, то вибір елемента a або елемента $в$ можна здійснити $m + n$ способами, при умові, що жодний вибір елемента a не збігається з вибором елемента $в$.

Можна узагальнити це правило на скінченну кількість елементів.

3. Правило множення.

Формулювання 1. Кількість упорядкованих пар, що можна скласти з елементів m- елементної множини A та n-елементної множини B, дорівнює $m \cdot n$, тобто кількість елементів декартового добутку множин A та B дорівнює добутку кількості елементів кожної з множин.

Доведення. Нехай $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$, $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$. Тоді елементи $A \times B$ запишемо таким чином:

$(a_1, в_1)\ (a_1, в_2) \ldots (a_1, в_n)$

$(a_2, в_1)\ (a_2, в_2) \ldots (a_2, в_n)$

……

$(a_m, в_1)\ (a_m, в_2) \ldots (a_m, в_n)$

Як бачимо, буде $m \cdot n$ пар.

Щ.Т.Д.

Формулювання 2. Якщо елемент a можна вибрати m способами та після кожного такого вибору елемент $в$ можна вибрати *n* способами, то вибір пари *a* та *в* у вказаному порядку можна здійснити m·n способами.

Приклад. Скількома способами можна обрати і старосту, і її заступника з 28 осіб групи?

Розв'язання. Старостою можна обрати будь-якого студента з групи, тобто є 28 способів вибору. Заступника старости можна обрати 27 способами. Старосту та заступника разом можна обрати 28×27 = 756 способами.

Сформулюємо тепер це правило комбінаторики в загальному вигляді.

Формулювання. Нехай треба виконати одну за одною *k* дій. Якщо першу дію можна виконати n_1 способами, після чого другу дію - n_2 способами, після чого третю дію – n_3 способами і так далі до *k*–ої дії, яку можна виконати n_k способами, то всі *k* дій разом можуть виконуватися $n_1 \times n_2 \times n_3 \times \ldots \times n_k$ способами.

Питання для самоконтролю:

1. Хто увів поняття "комбінаторика"?
2. Що вивчає розділ математики „Комбінаторика"?
3. На вашу думку, кому доводиться розв'язувати комбінаторні задачі?
4. Сформулюйте означення декартового добутку двох множин, трьох множин, *n* множин.
5. Порівняйте поняття кортежу та множини. Укажіть їх спільність та відмінність.
6. Запишіть множину букв слова „паралелограм" та кортеж букв цього слова.
7. Скільки цифр в запису числа 235532? Скільки різних цифр в запису цього числа?
8. Сформулюйте правило додавання двома способами.
9. Запишіть правило додавання для трьох множин.

10. Сформулюйте правило добутку двома способами.

Приклади розв'язання типових задач

Задача 1. У відділі інституту працює кілька співробітників, причому кожний із них знає хоча б одну іноземну мову. Крім того, 6 співробітників знають англійську мову, 6 – німецьку, 7 – французьку, 4 – англійську і німецьку, 3 – німецьку і французьку, 2 – французьку і англійську, 1 – усі три мови. Скільки співробітників у відділі інституту? Скільки співробітників знають лише англійську мову? Скільки співробітників знають лише одну мову?

Розв'язання. Нехай U – множина всіх співробітників, A – множина співробітників, які знають англійську мову, B – множина співробітників, які знають німецьку, C –множина співробітників, які знають французьку. Тоді, $n(A) = 6$, $n(B) = 6$, $n(C) = 7$, $n(A \cap C) = 2$, $n(A \cap B) = 4$, $n(B \cap C) = 3$, $n(A \cap B \cap C) = 1$. Застосовуємо правило додавання *(формулювання1)*.

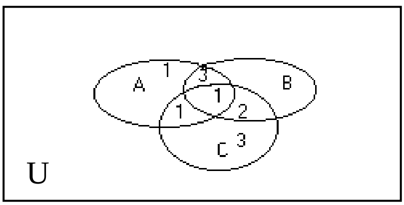
$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) = 6 + 6 + 7 - 4 - 3 - 2 + 1 = 11$ – співробітників працюють в інституті;

$n(A \cup B \cup C) - n(C) - n(B) + n(B \cap C) = 11 - 7 - 6 + 3 = 1$ – лише англійську

$n(A \cup B \cup C) - n(A) - n(B) + n(B \cap A) = 11 - 6 - 6 + 4 = 3$ – лише французьку

$n(A \cup B \cup C) - n(A) - n(C) + n(A \cap C) = 11 - 6 - 7 + 2 = 0$- лише німецьку

Лише одну мову знає 1 + 3 = 4 чоловіка. Можна розв'язати цю задачу і за допомогою діаграм Ейлера-Венна.



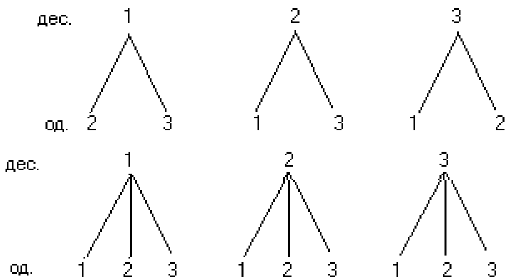
Задача 2. У вазі є 5 яблук та 8 апельсинів. Скількома способами батько може дати один фрукт своєму синові?

Розв'язання. Батько дає синові або апельсин, або яблуко. Застосовуємо правило додавання *(формулювання 2)* 5 + 8 = 13 способами.

Задача 3. Скільки двоцифрових чисел можна скласти з цифр 1, 2, 3 так, щоб:

а) цифри в числі не повторювались; б) цифри в числі можуть повторюватись.

Розв'язання: а) На перше місце можна поставити будь-яку з трьох цифр, а на друге вже з двох цифр, що залишаться. За правилом множення 3*2 = 6. Цю задачу можна розв'язати і наочно, використовуючи графи. У школі такий граф називають деревом логічних можливостей. Будуємо дерево логічних можливостей. З нього видно, що таких чисел буде 6.



б) Розв'язується аналогічно. На перше місце можна поставити будь-яку з трьох цифр, на друге так само можна поставити будь-яку з трьох цифр, оскільки цифри можуть повторюватись. За правилом множення маємо 3*3 =9.

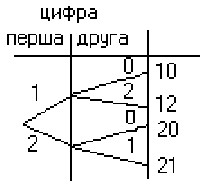
Задача 4. Скільки двоцифрових чисел можна скласти з цифр 0, 1, 2 таких, що:

а) кожна з цифр повторюється не більш ніж один раз;

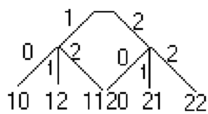
б) цифри можуть повторюватись;

Розв'язання:

а) першою цифрою може бути одна з двох цифр 1 або 2; коли перша цифра обрана, та друга може бути обрана також двома способами (0 або 1, 0 або 2). За правилом множення загальна кількість способів дорівнює 2×2 = 4;



б) першою цифрою може бути одна з двох цифр 1 або 2 (дві можливості); для кожної наступної цифри маємо 3 можливості (0, 1, 2). Отже, 2×3 = 6.



Задача 5. Скільки є п'ятицифрових чисел, які діляться на 5?

Розв'язання. На перше місце можна поставити будь-яку з цифр 1, 2,...,9, тобто першу цифру можна вибрати 9 способами. Оскільки не вказується, що цифри не повинні повторюватися, то другу цифру можна обрати 10 способами (ті самі цифри та ще 0), третю та четверту цифри так само, а ось остання цифра може бути тільки 0 або 5, тобто останню цифру можна вибрати 2 способами. За правилом множення маємо 9×10×10×10×2 = 18000.

Практичне заняття №5
ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ КОМБІНАТОРИКИ, ПРАВИЛА МНОЖЕННЯ ТА ДОДАВАННЯ

Опрацюйте лекцію № 5 та підготуйте відповіді на питання:

1.Комбінаторні задачі.

2. Декартовий добуток, кортежі.

2. Комбінаторне правило суми.

3. Комбінаторне правило добутку.

4. З історії розвитку комбінаторики.

Задача 1. У вазі є різнокольорові 5 троянд та 3 гвоздики. Скількома способами можна вибрати одну квітку?

Задача 2. Благодійний фонд подав 3 проекти: “Обдарована дитина – 2003”, “Допомога в реконструкції храму”, “Реконструкція пам'ятки культури”. Ці проекти були захищені на засіданні правління банку. Усього членів банку – 16. За перший проект проголосувало 8, за другий – 9, за третій – 9, за перший та другий – 5, за другий та третій – 3, за перший та третій – 4, за всі три проекти проголосували 2 особи. Експертна група повинна з’ясувати, скільки членів проголосувало тільки за певний проект. Результати будуть представлені президентові банку, який і вирішить, який проект фінансувати.

Задача 3. Скількома способами можна зі слова “космонавт” вибрати дві букви, одна з яких голосна, інша приголосна?

Задача 4. Скількома способами можна вибрати на шаховій дошці білий та чорний квадрати, що не лежать на одній горизонталі та вертикалі?

Задача 5. Серед двоцифрових чисел, що можна скласти за допомогою цифр 1, 5, 7, 9, 6, знайдіть кількість таких, що: а) починаються з 1 або 5; б) закінчуються 9 або 5; в) починаються з 6 та закінчуються 7;

Задача 6. Скільки шестицифрових чисел, кратних п'яти, можна скласти з цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6 за умови, що в числі цифри не повторюються?

Задача 7. Пасажир залишив речі в автоматичній камері схову, а коли прийшов, виявилося, що він забув код, пам'ятаючи лише, що він включав числа 23 та 37. Щоб відкрити камеру, треба правильно набрати п'ятицифровий код. Яку найменшу та найбільшу кількість кодів треба перебрати, щоб відкрити камеру?

Задача 8. Поїзд метро робить 10 зупинок, не враховуючи початкової, протягом яких виходять усі пасажири й не заходять нові. Скількома способами можуть розподілитися між цими зупинками 200 пасажирів, що ввійшли в поїзд на початковій зупинці?

Задача 9. У коробці є 7 червоних та 5 синіх олівців. Олівці виймають навмання. Яку найменшу кількість олівців потрібно обрати, щоб серед них було не менше двох червоних та трьох синіх?

Завдання для самостійного опрацювання

Теоретичні завдання:

1. Підготуйте історичні відомості про одного з учених (Н. Тарталья, Г. Лейбніц, Я. Бернуллі, Н.Віленкін).

2. В одному з підручників з математики (1-4 класи) підрахуйте кількість задач комбінаторного характеру, випишіть 4 з них.

Практичні завдання:

1. У класі треба обрати одного чергового (хлопчика або дівчинку). Скільки існує способів для вибору чергового, якщо в класі 22 дівчинки та 18 хлопчиків?

2. З 80 туристів, які поїхали за кордон, володіють німецькою 30 осіб, англійською – 20, французькою – 32, англійською та німецькою – 5, англійською та французькою –

6, німецькою та французькою 3, трьома мовами володіють 2 особи. Скільки туристів не володіють жодною мовою; володіють лише англійською, лише німецькою, лише французькою?

3. У класі 5 шахістів та 3 шашкісти. Скільки в класі шахістів і шашкістів?

4. Скільки різних чотирицифрових чисел можна записати в десятковій системі числення, якщо цифри можуть повторюватись?

5. Розклад уроків одного дня має 5 різних навчальних предметів. Визначте кількість варіантів таких розкладів при виборі з 11 навчальних предметів.

6. У шафі є туфлі одного розміру: 6 пар чорних та 6 пар коричневих. Знайти найменшу кількість туфель, яку потрібно вибрати з шафи, щоб серед них була хоч одна пара (ліва та права) одного кольору.

7. На диску телефонного апарату є 10 цифр. Кожен телефон автоматичної станції має номер, що складається з 5 цифр. Знайти найбільше число телефонів, які може обслужити така станція.

8. 4 студенти складають іспит. Скількома способами можуть бути поставлені їм оцінки, якщо відомо, що ніхто з них не одержав незадовільної оцінки?

9. З 12 слів чоловічого роду, 9 жіночого та 10 середнього слід вибрати по одному слову кожного роду. Скількома способами це можна зробити?

10. У передвиборчій компанії за дві однакові посади змагаються шість кандидатів. Кожен виборець повинен занести в свій бюлетень або одного кандидата, або 2. Скількома способами можуть бути заповнені бюлетені?

ТЕМА №6
СПОЛУКИ БЕЗ ПОВТОРЕНЬ ТА З ПОВТОРЕННЯМИ

План

1. **Перестановки без повторень.**
2. **Розміщення без повторень.**
3. **Комбінації без повторень.**
4. **Перестановки з повтореннями.**
5. **Розміщення з повтореннями.**
6. **Комбінації з повтореннями**

1. Перестановки. *Задача.* Скільки різних чотирицифрових чисел можна утворити з цифр 1, 2, 3, 4 так, щоб цифри не повторювались?

Розв'язання. На перше місце можна вибрати одну з чотирьох цифр, на друге — одну з трьох, на третє — одну з двох, що залишились, а на останнє — одну останню. За правилом множення буде $1\times2\times3\times4 = 24$.

Розв'яжемо цю задачу з умовою, що буде n цифр і треба скласти n-цифрових чисел.

Розв'язання. Розмірковуючи аналогічно, знаходимо кількість способів, якими можна скласти n-цифрові числа $n\times (n-1) \times (n-2) \times\ldots\times4\times3\times2\times1$.

Означення. У математиці прийнято позначати $1\times2 = 2!;\ 1\times2\times3 = 3!;\ \ldots\ 1\times2\times3\times..\times n = n!$ Читається: „один факторіал, два факторіал, ..., n-факторіал". Зазначимо, що $0! = 0$

$n! = 1\times2\times3\times\ldots\times (n-2) \times (n-1) \times n$

Розв'язуючи попередні задачі, можна було просто переставляти цифри місцями та отримувати різні числа, які б відрізнялися лише порядком слідкування цифр в числі. Конструюючи числа, ми отримували скінченні числові множини.

Розрізняють впорядковані та невпорядковані множини. Скінченні множини, для яких істотний порядок елементів, називають *упорядкованими.* Указати порядок розташування елементів в скінченній множині з n елементів означає поставити у відповідність кожному елементу даної множини певне натуральне число від 1 до n. Наприклад, дано $A = \{1; 2; 7\}$, $B = \{2; 7; 1\}$. $A = B$ за означенням, якщо вони не впорядковані множини. Якщо ж їх впорядкувати, то $A \neq B$.

Означення. Будь-яка впорядкована множина, яка складається з n елементів, називається перестановкою з n елементів. Кількість усіх перестановок з n елементів позначається P_n.

З розглянутих прикладів можна зробити висновок, що $P_n = n!$.

Характеристична ознака перестановок:

1) елементи різні;
2) усі місця зайняті;
3) порядок елементів важливий.

2. Розміщення без повторень. Розглянемо дві задачі.

1. У класі з 30 учнів треба обрати чергових у складі 3 осіб. Скількома способами це можна зробити?

2. У класі з 30 учнів треба обрати старосту, його заступника й редактора стіннівки. Скількома способами це можна зробити?

Чим схожі ці задачі і чим відрізняються?

В обох задачах нам потрібно з 30-елементної множини учнів класу обрати 3-елементні підмножини. Але в першій задачі порядок розташування чергових не є важливим, а в іншій – порядок обраних осіб має значення. Тобто в першій задачі маємо справу з невпорядкованими підмножинами, а в іншій задачі – з упорядкованими.

Наведіть ще приклад задач, де порядок елементів в підмножинах, які вибираються, є важливим та ні.

Означення. Упорядковані k-елементні підмножини даної множини називаються *розміщеннями без повторень*. Число розміщень без повторень позначається A_n^k, читається: “Число розміщень з *n* елементів по *k*”. (k<n).

Характеристична ознака розміщень:

1) елементи і місця різні;
2) $0<k<n$;
3) усі *k* місць зайняті;
4) порядок елементів важливий.

Задача. Тридцять перших букв українського алфавіту зображені на картках без повторень. Скільки різних чотирибуквених “слів” можна скласти так, щоб букви у слові не повторювались? (Словом будемо рахувати будь-яку послідовність чотирьох букв).

Розв'язання (за допомогою правила множення). Першу букву можна вибрати 30 способами. Другу букву вибираємо вже з 29 букв, які залишились. Розмірковуючи далі, третю букву можна вибрати 28 способами, а останню – 27. За правилом множення маємо: $30\times29\times28\times27 = 657720$ чотирибуквених слів.

Перекладемо попередню задачі на мову множин. З тридцяти елементної множини треба обрати 4-елементні підмножини, порядок елементів в яких є важливим. Тобто треба знайти всі розміщення з 30 елементів по 4 елементи. За попереднім розв'язанням $A_{30}^4 = 30\times29\times28\times27 = 657720$

А якщо нам треба підрахувати кількість розміщень з *n* елементів по *k* елементам, тобто в умовах попередньої задачі з *n*- елементної множини треба обрати *k*- елементні підмножини? Будемо розмірковувати аналогічно.

На перше місце в упорядкованій підмножині *n*-елементної множини можна поставити будь-який з *n*-елементів. Після того, як перший елемент вибрано, для вибору другого маємо *(n – 1)* можливостей, для вибору третього вже - *(n – 2)* можливостей і так далі. Нарешті, на *k* місце можна поставити будь-який з решти $n-(k-1)=n-k+1$ елементів. За правилом множення

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1) \qquad (1)$$

Помножимо і поділимо праву частину на $(n-k)!$

$A_n^k = \dfrac{n(n-1)(n-2)...(n-k+1)(n-k)!}{(n-k)!}$, спростивши вираз, отримаємо

$$A_n^k = \frac{n(n-1)(n-2)...(n-k+1)(n-k)!}{(n-k)!} =$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)...(n-k+1)(n-k)...2\cdot 1}{(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Якщо $k=0$, то $A_n^0 = \dfrac{n!}{n!} = 1$

Якщо $n=0$, $k=0$, то розглядають порожню множину, яка має лише одну підмножину (саму себе).

Але перестановка – це теж упорядкована підмножина, тільки кількість елементів така сама, як і в самій множині. Тобто перестановки – це теж розміщення з n елементів по n елементам. перестановки є окремим випадком розміщень.

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} \Rightarrow A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = \frac{n!}{1} = n! \quad \Rightarrow \quad A_n^n = P_n = n!$$

3. Комбінації без повторень.

Означення. Невпорядковані k-елементні підмножини даної множини називаються *комбінаціями без повторень*. Число комбінацій без повторень позначається C_n^k, читається: "Число комбінацій з n елементів по k". ($k<n$). Число комбінацій з n елементів по k іноді називають сполученнями без повторень з n елементів по k.

Характеристична ознака комбінацій:

1) елементи різні;
2) $0<k<n$;

3) порядок вибору елементів не має значення.

Задача. 25 учнів класу треба обрати двох чергових. Скількома способами це можна зробити?

Розв'язання. З 25 елементної множини треба скласти двоелементні підмножини, причому порядок не є важливим. Тобто мова йде про комбінації з 25 елементів по 2 елементи без повторень. Треба знайти C_{25}^{2} .

Давайте кожних двох чергових упорядкуємо (буде перший черговий та другий), тоді дістанемо всі впорядковані двоелементні підмножини, тобто розміщення.

Отже, $C_{25}^{2} \times P_2 = A_{25}^{2}$, а звідси можна дістати $C_{25}^{2} = \dfrac{A_{25}^{2}}{P_2} = \dfrac{25!}{23!2!} = 12 \times 25 = 300$ способів.

Давайте розв'яжемо цю задачу, коли з n - елементної множини треба вибрати k – елементні невпорядковані підмножини, тобто з n елементів треба скласти комбінації по k елементам.

Узагальнимо попередні міркування на випадок комбінацій, утворених з n - елементної множини по k. А саме: якщо кожну k- елементну підмножину впорядкувати P_k способами, то дістанемо A_n^k k- елементних розміщень n – елементної множини, тобто $C_n^k \times P_k = A_n^k$

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

Зрозуміло, якщо є сполуки без повторень елементів в них, то є сполуки і з повтореннями елементів. Розглянемо їх.

4. Перестановки з повтореннями. *Означення.* Нехай $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$. Будь-який кортеж з елементів множини A, в якому елемент a_1 повторюється m_1 разів, елемент a_2 – m_2 разів і т.д., елемент a_k – m_k разів називається *перестановкою* довжини $l = m_1 + m_2 + \ldots + m_k$ з повтореннями елементів $a_1, a_2, \ldots, a_k$. Кількість всіх таких перестановок позначається

$P(m_1m_{2\ldots}m_k)$.

Отже, перестановка з повтореннями з елементів множини $A = \{a_1, a_2,\ldots,a_m\}$ – кортеж довжини l, проте деякі елементи з множини А у ньому повторюються і можуть знаходиться на різних місцях.

Теорема. Кількість $P(m_1m_{2\ldots}m_k)$ *в*сіх різних перестановок довжини $l = m_1 + m_2 +\ldots+m_k$ з повтореннями елементів $a_1, a_2,\ldots,a_k$, які повторюються відповідно $m_1, m_2,\ldots,m_k$ разів дорівнює

$$P(m_1m_2...m_k) = \frac{(m_1 + m_2 + ... + m_k)!}{m_1!m_2!...m_k!} = \frac{l!}{m_1!m_2!...m_k!}$$

Приклад. Скільки семицифрових чисел можна скласти за допомогою цифр 5, 7, 9, якщо цифра 5 повторюється в кожному числі три рази, а цифри 7 та 9 по два рази?

Розв'язання. Кожне з утворених таким чином чисел є перестановкою довжини 7 з елементів множини {5, 7, 9}, де перший елемент повторюється 3 рази, другий – два рази, третій – 3 рази. За попередньою теоремою

$$P(3,2,2) = \frac{7!}{3!2!2!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 1\cdot 2\cdot 1\cdot 2} = 210$$

5. Розміщення з повтореннями. *Означення.* Кортеж довжини k, складений з елементів m-елементної множини A, називають *розміщенням з повтореннями з* m *елементів по* k, кількість всіх таких кортежей позначають $\overline{A_m^k}$ і дорівнює m^k, тобто $\overline{A}_m^k = m^k$.

Приклад. Скільки трицифрових чисел можна записати в десятковій системі числення, якщо цифри в числі можуть повторюватись?

Розв'язання. Очевидно, що шукана кількість дорівнює числу всіх розміщень з потовщеннями з десяти елементів по три, тобто $\overline{A_9^3} = 10^3$.

6. Комбінації з повтореннями.

Означення. К*омбінаціями з повтореннями з* m

елементів по k називаються будь-які групи, що містять k елементів, кожен з яких є одним з заданих m елементів. Кількість всіх таких комбінацій з повтореннями з m елементів по k позначається $\overline{C}_m^k$ і дорівнює $\frac{(m+k-1)!}{k!(m-1)!}$, тобто

$$\overline{C}_m^k = \frac{(m+k-1)!}{k!(m-1)!}$$

Приклад. В оранжереї є квіти 10 різних сортів. Скількома способами можна скласти букет з 20 квіток?

Розв'язання. Мова іде про складання різних букетів з 20 квіток, що обирають з 10 видів квітів, значить

$$\overline{C}_{10}^{20} = \frac{(10+10-1)!}{10!(20-1)!} = \frac{29!}{10!19!}$$

Питання для самоконтролю:

1. Що називають факторіалом?
2. Яка множина називається впорядкованою?
3. Що таке перестановка з n елементів? Чому дорівнює кількість перестановок з n елементів?
4. Що таке розміщення без повторень з n елементів по k? Як позначається число розміщень без повторень?
5. Що таке комбінації без повторень з n елементів по k? Як позначається число комбінації без повторень?
6. Чим відрізняються комбінації та розміщення?
7. Які види сполук ви ще знаєте?
8. Виведіть формули для обчислення числа розміщень без повторень з n елементів по k елементам та числа комбінації без повторень з n елементів по k елементам.

Приклади розв'язання типових задач

Задача 1. Скільки різних трицифрових чисел можна утворити з цифр 0, 2, 6?

Розв'язання. Щоб отримати з цифр 0, 2 та 6 різні трицифрові числа, потрібно скласти перестановки з трьох елементів $P_3 = 3!$ Але серед таких чисел будуть такі, що починаються з 0, їх треба відняти. Остаточно маємо $3! – 2! = 6 – 2 = 4$ числа.

Задача 2. Скільки різних кілець, що світяться, можна утворити, розмістивши по колу 10 різнокольорових лампочок (кільця вважаються однаковими, якщо порядок розташування кольорів один і той самий).

Розв'язання. Як би ці 10 різнокольорових лампочок були розміщені в ряд, то число способів розміщення було б $P_{10} = 10!$ Але оскільки вони розміщені по колу, то кожне положення, що відрізняється порядком розташування кольорів, має 10 "подібних" утворених просто обертанням цієї системи навколо центра кола. Тоді різних кілець буде $\frac{P_{10}}{10} = \frac{10!}{10} = 9!$

Задача 3. Скількома способами можна розмістити 4 книжки з алгебри та 3 з геометрії, щоб усі книжки з геометрії стояли поряд?

Розв'язання. Щоб виконувалась умова про книжки з геометрії, об'єднаємо книжки з геометрії умовно в одну. Тоді маємо 5 книг і P_5 розташувань. Книги з геометрії в свою чергу між собою можна розмістити P_3 способами. Всього за правилом добутку маємо $P_5 \times P_3 = 120 \times 6 = 720$ способів.

Задача 4. Розв'яжіть рівняння: а) $A_x^2 = 90$; б) $C_x^2 = 21$

Розв'язання:

а) $A_x^2 = 90$

$$\frac{x!}{(x-2)!} = 90$$

$$\frac{1 \times 2 \times \ldots \times (x-2) \times (x-1) \times x}{1 \times 2 \times \ldots \times (x-2)} = 90$$

$x \times (x-1) = 90$

$x^2 - x - 90 = 0$, розв'язавши це квадратне рівняння, знайдемо корні.

За теоремою Вієтта x_1 = -9 – не задовольняє умові задачі, x_2= 10.

Відповідь: $x = 10$

б) $C_x^2 = 21$

$$\frac{x!}{2!(x-2)!} = 21$$

$$\frac{1 \times 2 \times \ldots \times (x-2) \times x-1) \times x}{1 \times 2 \times 1 \times 2 \times \ldots \times (x-2)} = 21$$

$$\frac{x(x-1)}{2} = 21$$

$x^2 - x - 42 = 0$, розв’язавши це квадратне рівняння, знайдемо корні.

За теоремою Вієтта $x_1 = -6$ – не задовольняє умові задачі, $x_2 = 7$.

Відповідь: $x = 7$.

Задача 5. Скільки можна скласти різних неправильних дробів, чисельниками і знаменниками яких є числа 3, 5, 7, 13, 17?

Розв'язання: Дробів, у яких чисельник не дорівнює знаменнику, можна скласти A_5^2, але лише половина з них неправильні. До цих дробів треба ще додати дроби, у яких чисельник дорівнює знаменнику, тобто дроби, рівні одиниці, їх 5. Остаточно маємо:

$$\frac{1}{2} A_5^2 + 5 = \frac{5 \times 4}{2} + 5 = 15.$$

Задача 6. На десяти картках записані цифри 0, 1, 2, 3,..., 9. Беруть чотири картки і складають із цифр, записаних на них, чотирицифрове число. Скільки різних чотирицифрових чисел можна отримати таким чином?

Розв'язання: Всього різних чотирицифрових комбінацій з цих карток можна скласти A_{10}^4, але умові задачі не задовольняють ті, що починаються нулем, але таких буде A_9^3 (бо якщо перша цифра чотирицифрової комбінації – нуль, то три інші цифри ми повинні вибрати з 9, що залишились). Отже шукане число $A_{10}^4 - A_9^3 = \frac{10!}{(10-4)!} - \frac{9!}{(9-3)!} = 4536$

Задача 7. Скільки можна скласти різних нескоротних дробів, чисельник і знаменник яких є числа 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19?

Розв'язання. Виберемо два різних числа з восьми C_8^2 способами. Одержані з них дроби будуть нескоротними, бо всі числа прості. Але з цих двох чисел можна утворити два дроби (наприклад, з 2 та 3 - $\frac{2}{3}$ та $\frac{3}{2}$), тому всього можна скласти $2\times C_8^2 = 56$.

Задача 8. Скільки різних площин можна провести через 12 точок так, щоб кожна площина проходила через три точки, якщо ніякі три точки не лежать на одній прямій, і ніякі чотири точки не належать одній площині?

Розв'язання. Зрозуміло, що за умовою кожні три точки з даних будуть визначати одну площину і кожна з проведених площин буде містити рівно три точки з даних. Отже, всіх площин буде стільки, скільки є комбінацій з цих точок по 3, $C_{12}^3 = 220$.

Задача 9. У магазині є 5 видів тістечка: білкове, горіхове, шоколадне, ванільне, вафельне. Скількома способами можна вибрати та купити три з них? Скільки трійок будуть містити горіхове? Скільки трійок не будуть містити горіхове?

Розв'язання. а) На мові комбінаторики з п'ятиелементної множини тістечок обирають триелементні підмножини. Різні трійки можна скласти $C_5^3 = 10$ способів. б) Якщо горіхове входить до вибраних тістечок, тобто вже з чотириелементної множини обирають двоелементні підмножини, то ще два можна вибрати з решти, для цього існує C_4^2 = 6 способів. в) Якщо горіхове не входить до вибраних тістечок, то всі трійки треба обирати з 4 тістечок, тобто з чотириелементної множини обираємо триелементні підмножини тобто існує C_4^3 = 4 способів. Три тістечка, які містять горіхове можна вибрати 6 способами, а які не містять – 4 способами. Загальне ж число способів 10. Тобто $C_5^3 = C_4^2 + C_4^3$. Проведіть самостійно аналогічні міркування на випадок, коли у магазині *n* тістечок, а треба обрати *k* тістечок.

Задача 10. З групи, в яку входять 7 хлопчиків і 4 дівчинки, треба скласти команду з 6 чоловік так, щоб вона містила не менше двох дівчинок. Скільки є способів складання такої команди?

Розв'язання. Є дві множини: семи елемента множина хлопчиків та чотирьох елемента множина дівчат. треба вибрати 6 - елементу підмножину.

Нехай до команди входять дві дівчинки. Тобто з 4 елементної множини треба вибрати 2 елемента, порядок не є важливим, таким чином їх кількість C_4^2 . До них треба вибрати ще 4 хлопці з 7, теж порядок не є важливим. За правилом множення $C_4^2 \times C_7^4$.

Нехай до команди входять три дівчинки. аналогічно розмірковуючи, маємо $C_4^3 \times C_7^3$.

Нехай до команди входять 4 дівчинки. За попереднім розв'язуванням $C_4^4 \times C_7^2$.

Можна обрати або перший варіант, або другий, або третій, або четвертий, тобто за правилом додавання $C_4^2 \times C_7^4$ + $C_4^3 \times C_7^3$ + $C_4^4 \times C_7^2$ = 371.

Задача 11. Абонент пам’ятає, що потрібний йому шестицифровий номер телефону починається з цифри 5 і містить три двійки, та дві трійки. Проте розміщення цих цифр він забув. Яку максимальну кількість спроб він може зробити, щоб набрати потрібний номер?

Розв'язання. Першу цифру абонент пам'ятає, значить йому потрібно добрати ще п'ять цифр. Це будуть 2 та 3, порядок слідування цих цифр не відомий, але відомо, що ці цифри повторюються. Абоненту залишиться переставляти місцями 2 та 3, тобто мова іде про перестановки з повтореннями $P(3,2)=\frac{5!}{3!2!}=10\cdot$

Задача 12. Скільки чотирицифрових чисел можна скласти з цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6?

Розв'язання. Про умови повторення цифр нічого не сказано, тому вважаємо, що цифри в числі повторюються. Порядок слідування цифр в числі важливий, тому мова іде про розміщення з повтореннями з 6 елементів по 4? $\overline{A}_6^4=6^4=1296$ чисел.

Задача 13. У крамниці продаються 4 види тістечок. Скількома способами можна купити 7 тістечок?

Розв'язання. Порядок вибору тістечок не важливий і не сказано, що всі 7 тістечок мають бути різними, тому мова іде про комбінації без повторень з 4 по 7, $\overline{C}_4^7=\frac{(4+7-1)!}{7!(4-1)!}=\frac{10!}{7!3!}=\frac{8\cdot 9\cdot 10}{1\cdot 2\cdot 3}=120$

Практичне заняття №6
СПОЛУКИ З ПОВТОРЕННЯМИ ТА БЕЗ ПОВТОРЕНЬ

Опрацюйте лекцію №6 та підготуйте відповіді на питання:

1. Перестановки без повторень, виведення формули кількості перестановок без повторень з n елементів.

2. Розміщення без повторень з n елементів по m елементам, виведення формули для кількості розміщень з n елементів по m.

3. Комбінації без повторень з n елементів по m елементам, виведення формули для кількості комбінацій з n елементів по m.

4. Сполуки з повтореннями.

5. Зв'язок з початковим курсом математики.

Вибір виду сполуки (без повторень)

Підмножини

Упорядковані

Розміщення без повторень

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

$n = k$

Перестановки з n елементів

$P_n = n!$

Неупорядковані

Комбінації без повторень

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

Вибір правила комбінаторики

Правило множення	*Правило додавання*
Якщо елемент a можна вибрати n способами, та після такого вибору елемент $в$ можна вибрати m способами, то вибір пари a та $в$ у вказаному порядку можна здійснити способами $m \times n$.	Якщо елемент a можна вибрати n способами, а елемент $в$ – m способами, то вибір елемента a або $в$ можна здійснити $(n+m)$ способами, при умові, що ніякий вибір елемента a не збігається з вибором елемента $в$.

Задача 1. Запишіть у вигляді добутку:

а) $3!$; б) $n!$; в) $(n-1)!$; г) $(n-3)!$; д) $(2n)!$;

Задача 2. Спростити:

а) $P_8 - P_6$; б) $\frac{m!}{m-1}$; в) $\frac{8!-7!}{7!}$; г)$(2n+2)!$;

д) $\frac{1}{k!}-\frac{k}{(k+1)!}$; е) $\frac{(n-2)!}{(n+1)!}$; з) $\frac{A_{15}^{6}+A_{15}^{5}}{A_{15}^{4}}$; і) $\frac{P_6-P_5}{3!}$;

Задача 3. З букв розрізної абетки складено слово “конус”. Скільки “слів” можна отримати, якщо переставити букви в цьому слові. (Словом будемо рахувати будь-яку послідовність букв).

Задача 4. Скільки п’ятицифрових чисел можна утворити з цифр 1, 2, 3, 4, 5 без повторення, щоб парні цифри не стояли поруч?

Задача 5. Знайдіть x:

а) $A_x^5 = 18A_{x-2}^4$ б) $\frac{P_{x+2}}{A_x^5 P_{x-5}}=90$; в) $C_x^4=\frac{A_x^2}{4}$

Задача 6. Розклад на день містить 5 уроків. Визначити кількість таких можливих розкладів при виборі з 11 дисциплін, при умові, що жоден предмет не стоїть у розкладі двічі на день.

Задача 7. Збори з 40 чоловік обирають голову, секретаря і трьох членів комісії. Скількома способами це можна зробити?

Задача 8. На залізничній дорозі 25 станцій. На кожному квитку друкуються станція відправлення та станція прибуття. Скільки різних видів квитків треба надрукувати: а) якщо кожний квиток дійсний тільки в указаному напряму? б) якщо кожний квиток дійсний або на подорож “туди”, або на подорож “зворотно”? в) якщо, крім квитка на одну подорож «туди», треба надрукувати квиток на подорож “туди та зворотно”?

Задача 9. Скількома способами можна призначити у патруль: а) трьох солдатів та одного офіцера, якщо є 15 солдатів та 4 офіцери; б) трьох солдатів або одного офіцера?

Завдання для самостійного опрацювання
Теоретичні завдання:

1. Зробіть конспект за темою: «Трикутник Паскаля. Властивості чисел C_m^n»

2*. Доведіть формули

1) $P(m_1 m_2 ... m_k) = \dfrac{l!}{m_1! m_2! ... m_k!}$; 2) $\overline{A}_m^k = m^k$; 3) $\overline{C}_m^k = \dfrac{(m+k-1)!}{k!(m-1)!}$

Практичні завдання:

1. Спростіть:

а) $P_{k-1} - P_{k+1}$; б) $2n!(n+1)$; в) $\dfrac{(2n)!}{n!}$; г) $\dfrac{P_{k+1}}{A_{k-1}^{n-1} P_{k-n}}$

2. Розв'яжіть рівняння:

а) $C_x^2 = 21$; б) $C_x^3 : C_x^5 = \dfrac{2}{3}$; в) $A_y^2 = 42$;

3. Скількома способами можна вибрати 2 олівця та 3 ручки з 6 різних олівців і 8 різних ручок?

4. Чемпіонат, в якому беруть участь 16 команд, проводиться в два кола (тобто кожна команда двічі зустрічається з кожною з решти команд). Визначити, яка кількість зустрічей має бути проведена.

5. З групи в 15 чоловік вибирають чотирьох учасників естафети 800 400 200 100 м. Скількома способами можна розставити спортсменів на етапах такої естафети?

6. На десяти картках записані цифри 0, 1, 2, 3,..., 9. Беруть чотири картки і складають із цифр, записаних на них, чотирицифрове число. Скільки різних чотирицифрових чисел можна отримати таким чином?

7. У вазі стоять пронумеровані 10 червоних і 5 рожевих гвоздик. Скількома способами можна вибрати з вази:

а) три квітки; б) три квітки одного кольору; в) три квітки так, щоб серед них були як червоні, так і рожеві квітки?

8. У речовій лотереї розігрується 8 предметів. всього в „урні” 50 квитків. виймається 5 квитків. Скількома способами їх можна витягнути так, щоб а) рівно два з них були виграшні; б) принаймні два з них були виграшні?

9. Скількома способами з колоди в 52 карти можна вибрати 6 карт, серед яких є туз і король однієї масті?

10. Ліфт, в якому знаходяться 9 пасажирів, може зупинитись на десяти поверхах. Пасажири виходять групами по два, три і чотири чоловіків. Скількома способами вони можуть вийти , якщо ліфт не повертається на поверх, де він вже був?

11. Автомобільні номери складаються з однієї, двох або трьох букв та чотирьох цифр. Знайти число таких номерів, якщо використовуються 27 букв українського алфавіту.

12. Скільки намисті можна скласти з п’яти однакових бусинок та двох великих?

13. Скількома способами можна переставляти букви в слові „паралельність”?

14. Скільки різноманітних перестановок можна утворити з букв слова “задача”?

15. Скількома способами можна купити 25 листівок та 17 марок, якщо на пошті є 7 видів листівок та 5 видів марок?

16. На диску телефонного апарату є 10 цифр. Кожен телефон автоматичної станції має номер, що складається з 5 цифр. Знайти найбільшу кількість телефонів, що може обслужити така станція.

17. У передвиборчій компанії за дві однакові посади змагаються шість кандидатів. Кожен виборець повинен занести в свій бюлетень або одного кандидата, або 2. Скількома способами можуть бути заповнені бюлетені?

Задачі підвищеної складності

1. Народна дружина налічує 100 чоловік, і кожний вечір на чергування виходять троє. Доведіть, що не можна так скласти графік чергування, щоб довільні два чоловіки чергували разом рівно один раз.

2. Скільки є трицифрових натуральних чисел, у десятковому запису яких немає непарних цифр? Знайти суму всіх цих чисел.

3 Скільки є трицифрових натуральних чисел, у десятковому запису яких немає парних цифр? Знайти суму всіх таких чисел.

4. Нехай $p_1, p_2, \ldots, p_m$ – різні прості числа. Скільки дільників має число $q = p_1^{\text{л}_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \ldots \cdot p_m^{k_m}$, де $k_1, k_2, \ldots, k_m$ - деякі натуральні числа?

5. На книжковій полиці стоять 12 книг. Скількома способами можна обрати з них 5 книг таким чином, щоб жодні дві з них не стояли поруч?

6. За круглим столом короля Артура сидять 12 лицарів. З них кожний ворогує зі своїми сусідами. Потрібно обрати 5 лицарів, щоб визволити зачаровану принцесу. Скількома способами це можна зробити так, щоб серед вибраних не було ворогів.

7. Приборкувач хижаків хоче вивести на арену цирку 5 левів та 4 тигри; при цьому неможна, щоб два тигри йшли один за іншим. . Скількома способами він може розмістити звірів?

РОЗДІЛ IV
ЕЛЕМЕНТИ МАТЕМАТИЧНОЇ ЛОГІКИ

ТЕМА №7
ВИСЛОВЛЕННЯ ТА ОПЕРАЦІЇ НАД НИМИ

План

1. Висловлення, операції над ними.

2. Рівносильність висловлень.

1. Висловлення, операції над ними.

Означення. *Висловлення* - це розповідне речення, що виражає закінчену думку та відносно якого можна поставити запитання: „Що виражає це речення — істину чи хибність?”.

Приклади:

а) „Трикутник, у якого бокові сторони рівні називається рівнобедреним” - не висловлення, оскільки жодне означення не є висловленням.

б) „Зелений колір більш приязний ніж блакитний ” - не висловлення, оскільки не можна сказати, що виражає істину чи хибність.

в) „Яке сьогодні число?” - не висловлення, оскільки це не розповідне речення.

г) „6 — просте число” - висловлення.

д) „У представленні числа π у вигляді нескінченного десяткового дробу на 1000000 місці після коми стоїть цифра 2” - висловлення, хоча на даний момент неможливо сказати, істинне воно чи хибне.

Над висловленнями можна виконувати логічні операції, які дозволяють з висловлень, що вже є, будувати більш складні висловлення.

Означення. Нехай P — висловлення, запереченням висловлення P називається нове висловлення “Неправильно, що P”, яке позначається $\neg P$ або $\overline{P}$, яке вважається істинним, якщо *P* — хибність, та хибним, якщо *P* — істинне.

P	¬P
і	х
х	і

Складемо таблицю істинності цієї операції.

Приклад. *P* = “6 — просте число” (хибне висловлення). *¬P* = “неправильно, що 6 — просте число” - істина.

Означення. *Кон'юнкцією* двох висловлень *P* і *Q* називається нове висловлення “*P* та *Q*”, яке позначається *P&Q* (або $P \wedge Q$) і яке вважається істинним, якщо обидва висловлення одночасно істинні, в решті випадках вважається хибним.

P	Q	P&Q
і	і	і
і	х	х
х	і	х
х	х	х

Складемо таблицю істинності.

Приклад. P = «Москва — столиця Росії” (істина), Q = “Київ — столиця Росії” (хибність). *P&Q* = “Москва - столиця Росії і Київ — столиця Росії” (хибність).

Означення. *Диз'юнкцією* двох висловлень *P* і *Q* називається нове висловлення “*P* або *Q*”, яке позначається $P \vee Q$ і яке вважається хибним тільки в одному випадку, якщо обидва висловлення одночасно хибні, в решті випадках вважається істинним.

P	Q	$P \vee Q$
і	і	і
і	х	і
х	і	і
х	**х**	**х**

Складемо таблицю істинності.

Приклад. P = «Москва — столиця Росії” (істина), Q = “Київ — столиця Росії” (хибність). $P \vee Q$ = “Москва - столиця Росії або Київ — столиця Росії” (істина).

Означення. *Імплікацією* двох висловлень *P* і *Q* називається нове висловлення “Якщо *P*, то *Q*”, яке позначається $P \Rightarrow Q$ і яке вважається хибним тільки в одному випадку, коли P — істина, а Q — хибність, в решті випадках вважається істинним.

P	Q	$P \Rightarrow Q$
і	і	і
і	х	х
х	і	і
х	х	і

Складемо таблицю істинності.

Приклад. P = " 2*2 = 5" (хибність), Q = "7 — складене число" (хибність), $P \Rightarrow Q$ = "Якщо 2*2 = 5, то 7 — складене число"(істина).

Означення. *Еквівалентністю* двох висловлень P і Q називається нове висловлення "P еквівалентно Q" ("P тоді і тільки тоді, коли Q"), яке позначається $P \Leftrightarrow Q$ і яке вважається істинним, якщо обидва висловлення одночасно або хибні, або одночасно істинні, в решті випадках воно вважається хибним.

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
і	і	і
і	х	х
х	і	х
х	х	і

Складемо таблицю істинності.

Приклад. P = "2*2 = 5" (хибність), Q = "7 - складене число" (хибність), $P \Leftrightarrow Q$ = "2*2 = 5 еквівалентно тому, що 7 — складене число"(істина).

Означення. Висловлення, які не можна представити за допомогою інших висловлень та логічних операцій, називаються *елементарними* або *простими*. В протилежному випадку — *складними* або *складеними*.

2. Рівносильність висловлень.

Означення. Висловлення P і Q називаються *рівносильними*, якщо вони одночасно істинні або одночасно хибні. Позначається $P \equiv Q$.

Зауваження.

$P \Leftrightarrow Q$ — висловлення, яке може бути істинним або хибним.

$P \equiv Q$ — просто символічний запис того факту, що обидва висловлення мають однакові істинні значення.

Властивості рівносильності.

Які б не були P, Q та R справедливо:

1) $P \equiv P$

2) $(P \equiv Q) \Rightarrow (Q \equiv P)$

3) $(P \equiv Q) \& (Q \equiv R) \Rightarrow (P \equiv R)$

Теорема про рівносильність логічних операцій.

Які б не були P, Q та R справедливо:

1. $\neg(P \& Q) \equiv \neg P \vee \neg Q$ – *формула де Моргана*
2. $\neg(P \vee Q) \equiv \neg P \& \neg Q$ – *формула де Моргана*
3. $\neg\neg P \equiv P$
4. $\neg(P \Rightarrow Q) \equiv P \& \neg Q$
5. $P \Rightarrow Q \equiv \neg P \vee Q$
6. $P \Leftrightarrow Q \equiv (P \Rightarrow Q) \& (Q \Rightarrow P)$
7. $P \Rightarrow Q \equiv \neg Q \Rightarrow \neg P$- *закон контрапозицій*

Доведення.

1) $\neg(P \& Q) \equiv \neg P \vee \neg Q$

У відповідності з істинними значеннями висловлень *P* і *Q* можливі чотири випадки, які розглянемо за допомогою таблиці.

P	Q	¬ P	¬ Q	P & Q	¬ (P&Q)	¬ P ∨ ¬ Q
і	і	х	х	і	х	х
і	х	х	і	х	і	і
х	і	і	х	х	і	і
х	х	і	і	х	і	і

Порівнюючи дві останні колонки, бачимо, що в будь-яких з чотирьох випадків права та ліва частини 1) одночасно хибні або одночасно істинні. Значить за означенням рівносильність 1) справедлива для будь-яких висловлень.

Щ.Т.Д.

Рівносильності 2) — 7) доводяться аналогічно.

Означення: Складене висловлення, що перетворюється в істину при будь-яких значеннях елементарних висловлень, що входять в його склад, називається *тавтологією*.

Приклад. $A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$; $A \vee B \Leftrightarrow B \vee A$

Питання для самоконтролю:

1. Що таке висловлення?
2. Що таке кон'юнкція двох висловлень? Наведіть приклад.
3. Що таке диз'юнкція двох висловлень? Наведіть приклад.
4. Що таке імплікація двох висловлень? Наведіть приклад.
5. Що таке еквівалентність двох висловлень? Наведіть приклад.
6. Які висловлення називаються простими і складеними? Наведіть приклад.
7. Які висловлення називають рівносильними?

Приклади розв'язання типових задач

Завдання 1. У наступних висловленнях виокремити прості висловлення, позначити їх буквами та записати складні висловлення за допомогою введених позначень та кванторних операцій.

а) „Якщо діагоналі паралелограма взаємно перпендикулярні, то даний паралелограм є ромбом”.

б) „Якщо один доданок суми ділиться на 3 та сума ділиться на 3, то і другий доданок ділиться на 3”.

в) „Якщо даний чотирикутник не є квадратом, то в ньому не всі кути прямі або в ньому є пара нерівних сторін”.

Розв'язання. а) P = „Діагоналі паралелограма взаємно перпендикулярні ”, Q = „Даний паралелограм – ромб”. $P \Rightarrow Q$.

б)) P = „Один доданок суми ділиться на 3”, Q = „Сума ділиться на 3”, R = „Другий доданок ділиться на 3”. $(P \wedge Q)$

$\Rightarrow R$.

в) P = „Чотирикутник є квадратом”, Q = „Всі кути чотирикутника прямі”, R = „В чотирикутнику є пара рівних сторін”. $\neg P \Rightarrow (\neg Q \vee \neg R)$.

Завдання 2. Уведемо наступні позначення:

P = „Дане число ціле”;

Q = „Дане число додатне”;

R = „Дане число просте”;

S = „Дане число ділиться на 2”;

T = „Дане число натуральне”;

Записати у вигляді речень наступні висловлення:

а) $(P \wedge \neg T) \Rightarrow \neg Q$;

б) $(\neg P \wedge Q) \Rightarrow (\neg S \wedge \neg R)$;

Розв'язання. а) Якщо дане число ціле і не натуральне, то воно не додатне.

б) Якщо дане число не ціле і додатне, то воно не ділиться на 2 і не просте”.

Завдання 3. Визначте істинність або хибність наступних висловлень, якщо відомо, що $P - x$, $R - i$, $S - x$.

а) $R \Rightarrow (S \wedge P)$;

б) $(P \vee R) \Leftrightarrow (R \wedge \neg S)$.

Розв'язання. а) $R \Rightarrow (S \wedge P)$. За умовою складемо таблицю істинності і розглянемо всього один випадок.

R	S	P	$(S \wedge P)$	$R \Rightarrow (S \wedge P)$
і	х	х	*x*	*x*

б) $(P \vee R) \Leftrightarrow (R \wedge \neg S)$. За умовою складемо таблицю істинності і розглянемо всього один випадок.

P	R	S	$\neg S$	$(P \vee R)$	$(R \wedge \neg S)$	$(P \vee R) \Leftrightarrow (R \wedge \neg S)$
х	і	х	і	і	і	і

Практичне заняття № 7
ВИСЛОВЛЕННЯ ТА ОПЕРАЦІЇ НАД НИМИ

Опрацюйте лекцію №7 та підготуйте відповіді на питання:

1. Поняття висловлення, приклади, контр приклади, позначення.
2. Прості та складені висловлення.
3. Операції над висловленнями, їх властивості. Приклади.
4. Рівносильність висловлень, властивості.
5. Теореми про рівносильність логічних операцій.
6. Тавтологія.
7. Зв'язок з початковим курсом математики.

Завдання 1. Укажіть серед наступних речень висловлення:

1) „Луна - супутник Землі";
2) „Усі студенти люблять математику";
3) „Дай мені, будь-ласка, книгу";
4) „Деякі люди мають блакитні очі";
5) „Ви були у театрі?"

Завдання 2. Доведіть 2-4 теореми про рівносильність логічних операцій.

Завдання 3. У наступних висловленнях виокремити прості висловлення, позначити їх буквами та записати складні висловлення за допомогою введених позначень та кванторних операцій.

а) „Якщо ціле число є додатним та парним, то воно просте або більше двох";

б) „Пряма a паралельна площині α або лежить в площині α, якщо вона паралельна прямій b, а пряма b лежить в площині α".

Завдання 4. Уведемо наступні позначення:

P = „Дане число ціле";

Q = „Дане число додатне";

R = „Дане число просте";

S = „Дане число ділиться на 2”;

T = „Дане число натуральне”;

Записати у вигляді речень наступні висловлення:

а) $\neg R \Leftrightarrow (\neg P \vee \neg Q)$;

б) $(P \wedge Q) \Rightarrow T$;

в) $Q \wedge (\neg R \Rightarrow \neg P)$.

Завдання 5. Визначте істинність або хибність наступних висловлень, якщо відомо, що $P – x$, $Q – I$, $R – i$, $S – x$, T - x.

а) $R \Rightarrow (P \wedge Q \wedge S)$;

б) $(T \wedge S) \Leftrightarrow (Q \wedge \neg R)$;

в) $T \Leftrightarrow (P \wedge Q)$.

Завдання 6. У наступних імплікаціях виділити умову та заключну частину, сформулюйте протилежні імплікації, обернені до протилежних імплікацій, визначте, чи істинні вони:

1) „Якщо іде дощ, то дорога мокра”;

2) „Якщо я запізнився на роботу, то мені зроблять зауваження”;

3) „Якщо учня перевели у наступний клас, то він отримав з усіх предметів відмінні оцінки”.

Завдання для самостійного опрацювання

Теоретичні завдання:

1. Доведіть 5-7 теорему про рівносильність логічних операцій.

2. Складіть конспект за темою: «Поняття як форма мислення. Означення математичних понять».

Практичні завдання:

1) Нехай P = „Микола любить малювати”, Q = „Петро пише вірші”. Записати за допомогою логічних операцій такі висловлення:

а) „Микола любить малювати і Петро пише вірші”;

б) „Микола не любить малювати або Петро пише вірші”;

в) „Петро не пише вірші або Микола не любить малювати”;

г) „Неправильно, що Микола любить малювати або Петро не пише вірші”;

д) „Якщо Петро не пише вірші, то Микола любить малювати”;

е) „Неправильно, що Петро пише вірші і Микола не любить малювати;

є) „Петро не пише вірші тоді і тільки тоді, коли Микола не любить малювати”.

2) У наступних висловленнях виділити прості висловлення, позначити їх буквами та записати складні висловлення за допомогою введених позначень та кванторних операцій.

а) „Якщо діагоналі паралелограма взаємно перпендикулярні або ділять кути навпіл, то даний паралелограм - ромб”;

б) „Якщо ціле число не ділиться на 6, то воно не ділиться на 2 і не ділиться на 3”.

3) Побудуйте таблиці істинності для таких формул:

а) $P \Rightarrow (\neg Q \wedge R \vee P)$;

б) $((P \Rightarrow Q) \Rightarrow P \Rightarrow Q) \Rightarrow P$;

в) $(P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)) \wedge \neg Q$.

4) Доведіть наступні тавтології:

а) $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$;

б) $((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Leftrightarrow A$.

ТЕМА №8
ПРЕДИКАТИ, КВАНТОРНІ ОПЕРАЦІЇ, ПОНЯТТЯ ЛОГІЧНОГО СЛІДУВАННЯ

План

1. Предикати.
2. Квантори.
3. Поняття логічного слідування.

1. Предикати. У математиці відносно певних символів домовились називати їх *змінними*. Як правило, змінна наділяється множиною, елементи якої називаються *значеннями* даної змінної або *областю визначення* змінної.

Означення. *Предикатом* називають вираз, що містить одну або кілька змінних, і який кожного разу передвоюється у висловлення, коли всім змінним в цьому виразі надаються конкретні значення. Якщо предикат мітить одну змінну, то він називається *одномісним* предикатом, якщо дві – *двомісним*, і т.д., якщо *n* – *n-місним.*

Для предикатів застосовують функціональне позначення.

Приклад: $P(x)$ = „*x* – просте число”, $Q(x,y)$ = „ *x* та *y* живуть в одному будинку”.

Зауваження. Будь-яке рівняння в алгебрі є предикатом, що залежить від змінних, що входять в це рівняння.

Означення. Множина значень змінних, за якими предикат перетворюється в істинне або хибне висловлення, називається *областю визначення предиката.*

Означення. Множина значень змінних, за якими предикат перетворюється в істинне висловлення, називається *областю істинності предиката.*

Приклад.

1) $P(x)$ =„ Планет х обертається навколо Сонця за один рік”;

M(x) = {Уран; Венера; Плутон; Нептун; Сатурн; Марс; Земля; Меркурій; Юпітер} – область визначення предиката *P(x).*

T(x) = {Земля} – область істинності предиката *P(x).*

2) *P(x)* =„ $\dfrac{x}{x-3} = 5$ ”

M(x) = R\{3} – область визначення предиката *P(x).*

Щоб знайти область істинності, потрібно розв’язати рівняння.

$x = 5 \times (x-3)$

$x - 5x = -15$

$-6x = -15$

$x = \dfrac{5}{2}$

T(x) = { $\dfrac{5}{2}$ } – область істинності предиката *P(x).*

Оскільки предикат перетворюється у висловлення, якщо всім змінним в ньому надати конкретних значень, то до них можна застосовувати логічні операції (заперечення, кон’юнкція, диз’юнкція, імплікація, еквівалентність), при цьому будуть отримуватись нові предикати.

Приклад.

P(x) = „$x^2+y^2 = 0$”, *Q(x)* = „$x = 0$”

$P(x,y) \Rightarrow (Q(x) \wedge Q(y))$, („Якщо $x^2+y^2 = 0$, то $x = 0$ *і* $y = 0$”)

2. Квантори.

Означення. Нехай *P(x)* – одномісний предикат з областю визначення *M*, а $A \subset M$. *Квантором загальності* називається така операція, що позначається $\forall$, яка кожному одномісному предикату *P(x)*, визначеному на множині *M*, ставить у відповідність одне і тільки одне висловлення $(\forall x \in A\ P(x))$ (читається: Для кожного *x* з області *A*, що виконується *P(x)*). Це висловлення буде істинним тоді і тільки тоді, коли для кожного значення *x* з області *A* предикат *P(x)* буде перетворюватись на істину. Якщо ж, хоча б при одному значенні x з множини A предикат $P(x)$ перетвориться на хибність, то це висловлення буде хибним.

Приклад. $\forall x\in N$ *(3x+1 – просте число)* – хибне висловлення (оскільки, наприклад, при $x=3$, буде число 10, а це не просте число).

Означення. Нехай $P(x)$ – одномісний предикат з областю визначення M, а $A\subset M$. *Квантором існування* називається така операція, що позначається $\exists$, яка кожному одномісному предикату $P(x)$, визначеному на множині M, ставить у відповідність одне і тільки одне висловлення $(\exists x\in A\ P(x))$ (читається: Існують такі x з області A, що виконується $P(x)$). Це висловлення буде істинним тоді і тільки тоді, коли знайдеться хоча б одне значення x з області A таке, що предикат $P(x)$ буде перетворюватись на істину. Якщо ж, таких значень x з множини A не знайдеться , то це висловлення буде хибним.

Приклад. $\exists x\in N$ *(3x+1 – просте число)* – істинне висловлення (оскільки, наприклад, при $x=2$, буде число 7, а це просте число).

Зауваження. Заперечення висловлення з квантором загальності (існування) може бути побудованим двома способами:

1) перед даним висловленням ставляться слова „неправильно, що”;

2) квантор загальності (існування) замінюється квантором існування (загальності), а речення , що стоїть після квантора, замінюється його запереченням.

Приклад.

$\forall x\in N\ (x\,\vdots\,3)$ („Усі натуральні числа діляться на 3”) – хибне висловлення

Побудуємо його заперечення двома способами:

1) $\neg\ \forall x\in N\ (x\,\vdots\,3)$ („Неправильно, що всі натуральні числа діляться на 3”) – істина.

2) $\exists x \in N\ (\overline{x \vdots 3})$ („Існують натуральні числа, що не діляться на 3”) – істина.

Розглянемо тепер кванторні операції в двомісному предикаті *P(x,y)*, визначеному на множині *M*. Зв’яжемо спочатку змінну *x*, наприклад, квантором існування. Матимемо $\exists x \in M\ (P(x,y))$. Це вже предикат від однієї змінної *y*. Зв’язавши змінну у квантором існування або загальності в цьому предикаті, дістанемо вже висловлення.

Наприклад, нехай *P(x,y)* = „$x \vdots y$” , визначений на множині натуральних чисел. Зв’яжемо в ньому спочатку змінну *y* квантором загальності, а потім змінну *x* квантором існування. Матимемо послідовно $\forall y \in N\ (P(x,y)$, $\exists x \in N\ \forall y \in N\ (P(x,y)$ = „Існує таке натуральне *x*, що ділиться на всі натуральні числа *y*”. На множині натуральних чисел це висловлення буде хибним. Якщо ж цей предикат розглядати на множині цілих невід’ємних чисел Z_0 = {0; 1; 2:…}, то це висловлення буде істинним (крім ділення на 0). Виконаємо тепер над предикатом P(x,y) кванторні операції, тільки вже в зворотному порядку. Знову дістанемо висловлення $\forall y \in N\ \exists x \in N\ (P(x,y)$ = „Для кожного натурального числа *y* існує таке натуральне *x*, що $x \vdots y$”, яке буде, очевидно, істинним. Це висловлення здобуто з попереднього просто механічною перестановкою кванторів.

З двомісного предиката *P(x,y)*, визначеного на множині *N*, за допомогою застосування кванторів можемо утворити вісім таких висловлень:

1) $\forall x \in N\ \forall y \in N\ (P(x,y)$ = „Для кожного натурального *x* і для кожного *y* $x \vdots y$” (хибність).

2) $\forall y \in N\ \forall x \in N\ (P(x,y)$ = „Для кожного натурального у і для кожного х $x \vdots y$” (хибність).

3) $\exists x \in N\ \exists y \in N\ (P(x,y)$ = „Існують такі натуральні числа *x* та *y*, що $x \vdots y$” (істина).

4) $\exists y \in N\ \exists x \in N\ (P(x,y)$ = „Існує таке натуральне *y* та

існує таке x, що $x \vdots y$" (істина).

5) $\exists x \in N \ \forall y \in N \ (P(x,y))$ = „Існує таке натуральне x, що для кожного y $x \vdots y$" (хибність).

6) $\forall y \in N \ \exists x \in N \ (P(x,y))$ = „Для кожного натурального y існує таке x, що $x \vdots y$" (істина).

7) $\forall x \in N \ \exists y \in N \ (P(x,y))$ = „Для кожного натурального x існує таке y, що $x \vdots y$" (істина).

8) $\exists y \in N \ \forall x \in N \ (P(x,y))$ = „Існує таке натуральне y, що для кожного x $x \vdots y$" (істина).

Розглянутий приклад показує також, що переставлення місцями різнойменних кванторів може призвести до утворення відмінного не тільки за змістом, а й за значенням істинності висловленням. Це завжди треба пам'ятати при користуванні кванторами. Переставлення однойменних кванторів не змінює ані змісту, ані значення істинності висловлення.

Усе сказане про застосування кванторів до двомісних предикатів повністю переноситься на випадок предикатів довільної розмірності.

3. Поняття логічного слідування.

Розглянемо це питання для одномісних предикатів.

Нехай на множині M визначено два одномісних предикати $P(x)$ та $Q(x)$ з областю істинності $T_P(x)$ і $T_Q(x)$, причому $T_P(x) \subset T_Q(x)$. Тоді при підстановці замість змінних конкретних значень з області істинності $P(x) \Rightarrow Q(x)$ завжди буде істинною. При цьому говорять, що предикат $Q(x)$ логічно виходить з предиката $P(x)$.

Означення. Нехай на множині M визначені одномісні предикати $P(x)$ та $Q(x)$, а $T_P(x)$ і $T_Q(x)$ – відповідні їх області істинності. Тоді говорять, що $Q(x)$ логічно виходить з $P(x)$ тоді і тільки тоді, коли $T_P(x) \subset T_Q(x)$.

Питання для самоконтролю:

1. Що називається предикатом? Наведіть приклад.
2. Що таке область визначенням та область істинності предиката?
3. Дайте означення квантору загальності існування.
4. Як можна уторити заперечення висловлення з квантором загальності (існування)?
5. Що таке логічне слідування?

Приклади розв'язання типових задач

Завдання 1. Уведемо позначення:

$P(x)$ = „ x – просте число ”;

$Q(x)$ = „ x – парне число ”;

$P(x,y)$ = „ x ділиться на y ”;

$Q(x,y)$ = „ $x = y$ ”;

$R(x,y)$ = „ $x > y$ ”.

Виразити наступні предикати за допомогою даних предикатів та логічних операцій.

а) „Якщо x – просте число і ділиться на 2, то $x = 2$”;

б) Якщо x – ділиться на 3 і x не дорівнює 3, то x – не просте число ”.

Розв'язання. а) $(P(x) \wedge P(x,2)) \Rightarrow Q(x,2)$.

б) $(R(x,3\ ) \wedge \neg Q(x,3)) \Rightarrow \neg P(x)$.

Завдання 2. За допомогою уведених позначень в завданні 4 та кванторів загальності та існування записати у вигляді звичайних речень:

а) $P(1,1)$;

б) $\exists x \in N\ (Q(x) \wedge P(x,6))$;

в) $\forall x \in N\ (\neg Q(x) \Rightarrow \neg P(x,2))$.

Розв'язання. а) „1 ділиться на 1” (істинне висловлення);

б) „Існує таке натуральне число x, що x – парне число та ділиться на 6” (істинне висловлення);

в) „Для всіх натуральних чисел x справедливо, якщо x

– не парне число, то воно не ділиться на 2” (істинне висловлення).

Завдання 3. З’ясувати, чи є висловленням нижче записані речення, та записати їх за допомогою уведених позначень в завданні 4 та кванторних операцій:

а) „Для будь-якого натурального числа х справедливо, число х парне або непарне”;

б) „Яке б не було натуральне число х, число *(х+2)* – просте”;

в) „Існує таке натуральне число х таке, що *(х+2)* – просте”;

Завдання 4. Укажіть області визначення та істинності предикатів:

а) $P(x) =$ «$x + 5 = 1$»;

б) $Q(x) =$ «$x + 2 > 14$».

Розв’язання. а) $x + 5 = 1$.

Зрозуміло, що замість x можна підставляти будь-які дійсні числа і отримувати хибні або істинні числові рівності, тому $M(x) = R$ – область визначення. Щоб знайти область істинності цього предиката, необхідно розв’язати це рівняння. $T(x) = \{-4\}$ - область істинності.

б) $x + 2 > 14$.

Замість х можна підставляти будь-які дійсні числа і отримувати істинні або хибні числові нерівності, тому $M(x) = R$ – область визначення. Розв’яжемо цю нерівність:

$x > 14-2$

$x > 12$

$T(x) = (12;+\infty)$ – область істинності.

Практичне заняття №8

ПРЕДИКАТИ, КВАНТОРНІ ОПЕРАЦІЇ, ПОНЯТТЯ ЛОГІЧНОГО СЛІДУВАННЯ

Опрацюйте лекцію №8 та підготуйте відповіді на питання:

1. Поняття предикату, приклади.

2. Область визначення, множина істинності предикатів

3. Операції над предикатами.

4. Квантори

5. Заперечення висловлень, що містять квантори.

6. Поняття логічного слідування.

Завдання 1. Уведемо позначення:

$P(x)$ = „ x – просте число ”;

$Q(x)$ = „ x – парне число ”;

$P(x,y)$ = „ x ділиться на y ”;

$Q(x,y)$ = „ x = y ”;

$R(x,y)$ = „ x > y ”.

Виразити наступні предикати за допомогою даних предикатів та логічних операцій.

а) „Якщо *x* ділиться на 5, то *x* – просте число”;

б) „*X* не дорівнює 2 тоді і тільки тоді, коли *x* ділиться на 2”.

Завдання 2. За допомогою уведених позначень в завданні 4 та кванторів загальності та існування записати у вигляді звичайних речень:

а) $P(x) \wedge P(x,2) \Rightarrow \neg R(x, 2);$

б) $P(x) \Leftrightarrow (P(x,y) \Rightarrow (Q(x,y) \vee Q(y,1)));$

в) $\forall x \in N\ \exists y \in N\ P(x+y);$

г) $\exists x \in N\ (\neg P(x^2; 4) \wedge P(x^2; 2)).$

Завдання 3. Укажіть області визначення та істинності предикатів:

а) $P(x)$ = „ $\dfrac{x-3}{x+5} = 6$ ”;

б) $Q(x)$ = „$2x-7 < 3x+6$”.

Завдання 4. Які з нижченаведених висловлень є запереченнями висловлення "Будь-яке парне число ділить на 3". Відповідь обґрунтуйте.

а) „Будь-яке парне число не ділиться на 3”;

б) „Неправильно, що будь-яке парне число ділиться на 3”;

в) „Існує парне число, яке не ділиться на 3”;

г) „Деякі парні числа діляться на 3”;

д) „Не будь-яке число ділиться на 3”.

Завдання 5. Користуючись поняттям логічного слідування, перевірити, чи є наведені нижче умовиводи логічно правильними (незалежно від їх фактичної істинності):

а) „Я сьогодні буду розв’язувати задачі або піду в похід на лижах. Я сьогодні не буду розв’язувати задачі. Отже, я піду сьогодні в похід на лижах”;

б) „Я сьогодні буду розв’язувати задачі і піду в похід на лижах. Якщо я не буду розв’язувати задачі, то піду в похід на лижах. Отже, я не піду в похід на лижах”;

в) „Якщо Петро настирливий, то він розв’яже цю задачу. Якщо у Петра болить голова, то він не розв’яже цієї задачі. Отже, якщо у Петра болить голова, то він не настирливий”;

г) „Якщо многокутник правильний, то в нього можна вписати коло. Якщо не всі сторони многокутника рівні між собою, то в нього не можна вписати кола. Отже, якщо не всі сторони многокутника рівні між собою, то він неправильний”.

Завдання 6. Визначте істинність даного висловлення**, в**иберіть в ньому предикат, позначте його буквами та побудуйте заперечення двома способами:

а) „Будь-яка властивість квадрата властива й прямокутнику”;

б) „Будь-яке натуральне число є розв'язком рівняння $2x - 3 = 1$”.

Завдання 7. З даного предиката шляхом застосування кванторних операцій виділити висловлення та визначити їх значення істинності $P(x)$ = *„x – батько y”*.

Завдання для самостійного опрацювання

Теоретичні завдання:

1.Складіть конспект з питання: „Логічні задачі, способи їх розв’язування”

2. Підготуйтесь до дискусії з питань: „Основні прийоми логічного мислення: узагальнення, порівняння, аналіз, синтез, класифікація”, „Роль та місце елементів логіки при навчанні математики”.

Практичні завдання:

1) Уведемо позначення:

$P(x)$ = „ x – просте число ”;

$Q(x)$ = „ x – парне число ”;

$P(x,y)$ = „ x ділиться на y ”;

$Q(x,y)$ = „ $x = y$ ”;

$R(x,y)$ = „ $x > y$ ”.

Виразити наступні предикати за допомогою даних предикатів та логічних операцій.

а) „Якщо $x > y$, то $x \neq y$"”;

б) „$x > 3$ тоді і тільки тоді, коли $x \vdots 3$ *та* $x \neq 3$”.

2) За допомогою уведених позначень в завданні 4 та кванторів загальності та існування записати у вигляді звичайних речень:

а) $\forall x \in N\ (P(x,2) \Rightarrow Q(x));$

б) $\forall x \in N\ (Q(x) \Rightarrow \forall y \in N\ (P(x, y) \Rightarrow Q(x, y)));$

в) $\exists\ x \in N\ (P(x) \wedge Q(x))$.

3) За допомогою уведених позначень в завданні 4 та кванторних і логічних операцій записати у вигляді формул:

а) „Існує натуральне число x таке, що x^2 не ділиться на 4, але ділиться на 2”;

б) „Для кожного натурального числа x число $(x + y) = 2$”;

в) „Для всіх натуральних чисел x знайдуться такі натуральні числа у, що $x < y$, $y \vdots 2$”.

4) Серед наступних висловлень знайдіть заперечення висловлення „Існує натуральне число, що є розв'язком нерівності $2x + 6 < 2$”:

а) „Усілякі натуральні числа не є розв'язком нерівності $2x + 6 < 2$”;

б) „Існує натуральне число, що не є розв'язком нерівності $2x + 6 < 2$”;

в) „Неправильно, що існує натуральне число, що є розв'язком нерівності $2x + 6 < 2$”;

г) „Не існує натурального числа, що є розв'язком нерівності $2x + 6 < 2$”.

5). Користуючись поняттям логічного слідування, перевірити, чи є наведені нижче умовиводи логічно правильними (незалежно від їх фактичної істинності):

а) „Усі математики люблять фантазувати. Кожний, хто любить фантазувати, захоплюється поезією або музикою. Отже, кожний математик захоплюється поезією або музикою”;

б) „Якщо викладач добре читає лекції то студенти поважають викладача. Якщо студенти не поважають викладача, то викладач приймає екзамени не строго. Отже, якщо викладач строго приймає екзамен, то він добре читає лекції”;

в) „Якщо викладач добре читає лекції, то студенти поважають його. Викладач погано читає лекції. Отже, студенти не поважають його”.

6) Визначте істинність даного висловлення**,** виберіть в ньому предикат, позначте його буквами та побудуйте заперечення двома способами „Існує натуральне число, що є розв'язком рівняння $x^2 = 1$”.

ТЕМА №9
СТРУКТУРА ТЕОРЕМИ. ВИДИ ТЕОРЕМ. НЕОБХІДНІ ТА ДОСТАТНІ УМОВИ

План

1. Теорема, її структура.
2. Види теорем.
3. Необхідні та достатні умови.
4. Способи доведення теорем.
5. Правильні й неправильні міркування.

1. Теорема, її структура. Властивості основних (первинних) понять розкриваються в аксіомах — реченнях, що приймаються без доказів. Властивості понять, що не є основними та не включаються до означень, доводяться, тобто виводяться як наслідки з означень, аксіом та раніш доведених властивостей. Властивості понять, що доводяться, називаються теоремами, наслідками, ознаками, формулами, правилами тощо. Будемо називати їх всіх *теоремами.*

Означення. Теорема — це висловлення про те, що з властивості *А* слідує властивість *В*, істинність цього висловлення встановлюється шляхом доведення.

Велика кількість теорем в математиці має наступну структуру

$\forall x \in M \quad (P(x) \Rightarrow Q(x))$, де *P(x), Q(x)* - одномісні предикати, що визначені на множині М

$\forall x \in M$ - *пояснювальна частина*

P(x) - - *умова*

Q(x) – заключна частина

Приклад. „Якщо у трикутнику бокові ребра рівні, то в цьому трикутнику кути при основі теж рівні”

М — множина всіх трикутників, *х* — трикутник

P(x) = „В х бокові ребра рівні”

Q(x) = „В х кути при основі рівні”

$\forall x \in M \quad (P(x) \Rightarrow Q(x))$

„Для будь-якого трикутника х справедливо, якщо в х бокові ребра рівні, то в х кути при основі рівні”

2. Види теорем. Можна записати такі твердження:

1) $P(x) \Rightarrow Q(x)$ - пряма теорема

2) $Q(x) \Rightarrow P(x)$ - обернена

3) $\neg P(x) \Rightarrow Q(x)$ - протилежна до прямої

4) $\neg Q(x) \Rightarrow P(x)$ - протилежна до оберненої

1) та 2) твердження називаються взаємнооберненими; 1) та 3) - взаємнопротилежними.

Приклад.

„Якщо *x* ділиться на 6, то *x* ділиться на 2” – *пряма*

„Якщо *x* ділиться на 2, то *x* ділиться на 6” - *обернена*

„Якщо *x* не ділить на 6, то *x* не ділиться на 2” - *протилежна до прямої;*

„Якщо *x* не ділить на 2, то *x* не ділиться на 6” - *протилежна до оберненої;*

З прикладу видно, що пряме твердження може бути істинним, а обернене — хибним.

Твердження 1) та 4) рівносильні, тобто вони одночасно істинні або хибні, це слідує з закону контрапозицій $P(x) \Rightarrow Q(x) \equiv \neg Q(x) \Rightarrow \neg P(x)$(див. лекцію №8). Тому, щоб довести 1) можна довести 4) та навпаки, і таке доведення називають доведенням *методом від протилежного*.

3. Необхідні та достатні умови. Іноді 1) та 2) можуть бути одночасно істинними, тобто істинні пряма та обернена теореми. Тоді ці дві теореми об’єднують в одну та записують $P(x) \Leftrightarrow Q(x)$. Доведення розділяється на дві частини: спочатку у якості умови виступає *P(x)*, заключної частини - *Q(x),* потім у якості умови виступає *Q(x),* а заключної частини — *P(x).* Це слідує з властивості рівносильності. $(P(x) \Leftrightarrow Q(x)) \equiv (P(x) \Rightarrow Q(x)) \wedge (Q(x) \Rightarrow P(x))$. Іноді теореми $P(x) \Leftrightarrow Q(x)$формулюють в термінах необхідно-достатніх умов.

Означення. Нехай справедливо $P(x) \Rightarrow Q(x)$. Тоді *P(x)* називають достатньою умовою для *Q(x)*, а *Q(x)* — необхідною умовою для *P(x)*.

Якщо будуть справедливі пряма та обернена теорема, то записують $P(x) \Leftrightarrow Q(x)$, та формулюють: *"Для того, щоб Q(x), необхідно та достатньо, щоб P(x)"*.

4. Способи доведення теорем. У математиці існує ряд загальних методів доведення теорем, які використовуються найчастіше. Розглянемо деякі з них.

Дедуктивне доведення. Це основний метод математичних доведень. Кожен його крок ґрунтується на певному логічному законі, аксіомі або даних теорем, і все доведення є ланцюжок логічних умовиводів. При такому доведенні з правильних умов теореми ми з необхідністю дістаємо правильний висновок. Інформація про умови й висновок теореми належить не до компетенції логіки, а до певної конкретної галузі знань. Логіка дає тільки схеми, моделі правильних міркувань. Неправильний висновок теореми можна зробити з неправильних умов при логічно неправильних міркуваннях, з правильних умов при логічно неправильних міркуваннях.

Повна індукція. Термін „індукція" походить від латинського „наведення". У математиці використовуються повна й неповна індукції (питання, пов'язані з неповною індукцією будуть детально розглядатись на ІІ курсі в розділі „Ціла невід'ємні числа"). Доведення методом повної індукції полягає в розгляді всіх окремих випадків, при яких теорема правильна. Кількість таких випадків повинна бути скінченною і невеликою з кількістю.

Непрямі доведення. Розглянути два попередні методи доведення теорем є прямими: використовуючи умови теореми, аксіоми, раніше доведені теореми, означення, логічні правила виведення, послідовно будується ланцюг умовиводів, останній з яких і завершував процес доведення. Розглянемо тепер два способи непрямих доведень.

Зведення до абсурду. Цей метод полягає в тому, що в теоремі $P \Rightarrow Q$ припускають, що правильним буде $\neg Q$. Якщо в результаті такого припущення приходять до неправильного висновку, абсурду, то роблять висновок, що наслідок Q теореми $P \Rightarrow Q$ правильний.

Метод від супротивного. Цей метод ґрунтується на законі контрапозиції $\neg P(x) \Rightarrow Q(x) \equiv . \neg Q(x) \Rightarrow P(x)$.

5. Правильні й неправильні міркування. Логіка має своїм завданням давати структуру, форми правильних умовиводів у вигляді логічних законів і правил виведення. Якщо ці логічні засоби порушуються, використовуються логічно неправильні форми міркувань, то з правильних вихідних даних дістають хибні висновки. Розглянемо, наприклад, таке міркування: „Якщо даний многокутник правильний, то в нього можна вписати коло; даний многокутник неправильний. Отже, в нього не можна вписати кола”.

Запишемо ці міркування у вигляді формули, ввівши позначення: P = „Даний многокутник правильний”, Q = „У нього можна вписати коло”. Маємо $(P \Rightarrow Q) \wedge \neg P \Rightarrow \neg Q$. Проте ця структура міркування логічно неправильна, бо, якщо Q – істина, а P – хибність, формула набуває значення „хибність. Таким чином, умовивід логічно неправильний. Він і фактично неправильний, бо, наприклад, кола можна вписати в будь-який трикутник.

Питання для самоконтролю:

1. Що називається теоремою?
2. Яку структуру має теорема?
3. Які Ви знаєте види теорем?
4. Що називають необхідною та достатньою умовою?
5. Які існують види теорем?

6. Наведіть приклади правильних та неправильних міркувань.

Приклади розв'язання типових задач

Задача 1. Сформулюйте до даної теореми пряму, обернену, протилежну та протилежну до прямої , протилежну до оберненої, на мові необхідності, на мові достатності. *Теорема Піфагора*.

Пряма теорема:

„Якщо трикутник прямокутний, то сума квадратів довжин його (катетів) дорівнює квадрату довжини більшої сторони (гіпотенузи)”

Обернена:

„Якщо квадрат гіпотенузи дорівнює сумі квадратів катетів, то такий трикутник — прямокутний”

Протилежна до прямої:

„Якщо трикутник не прямокутний, то квадрат гіпотенузи не дорівнює сумі квадратів катетів”

Протилежна до оберненої:

„Якщо квадрат більшої сторони не дорівнює сумі квадратів катетів, то даний трикутник не прямокутний”

На мові необхідності:

„Для того, щоб трикутник був прямокутним необхідно, щоб квадрат більшої сторони дорівнював сумі квадратів двох інших сторін”

На мові достатності:

„Для того, щоб квадрат більшої сторони дорівнював сумі квадратів двох інших сторін достатньо, щоб трикутник був прямокутним”

Оскільки пряма та обернена теорема істинні, то можна сформулювати цю теорему в термінах *необхідно-достатніх умов:*

„Для того щоб квадрат більшої сторони був рівним сумі квадратів двох інших, необхідно та достатньо, щоб трикутник був прямокутним”

Практичне заняття №9

СТРУКТУРА ТЕОРЕМИ. ВИДИ ТЕОРЕМ. НЕОБХІДНІ ТА ДОСТАТНІ УМОВИ

Опрацюйте лекцію №9 та підготуйте відповіді на питання:

1. Теореми, структура теорем.
2. Види теорем.
3. Способи доведення теорем.
4. Правильні та неправильні міркування.
5. Зв'язок з початковим курсом математики.

Завдання 1. Укажіть пояснювальну частину, умову та заключну частину в наступному твердженні: “Якщо даний чотирикутник є прямокутником, то навколо нього можна описати коло”.

Завдання 2. Для наступних тверджень сформулювати пряму, обернену, протилежні до прямої та оберненої теореми, теореми в термінах необхідно-достатніх умов.

1) Навколо прямокутника можна описати коло.

1. Якщо функція f(x) диференціюється в точці x_0, то вона в цій точці неперервна.

Завдання для самостійного опрацювання

Практичні завдання:

1. Для наступних тверджень сформулювати пряму, обернену, протилежні до прямої та оберненої теореми, в термінах необхідно-достатніх умов.

1) Діагоналі ромба взаємноперпендикулярні.

2) Діагоналі паралелограма в точці перетину поділяються навпіл.

ПИТАННЯ ДО ТЕОРЕТИЧНОГО ЗВІТУ №2

1. Хто увів поняття “комбінаторика”?
2. Як на вашу думку, кому доводиться розв’язувати комбінаторні задачі?
3. Сформулюйте правило додавання.
4. Запишіть правило додавання для трьох множин.
5. Сформулюйте правило добутку.
6. Що називають факторіалом?
7. Яка множина називається впорядкованою?
8. Що таке перестановка з n елементів? Чому дорівнює кількість перестановок з n елементів?
9. Що таке розміщення без повторень з n елементів по k? Як позначається число розміщень без повторень?
10. Що таке комбінації без повторень з n елементів по k? Як позначається число комбінацій без повторень?
11. Чим відрізняються комбінації та розміщення?
12. Які види сполук ви ще знаєте?
13. Виведіть формули для обчислення числа розміщень без повторень з n елементів по k елементам та числа комбінації без повторень з n елементів по k елементам.
14. Що таке висловлення?
15. Що таке кон’юнкція двох висловлень? Наведіть приклад.
16. Що таке диз’юнкція двох висловлень? Наведіть приклад.
17. Що таке імплікація двох висловлень? Наведіть приклад.
18. Що таке еквівалентність двох висловлень? Наведіть приклад.
19. Які висловлення називаються простими і складеними? Наведіть приклад.
20. Які висловлення називають рівносильними?
21. Доведіть 2-7 властивості логічних операцій (див. *Теорему про властивості логічних операцій*).
22. Що називається предикатом? Наведіть приклад.
23. Що таке область визначенням та область істинності предиката?

24. Дайте означення квантору загальності (існування).
25. Як можна уторити заперечення висловлення з квантором загальності (існування)?
26. Що таке логічне слідування?
27. Що називається теоремою?
28. Яку структуру має теорема?
29. Які Ви знаєте види теорем?
30. Що називається необхідною та достатньою умовою?

ПРИКЛАД МОДУЛЬНОЇ РОБОТИ №2

1. Скількома способами можна вибрати 2 олівця і 3 ручки з 6 різних олівців і 8 різних ручок?

2. У вазі стоять пронумеровані 10 червоних і 5 рожевих гвоздики. Скількома способами можна вибрати з вази: а) три квітки; б) три квітки одного кольору; в) три квітки так, щоб серед них були як червоні, так і рожеві гвоздики?

3. З 40 чоловік обирають голову, секретаря і 5 членів комісії. Скількома способами це можна зробити?

4. P = "Дане число ціле", Q = "Дане число додатне", R = " Дане число просте». Запишіть у вигляді речення:
$\neg R \Leftrightarrow (\neg P \vee \neg Q)$.

5. „Якщо чотирикутник – паралелограм, то його діагоналі у точці перетину діляться навпіл". Сформулювати цю теорему в термінах необхідно-достатніх умов, обернену теорему, протилежну, обернену до протилежної.

6. Побудуйте таблиці істинності для формули:
$(P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)) \wedge \neg Q$.

7. Записати на мові логіки предикатів з використанням кванторів та з'ясувати, чи істинні висловлення:

а) „Існують натуральні числа кратні 7"; б) „Усі натуральні числа непарні"; в) „Існує таке натуральне число x, що $x^2 = 5$".

Карта оцінювання навчальних досягнень

№	Теми практичних занять	Форма контролю	Кількість балів (100)
	Модуль А. Елементи теорії множини. Відповідності, відображення та відношення		**50**
1	Способи завдання множин. Операції над множинами.	Опитування	2,5
2	Поняття розподілу множини на класи. Декартовий добуток множин, кортежі.	Опитування	2,5
	Письмова робот №1		5
3	Відповідність та відображення.	Опитування	2,5
4	Відношення.	Опитування	2,5
	Письмова робота №2		5
	Теоретичний звіт №1		10
	Модульна робота №1		10
	К.С.Р		10
	Модуль В Елементи комбінаторики. Елементи математичної логіки		**50**
5	Основні поняття комбінаторики, правила множення та додавання	Опитування	2
6	Сполуки без повторень та з повтореннями.	Опитування	2
	Письмова робота №3		5
7	Висловлення та операції над ними	Опитування	2
8	Предикати, кванторні операції, поняття логічного	Опитування	2

	слідування		
9	Теореми, їх структура, види теорем. Необхідні та достатні умови.	Опитування	2
	Письмова робота № 4		5
	Теоретичний звіт №2		10
	Модульна робота №2		10
	К.С.Р.		10

Оцінка ECTS	**За нац. систе-мою**	**Визначення**	**%оцінювання за модульно-рейтинго-вою системою**	**Оцінка за семестр (в балах)**
A	**5**	ВІДМІННО – відмінне виконання лише з незначною кількістю помилок	91-100%	91-100
B	**4**	ДУЖЕ ДОБРЕ – вище середнього рівня з кількома помилками	81-90%	81-90
C	**4**	ДОБРЕ – в загальному правильна робота з певною кількістю значних помилок	75-80%	75-80
D	**3**	ЗАДОВІЛЬНО – непогано, але зі значною кількістю недоліків	61-74%	61-74
E	**3**	ДОСТАТНЬО – виконання задовольняє мінімальні критерії	50-60%	50-60
FX	**2**	НЕЗАДОВІЛЬНО – потрібно попрацювати перед тим, як перескласти	25-49%	25-49
F	**2**	НЕЗАДОВІЛЬНО – необхідна серйозна робота, обов’язковий повторний курс	<25%	

Рекомендована література

Основна:

1. Курс математики : навч. посіб. / [В. Н. Боровик, Л. М. Вивальнюк, М. М. Мурач, О. І. Соколенко]. – К. : Вища шк., 1995. – 392, [1] с.

2. Математика: учеб. пособ. для студ. фак. подготовки учителей нач. кл. / Н. Я. Виленкин, А. М. Пышкало, В. Б. Рождественская. – Москва : Просвещение, 1977. – 352, [2] с.

3. Стойлова Л. П. Основы начального курса математик / Л. П. Стойлова, А. М. Пышкало. – Москва : Просвещение, 1988. – 320, [1] с.

4. Столяр А. А. Математика : учебник для студентов 1 курса фак. подготовки учителей начальных классов педагогических вузов. / А. А. Столяр, Л. П. Лельчук. – Минск : Издательство «Вышэйш.школа», 1975. – 272, [1] с.

5. Пышкало А. М. Сборник задач по математике. / А. М. Пышкало, Л. П. Стойлова. – Москва : Просвещение, 1979. – 207 с.

Додаткова:

1. Кухар В. М. Теоретические основы начального курса математики. / В. М. Кухар, Б. Н. Белый. – К.: Вища шк., 1980. – 360 с.

2. Математика. Множества. Логика. Целые числа: Практикум / В. М. Кухар. — К. : Вища шк., 1989. – 333 с.

3. Ляпин Е. С., Алгебра и теория чисел. Часть I. Числа. / Е. С. Ляпин, А. Е. Евсеев. – Москва : Просвещение, 1974. – 238 с.

4. Виленкин Н. Я. Комбинаторика / Н. Я. Виленкин. – Москва : Издательство «Наука», 1969. – 328, [1] с.

Додаток А

З історії розвитку математики

Математика виникла з давніх-давен з практичних потреб людини, її зміст і характер з часом змінювались. Від початкового предметного уявлення про ціле додатне число, від уявлення про відрізок прямої, як найкоротшу віддаль між двома точками. Математика пройшла довгий шлях розвитку, перш ніж стала абстрактною наукою з точно сформованими вихідними поняттями і специфічними методами дослідження. Нові вимоги практики розширюють обсяг понять математики, наповнюють новим змістом старі поняття.

Поняття математики абстраговані від якісних особливостей специфічних для кожного даного кола явищ і предметів. Ця обставина дуже важлива у застосуванні математики. Так, число 2 не має якогось певного предметного змісту. Воно може відноситися і до двох книг, і до двох верстатів, і до двох ідей. Воно добре застосовується і до цих і до багатьох інших об'єктів. Так само геометричні властивості кулі не змінюються від того, зроблено її зі сталі, міді чи скла. Звичайно, абстрагування від властивостей предмету збіднює наші знання про цей предмет і його характерні матеріальні особливості. В той же час саме це абстрагування надає математичним поняттям узагальненості, даючи можливість застосовувати математику до найрізноманітніших за природою явищ. Це означає, що одні й ті ж закономірності математики, один і той же математичний апарат можуть бути достатньо успішно застосовані до біологічних, технічних, економічних та ін. процесів.

Абстрагування в математиці не є її винятковою особливістю, оскільки всілякі загальні поняття містять в собі деякий елемент абстрагування від властивостей конкретних речей. Але в математиці цей процес йде далі, ніж у природничих науках. У ній широко використовують процес абстрагування різних ступенів. Наприклад, поняття групи виникло внаслідок абстрагування від деяких властивостей чисел та інших уже абстрактних понять. У математиці специфічним є також метод одержання результатів. Якщо природознавець, доводячи будь-яке твердження, завжди використовує дослід, то математик доводить свої результати лише на основі логічних міркувань. Жодний результат у математиці не можна вважати доведеним, поки йому не дано логічного обґрунтування, хоч спеціальні досліди і підтвердили його. Водночас істинність математичних теорій перевіряється на практиці, але ця перевірка має особливий характер. Висуваються математичні теорії реальних явищ, а висновки з цих теорій перевіряються дослідним шляхом. Однак зв'язки математики з практикою є ширшими, бо поняття математики: теореми, задачі, математичні теорії пов'язані із запитами практики. З часом ці зв'язки стають глибшими і різноманітнішими.

Математику можна застосувати до вивчення будь-якого типу руху. Проте в дійсності її роль в різних галузях наукової і практичної діяльності неоднакова. Особливо великою є роль математики у вивченні тих явищ, для яких навіть значне абстрагування від їхніх специфічних якісних характеристик не змінює істотно притаманних цим явищам кількісних і просторових закономірностей. Наприклад, у небесній механіці тіла вважають матеріальними точками (тобто абстрагуються від реальності); обчислені таким способом рухи небесних тіл збігаються з дійсними рухами цих тіл.

Користуючись математичним апаратом, можна не тільки дуже точно передобчислювати небесні явища (затемнення, положення планет тощо), але й за відхиленням істинних рухів від обчислених зробити висновок про наявність невидимих неозброєним оком небесних тіл. Саме так було відкрито планети Нептун (1846) і Плутон (1930). В зв'язку з бурхливим розвитком космічних польотів небесна механіка набула все більшого значення. Механіка і фізика стали, по суті, математичними науками. Менше, але все ж значне місце посідає математика в економіці, біології, медицині, лінгвістиці. Для цих наук особливого значення набула математична статистика. Якісна своєрідність явищ, що вивчаються, наприклад, у біології, настільки значна, що роль математичного аналізу при дослідженні їх поки що є підпорядкованою. Процес математизації наук, що почався з 18 ст., тепер набув винятково інтенсивного розвитку.

Історію математики вчені зазвичай поділяють на чотири періоди:

- **період зародження математики як самостійної дисципліни** — тривав приблизно до 6—5 століття до н. е. У цей період формувались поняття цілого числа і раціонального дробу, поняття віддалі, площі, об'єму, створювались правила дій з числами та найпростіші правила для обчислення площ фігур і об'ємів тіл. Математика не мала ще форми дедуктивної науки, вона являла собою збірник правил для виконання певного роду дій. У всіх математичних текстах (єгипетських, вавілонських), що дійшли до нас, математичні знання викладалися саме в такій формі.
- **період елементарної математики** — тривав від 6—5 ст. до н. е. до середини 17 століття. В цей період на основі невеликої кількості вихідних тверджень — аксіом будувалася геометрія як дедуктивна наука. Математика перестала бути безіменною наукою. З історії математики відомі імена багатьох вчених давньої Греції {Фалес, Піфагор, Гіппократ Хіоський, Демокріт, Евдокс, Евклід, Архімед та ін.), Китаю (Чжан Цан, Ген Шоу-чан, Цзу Чун-чжі та ін.), Середньої Азії (Джемшід ібн-Масуд аль-Каші, Мухаммед бен-Муса аль Хорезмі та ін.), Індії і пізніше Західної Європи (Л. Феррарі, Н. Тарталья, Дж. Кардано, С. Стевін та ін.), що зробили значний вклад у математику.
- Третій період (середина 17 ст. — початок 20 ст.) — **період дослідження змінних величин**. Природознавство і техніка дістали новий метод вивчення руху і зміни — диференціальне числення та інтегральне

числення. Створився ряд нових математичних наук — теорія диференціальних рівнянь, теорія функцій, диференціальна геометрія, варіаційне числення та ін., що значно розширили предмет і можливості математики. Велику роль у розвитку математики цього періоду відіграли й українські математики. М. І. Лобачевський відкрив неевклідову геометрію, М. В. Остроградський зробив визначні відкриття в механіці, математичному аналізі, математичній фізиці, П. Л. Чебишов поклав початок новому напряму в теорії функцій, зробив значні відкриття в теорії чисел, теорії ймовірностей, механіці, наближеному аналізі. До цього ж періоду належить діяльність таких видатних вчених, як О. М. Ляпунов, А. А. Марков (старший), Г. Ф. Вороний та багатьох інших.

- Четвертий період — **період сучасної математики** — характеризується свідомим і систематичним вивченням можливих типів кількісних співвідношень і просторових форм. У геометрії вивчається вже не лише тривимірний простір, а й ін. подібні до нього просторові форми. Характерними напрямами розвитку математики цього періоду є теорія множин, функціональний аналіз, математична логіка, сучасна алгебра, теорія ймовірностей, топологія тощо.

Геометрія. У Стародавньому Вавилоні, Єгипті, Індії було зібрано багато геометричних відомостей. Пізніше в Стародавній Греції геометрія оформилась як дедуктивна наука, в основі якої лежали визначення, аксіоми і теореми. Найвидатніший твір з математики цього часу – “Початки “ Евкліда (III ст. до н.е.). Геометрія – одна з найдавніших наук. У перекладі з грецької мови слово “геометрія” означає “землемірство”. Така назва пояснюється тим, що зародження геометрії пов’язане з різними вимірювальними роботами, які доводилось виконувати при розмітці земельних ділянок, прокладанні доріг, спорудженні будівель та інших споруд. У результаті цієї діяльності з’явились і поступово нагромаджувались різні правила геометричних вимірювань і побудов. Таким чином, геометрія виникла на основі практичної діяльності людей і на початку свого розвитку служила переважно практичним цілям. У подальшому геометрія сформувалась як самостійна наука, яка вивчає геометричні фігури.

Перший твір, що містив найпростіші геометричні відомості, дійшов до нас із Стародавнього Єгипту і відноситься до XVII ст. до н.е. Він включає правила знаходження площ і об'ємів деяких фігур, тіл. Ці правила було отримано практичним шляхом, без будь-якого логічного доведення їх справедливості.

Становлення геометрії як математичної науки відбулося пізніше і пов'язане з іменами грецьких учених Фалеса (біля 625-547 рр. до н.е.), Піфагора (біля 580-500 рр. до н.е.), Демокрита (біля 460-370 рр. до н.е.), Евкліда (III ст. до н.е.) та ін. У відомому творі Евкліда "Початки" було систематизовано основні відомі на той час геометричні відомості. Головне – у "Початках" було розвинуто аналітичний підхід до побудови геометрії, який полягає в тому, що спочатку формують основні положення (аксіоми) ,а потім на їх основі за допомогою міркувань доводять інші твердження (теореми). Деякі з аксіом, запропонованих Евклідом, і зараз використовують у курсах геометрії.

Алгебра тривалий час вважалася складником арифметики – однієї з найдавніших математичних дисциплін (поряд з геометрією). У перекладі з грецької мови слово "арифметика" означає "мистецтво чисел". Алгебру ж тривалий час трактували як мистецтво розв'язувати рівняння. Походження слова "Алгебра" пов'язане саме з рівняннями. Лінійні рівняння вміли розв'язувати ще давно єгиптяни і вавилоняни (I тис. до н.е.). Про стан алгебри в Давньому Єгипті свідчать математичні тексти. Що були написані на особливому папері – папірусі, виготовленому із стебел рослини, яка має таку ж назву. Написання деяких папірусів відносять до XVIII ст. до н.е., хоча описані в них математичні факти були відомі давнім єгиптянам задовго до їхнього написання.

Більш помітні успіхи у створенні початків алгебри були досягнуті в Давньому Вавилоні. До нашого часу збереглися вавилонські глиняні плитки з комбінаціями клиновидних рисочок – клинописи. Ці плитки відігравали в Вавилоні таку ж роль, як папіруси в Єгипті. На плитках зустрічаються і клинописні математичні тексти, які свідчать, що уже близько 4000 років тому у Вавилоні могли розв'язувати рівняння, що містять невідоме у другому степені. Учені Стародавньої Греції алгебраїчні задачі розв'язували геометрично, подаючи величини у вигляді відрізків. Добуток вони трактували як площину прямокутника зі сторонами a і b.

Уперше алгебраїчну символіку запровадив на початку нової ери давньогрецький математик Діофант з Александрії. Про Діофанта відомо небагато, навіть точно не встановлено роки його життя. Грецьку науку в середні роки перейняли вчені Сходу – індійці та араби. Індійці зробили значний крок уперед порівняно з Діофантом в удосконаленні символів, використовували десяткову систему числення і ввели в математику цифри, якими ми користуємося зараз. У "Початках " Евклід описав спосіб знаходження найбільшого спільного дільника двох чисел, який так і називається "алгоритм Евкліда". Цей спосіб ґрунтується на тому, що якщо два числа діляться на третє, то їх сума і різниця теж діляться на це число.

Уперше від'ємні числа зустрічаються у працях китайських математиків III ст. до н.е. Проте через замкнутість китайського суспільства того часу ці знання не розповсюдилися за межі країни. У Давній Греції дії з від'ємними числами увів Діофант у III ст. н.е. Їх широко використовували індійські математики у VI-VII ст. н.е., які розуміли додатні числа як майно, а від'ємні – як борг.

Протягом 18 століть математики різних країн незалежно один від одного приходили до поняття від'ємного числа, але навіть у XVI-XVII ст. більшість європейських вчених ще не визнавали від'ємних чисел. Сучасне розуміння від'ємних чисел пов'язане з рухом ліворуч від нуля по числовій вісі, прийшло з працями голландського математика А.Жирара (1595-1632) та французького математика і філософа Р.Декарта (1596-1650). І тільки з початку XIX ст. від'ємні числа стали у математиці такими ж звичайними як і додатні.

У ряді натуральних чисел прості числа зустрічаються як завгодно далеко, але формули для пошуку простих чисел і досі не знайдено. У II ст. до н.е. давньогрецький математик Ератосфен (близько 276-180 рр. до н.е.) запропонував спосіб пошуку кратних чисел, названий "решетом Ератосфена". Ця назва пов'язана з тим, що греки робили записи на дощечках, а замість того, щоб числа викреслювати, дощечку у потрібному місці проколювали. Отже, таблиця обчислень нагадувала решето.

Якісно новий етап у розвитку геометрії почався лише багато століть потому – у XVII ст. н.е. – і пов'язаний з набутими до того часу й з набутими до того часу досягненнями алгебри. Видатний французький математик і філософ Р. Декарт запропонував новий підхід до розв'язування геометричних задач. У своїй "Геометрії" (1637) він увів метод координат, зв'язавши алгебру і геометрію, що дало можливість розв'язувати багато геометричних задач алгебраїчними методами.

Слід зазначити, що в наш час математику широко використовують у найрізноманітніших галузях природознавства: у фізиці, хімії, біології і т.д. Неоцінене її значення у прикладних науках: у машинобудуванні, геодезії, картографії. Методи математики широко застосовують практично в усіх галузях науки і техніки.

Додаток Б
Тест

1. Тип: множинний вибір – єдина відповідь. А={6;12;25;68;72;94;112}, В={3;5;25;72;112;139;345}. Знайти різницю множин А\ В.

Варіанти відповідей:

а) {6, 25, 72, 94, 139, 345};

б) {25, 72,112, 139};

в) {25, 72,112};

г) { 6, 12, 68, 94}.

2. Тип: істина/хибність.

Висловлювання. Множина всіх квадратів є перетином множин всіх прямокутників і всіх ромбів.

3. Тип: істина/хибність.

Висловлювання. Множина всіх парних чисел є підмножиною всіх дійсних чисел.

4. Тип: множинний вибір – множинна відповідь.

Висловлювання. Відношення “подільність” має властивості:

Варіанти відповідей:

а) рефлексивність;

б) симетричність;

в) транзитивність.

5. Тип: множинний вибір – множинна відповідь.

Висловлювання. Відношення “перпендикулярність” не має властивостей:

Варіанти відповідей:

а) рефлексивності;

б) симетричності;

в) транзитивності.

6. Тип: множинний вибір – множинна відповідь.

Які з наступних висловлювань хибні?

Варіанти відповідей:

а) усі паралелограми не мають осей симетрії;

б) існують паралелограми, що не мають осей симетрії;

в) усі парні числа не діляться на 4;

г) існують парні числа, що не діляться на 4;

д) існують парні числа, що діляться на 4.

7. Тип: відповідність.

Висловлювання *B:*= "Учень Бондаренко вивчає англійську мову", висловлювання; *A:*= "Учень Бондаренко відвідує бібліотеку". Запишіть формулою наступні висловлення:

А. Коли учень Бондаренко відвідує бібліотеку, то він вивчає англійську мову

Б. Учень Бондаренко відвідує бібліотеку і не вивчає англійську мову.

В. Учень Бондаренко вивчає англійську мову у тому і тільки у тому випадку, коли він відвідує бібліотеку.

Г. Учень Бондаренко відвідує бібліотеку, або вивчає англійську мову.

8. Тип: множинний вибір – єдина відповідь.

Яку логічну операцію висловлювань *A* і *B* ілюструє дана таблиця істинності?

P	Q	
і	і	і
і	х	х
х	і	і
х	х	і

Варіанти відповідей:

а) операцію еквівалентності;

б) операцію кон'юнкції;

в) операцію диз'юнкції;

г) операцію імплікації;

д) операцію заперечення.

9. Тип: істина/хибність.

Висловлювання. Формула *A^B* є символічним записом логічної операції кон'юнкції.

10. Тип: відповідність.

Заповніть пропуски в тексті.

а) множина, яка складається з усіх тих і тільки тих елементів, які належать принаймні хоча б одній з множин (*A*, *B*) називається ________________ та позначається ___

б) множина, яка складається з усіх тих і тільки тих елементів, які належать і множині *A*, і множині *B*, називається __________________ та позначається _______________

в) множина, яка складається з усіх тих і тільки тих елементів множини *A*, які не належать множині *B*, називається____________________ та позначається _____

11. Тип: множинний вибір – єдина відповідь.

Скількома способами можна скласти список з 5 прізвищ?

Варіанти відповідей:

а) 120; б) 5^5; в) 60

12. Тип: множинний вибір – єдина відповідь.

Скільки трицифрових чисел можна скласти з цифр 5, 8 та 1 (цифри в числі можуть повторюватись)?

Варіанти відповідей:

а) 9; б) 6; в) 27

13. Тип: множинний вибір – єдина відповідь.

У вазі є 11 яблук та 6 апельсинів. Скількома способами можна вибрати один із цих фруктів?

Варіанти відповідей:

а) 66; б) 17; в) 11

14. Тип: множинний вибір – єдина відповідь.

Скількома способами можна скласти розклад уроків на понеділок з 6 навчальних предметів, якщо в понеділок 4 уроки, причому всі уроки різні?

а) 360; б) 10; в) 24

Правильні відповіді:

1. г)
2. істина
3. істина
4. а), в)
5. а), в)
6. а), в)
7. $A \Rightarrow B$, $A \wedge \neg B$, $B \Leftrightarrow A$, $A \vee B$
8. в)
9. істина
10. а) об’єднанням, $A \cup B$,
    б) перетином, $A \cap B$,
    в) різницею, $A \backslash B$,
11. а)
12. в)
13. б)
14. а)

Навчально-методичне видання

БОЖКО Віра Геннадіївна
ІВАНОВА Ольга Віталіївна

МАТЕМАТИКА

Навчально-методичний посібник
для студентів 1 курсу спеціальності
6.010102 „Початкова освіта”

Комп’ютерний макет – Божко В. Г.
Коректор – Обєднікова О. М.

Здано до склад. 01.11.2010 р. Підп. до друку 01.12.2010 р.
Формат 60х84 1/16. Папір офсет. Гарнітура Times New Roman.
Друк ризографічний. Ум. друк. арк. 8,2. Наклад 300 прим. Зам. № 183.

Видавець і виготовлювач
Видавництво Державного закладу
„Луганський національний університет імені Тараса Шевченка”
вул. Оборонна, 2, м. Луганськ, 91011. т/ф: (0642)58-03-20
e-mail: alma-mater@list.ru
Свідоцтво суб’єкта видавничої справи ДК №3459 від 09.04.2009 р.