О. Н. Ие, А. В. Скринникова

СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
ЛУГАНСКОЙ НАРОДНОЙ РЕСПУБЛИКИ

ГОУ ВПО ЛНР «ЛУГАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ ТАРАСА ШЕВЧЕНКО»

О. Н. Ие, А. В. Скринникова

СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ

**Учебное пособие
для студентов III курса специальности
6.040303 «Системный анализ»**

Луганск
ГОУ ВПО ЛНР «ЛГУ имени Тараса Шевченко»
2015

УДК 519.21(075.8)
ББК 22.171я73
І-30

Р е ц е н з е н т ы:

Дымарский Я. М. – доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики Московского физико-технического института (государственного университета)

Малый В.В. – кандидат технических наук, доцент, заведующий кафедрой прикладной математики ГОУ ВПО ЛНР «Луганский государственный университет имени Владимира Даля»

Случайные процессы. Часть 1: Учебно-методическое пособие / Сост.: О. Н. Ие, А. В. Скринникова. – Луганск.: МФТИМ, 2015. – 120 с.

Учебное пособие по дисциплине «Случайные процессы» структурировано в соответствии с разделами рабочей программы курса «Случайные процессы» кафедры фундаментальной математики ГОУ ВПО ЛНР «ЛГУ имени Тараса Шевченко». Пособие содержит программу курса «Случайные процессы», достаточно полную теоретическую базу из основных тем дисциплины "Случайные процессы", примеры решения задач, вопросы и задания для самоконтроля по темам курса, материал для самостоятельной работы. Издание предназначено для студентов и преподавателей, специализирующихся на прикладных направлениях теории вероятностей и математической статистики, в частности для студентов, обучающихся по специальности 6.040303 «Системный анализ».

УДК 519.21(075.8)
ББК 22.171я73

Рекомендовано к печати учебно-методическим советом
ГОУ ВПО ЛНР «ЛГУ имени Тараса Шевченко»
(протокол №2 от 27 октября 2015 года).

© Ие О. Н., Скринникова А. В., 2015
© ГОУ ВПО ЛНР «ЛГУ имени Тараса Шевченко», 2015

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Теория случайных процессов возникла в результате построения математических моделей реальных физических процессов и естественно представляет огромный общетеоретический и прикладной интерес.

Для понимания изучаемого курса необходимо владеть основами теории вероятностей, математического и функционального анализа. В первой части изложены основные понятия теории случайных процессов: определения, конечномерные распределения, классификация, условия непрерывности, канонические разложения, корреляционный анализ. Рассмотрены векторнозначные и комплекснозначные процессы, дифференцирование и интегрирование случайных процессов, а также стационарные процессы, их спектральное представление, нормальные случайные процессы. Марковским случайным процессам будет посвящена вторая часть. В каждом разделе приведены задачи с решениями. Рассмотренные примеры решения типовых задач данного пособия позволят самостоятельно освоить практическую компоненту курса студентами заочной формы обучения.

Создание и развитие математической теории случайных процессов началось в XX веке и было связано с трудами А.Н. Колмогорова (1903-1987), А.Я. Хинчина (1894-1959), Е.Е. Слуцкого (1880-1948), Н. Винера (1894-1965), Дж. Дуба (1910-2004), П. Леви (1886-1971), В. Феллера (1906-1970) и др. ученых.

Имелся ряд импульсов к возникновению нового раздела теории вероятностей. Считается, что основной из них дала физика. Ведь в 1827 году шотландский ботаник Р. Броун (1773-1858) обнаружил под микроскопом хаотическое движение частиц цветочной пыльцы в воде. Однако природа этого движения, получившего название *броуновского*, долго оставалась невыясненной. Лишь в конце XIX – начале XX века было осознано, что оно представляет собой одно из проявлений теплового движения атомов и молекул вещества. Оказалось, что для описания процессов такого рода требуются вероятностно-статистические подходы.

Математические и физические модели броуновского движения и более общих процессов диффузии были построены А. Эйнштейном (1879-1955), М. Смолуховским (1872-1917), М. Планком (1858-1847), А. Фоккером (1887-1972), П. Ланжевеном (1872-1946), Н. Винером (1894-1964) и другими учеными. Интересно отметить, что в диссертации Л. Башелье (1870-1946), написанной в 1900 году под руководством А. Пуанкаре (1854-1912), впервые, на 5 лет раньше физиков, была предложена модель для описания флуктуаций на бирже курсов ценных бумаг, которая содержала математическую теорию броуновского движения. Эта работа долго оставалась без должного внимания.

Среди важных предпосылок создания теории случайных процессов следует назвать «цепную зависимость», введенную А.А. Марковым (1856-1922) в 1906 году. Удивительно, что построенная модель случайных величин, получившая название *цепи Маркова*, возникла при изучении им расположения комбинаций гласных и согласных букв в тексте романа «Евгений Онегин» и лишь позднее была использована и обобщена в ряде физических исследований.

В диссертации Ф. Лундберга (1876-1965) была введена модель, описывающая деятельность страховой компании. В этой работе впервые возник так называемый *пуассоновский процесс*, который позднее стал использоваться при изучении радиоактивного распада. В теории страхования широко известны модели Крамера-Лундберга и Спарре-Андерсена. Процессы с «дискретным вмешательством случая» и идеи, восходящие к классическим задачам «*геометрических вероятностей*» (например, о «случайном бросании» на плоскость точки или иглы) привели позднее к созданию теории *точечных случайных процессов*. Отметим также модель Гальтона-Ватсона, относящуюся к анализу вымирания аристократических фамилий в Великобритании. Эта модель сформировалась в 1873 году в ходе переписки Ф. Гальтона (1822-1911) и Г. Ватсона (1827-1903), приведшей к «теореме вырождения». Она послужила основой для развития во второй половине XX века теории *ветвящихся процессов*, изучающей эволюцию семейств рождающихся и гибнущих частиц, а также взаимодействия частиц различных типов.

Выдающуюся роль в создании *общей теории случайных процессов* сыграли статьи А.Н. Колмогорова «Об аналитических методах в теории вероятностей» (1931) и А.Я. Хинчина «Теория корреляции стационарных стохастических процессов» (1934). Однако прочный фундамент для теории случайных процессов (и всей теории вероятностей) был заложен лишь в 1933 году благодаря *аксиоматике Колмогорова*.

Выдающийся вклад в эргодическую теорию внесен Я.Г. Синаем и его школой. Сейчас интенсивно развивается область случайных операторов и их спектров. Оказалось, что спектры бесконечных случайных матриц имеет непосредственное отношение к знаменитой гипотезе Римана о нулях ζ-функции.

В XX-м веке возникли обширные новые направления теории случайных процессов. Например, исследования А.К. Эрланга (1878-1929), связанные с изучением загрузки телефонных сетей, привели к формированию *теории массового обслуживания* («теории очередей»). В этой области выделяют работы Б.В. Гнеденко (1912-1995), И.Н. Коваленко, Ю.К. Беляева и А.Д. Соловьева (1927-2001). В настоящее время эта теория охватывает компьютерные, транспортные сети.

Введение К. Ито (1915-2008) стохастического интеграла, называемого ныне *интегралом Ито*, привело к созданию *стохастического исчисления* и мощной *теории стохастических дифференциальных уравнений*. Например, уравнение Ланжевена для скорости $V=V(t)$ движения частицы в жидкости может быть записано в виде

$$dV(t)= a\, V(t)dt + b\, dW(t)\,,\ \ t\geq 0,$$

где a и b – числовые коэффициенты, характеризующие массу частицы и вязкость среды, а $W=W(t)$ – винеровский процесс (броуновское движение). Что поразительно: почти все (по мере P) траектории винеровского процесса не дифференцируемы ни в одной точке $t\in[0,\infty)$. Поэтому приведенное уравнение следует понимать как формальную запись некоторого интегрального соотношения, вовлекающего интеграл Ито. Для привлечения внимания читателей к этой области исследований отметим, что методы стохастического анализа позволили решить сложные и важные задачи выделения сигнала на фоне шума. Более того, в настоящее время на интенсивно исследуют стохастические дифференциальные уравнения в частных производных.

Отдельного упоминания заслуживают разнообразные задачи *оптимального управления* случайными процессами. Например, задачи нахождения (в определенном смысле) оптимальных режимов функционирования сложных систем.

Теория *гиббсовских случайных полей*, заложенная в 60-е годы XX-го века в работах Р.Л. Добрушина (1929-1995), О. Лэнфорда и Д. Рюэля, позволила, например, интерпретировать фазовые переходы состояний вещества. Теория *автомодельных процессов*, инициированная А.Н. Колмогоровым в 40-е годы, обеспечила прогресс в изучении турбулентности. Оказалось, что автомодельность свойственна многим физическим процессам. Дальнейшее развитие этой теории «фрактальности» связано с работами Б. Мандельброта и его последователей.

Возникли новые разделы математической статистики, тесно связанные со случайными процессами прогноза и интерполяции.

В настоящее время существует целый ряд самостоятельных направлений исследований в теории случайных процессов, некоторые из них были упомянуты выше. Как правило, выделяются достаточно широкие классы случайных процессов и для их исследования используется соответствующий набор методов. Важную роль в современных условиях играет моделирование на компьютере случайных процессов и полей.

РАЗДЕЛ 1. ПОНЯТИЕ СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА

1.1. Определение случайного процесса. Примеры

При создании самых разных явлений действительности мы сталкиваемся с процессами, предсказать течение которых заранее не можем, т.е. со случайными (стохастическими) процессами.

Всегда, когда речь идет о чем-либо случайном, имеется в виду определенное вероятностное пространство.

Из курса теории вероятностей известно, что вероятностное пространство – это тройка объектов $\{\Omega, F, P\}$, где Ω – множество элементарных событий, F – совокупность подмножеств Ω, образующих σ-алгебру, $P(A)$ – мера на F, называемая вероятностью множества A. Также, мы уже знакомы с понятием случайной величины. Случайная величина (действительная) – это функция $\xi_\omega = \xi(\omega): \Omega \to R$, заданная на пространстве элементарных событий и принимающая в результате то или иное значение, неизвестное заранее.

Определение. Пусть Ω – множество элементарных событий и θ – непрерывный параметр. *Случайной функцией* называется функция двух аргументов

$$\xi_\omega(\theta) = \xi(\omega, \theta), \;\; \omega \in \Omega, \;\; \theta \in R^1,$$

которая в результате опыта может принимать тот или иной конкретный вид, неизвестный заранее.

Если θ интерпретировать как время $(\theta = t)$, то говорят о случайном процессе. Т.е. понятие случайного процесса позволяет описывать динамику развития изучаемого случайного явления во времени. Если θ – многомерное пространство, то говорят о случайном поле. Если θ – дискретное множество, то о случайной последовательности или временном ряде.

Конкретный вид, принимаемый случайной функцией в результате, называется *реализацией* случайной функции (или выборочной функции).

Конкретный вид случайная функция принимает для каждого фиксированного аргумента (т.е. для каждого элементарного события), и в этом случае мы имеем дело попросту с обычной детерминированной (неслучайной) функцией одного аргумента $\xi = \xi(\theta)$.

Если же зафиксировать параметр θ, функция $\xi(\omega,\theta) = \xi(\omega)$ является функцией только $\omega \in \Omega$ и, следовательно, представляет собой случайную величину.

Если перевести «сечение» семейства реализаций при данном t, мы получим n значений, принятых случайной величиной $\xi(t)$ в n опытах (см. рис. 1).

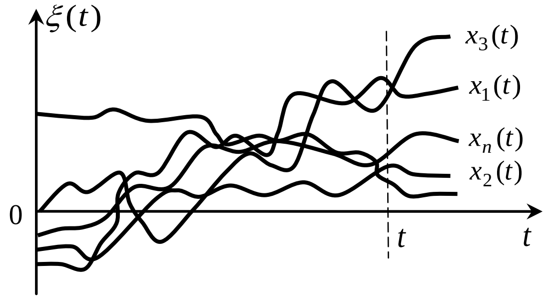

Рис. 1. Сечения $\xi(t)$

Итак, случайный процесс можно рассматривать либо как совокупность случайных величин $\xi(t)$, зависящих от параметра t, либо как совокупность реализаций процесса $\xi(t)$.

Естественно, что для определенного процесса необходимо задать вероятностную меру в функциональном пространстве его реализаций.

В соответствии с принципами теории вероятности конечная последовательность случайных величин $\xi_1,\ldots,\xi_n$, $\xi_i = \xi(t_i)$, $i = 1,2,\ldots,n$ полностью характеризуется их совместной функцией распределения

$$F(x_1,\ldots,x_n) = P\{\xi_1 < x_1,\ldots,\xi_n < x_n\}.$$

При переходе к теории вероятностного описания случайной функции возникает вопрос, как описать взаимные связи бесконечного числа случайных величин – значений случайных функций.

Проще всего считать случайную функцию заданной, если определены всевозможные теоретико-вероятностные соотношения между любым конечным набором значений случайных величин

$$\xi\left(\theta_1\right),...,\xi\left(\theta_n\right);\ \theta_i \in \Theta,\ i=1,2,...,n;\ n=1,2,... \tag{1.1}$$

С этой точки зрения случайная функция $\xi\left(\theta\right)$ определяется семейством распределения

$$F_{\theta_1,...,\theta_n}\left(x_1,...,x_n\right) \tag{1.2}$$

и любой функцией распределения последовательности случайных величин.

Разумеется, чтобы такая интерпретация была возможной, семейство (1.2) не может быть произвольным. Оно должно удовлетворять следующим очевидным *условиям согласованности*:

$$F_{\theta_1,...,\theta_n,\theta_{n+1},...,\theta_{n+p}}\left(x_1,...,x_n,+\infty,...,+\infty\right)=F_{\theta_1,...,\theta_n}\left(x_1,...,x_n\right), \tag{1.3}$$

$$F_{\theta_1,\theta_2,...,\theta_n}\left(x_1,x_2,...,x_n\right)=F_{\theta_{i_1},\theta_{i_2},...,\theta_{i_n}}\left(x_{i_1},x_{i_2},...,x_{i_n}\right), \tag{1.4}$$

где $t_{i_1},t_{i_2},...,t_{i_n}$ – любая трактовка $t_1,t_2,...,t_n$.

Более гибкие определения возникают, если использовать аксиоматический подход теории вероятностей.

Приведем некоторые простые примеры случайных процессов.

Пример 1. Число отказов элементов ЭВМ зависит от времени t (системы массового обслуживания). Можно говорить о числе отказов элементов не только для ЭВМ, а также для любой системы массового обслуживания, АТС и т.д. Процесс, характеризующий систему в момент времени t, является *марковским* случайным процессом.

Пример 2. Если проследить за движением молекул газа или жидкости, то ее состояние подвержено случайным изменениям в каждый момент времени. Тут мы имеем дело с *броуновским* случайным процессом.

Пример 3. Количество частиц, вылетающих из радиоактивного вещества, зависит от времени распада. Процесс радиоактивного распада является *пуассоновским*.

Пример 4. При передаче сигнала по радиоканалу в приемное устройство вместе с полезным сигналом также поступают различные помехи, которые являются случайными функциями времени. Шум является *нормальным* случайным процессом.

Пример 5. Температуру воздуха в различных точках атмосферы можно рассматривать как случайную функцию от переменных x, y, z, t, называемую *случайным полем*.

Пример 6. Бросается монета в дискретные моменты времени t_0, t_1. «Герб» соответствует $\xi = 1$, «цифра» – $\xi = 0$. Закон $\xi = \xi(t_k)$ состоит из последовательности нулей и единиц и является случайной последовательностью.

Пример 7. Пусть дана $\xi(t, U) = U \sin t$, где U – непрерывная случайная величина.

Пусть в первом испытании в силу случая $U_1 = 3$, а во втором $U_2 = 4{,}6$, тогда $\xi_1(t, U) = 3\sin t$ и $\xi_2(t, U) = 4{,}6\sin t$ – реализации случайного процесса.

Если же зафиксировать t, например, $t = 1$с, то получим сечение случайного процесса: $\xi(1, U) = U \sin 1$, для $t = 2$с получим $\xi(2, U) = U \sin 2$ – второе сечение.

1.2. Классификация процессов

Перейдём к классификации процессов. Первый признак, по которому осуществляется классификация, касается θ. Если $\theta = Z$ или $\theta = Z_+$, будем говорить про случайную последовательность или процесс с дискретным временем. Второй признак – фазовое пространство. Так различаются действительнозначные, комплекснозначные, векторнозначные процессы. Они будут рассмотрены позже. Но главный признак, по которому классифицируют процессы, – это свойства конечномерных распределений.

1. *Процессы с независимыми приращениями*

Определение. Процесс $\xi(t)$, $t \in T \subseteq R$ называется процессом с независимыми приращениями, если для $t_1 < t_2 < ... < t_n$ величины

$$\xi\left(t_2 + t\right) - \xi\left(t_1 + t\right), \xi\left(t_3 + t\right) - \xi\left(t_2 + t\right), ..., \xi\left(t_n + t\right) - \xi\left(t_{n-1} + t\right)$$

являются независимыми случайными величинами. При этом совместное распределение этих разностей не зависит от t.

Для определения канонических разложений процесса с независимыми приращениями достаточно знать одномерные распределения процесса, а также распределение приращения процесса, который определяется двумерным распределением.

2. *Стационарные случайные процессы*

Определение. Случайный процесс $\xi(t)$ называется *стационарным*, если совместная функция распределения случайного вектора $\xi(t_1 + t), \xi(t_2 + t), ..., \xi(t_n + t)$ не зависит от t, а зависит только от $t_1, t_2, ..., t_n$, то есть все сечения $\xi(t)$ одинаково распределены.

Многочисленные процессы в природе имеют тенденцию становиться стационарными.

3. *Гауссовские процессы*

Случайный процесс $\xi(t)$ называется гауссовским, если последовательность $\xi(t_1), ..., \xi(t_n)$ имеет совместное нормальное распределение.

4. *Марковские процессы*

Случайный процесс $\xi(t)$ называется марковским, если все вероятностные характеристики процесса в будущем зависят лишь от того, в каком состоянии этот процесс находится в настоящий момент времени, и не зависит от того, каким образом этот процесс протекал в прошлом («будущее зависит от прошлого только через настоящее»).

Эти и другие классы случайных процессов подробнее будут рассмотрены позже.

1.3. Анализ временных рядов

В прикладных вопросах статистики случайных процессов важное место занимают *временные ряды*. Характерная особенность временных рядов в отличие от других статистических объектов заключается в том, что наблюдения производятся последовательно во времени, при этом наблюдения зависимы, и характер этой зависимости интересен сам по себе. Совокупность существующих методов анализа таких рядов зависимых наблюдений называется *анализом временных рядов*.

Временные ряды различаются по своей природе. Одни переменные, составляющие временной ряд, существуют в каждый момент времени и могут рассматриваться как существующие непрерывно. Например, температура t° в заданном месте, цена данного товара на открытом рынке или положение снаряда в полете. Другие образуются только путем суммирования (агрегирования) за определенный период. Например, количество осадков, выпуск промышленной продукции за определенное время, расстояние, пройденное авиалайнером. Третьи, в свою очередь, существуют (или начинают существовать) только в отдельные интервалы времени: урожай той или иной культуры в страдную пору, число голосов политической партии на всеобщих выборах, платежи, подлежащие уплате в конце кварталов. Иногда у нас нет возможности выбора моментов времени, когда делать наблюдения, например, при определении урожаев в жатву. В других случаях определенный выбор возможен, но без ограничений. Например, данные об импорте представляются обычно по месяцам, и только в порядке исключения правительственное агентство дает цифры за более короткие интервалы или дробные периоды.

В предельных случаях ряды можно наблюдать почти бесконечно или, во всяком случае, столь долго, насколько хватит нашего терпения и сил. Известными примерами могут служить записи на вращающемся барабане температуры и барометрического давления или альфа-ритмов головного мозга на энцефалографе.

Обзор уже приведенных примеров временных и многих других рядов наводит на мысль, что полезно в общем случае рассматривать ряд как смесь четырех компонент:

а) тренда или долгосрочного движения;

б) более или менее регулярных колебаний относительно тренда;

в) сезонной компоненты;

г) остатка или несистематического случайного эффекта.

Ряд удобно представлять в виде суммы этих четырех компонент, и одной из целей анализа является разложение ряда на его составляющие для отдельного изучения. Однако следует помнить, что, поступая так, мы фактически постулируем модель. Возможно, целесообразно предположить, что тренд объясняется наличием постоянных сил, однообразно действующих приблизительно в одном и том же направлении, а краткосрочные колебания относительно этого долгосрочного движения происходят по совокупности причин, и в обоих движениях содержится некое возмущение, присущее случайным событиям и обусловливающее появление остатка. Но то, что это так и что эффекты от различных сил аддитивны, является предположением и имеет характер гипотезы, от которой мы всегда должны быть готовы отказаться, если наша модель плохо соответствует данным.

1.4. Критерии случайности

Простейшей гипотезой, которую можно выдвинуть относительно колеблющегося ряда, является предположение, что колебания случайны. На практике бывает достаточно лишь посмотреть на данные, чтобы отбросить эту гипотезу. Но в некоторых случаях необходимы более точные критерии, например, при исследовании данных о ячмене или при изучении остатков, полученных вычитанием из исходного ряда систематических элементов, когда требуется установить, не осталось ли в них какой-либо систематизации.

В случайных рядах, согласно гипотезе, наблюдения независимы и могут следовать в любом порядке. Возможно применение неограниченного числа критериев случайности, но одни критерии по определенным соображениям лучше, чем другие.

1) Желательно, чтобы критерий не требовал каких-либо ограничений на вид распределения совокупности, из которой, по предположению, извлекаются наблюденные значения.

2) Необходимые вычисления должны быть сведены к минимуму.

3) Вычисления должны легко обновляться; другими словами, необходимо, чтобы не требовалось проводить все вычисления с самого начала, если после подсчета критерия с течением времени добавляются новые наблюдения.

Выбор критерия до некоторой степени зависит от того, какие выдвигаются альтернативные гипотезы. Работа Неймана и Пирса по проверке гипотез подтверждает, что никто не проверяет гипотезу саму по себе, а лишь в сравнении с другими возможными гипотезами. Не всегда легко точно определить, какие альтернативные гипотезы целесообразно выдвинуть, но обычно имеются некоторые соображения, которые могут в значительной степени помочь при выборе критерия. Например, в случае, когда данные по виду как будто имеют тренд, требуется критерий, отличный от того, который используется при подозрении на периодичность.

1.5. Поворотные точки

Наиболее простой критерий для применения, особенно если ряд изображен графически, состоит в подсчете пиков и впадин. «Пик» – это величина, которая больше двух соседних. «Впадина», наоборот, – значение, которое меньше двух соседних. Оба эти значения называются «*поворотными точками*», и нам предстоит рассмотреть вопрос: каково распределение числа поворотных точек в случайном ряду?

Рассмотрим конечный ряд из n величин $u_1, u_2, ..., u_n$. Начальное значение нельзя считать поворотной точкой, так как u_0 неизвестно, и, аналогично, нельзя рассматривать в качестве поворотной точки последнее значение, так как неизвестно u_{n+1}. Для определения поворотной точки требуются три последовательных значения. Если ряд случайный, то эти три значения могут следовать в любом из шести возможных порядков с равной вероятностью. Только в четырех из них будет поворотная точка, а именно, когда наибольшее или наименьшее из трех значений находится в середине. Следовательно, вероятность обнаружения поворотной точки в любой группе из трех значений равна 2/3.

Для группы из n величин определим «счетную» переменную X, как

$$X_i = \begin{cases} 1, \text{ åñëè } u_i < u_{i+1} > u_{u_{i+2}} \text{ èëè } u_i > u_{i+1} < u_{i+2}, \\ 0, \text{ â äðóãèõ ñëó÷àÿõ.} \end{cases}$$

Тогда число поворотных точек p в ряде есть просто

$$p = \sum_{i=1}^{n-2} X_i \,,$$

и сразу же получаем $M(p) = \sum \grave{I}\ (X_i) = \frac{2}{3}(n-2)$.

Это ожидаемое число поворотных точек (другими словами, поворотная точка приходится на каждые 1,5 наблюдения). Если их больше (редкий случай), то ряд является быстро колеблющимся, и это не может быть объяснено только случайностью. Если же их меньше, то последовательные значения положительно коррелированны. (Однако для того, чтобы сделать вывод, существенна ли разница между наблюденным и ожидаемым числом, желательно вычислить дисперсию).

Существуют также ранговые критерии случайности и критерии знаков разностей.

РАЗДЕЛ 2. ВЕРОЯТНОСТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА

2.1. Закон распределения случайного процесса

Определение. Пусть $t_1, t_2, ..., t_n$ – n значений параметра $t \in T$. n*-мерной функцией распределения* случайного процесса $F_\xi\left(x_1, x_2, ..., x_n; t_1, t_2, ..., t_n\right)$ называется функция $2n$ переменных удовлетворяющих условию

$$F_\xi(\bar{x}, \bar{t}) = P\left\{\xi\left(t_1\right) < x_1, ..., \xi\left(t_n\right) < x_n\right\}, \tag{2.1}$$

где $x_i \in R^1$, $t_i \in T$.

n*-мерной плотностью распределения случайного процесса* $\xi(t)$ называется

$$f_{t_1, ..., t_n} = f_\xi(\bar{x}, \bar{t}) = \frac{\partial^n F}{\partial x_1 ... \partial x_n}, \tag{2.2}$$

если смешанная производная n -го порядка существует.

Если при изучении случайного процесса используется только плотность распределения 1 и 2-го порядков, то говорят, что случайный процесс изучается в пределах корреляционной теории.

В ряде случаев, как и для случайной величины, для описания случайного процесса необязательно задание закона распределения, а достаточно определения некоторых характеристик, аналогично числовым характеристикам случайной величины. При этом случайный процесс описывается достаточно полно.

2.2. Вероятностные характеристики случайного процесса

Определение. *Математическим ожиданием* случайного процесса $\xi(t)$ называют неслучайную величину $m_\xi(t)$, которая при любом фиксированном

$t \in T$ совпадает с математическим ожиданием случайной величины соответствующего сечения случайного процесса, т.е.

$$m_\xi(t) = M[\xi(t)] = \begin{cases} \sum\limits_k x_k(t) \cdot p_k, \\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x f_\xi(x,t)dx, \end{cases} \tag{2.3}$$

где $x_k(t)$ – k-тая реализация случайного процесса,

p_k – вероятность наступления k-ой реализации,

$f_\xi(x,t)$ – одномерная плотность распределения.

Так же вводится понятие дисперсии.

Определение. *Дисперсией случайного процесса* $\xi(t)$ называют неслучайную функцию $D_\xi(t)$ одной переменной t, которая при каждом значении $t \in T$ совпадает с дисперсией случайной величины соответствующего сечения случайного процесса $\xi(t) - m_\xi(t)$

$$D_\xi(t) = D(\xi(t)) = M\left[\xi(t) - m_\xi(t)\right]^2 = \begin{cases} \sum\limits_k \left(x_k - \cdot m_\xi(t)\right)^2 p_k \\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(x - \cdot m_\xi(t)\right)^2 f_\xi(x,t)dx \end{cases} \tag{2.4}$$

где $\xi(t) - m_\xi(t) = \overset{\circ}{\xi}(t)$ – центрированный случайный процесс. Тогда

$$D_\xi(t) = M\left[\xi(t)^2\right], \tag{2.5}$$

$$\sigma_\xi(t) = \sqrt{D_\xi(t)}. \tag{2.6}$$

Из (2.5) видно, что размерность $\xi(t)$ совпадает с размерностью $\overset{\circ}{\xi}(t)$.

Однако математическое ожидание не дает полного представления о случайном процессе. Поэтому вводится еще одна вероятностная характеристика случайного процесса – корреляционная функция.

2.3. Корреляционная функция и ее свойства

Рассмотрим два случайных процесса, заданных множеством своих реализаций $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$ (рис. 2).

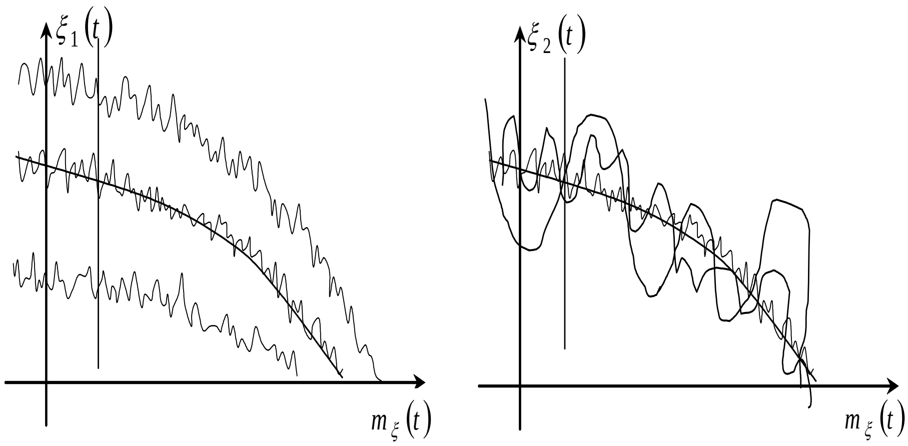

Рис. 2. Множество реализаций случайных процессов

У этих случайных функций, примерно, одинаковое математическое ожидание и дисперсия, однако характер их протекания существенно различен.

Этот пример показывает, что для характеристики случайных процессов недостаточно знать математическое ожидание и дисперсию и необходимо ввести дополнительную вероятностную характеристику случайного процесса.

Чтобы учесть степень зависимости между сечениями случайных функций, соответствующих различным значениям t, как и для системы случайных величин рассмотрим корреляционные моменты значений случайного процесса, соответствующие всем возможным значениям параметра t.

Определение. *Корреляционной функцией случайного процесса* $\xi(t)$ называется неслучайная функция $K_\xi(t_1,t_2)$ двух переменных t_1 и t_2, которая для любой пары (t_1,t_2) совпадает с корреляционным моментом, соответствующим двум сечениям случайного процесса (называется автоковариационной функцией).

$$K_\xi(t_1,t_2)=K_{\xi(t_1),\xi(t_2)}=M\left[\left(\xi(t_1)-m_\xi(t_1)\right)\left(\xi(t_2)-m_\xi(t_2)\right)\right]=M\left[\overset{\circ}{\xi}(t_1)\cdot\overset{\circ}{\xi}(t_2)\right], \quad (2.7)$$

где $\overset{\circ}{\xi}(t)$ – центрированный случайный процесс.

Таким образом,

$$K_\xi(t_1,t_2)=\begin{cases}\sum\limits_i\sum\limits_k\left(x_i(t_1)-m_\xi(t_1)\right)\left(x_k(t_2)-m_\xi(t_2)\right)p_{ik}\\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(x_1-m_\xi(t_1)\right)\left(x-m_\xi(t_2)\right)f\left(x_1,x_2;t_1,t_2\right)dx_1dx_2\end{cases} \quad (2.8)$$

где $x_i(t_1)$ è $x_k(t_2)$ – сечения случайных процессов в точках t_1 и t_2; $p_{ik}=P\left\{\xi(t_1)=x_i,\xi(t_2)=x_k\right\}$ – вероятность наступления k-ой реализации; $f\left(x_1,x_2;t_1,t_2\right)$ – двумерная плотность распределения случайного процесса $\xi(t)$.

Если $t_1=t_2$, то корреляционная функция превращается в дисперсию случайной величины.

Корреляционная функция обладает рядом свойств

С в о й с т в о 1

$$K_\xi(t,t)=D_\xi(t). \quad (2.9)$$

Доказательство

$$K_\xi(t,t)=M\left[\left(\xi(t_1)-m_\xi(t_1)\right)\left(\xi(t_2)-m_\xi(t_2)\right)\right]=M\left[\xi(t_1)-m_\xi(t_1)^2\right]=M\left[\left(\overset{\circ}{\xi}(t_1)^2\right)\right]=$$

$=D_\xi(t)$, т.е. $K_\xi(t,t)=D_\xi(t)$.

С в о й с т в о 2 (симметричность)

$$K_\xi(t_1,t_2)=K_\xi(t_2,t_1). \quad (2.10)$$

Доказательство

$$K_\xi(t_1,t_2)=M\left[\overset{\circ}{\xi}(t_1)\cdot\overset{\circ}{\xi}(t_2)\right]=M\left[\overset{\circ}{\xi}_2(t_2)\cdot\overset{\circ}{\xi}_1(t_1)\right]=K_\xi(t_2,t_1).$$

Если изобразить корреляционную функцию $K_\xi(t_2,t_1)$ в виде поверхности, то эта поверхность будет симметрична относительно вертикальной плоскости, проходящей через биссектрису угла (см. рис. 3).

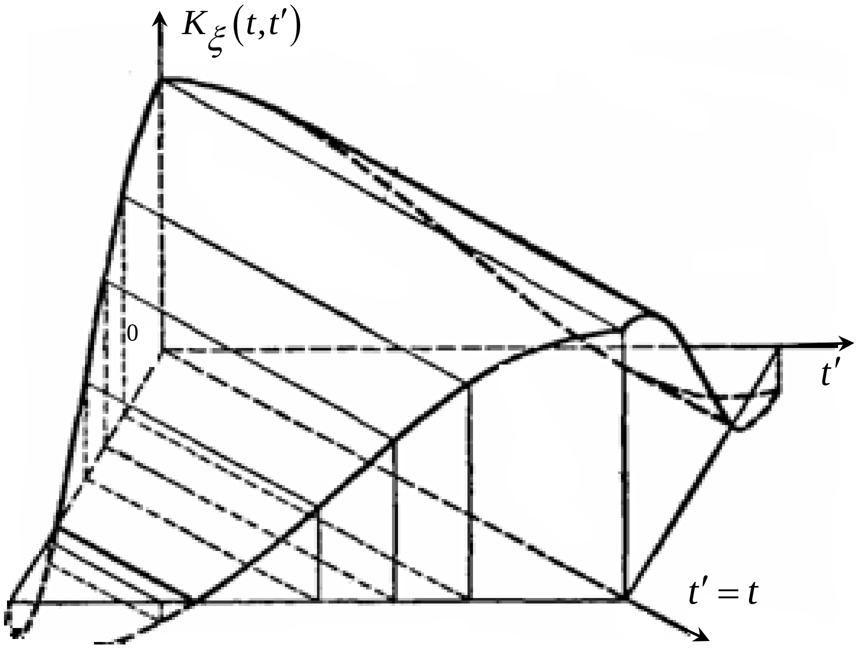

Рис. 3. Корреляционная функция в виде поверхности

С в о й с т в о 3

$$\left|K_\xi(t_1,t_2)\right| \le \sigma_\xi(t_1)\cdot\sigma_\xi(t_2). \qquad (2.11)$$

Доказательство

$$\eta = \left(\overset{\circ}{\xi}(t_1)\cdot + \overset{\circ}{\lambda}\xi(t_2)\right)^2; M\eta \ge 0\,..$$

$$M\eta = \sigma_\xi^2(t_1) + 2\lambda K_\xi(t_1,t_2) + \lambda\sigma_3^2(t_2);\ D<0.$$

Следовательно,

$$\left[K_\xi(t_1,t_2)\right]^2 - \sigma_\xi^2(t_1)\sigma_\xi^2(t_2) \le 0\,. \qquad (2.12)$$

Часто вместо корреляционной функции $K_\xi(t_1,t_2)$ рассматривается нормированная безразмерная корреляционная функция $R_\xi(t_1,t_2)$ - *нормированная автокорреляционная функция* или просто – *автокорреляция*

$$R_\xi(t_1,t_2)=\frac{K_\xi(t_1,t_2)}{\sigma_\xi(t_1)\cdot\sigma_\xi(t_2)}. \tag{2.13}$$

Свойства автокорреляции

С в о й с т в о 1.

$$R_\xi(t,t)=1. \tag{2.14}$$

Доказательство

$$R_\xi(t,t)=\frac{K_\xi(t,t)}{\sigma_\xi(t)\cdot\sigma_\xi(t)}=\frac{D_\xi(t)}{D_\xi(t)}=1.$$

С в о й с т в о 2.

$$R_\xi(t_1,t_2)=R_\xi(t_2,t_1). \tag{2.15}$$

С в о й с т в о 3.

$$\left|R_\xi(t_1,t_2)\right|\le 1. \tag{2.16}$$

R является *аналогом коэффициента корреляции*, т.е. эта функция несет информацию о степени зависимости двух случайных величин – двух сечений случайного процесса.

Пример 1. Пусть $\xi(t)=\gamma\cos\omega t$ случайный процесс, где γ - случайная величина, у которой $M\gamma=0$; $D\gamma=\sigma^2$, а $\omega=const$. Вычислить математическое ожидание, дисперсию и корреляционную функцию $\xi(t)$.

Решение

$$M(t)=M\xi(t)=\cos\omega t(M\gamma)=0;$$

$$D(t)=D\xi(t)=D(\gamma\cos\omega t)=\cos^2\omega t D\gamma=\sigma^2\cos^2\omega t;$$

$$K_\xi(t_1,t_2)=M\left[\left(\xi(t_1)-m_\xi(t_1)\right)\left(\xi(t_2)-m_\xi(t_2)\right)\right]=M\left(\gamma^2\cos\omega t_1\cdot\cos\omega t_2\right).$$

Пример 2. Пусть $\xi(t)=\alpha\cos\omega t+\beta\sin\omega t$, где α и β – случайные величины, для которых верны следующие равенства:

$$M\alpha=M\beta=0;\, D\alpha=D\beta=\sigma^2;\; K\left(\overset{\circ}{\alpha}\cdot\overset{\circ}{\beta}\right)=M\left(\alpha\beta\right)=0.$$

Найти вероятностные характеристики данного случайного процесса.

Решение

$$M\left[\xi(t)\right]=\cos\omega t\cdot M\alpha+\sin\omega t\cdot M\beta=0.$$

$$K_\xi\left(t_1,t_2\right)=M\left[\left(\xi\left(t_1\right)-m_\xi\left(t_1\right)\right)\left(\xi\left(t_2\right)-m_\xi\left(t_2\right)\right)\right]=M\left[\overset{\circ}{\xi}\left(t_1\right)\cdot\overset{\circ}{\xi}\left(t_2\right)\right]=$$

$$=M\left[\left(\alpha\cos\omega t_1+\beta\sin\omega t_1\right)\cdot\left(\alpha\cos\omega t_2+\beta\sin\omega t_2\right)\right]=$$

$$=M\left[\alpha^2\cos\omega t_1\cos\omega t_2+\alpha\beta\left(\cos\omega t_1\sin\omega t_2+\sin\omega t_1\cos\omega t_2\right)+\right.$$

$$\left.+\beta^2\sin\omega t_1\sin\omega t_2\right]=$$

$$=\alpha^2\cos\omega t_1\cos\omega t_2 M\left(\alpha^2\right)+\sin\omega\left(t_1+t_2\right)M\left(\alpha\beta\right)+\sin\omega t_1\sin\omega t_2 M\left(\beta^2\right)=$$

$$=\cos\omega t_1\cos\omega t_2 D\alpha+\sin\omega t_1\sin\omega t_2 D\beta=\sigma^2\cos\omega\left(t_1-t_2\right)$$

Таким образом, $K_\xi\left(t_1,t_2\right)=\sigma^2\cos\omega\left(t_1-t_2\right)$. Тогда

$$D_\xi(t)=K_\xi\left(t_1,t_2\right)=\sigma^2.$$

Пример 3. Пусть известна функция плотности распределения второго порядка

$$f_2\left(x,y;t_1,t_2\right)=\frac{1}{2\pi}\exp\left(-\frac{\left(x+\sin t_1\right)^2+\left(y+\sin t_2\right)^2}{2}\right).$$

Найти $m_\xi(t)$; $D_\xi(t)$; $K_\xi\left(t_1,t_2\right)$. Выяснить, при каких условиях $x_1(t)$ и $x_2(t)$ независимы.

Решение

$$f_1(x,t)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_2\left(x,y;t_1,t_2\right)=\frac{1}{2\pi}\exp\left(-\frac{\left(x+\sin t\right)^2}{2}\right)\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-\frac{\left(y+\sin t_2\right)^2}{2}\right)dy=$$

$$=\left\{u=y+\sin t_2\right\}=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\exp\left(-\frac{\left(x+\sin t\right)^2}{2}\right)\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-\frac{\left(y+\sin t_2\right)^2}{2}\right)dy=\left\{u=y+\sin t_2\right\}=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\exp\left(-\frac{\left(x+\sin t\right)^2}{2}\right)\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{u^2}{2}}du=.$$

Следовательно, сечения $x(t_1)$ è $x(t_2)$ при $t_1\neq t_2$ независимы.

$$m_\xi(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot f_1(x,t)dx=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\exp\left(-\frac{\left(x+\sin t\right)^2}{2}\right)\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-\frac{\left(y+\sin t_2\right)^2}{2}\right)dy=\left\{u=y+\sin t_2\right\}=$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{u^2}{2}}du-\sin t\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{u^2}{2}}du\right)=-\sin t,$$

$$K_\xi(t_1,t_2)=M\left[\overset{\circ}{\xi}(t_1)\cdot\overset{\circ}{\xi}(t_2)\right]=M\left[\left(\xi(t_1)\xi(t_2)\right)-m_\xi(t_1)m_\xi(t_2)\right]=$$
$$=M\left(\xi(t_1)\right)M\left(\xi(t_2)\right)-m_\xi(t_1)m_\xi(t_2)=\sin t_1\sin t_2-\sin t_1\sin t_2=0$$

при $t_1\neq t_2$, т.к. сечения $x(t_1)$ è $x(t_2)$ независимы.

Если $t_1=t_2$, то

$$K_\xi(t,t)=D_\xi(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f_1(x,t)dx-m_\xi^2=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}x^2\exp\left(-\frac{\left(x+\sin t\right)^2}{2}\right)dx=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}u^2e^{-\frac{u^2}{2}}du-2\sin t\int_{-\infty}^{+\infty}ue^{-\frac{u^2}{2}}du+\sin^2 t\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{u^2}{2}}du\right)-\sin t=1.$$

РАЗДЕЛ 3. КОРРЕЛЯЦИОННЫЙ АНАЛИЗ

3.1. Моментные функции

Исчерпывающие характеристики случайной функции в широком смысле дает семейство совместных распределений. Однако во многих случаях представляет интерес более сжатая характеристика распределения, отражающая некоторые свойства случайной функции. Кроме того, решение многих теоретико-вероятностных задач зависит только от небольшого числа параметров, характеризующих совместные распределения. Наиболее важными характеристиками совместных распределений являются их моменты. В теории случайных функций роль моментов распределения играют моментные функции.

Определение. *Моментными* $m_{j_1,j_2,..,j_S}(\theta_1,\theta_2,..,\theta_S)$ случайной функции $\xi(\theta)$, $\theta\in\Theta$ называются функции

$$m_{j_1,j_2,..,j_S}(\theta_1,\theta_2,..,\theta_S)=$$

$$=M\left(\left[\xi(\theta_1)\right]^{j_1}\cdot\left[\xi(\theta_2)\right]^{j_2}\cdot\ldots\cdot\left[\xi(\theta_S)\right]^{j_S}\right),\ j_k>0,\ k=1,2,\ldots,S \qquad (3.1)$$

если математическое ожидание в первой части равенства имеет смысл при всех $\theta_j\in\Theta,\ j=1,2,\ldots,S$. Величина $q=j_1+j_2+\ldots+j_S$ называется порядком момента функции.

Определение. Случайная величина $\xi(\theta)$, $\theta\in\Theta$ принадлежит классу $L_p(\Theta)$ $\left(\xi(\theta)\in L_p(\Theta)\right)$, если $M\left|\xi(\theta)\right|^p<\infty$ для любого $\theta\in\Theta$.

Теорема 1. Если $\xi(\theta)\in L_p(\Theta)$, то моментные функции порядка q конечны для всех $q\le p$ (см. [7] стр.17).

Если известна характеристическая функция совместного распределения величин $\xi(\theta_1),\ldots,\xi(\theta_S)$

$$\psi(\theta_1,...,\theta_S,\lambda_1,...,\lambda_S) = M\cdot\exp\left(i\cdot\sum_{k=1}^{S}\lambda_k\xi(\theta_k)\right),$$

то моментные функции с целочисленными индексами могут быть найдены с помощью дифференцирования. Действительно,

$$\frac{\partial^q\psi}{\partial\lambda_1^{j_1}...\partial\lambda_S^{j_s}}\Big|_{\lambda_1=\lambda_2=...=0} = \mathrm{i}^q\cdot M\left(\left[\xi\left(\theta_1\right)\right]^{j_1}\cdot...\cdot\left[\xi\left(\theta_S\right)\right]^{j_S}\right)=$$

$$=i^q\cdot m_{j_1...j_S}\left(\theta_1,...,\theta_S\right) \qquad (3.2)$$

– обобщение характеристической функции на случай любого случайного процесса. Случайная функция порождает случайный вектор произвольной размерности, в данном случае не более q, причем, дифференцирование под знаком математического ожидания, во всяком случае, законно для всех $q=\sum_{k=1}^{S}j_k\le p$, если $\xi\left(\theta\right)\in L_p\left(\Theta\right)$. Точное обращение этого утверждения имеется только для моментов функций с четными индексами (см. [7] стр. 18,19,20).

Теорема 2. Если характеристическая функция $\psi\left(\theta_1,...,\theta_S,\lambda_1,...,\lambda_S\right)$ p раз дифференцируема (p – четное), то существуют моменты функции порядка $q\le p$, и они могут быть вычислены по формуле (3.2).

Кроме моментных функций, часто рассматриваются центральные моменты функции:

$$\mu_{j_1...j_S}\left(\theta_1,...,\theta_S\right)=M\left(\left[\xi\left(\theta_1\right)-m_1\right]^{j_1}...\left[\xi\left(\theta_S\right)-m_1\left(\theta_S\right)\right]^{j_S}\right)=$$

$$=M\left(\overset{o}{\xi}\left(\theta_1\right)^{j_1};\overset{o}{\xi}\left(\theta_2\right)^{j_2};...;\overset{o}{\xi}\left(\theta_S\right)^{j_S}\right), \qquad (3.3)$$

которые являются моментными функциями центрированной случайной функции $\xi_1\left(\theta\right)=\xi\left(\theta\right)-m_1\left(\theta\right)$, имеющей при любом $\theta\in\Theta$ математическое ожидание, равное 0.

Среди моментных функций особое значение имеют функции первых двух порядков

$$m(\theta)=m_1(\theta)=M\xi(\theta), \tag{3.4}$$

$$K(\theta_1,\theta_2)=\mu_{j_1 j_2}(\theta_1,\theta_2)=M\left(\left[\xi(\theta_1)-m(\theta_1)\right]\cdot\left[\xi(\theta_2)-m(\theta_2)\right]\right). \tag{3.5}$$

Функция $m(\theta)$ называется средним значением, а $K(\theta_1,\theta_2)$ – корреляционной функцией. При $\theta_1=\theta_2=\theta$ корреляционная функция дает дисперсию $\sigma^2(\theta)$ величины $\xi(\theta)$, $K(\theta,\theta)=\sigma^2(\theta)$. Для стационарного процесса $(\theta=T)$, очевидно, что

$$m(t)=m=const, \tag{3.6}$$

$$K(t_1,t_2)=K(t_1-t_2,\theta)=K(t_1-t_2)=K(\tau). \tag{3.7}$$

Функция $K(t)=K(t_1+t,t_1)$ также называется *корреляционной функцией стационарного процесса*. Если для некоторого процесса выполняются равенства (3.6) и (3.7), то отсюда еще не следует, что *процесс стационарный***.**

Чаще встречаются задачи, решение которых зависит только от моментов первых двух порядков случайной функции $\xi(t)$. Для данных задач условие стационарности процесса сводится к условиям (3.6) и (3.7). Поэтому естественно рассмотреть класс процессов, введенных Хинчиным А. Я. в рамках корреляционной теории.

Определение. Случайный процесс $\xi(t)$ называется *стационарным в широком смысле*, если:

1) $M\xi^2(t)<\infty$;

2) $M(\xi(t))=m=const$ не зависит от времени;

3) второй смешанный центрированный момент – функция, зависящая только от разности (t_1-t_2):

$$M([\xi(t_1)-m]\cdot[\xi(t_2)-m])=K(t_1-t_2)=\operatorname{cov}(\xi(t_1+n),\xi(t_1)).$$

Для стационарного в широком смысле процесса дисперсия σ^2 случайной величины $\xi(t)$ не зависит от t. Более детально стационарные случайные процессы будут рассмотрены позже.

3.2. Коррелированные и некоррелированные случайные процессы

Определение. Величина

$$r(\theta_1,\theta_2)=\frac{K(\theta_1,\theta_2)}{\sigma(\theta_1)\cdot\sigma(\theta_2)}=\frac{K(\theta_1,\theta_2)}{\sqrt{K(\theta_1,\theta_1)\cdot K(\theta_2,\theta_2)}}$$

называется *коэффициентом корреляции* случайных функций $\xi(\theta_1)$ и $\xi(\theta_2)$.

Если $\xi(\theta_1)$ и $\xi(\theta_2)$ независимы, то коэффициент корреляции равен нулю. Обратное, вообще говоря, неверно. Все же в важном частном случае, когда случайные величины $\xi(\theta_1)$ и $\xi(\theta_2)$ имеют совместное нормальное распределение

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{x-m_x}{\sigma_x}\right)^2-\right.\right.$$

$$\left.\left.-2q_{xy}\left(\frac{x-m_x}{\sigma_x}\right)\left(\frac{y-m_y}{\sigma_y}\right)+\left(\frac{y-m_y}{\sigma_y}\right)^2\right]\right\}=\{\rho=0\}\approx f_1(x)\,f_2(y),$$

из равенства нулю коэффициента корреляции или, что то же самое, корреляционной функции $K(\theta_1,\theta_2)$ следует, что величины $\xi(\theta_1)$ и $\xi(\theta_2)$ независимы. В общем случае две случайные величины ξ и η с конечными моментами второго порядка, удовлетворяющие условию

$$K_{\xi,\eta}=M[(\xi-M\xi)(\eta-M\eta)]=0,$$

называются *некоррелированными*.

В тех разделах теории, которые связаны только с моментами первого и второго порядков, вообще понятие некоррелированности заменяет понятие независимости. Что же касается коэффициента корреляции пары случайных величин, то он является мерой линейной связи между ними, т.е. коэффициент корреляции показывает, с какой точностью одна случайная величина может быть линейно выражена через другую. Т.е. проверкой независимости будем считать равенство $r\left(\theta_1,\theta_2\right)=0$.

Пример. Примем за меру погрешности δ приближенного равенства $\xi = a\eta + b$, где a и b постоянные числа, величину

$$\delta = \sqrt{M[\xi-(a\eta+b)]^2}\,.$$

Тогда

$$\delta^2 = M[(\xi - M\xi) - a(\eta - M\eta) + M(\xi - aM\eta - b)]^2 = D\xi + a^2 D\eta +$$

$$+(M\xi - aM\eta - b)^2 - 2aK_{\xi h} =$$

$$=\left(a\sigma_\eta - \frac{K_{\xi\eta}}{\sigma_\eta}\right)^2 + \sigma_\xi^2(1-r_{\xi\eta}^2) + (M\xi - aM\eta - b)^2\,.$$

$$\xi-(a\eta+b) = \xi - M\xi - a\eta + aM\eta + M\xi - aM\eta - b = (\xi - M\xi) - a(\eta - M\eta) +$$
$$+M(\xi - aM\eta - b)\,.$$

$$M(\xi-(a\eta+b))^2 = M[(\xi-M\xi)^2 + a^2(\eta-M\eta)^2 + M(\xi - aM\eta - b)^2 -$$

$$-2a(\xi-M\xi)(\eta-M\eta) + 2(\xi-M\xi)\cdot M(\xi-aM\eta-b) -$$

$$-2a(\eta-M\eta)\cdot M(\xi-aM\eta-b) = D\xi + a^2 D\eta + (M\xi - aM\eta - b)^2 - 2aK_{\xi\eta} =$$

$$= a^2 D\eta - 2aK_{\xi\eta} + \frac{K_{\xi\eta}^2}{\sigma_\eta^2} + \sigma_\xi^2 - \sigma_\xi^2 \cdot \frac{K_{\xi\eta}^2}{\sigma_\xi^2\sigma_\eta^2} + (M\xi - aM\eta - b)^2 =$$

$$= (a\sigma_\eta)^2 - 2(a\sigma_\eta)\left(\frac{K_{\xi\eta}}{\sigma_\eta}\right)^2 + \left(\frac{K_{\xi\eta}}{\sigma_\eta}\right)^2 + \sigma_\eta^2(1-r_{\xi\eta}^2) + (M\xi - aM\eta - b)^2 =$$

$$=\left(a\sigma_\eta - \frac{K_{\xi\eta}}{\sigma_\eta}\right)^2 + \sigma_\xi^2(1-r_{\xi\eta}^2) + (M\xi - aM\eta - b)^2\,.$$

Это выражение достигает минимума при

$$a\sigma_\eta = \frac{K_{\xi\eta}}{\sigma_\eta} \text{ или } a = \frac{K_{\xi\eta}}{\sigma_\eta^2} = \frac{\sigma_\xi}{\sigma_\eta} \cdot r_{\xi\eta}$$

и

$$b = M\xi - aM\eta = m_\xi - \frac{\sigma_\xi}{\sigma_\eta} \cdot r_{\xi\eta} \cdot m_\eta,$$

и его минимальное значение равно

$$\min \delta^2 = \sigma_\xi^2 (1 - r_{\xi\eta}^2),$$

где $\sigma^2 \geq \sigma_\xi^2 (1 - r_{\xi\eta}^2)$.

Таким образом, чем больше по абсолютной величине $r_{\xi\eta}$, с тем большей точностью одна из величин может быть выражена от другой в виде линейной функции, причем коэффициенты линейной регрессии получены в явном виде.

РАЗДЕЛ 4. ВЕКТОРНЫЙ И КОМПЛЕКСНЫЙ СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ

4.1. Векторный случайный процесс

Набор случайных процессов $\xi_1(t),\ldots,\xi_n(t)$ можно интерпретировать как вектор $\bar{\xi}(t)$, компоненты которого есть случайные процессы, и записывать в виде

$$\bar{\xi}(t)=\{\xi_1(t),\ldots,\xi_n(t)\}. \tag{4.1}$$

Характеристики векторного процесса также являются векторами

$$\bar{m}_{\bar{\xi}}(t)=\{m_{\xi_1}(t),\ldots,m_{\xi_n}(t)\}, \tag{4.2}$$

$$\bar{D}_{\bar{\xi}}(t)=\{D_{\xi_1}(t),\ldots,D_{\xi_n}(t)\}, \tag{4.3}$$

где $\bar{m}_{\bar{\xi}}(t)$ – математическое ожидание векторного случайного процесса, а $m_{\xi_i}(t)$ – математическое ожидание *i*-ой компоненты. Аналогично и для дисперсии.

Информацию о связи между компонентами векторного случайного процесса несет корреляционная матрица *K*, каждый элемент которой - функция двух переменных t_1 и t_2

$$K(t_1,t_2)=\begin{pmatrix} K_{\xi_1}(t_1,t_2) & K_{\xi_1\xi_2}(t_1,t_2) & \cdots & K_{\xi_1\xi_n}(t_1,t_2) \\ K_{\xi_2\xi_1}(t_1,t_2) & K_{\xi_2}(t_1,t_2) & \cdots & K_{\xi_2\xi_n}(t_1,t_2) \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots \\ K_{\xi_n\xi_1}(t_1,t_2) & K_{\xi_n\xi_2}(t_1,t_2) & \cdots & K_{\xi_n}(t_1,t_2) \end{pmatrix}, \tag{4.4}$$

где

$$K_{\xi_i}(t_1,t_2)=M(\overset{\circ}{\xi}_i(t_1)\cdot\overset{\circ}{\xi}_i(t_2)) \tag{4.5}$$

– корреляционная функция случайного процесса $\forall i=\overline{1,n}$, а

$$K_{\xi_i\xi_j}(t_1,t_2)=M(\overset{\circ}{\xi}_i(t_1)\cdot\overset{\circ}{\xi}_j(t_2)) \qquad (4.6)$$

– взаимная корреляционная функция между двумя случайными процессами $\xi_i(t_1)$ и $\xi_j(t_2)$. В общем случае матрица не является симметрической, т.к.

$$K_{\xi_i\xi_j}(t_1,t_2)=K_{\xi_j\xi_i}(t_2,t_1)\ \overset{\text{â î áù åì}}{\neq}\ K_{\xi_j\xi_i}(t_1,t_2).$$

Рассмотрим двумерный векторный случайный процесс $\bar{\zeta}(t)=\{\xi(t),\eta(t)\}$, т.е. $n=2$. Тогда имеем

$$m_{\bar{\zeta}}(t)=\{m_\xi(t),m_\eta(t)\}, \qquad (4.7)$$

$$D_{\bar{\zeta}}(t)=\{D_\xi(t),D_\eta(t)\}, \qquad (4.8)$$

$$K(t_1,t_2)=\begin{pmatrix} K_\xi(t_1,t_2) & K_{\xi,\eta}(t_1,t_2) \\ K_{\eta,\xi}(t_1,t_2) & K_\eta(t_1,t_2)\end{pmatrix}, \qquad (4.9)$$

где

$$K_{\xi\eta}(t_1,t_2)=M(\overset{\circ}{\xi}(t_1)\cdot\overset{\circ}{\xi}(t_2)). \qquad . \qquad (4.10)$$

(4.10) – взаимная корреляционная функция двух процессов $\xi(t)$ и $\eta(t)$.

Если задана плотность $f_{\xi\eta}(x,y;t_1,t_2)$ совместного распределения случайной величины $\xi(t_1)$ и $\eta(t_2)$ при фиксированных t_1,t_2, то $K_{\xi\eta}(t_1,t_2)$ представляет собой корреляционный момент, а именно

$$K_{\xi\eta}(t_1,t_2)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(x-m_\xi(t_1))(y-m_\eta(t_2))\,f_{\xi\eta}(x,y;t_1,t_2)dxdy. \qquad (4.11)$$

Свойства корреляционной функции векторного процесса

С в о й с т в о 1

$$K_{\xi\xi}(t_1,t_2)=K_\xi(t_1,t_2). \qquad (4.12)$$

Доказательство

В равенстве (4.10) положим $\xi = \eta$, тогда

$$K_{\xi\xi}(t_1,t_2) = M[\overset{\circ}{\xi}(t_1),\overset{\circ}{\xi}(t_2)] = K_{\xi}(t_1,t_2),$$

что и требовалось доказать.

Если взаимно корреляционная функция двух случайных процессов $K_{\xi\eta}(t_1,t_2)$ равна нулю для любых t_1,t_2, т.е.

$$K_{\xi\eta}(t_1,t_2) = 0,\ \forall t_1,t_2, \tag{4.13}$$

то случайные процессы $\xi(t)$ и $\eta(t)$ называются *некоррелированными*.

Свойство 2

$$K_{\xi+\eta}(t_1,t_2) = K_{\xi}(t_1,t_2) + K_{\xi\eta}(t_1,t_2) + K_{\eta\xi}(t_1,t_2) + K_{\eta}(t_1,t_2) \tag{4.14}$$

Доказательство

Сначала покажем, что

$$(\xi(t)+\eta(t))^{\circ} = \overset{\circ}{\xi}(t) + \overset{\circ}{\eta}(t) \tag{4.15}$$

$$(\xi(t)+\eta(t))^{\circ} = \xi(t)+\eta(t) - M(\xi(t)+\eta(t)) = \xi(t)+\eta(t) - M_{\xi}(t) - M_{\eta}(t) =$$

$$= \xi(t) - M_{\xi}(t) + \eta(t) - M_{\eta}(t) = \overset{\circ}{\xi}(t) + \overset{\circ}{\eta}(t).$$

Далее, используя формулу (4.10) и свойства математического ожидания, получаем

$$K_{\xi+\eta}(t_1,t_2) = M[(\xi(t_1)+\eta(t_1))^{\circ}\cdot(\xi(t_2)+\eta(t_2))^{\circ}] =$$

$$= M[(\overset{\circ}{\xi}(t_1)+\overset{\circ}{\eta}(t_1))\cdot(\overset{\circ}{\xi}(t_2)+\overset{\circ}{\eta}(t_2))] = M[\overset{\circ}{\xi}(t_1)\cdot\overset{\circ}{\xi}(t_2)] + M[\overset{\circ}{\eta}(t_1)\cdot\overset{\circ}{\eta}(t_2)] +$$

$$+ M[\overset{\circ}{\eta}(t_1)\cdot\overset{\circ}{\xi}(t_2)] + M[\overset{\circ}{\xi}(t_1)\cdot\overset{\circ}{\eta}(t_2)] =$$

$$= K_{\xi}(t_1,t_2) + K_{\eta}(t_1,t_2) + K_{\xi\eta}(t_1,t_2) + K_{\eta\eta}(t_1,t_2),$$

что и требовалось доказать.

Свойство 3

Если случайные процессы $\xi(t)$ и $\eta(t)$ некоррелированные, то корреляционная функция их суммы равна сумме корреляционных функций

$$K_{\xi+\eta}(t_1,t_2) = K_\xi(t_1,t_2) + K_\eta(t_1,t_2). \tag{4.16}$$

Используя определение некоррелированных двух случайных процессов (4.13), получим (4.16) из (4.14).

Следствие. Для некоррелированных случайных процессов дисперсия суммы равна сумме дисперсий, то есть если $K_{\xi\eta}(t_1,t_2) = 0$, то

$$M_{\xi+\eta}(t) = M_\xi(t) + M_\eta(t),\ D_{\xi+\eta}(t) = D_\xi(t) + D_\eta(t). \tag{4.17}$$

Доказательство

Из свойства 1 корреляционной функции случайного процесса $K_\xi(t,t) = D_\xi(t)$ и (4.16), получаем

$$D_{\xi+\eta}(t) = K_{\xi+\eta}(t,t) = K_\xi(t,t) + K_\eta(t,t) = D_\xi(t) + D_\eta(t).$$

4.2. Комплексный случайный процесс

Комплексные случайные процессы в основном встречаются в задачах радиотехники и вообще связаны с волновыми процессами.

Пусть $\zeta(t) = \xi(t) + i \cdot \eta(t)$.

По определению

$$m_\zeta = m_\xi(t) + i \cdot m_\eta(t).$$

Рассмотрим свойства комплексного случайного процесса.

1) $M_{\bar{\zeta}} = \overline{M(\zeta)}$

Доказательство

$$M_{\bar{\zeta}}(t) = M(\bar{\zeta}(t)) = M(\xi(t) - i\eta(t)) = M(\xi(t)) - i \cdot M(\eta(t)) =$$

$$= \overline{M(\xi(t)) + iM(\eta(t))} = \overline{M(\zeta(t))}.$$

2) $\overset{\circ}{\zeta}(t) = \overset{\circ}{\xi}(t) + i \cdot \overset{\circ}{\eta}(t)$

Доказательство

$$\overset{\circ}{\zeta}(t) = \zeta(t) - M(\zeta(t)) = \xi(t) + i\eta(t) - M(\xi(t)) - iM(\eta(t)) = \overset{\circ}{\xi}(t) + i\overset{\circ}{\eta}(t).$$

Корреляционная функция комплексного случайного процесса имеет вид:

$$K_\zeta(t_1, t_2) = M[\overset{\circ}{\zeta}(t_1) \cdot \overline{\overset{\circ}{\zeta}}(t_2)]. \qquad (4.18)$$

Можно доказать, что

$$K_\zeta(t_1, t_2) = M[\overset{\circ}{\zeta}(t_1) \cdot \overline{\overset{\circ}{\zeta}}(t_2)] = M[(\overset{\circ}{\xi}(t_1) + i \cdot \overset{\circ}{\eta}(t_1)) \cdot (\overset{\circ}{\xi}(t_2) - i \cdot \overset{\circ}{\eta}(t_2))] =$$

$$= M[(\overset{\circ}{\xi}(t_1) \cdot \overset{\circ}{\xi}(t_2))] + M[(\overset{\circ}{\eta}(t_1) \cdot \overset{\circ}{\eta}(t_2))] +$$

$$+ i \cdot M[(\overset{\circ}{\eta}(t_1) \cdot \overset{\circ}{\xi}(t_2))] - i \cdot M[(\overset{\circ}{\xi}(t_1) \cdot \overset{\circ}{\eta}(t_2))] =$$

$$= K_\xi(t_1, t_2) + K_\eta(t_1, t_2) + i \cdot [K_{\eta\xi}(t_1, t_2) - K_{\xi\eta}(t_1, t_2)]. \qquad (4.19)$$

По определению дисперсии

$$D_\zeta(t) = M[| \overset{\circ}{\zeta}(t) |^2]. \qquad (4.20)$$

Из (4.18) следует $D_\zeta(t) = K_\zeta(t, t)$. Действительно, $|\overset{\circ}{\zeta}|^2 = \overset{\circ}{\zeta} . \overline{\overset{\circ}{\zeta}}$, тогда, согласно (4.20),

$$D_\zeta(t) = M[\overset{\circ}{\zeta}(t) \cdot \overline{\overset{\circ}{\zeta}}(t)] = K_\zeta(t, t).$$

Из (4.19) следует $(t_1 = t_2 = t)$

$$D_\zeta(t) = D_\xi(t) + D_\eta(t).$$

Таким образом, $D_\zeta(t) \geq 0$.

Пример. Пусть $\zeta(t) = \gamma \cdot e^{iwt}$ – случайный процесс, $w = const$ – действительная неслучайная величина, $\gamma = Ae^{i\phi}$, где A – амплитуда, ϕ – сдвиг по фазе, A и φ – независимые случайные величины, $MA = m$, $DA = \sigma^2$, ϕ имеет равномерно распределенная случайная величина на $[0, 2\pi]$, т.е.

$$f_{\phi}(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi} & ,x\in[0,2\pi]\\ 0 & ,x\notin[0,2\pi]\end{cases}.$$

Найти $M_{\zeta}(t)$, $K_{\zeta}(t_1,t_2)$, $D_{\zeta}(t)$.

Решение

Т.к. ϕ и A – независимые, то

1) $M_{\zeta}(t)=M(\gamma\cdot e^{iwt})=M(Ae^{i\phi}\cdot e^{iwt})=e^{iwt}\cdot M(Ae^{i\phi})=$

$$=e^{iwt}\cdot MA\cdot M(e^{i\phi})=me^{iwt}\cdot M(e^{i\phi}).$$

$$M(e^{i\phi})=\int\limits_0^{2\pi}e^{ix}\cdot\frac{1}{2\pi}dx=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}e^{ix}ds=\frac{1}{2\pi i}e^{ix}\Big|_0^{2\pi}=\frac{1}{2\pi}(e^{2\pi\cdot i}-e^0)=0.$$

Таким образом $M_{\zeta}(t)=0$.

2) $\overset{\circ}{\zeta}(t)=\zeta(t)$.

$$K_{\zeta}(t_1,t_2)=M[\overset{\circ}{\zeta}(t_1)\cdot\overline{\overset{\circ}{\zeta}(t_2)}]=M[\zeta(t_1)\cdot\overline{\zeta(t_2)}]=M[\gamma\cdot e^{iwt_1}\cdot\overline{\gamma\cdot e^{iwt_2}}]=$$

$$=M[\gamma\cdot e^{iwt_1}\cdot\bar{\gamma}\cdot e^{-iwt_2}]=e^{iwt_1}\cdot e^{-iwt_2}\cdot M(\gamma\bar{\gamma})=e^{-iw(t_2-t_1)}\cdot M|\gamma|^2,$$

$$|\gamma|=\left|Ae^{iw}\right|=|A|\cdot\left|e^{i\phi}\right|=|A|\ \Rightarrow\ |\gamma|^2=A^2,$$

$$MA^2=DA+[MA]^2=\sigma^2+m^2\ \Rightarrow\ K_{\zeta}(t_1,t_2)=e^{-iw(t_2-t_1)}\cdot(\sigma^2+m^2),$$

3) $t_1=t_2=t\ \Rightarrow D_{\zeta}(t)=K_{\zeta}(t,t)=\sigma^2+m^2$.

РАЗДЕЛ 5. РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Понятие регуляризации подразумевает сужение множества выборочных функций (реализаций случайных процессов) до множества либо непрерывных, либо дифференцированных, либо интегрированных функций. Фактически, ниже будут рассмотрены «элементы случайного анализа», то есть понятие непрерывности, дифференцирования, интегрирования для случайных процессов.

5.1. Непрерывные случайные процессы

Определение. Случайная величина ξ_0 называется *пределом, в смысле среднеквадратического*, случайного процесса $\xi(t)$ при $t \to t_0$, если

$$\lim_{t\to t_0} M\left|\xi(t)-\xi_0\right|^2 = 0 \tag{5.1}$$

или

$$\underset{t\to t_0}{l.i.m.}\,\xi(t) = \xi_0. \tag{5.2}$$

Из сходимости в среднеквадратическом следует сходимость по вероятности, т.е. $\forall\varepsilon > 0$

$$\lim_{t\to t_0} P\{\left|\xi(t)-\xi_0\right| > \varepsilon\} = 0. \tag{5.3}$$

(Обратное неверно).

Докажем равенство

$$\lim_{t\to t_0} M_{\xi}(t) = M_{\xi_0}, \tag{5.4}$$

где ξ_0 – случайная величина, являющаяся предельной для случайного процесса при $t \to t_0$.

Рассмотрим

$$D(\xi(t)-\xi_0)=\{\grave{e}\c{c}\ D_\xi = M\xi^2-(M\xi)^2\} \Rightarrow$$

$$0 \le D[\xi(t)-\xi_0] = M\left|\xi(t)-\xi_0\right|^2_{\to 0} - (M[\xi(t0-\xi_0])^2 \qquad (5.5)$$

Следовательно, при $t \to t_0$ $M[\xi(t)-\xi_0] \underset{t\to 0}{\to} 0$ или $\lim\limits_{t\to t_0} M_\xi(t) = M_{\xi_0}$.

Случайный процесс $\xi(t)$ называется *непрерывным в среднеквадратическом* в точке $t=t_0$, если $\underset{t\to t_0}{l.i.m.}\,\xi(t)=\xi_0$.

Теорема. Чтобы случайный процесс $\xi(t)$ был непрерывен в точке необходимо и достаточно, чтобы были непрерывны функции $m_\xi(t)$ и $K_\xi(t_1,t_2)$.

Доказательство

Необходимость

1) Если $\xi(t)$ – непрерывный случайный процесс, то

$$\lim_{t\to t_0} M\,|\,\xi(t)-\xi_0\,|^2 = 0,$$

или

$$\lim_{\Delta t\to 0} M\left|\xi(t+\Delta t)-\xi(t)\right|^2 = 0 \Rightarrow \lim_{\Delta t\to 0} M\xi(t+\Delta t) = M\xi(t),$$

но это означает непрерывность математического ожидания процесса $\xi(t)$.

2) Рассмотрим приращение $K_\xi(t_1,t_2)$:

$$\left|K_\xi(t_1,t_2)-K_\xi(t_1',t_2')\right| = \left|M[\overset{\circ}{\xi}(t_1)\overset{\circ}{\xi}(t_2)]-[M\,\overset{\circ}{\xi}(t_1')\overset{\circ}{\xi}(t_2')]\right| =$$

$$= \left|M[\overset{\circ}{\xi}(t_1)\overset{\circ}{\xi}(t_2)-\overset{\circ}{\xi}(t_1')\overset{\circ}{\xi}(t_2')]\right| = \left|M[\overset{\circ}{\xi}(t_1)\overset{\circ}{\xi}(t_2)-\overset{\circ}{\xi}(t_1')\overset{\circ}{\xi}(t_2)+\overset{\circ}{\xi}(t_1')\overset{\circ}{\xi}(t_2)-\right.$$

$$\left.-\overset{\circ}{\xi}(t_1')\overset{\circ}{\xi}(t_2')]\right| = \left|M[\overset{\circ}{\xi}(t_2)(\overset{\circ}{\xi}(t_1)-\overset{\circ}{\xi}(t_1'))+\overset{\circ}{\xi}(t_1)(\overset{\circ}{\xi}(t_2)-\overset{\circ}{\xi}(t_2'))]\right| =$$

$$= \left|M[\overset{\circ}{\xi}(t_2)(\overset{\circ}{\xi}(t_1)-\overset{\circ}{\xi}(t_1'))]+M[\overset{\circ}{\xi}(t_1')(\overset{\circ}{\xi}(t_2)-\overset{\circ}{\xi}(t_2'))]\right| \le \left|M[\overset{\circ}{\xi}(t_2)(\overset{\circ}{\xi}(t_1)-\overset{\circ}{\xi}(t_1'))]\right| +$$

$$+\left|M[\overset{\circ}{\xi}(t_1)(\overset{\circ}{\xi}(t_2)-\overset{\circ}{\xi}(t_2'))]\right|,$$

то есть

$$\left|K_\xi(t_1,t_2)-K_\xi(t_1',t_2')\right| \le \left|M[\overset{\circ}{\xi}(t_2)(\overset{\circ}{\xi}(t_1)-\overset{\circ}{\xi}(t_1'))]\right| + \left|M[\overset{\circ}{\xi}(t_1')(\overset{\circ}{\xi}(t_2)-\overset{\circ}{\xi}(t_2'))]\right|.$$

Для любого $\forall\lambda \in R^1$

$$M(\xi+\lambda\cdot\eta)^2 = M\xi^2 + 2\lambda\cdot M(\xi\eta) + \lambda^2 M\eta^2 \ge 0 \Rightarrow$$

$$\left(M(\xi\eta)\right)^2 - (M\xi^2)(M\eta^2) \le 0 \Rightarrow \left|M(\xi\eta)\right| \le \sqrt{M\xi^2\cdot M\eta^2} \Rightarrow$$

$$\left|K_\xi(t_1,t_2)-K_\xi(t_1',t_2')\right| \le \sqrt{M[\overset{0}{\xi}(t_2)]^2}\sqrt{M[\overset{0}{\xi}(t_1)-\overset{0}{\xi}(t_1')]^2} +$$

$$+\sqrt{M[\overset{0}{\xi}(t_1')]^2}\sqrt{M[\overset{0}{\xi}(t_2)-\overset{0}{\xi}(t_2')]^2}.$$

Если $\xi(t)$ – непрерывный случайный процесс, то т.к. $m_\xi(t)$ – непрерывная функция (это уже доказано), $\overset{\circ}{\xi}(t)=\xi(t)-m_\xi(t)$ также непрерывная функция, поэтому, исходя из определения непрерывности $\overset{0}{\xi}(t)$, выполняются условия

$$M[\overset{\circ}{\xi}(t_1)-\overset{\circ}{\xi}(t_1')]^2 \to 0 \text{ при } t_1' \to t_1,$$

$$M[\overset{\circ}{\xi}(t_2)-\overset{\circ}{\xi}(t_2')]^2 \to 0 \text{ при } t_2' \to t_2,$$

отсюда следует

$$.\left|K_\xi(t_1,t_2)-K_\xi(t_1',t_2')\right| \to 0 \text{ при } t_1' \to t_1,\ t_2' \to t_2.$$

Следовательно, $K_\xi(t_1,t_2)$ непрерывна в точке (t_1,t_2) по обеим переменным.

Достаточность. Пусть $m_\xi(t)$ и $K_\xi(t_1,t_2)$ непрерывны. Требуется доказать, что $\xi(t)$ является непрерывным случайным процессом.

$$M\left|\overset{\circ}{\xi}(t+\Delta t)-\overset{\circ}{\xi}(t)\right|^2=M(\overset{\circ}{\xi}(t+\Delta t)^2)+M(\overset{\circ}{\xi}(t)^2)-2M[\overset{\circ}{\xi}(t+\Delta t)\overset{\circ}{\xi}(t)]=$$

$$=K_\xi(t+\Delta t,t+\Delta t)+K_\xi(t,t)-2K_\xi(t+\Delta t,t)\,.$$

Устремим $\Delta t\to 0$ и, используя непрерывность $K_\xi(t_1,t_2)$, получим из предыдущего равенства:

$$K_\xi(t,t)+K_\xi(t,t)-2K_\xi(t,t)=0.$$

Значит, $\overset{\circ}{\xi}(t)$ – непрерывный процесс. Но $\xi(t)=\overset{\circ}{\xi}(t)+m_\xi(t)$, причем, $m_\xi(t)$ -непрерывная функция. Поэтому и $\xi(t)$ – непрерывная функция, что и требовалось доказать.

Следствие. Из доказательства достаточности следует, что для непрерывности случайного процесса достаточны непрерывности $m_\xi(t)$ и $K_\xi(t_1,t_2)$ в точках на прямой $t_1=t_2$.

Замечание. Из непрерывности случайного процесса не вытекает непрерывность всех реализаций этого процесса.

Пример. Имеем обобщенный телеграфный сигнал $\xi(t)=\pm 1$ (рис. 4). Вероятность смены знака на интервале $(t,t+\tau)$ не зависит от того, что происходило вне этого интервала. Вероятность того, что в течение интервала длительностью τ произойдет m смен знака случайной величины ξ:

$$P\{\mu(\tau)=m\}=e^{-\lambda\tau}\cdot\frac{(\lambda\tau)^m}{m!},\ \forall m=\overline{0,\infty},$$

где λ – среднее число перемен значений случайного процесса в единицу времени.

Найти вероятностные характеристики обобщенного телеграфного сигнала и установить непрерывность телеграфного сигнала.

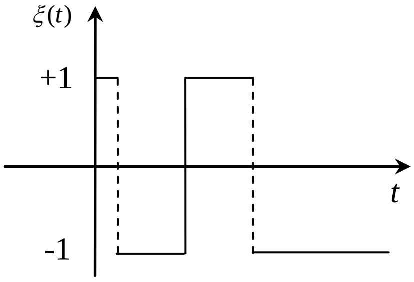

Рис. 4. К примеру

Решение

Любая реализация разрывна.

$\xi(t)$	+1	-1
$P_2(\xi(t))$	1/2	1/2

$$M(\xi(t)) = \sum x_i p_{x_i} = \frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{1}{2}(-1) = 0,$$

$$K_\xi(t_1,t_2) = \{t_1 = t, t_2 = t+\tau\} = K_\xi(t,t+\tau) =$$

$$= M(\overset{\circ}{\xi}(t)\overset{\circ}{\xi}(t+\tau)) = M(\xi(t)\xi(t+\tau)).$$

$\xi(t)\xi(t+\tau)$	+1	-1
$P(\xi(t)\xi(t+\tau))$	P_1	P_2

p_1 – за время τ произошло четное число перемен знака,

p_2 – за то же время произошло нечетное число перемен знака,

$$p_1 = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda\tau}\frac{(\lambda\tau)^{2k}}{(2k)!},\ p_2 = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda\tau}\frac{(\lambda\tau)^{2k+1}}{(2k+1)!} \Rightarrow$$

$$M(\xi(t)\xi(t+\tau)) = 1\cdot p_1 + (-1)\cdot p_2 = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda\tau}\frac{(-\lambda\tau)^k}{k!} = e^{-\lambda\tau}e^{-\lambda\tau} = e^{-2\lambda\tau};$$

$$K_\xi(t,t+\tau) = \begin{cases} e^{-2\lambda\tau}, \tau > 0, t_2 > t_1 \\ e^{-\lambda\tau}, \tau < 0, t_2 < t_1 \end{cases}; \qquad K_\xi(\tau) = e^{-2\lambda|\tau|};$$

$$D_\xi(t) = K_\xi(t,t) = 1.$$

Таким образом, $m_\xi(t)=0$; $D_\xi(t)=1$; $K_\xi(t_1,t_2)=e^{-2\lambda|t_1-t_2|}$. Т.к. $m_\xi(t)$ непрерывно по t, а $K_\xi(t_1,t_2)$ непрерывна при $t_1=t_2$, то и процесс непрерывен. Однако все его реализации разрывны.

5.2. Дифференцирование случайного процесса

Определение. Случайный процесс $\xi(t)$ называется дифференцированным в среднеквадратичном в т. $t=t_0$, если существует среднеквадратический предел вида

$$\underset{\Delta t\to 0}{l.i.m.}\frac{\xi(t_0+\Delta t)-\xi(t_0)}{\Delta t}=\frac{d\xi(t_0)}{dt}. \tag{5.6}$$

Предел (5.6) называют *среднеквадратической производной* от случайного процесса. Если эта производная существует в любой точке t_0 некоторого интервала, то случайный процесс называется дифференцированным на интервале.

Пусть заданы вероятностные характеристики случайного процесса $\xi(t)$. Найдем вероятностные характеристики производной случайного процесса $\frac{d\xi}{dt}$. Найдем математическое ожидание от обеих частей равенства (5.6), используя его свойства:

1) математическое ожидание предела равно пределу математического ожидания;

2) неслучайный множитель может быть вынесен за знак математического ожидания.

Тогда

$$M\left(\frac{d\xi(\tau)}{dt}\right)=\underset{\Delta t\to 0}{l.i.m.}\frac{m_\xi(t+\Delta t)-m_\xi(t)}{\Delta t}=m_\xi'(t), \tag{5.7}$$

т.е. математическое ожидание производной равно производной математического ожидания.

Введем в рассмотрение случайный процесс $\eta(t) = \xi'(t)$. Используя определение центрированного случайного процесса $\overset{\circ}{\xi}(t)$, получаем

$$(\overset{\circ}{\xi}(t))' = (\xi'(t))^{\circ}. \qquad (5.8)$$

Действительно,

$$(\overset{\circ}{\xi}(t))' = (\xi(t) - m_{\xi}(t))' = \xi'(t) - (m_{\xi}(t))' = \xi'(t) - m_{\xi'}(t) = (\xi'(t))^{\circ}.$$

На основании (5.8) можно менять местами операции центрирования случайного процесса и дифференцирования.

Теорема 1. Дифференцируемость математического ожидания случайного процесса $\xi(t)$ и существование второй производной от корреляционной функции есть *необходимое условие дифференцируемости случайного процесса.*

Доказательство

Определим взаимно корреляционные функции для двух случайных процессов $\xi(t)$ и $\eta(t) = \xi'(t)$, принимая во внимание непрерывность корреляционной функции $K_{\xi}(t_1, t_2)$ для непрерывного случайного процесса.

$$K_{\xi\xi'}(t_1, t_2) = M[\overset{\circ}{\xi}(t_1)\overset{\circ}{\xi}(t_2)'] = M\left[\overset{\circ}{\xi}(t_1) \cdot \underset{\Delta t \to 0}{l.i.m.} \frac{\overset{\circ}{\xi}(t_2 + \Delta t) - \overset{\circ}{\xi}(t_2)}{\Delta t}\right] =$$

$$= M\left[\underset{\Delta t \to 0}{l.i.m.} \frac{\overset{\circ}{\xi}(t_1)\overset{\circ}{\xi}(t_2 + \Delta t) - \overset{\circ}{\xi}(t_1)\overset{\circ}{\xi}(t_2)}{\Delta t}\right] =$$

$$= \underset{\Delta t \to 0}{l.i.m.} \frac{1}{\Delta t}\left(M\left[\overset{\circ}{\xi}(t_1)\overset{\circ}{\xi}(t_2 + \Delta t)\right] - M\left[\overset{\circ}{\xi}(t_1)\overset{\circ}{\xi}(t_2)\right]\right) =$$

$$= \underset{\Delta t \to 0}{l.i.m.} \frac{K_{\xi}(t_1, t_2 + \Delta t) - K_{\xi}(t_1, t_2)}{\Delta t} = \frac{\partial K_{\xi}(t_1, t_2)}{\partial t_2}.$$

Итак,

$$K_{\xi\xi'}(t_1,t_2)=\frac{\partial K_\xi(t_1,t_2)}{\partial t_2}. \qquad (5.9)$$

Аналогично можно получить

$$K_{\xi'\xi}(t_1,t_2)=\frac{\partial K_\xi(t_1,t_2)}{\partial t_1}. \qquad (5.10)$$

Перейдем к вычислению корреляционной функции производной случайного процесса. На основании

$$K_{\xi'}(t_1,t_2)=M\left((\overset{\circ}{\xi}(t_1))'(\overset{\circ}{\xi}(t_2))'\right)=M\left((\overset{\circ}{\xi}(t_1))'\cdot \underset{\Delta t\to 0}{l.i.m.}\frac{\overset{\circ}{\xi}(t_2+\Delta t)-\overset{\circ}{\xi}(t_2)}{\Delta t}\right)=$$

$$=M\left(\underset{\Delta t\to 0}{l.i.m.}\frac{(\overset{\circ}{\xi}(t_1))'\overset{\circ}{\xi}(t_2+\Delta t)-(\overset{\circ}{\xi}(t_1))'\overset{\circ}{\xi}(t_2)}{\Delta t}\right)=$$

$$=\underset{\Delta t\to 0}{l.i.m.}\frac{M\left((\overset{\circ}{\xi}(t_1))'\overset{\circ}{\xi}(t_2+\Delta t)\right)-M\left((\overset{\circ}{\xi}(t_1))'\overset{\circ}{\xi}(t_2)\right)}{\Delta t}=$$

$$=\underset{\Delta t\to 0}{l.i.m.}\frac{K_{\xi'\xi}(t_1,t_2+\Delta t)-K_{\xi'\xi}(t_1,t_2)}{\Delta t}=$$

$$=\underset{\Delta t\to 0}{l.i.m.}\frac{1}{\Delta t}\left(\frac{\partial K_\xi(t_1,t_2+\Delta t)}{\partial t_1}-\frac{\partial K_\xi(t_1,t_2)}{\partial t_2}\right)=\frac{\partial^2 K(t_1,t_2)}{\partial t_1\partial t_2}.$$

Итак,

$$K_{\xi'}(t_1,t_2)=\frac{\partial^2 K_\xi(t_1,t_2)}{\partial t_1\partial t_2} \qquad (5.11)$$

Таким образом, доказали теоретически, что дифференцируемость математического ожидания случайного процесса и существование второй производной от корреляционной функции есть необходимое условие дифференцируемости случайного процесса.

Теорема 2. *Достаточное условие дифференцируемости случайного процесса.*

Для того, чтобы случайный процесс $\xi(t)$ был дифференцируем, достаточно, чтобы было дифференцируемо его математическое ожидание $m_{\xi}(t)$ и существовала при $t_1 = t_2$ вторая смешанная производная от $K_{\xi}(t_1,t_2)$.

Пример 1. Показать, что обобщенный телеграфный сигнал не является дифференцируемым.

Решение

$$m_{\xi}(t) = 0\,,\ K_{\xi}(t_1,t_2) = e^{-2\lambda\left|t_2 - t_1\right|}.$$

Найдем $m_{\xi}(t)$ и $K_{\xi}(t_1,t_2)$.

$$m_{\xi'}(t) = \left(m_{\xi}(t)\right)' = 0\,;$$

$$K_{\zeta'}(t_1,t_2) = \frac{\partial^2 K_{\xi}(t_1,t_2)}{\partial t_1 \partial t_2} = -2\lambda\, e^{-2\lambda\,|\,t_2 - t_1|}\operatorname{sgn}(t_2 - t_1)\,.$$

Таким образом $\left.\dfrac{\partial^2 K_{\xi}(t_1,t_2)}{\partial t_1 \partial t_2}\right|_{t_1 = t_2}$ имеет два значения, значит, случайный процесс не дифференцируем.

Пример 2. Будет ли дифференцируемым процесс $\xi(t)$, если $\xi(t) = A\cos(\omega\, t + \phi\,)$, где A и ω неслучайные величины, а ϕ – случайная величина с плотностью распределения

$$f_{\phi}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi},\ x \in [0; 2\pi] \\ 0 \quad\ ,\ \mathrm{x} \notin [0; 2\pi] \end{cases}.$$

Решение

Находим математическое ожидание:

$$M(\xi(t))=M(A\cos(\omega\, t+\phi))=AM(\cos((\omega\, t+\phi)))=\frac{A}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(\omega\, t+x)dx=$$

$$=\frac{A}{2\pi}\sin(\omega\, t+x)\Big|_0^{2\pi}=\frac{A}{2\pi}[\sin(\omega\, t+\phi)-\sin(\omega\, t+\phi)]=0\,.$$

Так как

$$M(\xi(t))=0,$$

то $\xi^{\circ}(t)=\xi(t)$.

По определению $K_{\xi}(t_1,t_2)$ найдем

$$K_{\xi}(t_1,t_2)=M(\xi^{\circ}(t_1)\xi^{\circ}(t_2))=M(\xi(t_1)\xi(t_2))=$$

$$=M(A\cos(\omega\, t_1+\phi)A\cos(\omega\, t_2+\phi))=$$

$$=A^2M(\cos(\omega\, t_1+\phi)\cos(\omega\, t_2+\phi))=\frac{A^2}{2}M(\cos(\omega\,(t_1+t_2)+2\phi)+$$

$$+\cos(\omega(t_1-t_2))=\frac{A^2}{4\pi}\int_0^{2\pi}\cos(\omega(t_1+t_2)+2x)dx+\frac{A^2}{2}\cos(\omega(t_1-t_2))=$$

$$=\frac{A^2}{8\pi}\sin(\omega(t_1+t_2)+2x)\Big|_0^{2\pi}+\frac{A^2}{2}\cos(\omega(t_1-t_2))=\frac{A^2}{2}\cos(\omega(t_1-t_2)),$$

Таким образом, $K_{\xi}(t_1,t_2)=\dfrac{A^2}{2}\cos(\omega(t_1-t_2))$,

$$\left(m_{\xi}(t)\right)'=M(\xi'(t))=0,$$

$$K_{\xi'}(t_1,t_2)=\frac{\partial}{\partial t_1\partial t_2}\left(\frac{A^2}{2}\cos(\omega(t_1-t_2))\right)=\frac{A^2\omega^2}{2}\cos(\omega(t_1-t_2)),$$

при $t_1=t_2$ $K_{\xi'}(t_1,t_2)=D_{\xi}(t)=\dfrac{A^2\omega^2}{2}$, значит, процесс $\xi(t)$ дифференцируем.

5.3. Интегрирование случайного процесса

Рассмотрим неслучайную функцию от двух переменных $A(t,s)$.

Предположим, что $A(t,s)$ кусочно-непререрывная функция по обеим переменным на отрезке $[a,b]$ и случайный процесс $\xi(t)$ непрерывный для любого $t \in [a,b]$. Разобьем $a = s_0 < s_1 < \cdots < s_n = b$, тогда $\Delta s_k = s_k - s_{k-1}$, для любого $k = \overline{1,n}$

Назовем разбиение правильным, если $\delta = \max\limits_{1 \le k \le n} \Delta s_k \to 0$, при $n \to 0$.

Построим сумму вида

$$\sum_{k=1}^{n} A(t,s_k)\xi(s_k)\Delta s_k = s(t_1,\ldots,t_n).$$

Обозначим

$$\eta(t) = \int_a^b A(t,s)\xi(s)ds \qquad (5.12)$$

Определение. $\eta(t)$ называют *интегралом в среднеквадратичном* от случайного процесса $\xi(t)$ (интегральным оператором), если существует предел в смысле среднеквадратичного от интегральной суммы на множестве правильных разбиений

$$\underset{\substack{n\to\infty \\ \delta\to\infty}}{l.i.m.} \sum_{k=1}^{n} A(t,s_k)\xi(s_k)\Delta s_k = \int_a^b A(t,s)\xi(s)ds.$$

Функцию $A(t,s)$ называют *ядром* интегрального оператора. А сам интеграл (5.12) носит название интеграла Стилтьеса.

В частном случае интеграл случайного процесса $\xi(t)$ при условии $A(t,s) = \begin{cases} 1, & t > s \\ 0, & t < s \end{cases}$ примет вид:

$$\eta(t) = \int_a^t \xi(s)ds. \qquad (5.13)$$

Замечание. Существование среднеквадратического предела означает выполнения условия

$$\underset{\substack{n\to\infty \\ \delta\to 0}}{l.i.m.}\, M\left(\left| \eta(t) - \sum_{k=1}^{n} A(t,s_k)\xi(s_k)\Delta s_k \right|^2 \right) = 0.$$

5.4. Характеристики интеграла от случайного процесса

Выразим числовые характеристики случайного процесса $\eta(t)$ через числовые характеристики $\xi(t)$ (формулы (5.12) или (5.13)).

$$M(\eta(t)) = m_\eta(t) = M\left(\int_a^b A(t,s)\xi(s)ds\right) = M\left(\underset{n\to\infty}{l.i.m.}\sum_{k=1}^{n} A(t,s_k)\xi(s_k)\Delta s_k\right) =$$

$$= l.i.m\sum_{k=1}^{n} A(t,s_k)\cdot M\left(\xi(s_k)\right)\Delta s_k =$$

$$= \int_a^b A(t,s)\cdot M\xi(s)ds = \int_a^b A(t,s)\cdot m_\xi(s)ds$$

$$m_\eta(t) = \int_a^b A(t,s)\cdot m_\xi(s)ds \qquad (5.14)$$

В частном случае (5.13)

$$m_\eta(t) = \int_a^t m_\xi(s)ds \qquad (5.15)$$

Таким образом, математическое ожидание интеграла от случайного процесса равно интегралу от математического ожидания.

Найдем корреляционную функцию от случайного процесса $K_\eta(t_1,t_2)$ через $K_\xi(t_1,t_2)$:

$$K_\eta(t_1,t_2) = M\left[\overset{\circ}{\eta}(t_1)\cdot\overset{\circ}{\eta}(t_2)\right] =$$

$$= M\left[\left(\int_a^b A(t_1,s_1)\xi(s_1)ds_1 - \int_a^b A(t_1,s_1)m_\xi(s_1)ds_1\right)\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\left(\int_a^b A(t_2,s_2)\xi(s_2)ds_2 - \int_a^b A(t_2,s_2)m_\xi(s_2)ds_2\right)\right] =$$

$$= M\left[\int_a^b A(t_1,s_1)\left(\xi(s_1) - m_\xi(s_1)\right)ds_1\cdot\int_a^b A(t_2,s_2)\left(\xi(s_2) - m_\xi(s_2)\right)ds_2\right] =$$

$$=M\left[\int_a^b\int_a^b A(t_1,s_1)A(t_2,s_2)\overset{\circ}{\xi}(s_1)\overset{\circ}{\xi}(s_2)ds_1ds_2\right]=\int_a^b\int_a^b A(t_1,s_1)A(t_2,s_2)K_\xi(s_1,s_2)ds_1ds_2.$$

Таким образом

$$K_\eta(t_1,t_2)=\int_a^b\int_a^b A(t_1,s_1)A(t_2,s_2)K_\xi(s_1,s_2)ds_1ds_2. \qquad (5.16)$$

В частном случае:

$$\eta(t)=\int_a^t \xi(s)ds$$

$$K_\eta(t_1,t_2)=\int_a^{t_1}\int_a^{t_2} K_\xi(s_1,s_2)ds_1ds_2. \qquad (5.17)$$

Теорема 1. Корреляционная функция интеграла от случайного процесса равна двойному интегралу от корреляционной функции исходного случайного процесса, стоящего под знаком интеграла.

Или же, если процесс $\xi(t)$ интегрируем на $[a,b]$, т.е. имеет место (5.12), то интегрируемы и его числовые характеристики.

Справедлива и обратная теорема.

Теорема 2. Если числовые характеристики случайного процесса $\xi(t)$ интегрируемы на $[a,b]$, то и сам процесс $\xi(t)$ интегрируем.

Пример. Случайные процессы ξ и η связаны соотношением:

$$\eta(t)=\int_0^t \xi(s)ds.$$

Найти m_η, K_η, D_η, если $m_\eta=t^2-3$, $K_\eta(t_1,t_2)=\sigma^2\cdot\cos\omega(t_2-t_1)$.

Решение

$$m_\eta(t)=\int_0^t m_\xi(s)ds=\int_0^t\left(s^2-3\right)ds=\left(\frac{s^3}{3}-3s\right)\Bigg|_0^t=\frac{t\left(t^2-9\right)}{3},$$

$$K_\eta(t_1,t_2)=\int_0^{t_1}\int_0^{t_2}\sigma^2\cos\omega(s_2-s_1)ds_1ds_2=-\frac{\sigma^2}{\omega}\int_0^{t_2}\left(\sin\omega(s_2-t_1)-\sin\omega s_2\right)ds_2=$$

$$= -\frac{\sigma^2}{\omega}\left[-\frac{1}{\omega}\cos\omega\left(s_2 - t_1\right) + \frac{1}{\omega}\cos\omega s_2\right]\Bigg|_0^{t_2} =$$

$$= \frac{\sigma^2}{\omega^2}\left[\cos\omega\left(t_2 - t_1\right) - \cos\omega t_1 - \cos\omega t_2 + 1\right] =$$

$$= \frac{\sigma^2}{\omega^2}\left[\cos\omega\left(t_2 - t_1\right) - 2\cos\left(\omega\cdot\frac{t_2 + t_1}{2}\right)\cdot\cos\left(\omega\cdot\frac{t_2 - t_1}{2}\right) + 1\right].$$

$$D_\eta(t) = K_\eta\left(t_1, t_2\right) = K_\eta(t,t) = \frac{\sigma^2}{\omega^2}\cdot 2(1 - \cos\omega t).$$

РАЗДЕЛ 6. КАНОНИЧЕСКОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ФУНКЦИЙ

При решении практических задач, связанных с работой динамической системы, бывает удобно случайную функцию, над которой нужно произвести те или иные преобразования, предварительно представить в виде суммы так называемых элементарных случайных функций. Это представление и составляет идею метода канонических разложений, выдвинутую В.С. Пугачевым.

Определение. *Каноническим разложением действительной случайной функции* $X(t)$ называется ее представление в виде

$$X(t) = m_X(t) + \sum_{k=1}^{n} V_k \phi_k(t), \tag{6.1}$$

где $\phi_k(t)$ $(k = 1, 2, \ldots)$ – неслучайные действительные, так называемые «координатные» функции, V_k $(k = 1, 2, \ldots)$ – центрированные, попарно некоррелированные случайные величины с дисперсиями D_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$.

Если случайная величина $X(t)$ представлена каноническим разложением (6.1), то ее автоковариационная функция записывается в виде

$$K_X(t_1, t_2) = \sum_{k=1}^{n} D_k \phi_k(t_1) \phi_k(t_2). \tag{6.2}$$

Выражение (6.2) называется также каноническим разложением автоковариационной функции.

Если в представлении случайной функции

$$X(t) = \sum_{k=1}^{n} U_k \varphi_k(t) \tag{6.3}$$

случайные величины U_k коррелированны, то такое представление не является каноническим разложением, и поэтому представление (6.2) для автоковариационной функции будет несправедливо. Однако с помощью линейного преобразования можно привести выражение (6.3) к каноническому виду.

В основных чертах указанная задача аналогична приведению билинейной или квадратичной формы к каноническому виду, рассматриваемому в курсе линейной алгебры.

Пример 1. Случайный процесс $X(t)$ задан выражением (6.3), где $M\left[U_k\right]=m_k \neq 0,\ k=1,2,\ldots,n,\ K=\begin{pmatrix} D_1 & K_{12} & \cdots & K_{1n} \\ & D_2 & \cdots & K_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & D_n \end{pmatrix}$ – автоковариационная матрица, причем $K_{ij}=M\left[\overset{\circ}{U}_i\overset{\circ}{U}_j\right]\neq 0$, для $i\neq j$.

Очевидно, представление (6.3) не является каноническим разложением. Требуется с помощью линейного преобразования привести выражение (6.3) к каноническому виду.

Решение

Прежде всего центрируем случайные величины U_k с помощью тождественного преобразования:

$$X(t)=\sum_{k=1}^{n} m_k\varphi_k(t)+\sum_{k=1}^{n}\left(U_k-m_k\right)\varphi_k(t)=m_X(t)+\sum_{k=1}^{n}\overset{\circ}{U}k\,\varphi_k(t).$$

Заметим, что данное выражение может быть записано в виде скалярного произведения:

$$\overset{\circ}{X}(t)=\overset{\circ}{U}^{\text{т}}\varphi(t), \tag{6.4}$$

где $\overset{\circ}{U}=\begin{pmatrix}\overset{\circ}{U}1\\ \overset{\circ}{U}2\\ \vdots\\ \overset{\circ}{U}n\end{pmatrix}$ и $\varphi(t)=\begin{pmatrix}\varphi_1(t)\\ \varphi_2(t)\\ \vdots\\ \varphi_n(t)\end{pmatrix}$, а символ $^{\text{т}}$ означает транспонирование.

В векторном обозначении автоковариационная матрица записывается следующим образом:

$$K_U = M\left[\overset{\circ}{U}\overset{\circ}{U}^{T}\right].$$

Пусть $V = AU$ – новый набор случайных величин. Выберем матрицу A таким образом, чтобы случайные компоненты V_k вектора V были попарно некоррелированы. Имеем

$$K_V = M\left[VV^{T}\right] = M\left[A\overset{\circ}{U}\overset{\circ}{U}^{T}A^{T}\right] = AM\left[\overset{\circ}{U}\overset{\circ}{U}^{T}\right]A^{T} = AK_UA^{T} = D_V, \quad (6.5)$$

где D_V – диагональная матрица дисперсий новых компонент:

$$D_V = \begin{pmatrix} D[V_1] & & & 0 \\ & D[V_2] & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & D[V_n] \end{pmatrix}.$$

Из равенства (6.5) заключаем: матрица A преобразованием «координат» приводит автоковариационную матрицу K_U к диагональному виду. Поскольку матрица K_U вещественна и симметрична, то, как доказывается в курсе линейной алгебры, искомая матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

строится следующим образом: k-я строка матрицы A представляет собой k-й ортонормированный собственный вектор матрицы K_U, соответствующий собственному значению λ_k. Собственные значения λ_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ матрицы K_U являются корнями уравнения:

$$\det\left(K_U - \lambda I\right) = 0,$$

где I – единичная матрица, причем все $\lambda_k \geq 0$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, поскольку матрица K_U вещественна и симметрична. Если указанная матрица A уже построена, то:

$$D_V = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

причем порядок расположения собственных значений λ_k соответствует порядку записи собственных векторов a_k в матрице A. Остается выбрать новый вектор координатных функций $\phi(t)$ из условия неизменности скалярного произведения (6.4). Учитывая, что матрица ортогональна, то есть ($A^{-1} = A^{\text{ò}}$), и невырожденная, имеем:

$$\overset{\circ}{X}(t) = \overset{\circ}{U}{}^{\text{ò}} \varphi(t) = \left(A^{-1} A \overset{\circ}{U}\right)^{\text{ò}} \varphi(t) = \left(A \overset{\circ}{U}\right)^{\text{ò}} \left(A^{-1}\right)^{\text{ò}} \varphi(t) = V^{\text{ò}} \phi(t),$$

где $V = A\overset{\circ}{U}$ – преобразованный вектор, а

$$\phi(t) = \left(A^{-1}\right)^{\text{ò}} \varphi(t) = \left(A^{\text{ò}}\right)^{\text{ò}} \varphi(t) = A\varphi(t). \tag{6.6}$$

Заметим, что задача имеет не единственное решение. Результат зависит от способа формирования ортогональной матрицы A. Кроме того, можно положить $D\left[V_k\right] = 1$, $(k = 1, 2, \ldots, n)$, если выбрать новые координатные функции в виде $\phi_k(t) = \sqrt{\lambda_k}\phi_k(t)$.

Пример 2. Случайная функция $X(t)$ задана выражением:

$$X(t) = U_1 t + U_2 \cos t,\ M\left[U_1\right] = 1,\ M\left[U_2\right] = -1,\ K_U = \begin{pmatrix} 9 & -12 \\ -12 & 25 \end{pmatrix}.$$

Привести данную случайную функцию к каноническому виду.

Решение

Центрируем функцию:

$$X(t) = \left(U_1 - M\left(U_1\right) + M\left(U_1\right)\right)t + \left(U_2 - M\left(U_2\right) + M\left(U_2\right)\right)\cos t =$$

$$=\mathring{V}1t+M\left(U_1\right)t+\mathring{V}2\cos t+M\left(U_2\right)\cos t=$$

$$=t-\cos t+\mathring{U}_1 t+\mathring{U}2\cos t=m_X(t)+\mathring{U}^{\text{ò}}\varphi(t),$$

где $\mathring{U}=\left(\mathring{U}1,\mathring{U}2\right)$, $\varphi(t)=(t,\cos t)^{\text{ò}}$. В данном примере удобнее воспользоваться не ортогональным преобразованием, а методом Лагранжа (аналогичен методу Лагранжа приведения квадратичных форм к каноническому виду). Для этого тождественно преобразуем выражение для ковариационной функции:

$$\begin{aligned}&K_X\left(t_1,t_2\right)=\sigma_1{}^2t_1t_2+\sigma_1\sigma_2\rho t_1\cos t_2+\sigma_1\sigma_2t_2\cos t_1+\sigma_2{}^2\cos t_1\cos t_2=\\&=\left(\sigma_1t_1+\sigma_2\rho\cos t_1\right)\left(\sigma_1t_2+\sigma_2\rho\cos t_2\right)+\sigma_2{}^2\left(1-\rho^2\right)\cos t_1\cos t_2\end{aligned}.$$

Заметим, что $\rho=\dfrac{K_{12}}{\sigma_1\sigma_2}=-\dfrac{4}{5}$. Обозначим:

$$\begin{aligned}&\varphi_1(t)=\sigma_1t+\sigma_2\rho\cos t,\\&\varphi_2(t)=\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}\cos t,\end{aligned}\qquad(6.7)$$

и положим $D\left[V_1\right]=D\left[V_2\right]=1$. Матрица преобразования A, усматриваемая из системы (6.2), имеет вид:

$$A=\begin{pmatrix}\sigma_1 & \sigma_2\rho\\ 0 & \sigma_2\sqrt{1-\rho^2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & -4\\ 0 & 3\end{pmatrix}.$$

Однако, в отличие от случая, рассмотренного в примере 1, матрица A неортогональна. Потребуем, чтобы скалярное произведение $\mathring{U}\varphi$ не изменялось при линейном преобразовании. Тогда аналогично формулам (6.6) получим, что если $\phi(t)=A\varphi(t)$, то $V=A^{-1}\mathring{U}$. Вычисляя обратную матрицу, находим:

$$\left(A^{\text{ò}}\right)^{-1}=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}3 & 0\\ 4 & 3\end{pmatrix},$$

таким образом, новый вектор случайных величин

$$V=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}3 & 0\\ 4 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathring{U}1\\ \mathring{U}2\end{pmatrix}=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}3\mathring{U}1\\ 4\mathring{U}1+3\mathring{U}2\end{pmatrix}.\qquad(6.8)$$

Проверим некоррелированность V_1 и V_2:

$$M\left[V_1 V_2\right]=\frac{1}{81}\left(12M\left[\mathring{U}1^{2}\right]+9M\left[\mathring{U}1\mathring{U}2\right]\right)=0.$$

Таким образом, получаем каноническое разложение:

$$X(t)=t-\cos t+V_1\phi_1(t)+V_2\phi_2(t),$$

где V_1 и V_2 определяются уравнениями (6.8), а координатные функции $\phi_1(t)$ и $\phi_2(t)$ – уравнениями (6.7).

Пример 3. Случайный процесс $X(t)$ задан следующим выражением: $X(t)=U^{\grave{o}}\varphi(t)$, где $U=\begin{pmatrix}U_1\\ U_2\end{pmatrix}$ – случайный вектор с вектором математических ожиданий $m_U=\begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix}$ и ковариационной матрицей $K_U=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$; вектор координатных функций $\varphi=\begin{pmatrix}\varphi_1(t)\\ \varphi_2(t)\end{pmatrix}$. Найти каноническое разложение процесса $X(t)$ и записать автоковариационную функцию.

Решение

Прежде всего центрируем случайные величины U_k

$$\mathring{X}(t)=\mathring{U}^{\grave{o}}\varphi(t), \tag{6.9}$$

где $\mathring{U}=\begin{pmatrix}\mathring{U}1\\ \mathring{U}2\end{pmatrix}$ и $\varphi(t)=\begin{pmatrix}\varphi_1(t)\\ \varphi_2(t)\end{pmatrix}$, а символ $^{\text{т}}$ означает транспонирование.

Аналогично вышерассмотренному примеру 1 найдем матрицу A. Для этого найдем собственные векторы матрицы K_U

$$\begin{vmatrix}2-\lambda & 1\\ 1 & 2-\lambda\end{vmatrix}=0 \Rightarrow \lambda_1=3,\ \lambda_2=1.$$

Для $\lambda=3$ получаем:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \alpha=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Для $\lambda=1$ получаем:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \beta=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Нормируя векторы α и β, получаем соответствующие строки искомой матрицы A

$$A=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Тогда:

$$X(t)=-\varphi_1(t)+\varphi_2(t)+V_1\phi_1(t)+V_2\phi_2(t),$$

$$K_X(t)=3\phi_1(t_1)\phi_1(t_2)+\phi_2(t_1)\phi_2(t_2),$$

где $V=A\overset{\circ}{U}$, $\phi(t)=A\varphi(t)$.

РАЗДЕЛ 7. СТАЦИОНАРНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ

7.1. Определения стационарного случайного процесса

На практике очень часто встречаются случайные процессы, протекающие во времени приблизительно однородно и имеющие вид непрерывных случайных колебаний вокруг некоторого среднего значения, причем ни средняя амплитуда, ни характер этих колебаний не обнаруживают существенных изменений с течением времени. Другими словами, не прослеживается тенденция развития случайных процессов во времени и, следовательно, при исследовании стационарного процесса в качестве отсчета можно выбрать любой момент времени.

В качестве примеров стационарных случайных процессов можно привести: 1) колебания напряжения в электрической осветительной сети; 2) случайные шумы в радиоприемнике; 3) процесс качки корабля и т.д.

Случайный процесс $\xi(t)$ называется стационарным в узком смысле, если его многомерные законы распределения не меняются при сдвиге всех временных переменных на одно и то же число

$$F_{\xi}\left(x_1,...,x_n;t_1,...,t_n\right)=F_{\xi}\left(x_1,...,x_n;t_1+h,...,t_n+h\right)\ \forall n\in N \text{ и } \forall\in R \tag{7.1}$$

Тогда

1. Одномерная плотность

$$f_{\xi}(x,t)=f_{\xi}(x,t+h)=\{h=-t\}=f_{\xi}(x,0)=f_{\xi}(x). \tag{7.2}$$

Следовательно, одномерный закон распределения $F_{\xi}(x,t)=F_{\xi}(x)$ не зависит от времени, т.е. одинаков по любому сечению.

2. Двумерный закон

$$f_{\xi}\left(x_1,x_2;t_1,t_2\right)=f_{\xi}\left(x_1,x_2;t_1+h,t_2+h\right)=$$

$$=\left\{h=-t_1\right\}=f_{\xi}\left(x_1,x_2,0,t_2-t_1\right)=f_{\xi}\left(x_1,x_2,\tau\right);\ \tau=t_2-t_1. \tag{7.3}$$

Двумерный закон распределения зависит от разности двух переменных, т.е. от длины интервала τ между сечениями случайного процесса.

Для многих случайных процессов *n*-мерный закон распределения практически невозможно найти. Во многих прикладных задачах это и не требуется. С достаточно высокой точностью описание таких процессов можно осуществить, используя одномерную и двумерную плотность распределения, т.е. в пределах корреляционной теории.

По Хинчину процесс $\xi(t)$ называется стационарным в широком смысле, если:

$$1.\ m_\xi(t) = m_\xi = const. \tag{7.4}$$

$$2.\ K_\xi(t_1,t_2) = K_\xi(\tau),\ \tau = t_2 - t_1 \quad . \tag{7.5}$$

$$3.\ D\xi = \sigma_\xi^2 = const. \tag{7.6}$$

В дальнейшем корреляционную функцию, стационарную в широком смысле процесса, будем обозначать $K_\xi(\tau)$.

Из стационарности в узком смысле вытекает стационарность процесса в широком смысле. Обратное неверно.

В дальнейшем слова в «широком смысле» будем опускать.

Основные свойства стационарного процесса:

$$1.\ K_\xi(-\tau) = K_\xi(\tau). \tag{7.7}$$

Доказательство

Исходя из определения корреляционной функции для доказательства достаточно рассмотреть $f_\xi(x_1,x_2;t_1,t_2)$. Аналогично формуле (7.2) запишем:

$$f_\xi(x_1,x_2;t_1,t_2) = f_\xi(x_1,x_2;t_1+h,t_2+h) =$$

$$= \{h = -t_2\} = f_\xi(x_1,x_2,-\tau),\ \text{где}\ \tau = t_2 - t_1,$$

но $f_\xi(x_1,x_2;t_1,t_2) = f_\xi(x_1,x_2,\tau)$ по (7.3).

Таким образом, если двумерная функция распределения четна, следовательно, корреляционная функция – четна.

$$2.\ D\xi = K_{\xi}(0). \tag{7.8}$$

$$3.\ \left|K_{\xi,\eta}\right| \le K_{\xi}(0). \tag{7.9}$$

Доказательство

Т.к.

$$\left|K_{\xi,\eta}\right| \le \sigma_{\xi}\sigma_{\eta} \Rightarrow \left|K_{\xi}(t_1,t_2)\right| \le \sigma_{\xi}(t_1)\sigma_{\xi}(t_2)$$

$$\left|K_{\xi,\eta}(t_1,t_2)\right| \le \sigma_{\xi}(t_1)\sigma_{\eta}(t_2),$$

для стационарного процесса

$$K_{\xi}(t_1,t_2) = K_{\xi}(\tau),\ \sigma_{\xi}(t_1) = \sigma_{\eta}(t_2) = \sigma_{\xi},$$

т.е.

$$\left|K_{\xi}(\tau)\right| \le \sigma_{\xi}^2.$$

Но

$$\sigma_{\xi}^2 = D_{\xi} = K_{\xi}(0).$$

Следовательно,

$$\left|K_{\xi}(\tau)\right| \le \left|K_{\xi}(0)\right|.$$

Пример 1. Задан случайный процесс: $\xi(t) = \alpha\cos\omega t + \beta\sin\omega t$, где α и $\beta-$ независимые случайные величины, для которых выполняются равенства:

$$m_{\alpha} = m_{\beta} = 0;\ D_{\alpha} = D_{\beta} = \sigma^2;$$

$\omega-$ неслучайная величина. Выяснить, стационарный ли процесс.

Решение

Здесь $m_{\xi}(t) = 0$,

$$K_{\xi}(t_1,t_2) = \sigma^2\cos\omega(t_2 - t_1) = \sigma^2\cos\omega\tau,$$

$$D\xi(\tau) = \sigma^2.$$

Следовательно, $\xi(t)$ – стационарный процесс.

Пример 2. Случайный процесс – обобщенный телеграфный сигнал. Является ли он стационарным?

Решение

Так как $m_\xi(t)=0$, $K_\xi\left(t_1,t_2\right)=e^{-2\lambda\left|t_2-t_1\right|}=e^{-2\lambda(\tau)}$, $\tau=t_2-t_1$, $D\xi(\tau)=1$, то процесс стационарный.

7.2. Дифференцирование стационарного случайного процесса

Теорема 1. Первая производная от стационарного процесса есть стационарный случайный процесс.

Доказательство

$$m_\eta(t)=\left(m_\xi(t)\right)'=const=0,$$

$$K_\eta(t_1,t_2)=\frac{\partial^2 K_\xi(t_1,t_2)}{\partial t_1\partial t_2}=-\frac{\partial^2 K_\xi(\tau)}{\partial\tau^2},$$

$$D_\eta(\tau)=D_\eta(t,t)=-K''_\xi(0)=const.$$

Все условия Хинчина выполнены. То есть операция дифференцирования стационарного процесса приводит к стационарному процессу, что и требовалось доказать.

Пример. Задан случайный процесс:

$$\xi(t)=A\cos(\omega t+\phi),$$

где A и ω – неслучайные величины; ϕ – случайная величина, равномерно распределенная на интервале $[0,2\pi]$;

$$f_\phi(u)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi}, & u\in[0,2\pi]\\ 0, & u\notin[0,2\pi].\end{cases}$$

Найти вероятностные характеристики производной $\xi'(t)$.

Решение

1) $M\left[\xi(t)\right]=M\left(A\cos(\omega t+\phi)\right)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}A\cos(\phi t+u)du=0 \Rightarrow \overset{\circ}{\xi}(t)=\xi(t)$,

2) $K_{\xi}\left(t_1,t_2\right)=A^2\cos\left(\omega t_1+\phi\right)\cos\left(\omega t_2+\phi\right)=$

$$=A^2\frac{1}{2\pi}\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}\left(\cos\left(\omega\left(t_1+t_2\right)+2u\right)+\cos\left(\omega\left(t_2-t_1\right)\right)\right)du=\frac{A^2}{2}\cos\omega\left(t_2-t_1\right)$$

$$K_{\xi}(\tau)=\frac{A^2}{2}\cos\omega\tau,\ \tau=t_2-t_1,$$

3) $D_{\xi}(t)=\frac{A^2}{2}$, $M\left(\xi'(t)\right)=0$; $K_{\xi'}(\tau)=\frac{A^2}{2}\omega^2\cos\omega\tau$; $D\left(\xi'(t)\right)=\frac{A^2}{2}\omega^2$.

Замечание. Если рассматривать

$$\overset{\circ}{\xi}(t)=-A\sin\left(\omega t+\phi\right)$$

и непосредственно вычислить вероятностные характеристики процесса $\xi'(t)$, то они совпадут с ранее вычисленными характеристиками. Но в общем случае из дифференцируемости реализаций не вытекает дифференцируемость случайного процесса, и наоборот, дифференцируемый случайный процесс может иметь среди реализаций недифференцируемые (обобщенный телеграфный сигнал).

Справедлива следующая теорема.

Теорема 2. Если случайный процесс дифференцируем, то его реализации с вероятностью, равной единице, являются непрерывными функциями.

Пример. Дана последовательность прямоугольных импульсов, не равных единице, причем смена их значений приходит в случайные моменты времени, образующие пуассоновский поток (обобщенный телеграфный сигнал). Показать, что такой процесс недифференцируем.

Решение

$$K_\xi(\tau)=e^{-2\lambda|\tau|},$$

$$\left(K_\xi(\tau)\right)'=-2\lambda e^{-2\lambda|\tau|}\cdot sign\tau .$$

В точке $\tau=0$ $K'_\xi(\tau)$ не существует.

Если дифференцирование стационарного процесса приводит к стационарному процессу, то интегрирование – не всегда.

7.3. Интегрирование стационарного процесса

Пусть случайный процесс $\eta(t)=\int\limits_a^b A(t,s)\xi(s)ds$ интегрируем, $A(t,s)$ – ядро, при этом процесс $\xi(s)$ – стационарный в широком смысле, т.е.:

$$M_\xi=const,\ D_\xi=const,\ K_\xi(t_1,t_2)=K_\xi(\tau),$$

то математическое ожидание случайного процесса $\eta(t)=\int\limits_a^b A(t,s)\xi(s)ds$ имеет следующий вид:

$$M[\eta(t)]=\int\limits_a^b A(t,s)M[\xi(s)]ds=m_\xi\int\limits_a^b A(t,s)ds=m_\xi\cdot I(t)\neq const,$$

что нарушает условия стационарности.

Если потребовать, чтобы $\xi(t)$ был стационарным и центрированным случайным процессом, т.е. $\xi(t)=\overset{\circ}{\xi}(t)$, $m_\xi(t)=0$, то $M[\eta]=0\Rightarrow$

$$K_\eta(t_1,t_2)=\int\limits_a^{t_1}\int\limits_a^{t_2}K_\xi(u-v)dudv,$$

этот интеграл в общем виде не должен зависеть от $t_2-t_1=\tau$.

Докажем, что существуют условия, при выполнении которых интегрирование стационарного процесса приводит к стационарному процессу:

1. $M_{\xi}=0$,

2. $A(t,s)=\begin{cases} A(t,s), & s<t, \\ 0, & s>t. \end{cases}$

3. Нижний предел интегрирования $a=-\infty$, тогда интеграл от ξ, т.е. процесс $\eta(t)$ будет стационарным.

Доказательство

$$M\left[\eta(\tau)\right]=\int_{-\infty}^{t}A(t-s)M\left[\xi(s)\right]ds=0;$$

$$K_{\eta}\left(t_1,t_2\right)=\int_{-\infty}^{t_1}\int_{-\infty}^{t_2}A\left(t_1-u\right)A\left(t_2-v\right)K_{\xi}(u,v)dudv=$$

$$\left\{\begin{matrix} u=t_1-z, & u-v=\left(t_1-z\right)-\left(t_2-w\right)=\left(t_1-t_2\right)-(z-w) \\ v=t_2-w, & \end{matrix}\right\}=$$

$$\int_{-\infty}^{t_1}\int_{-\infty}^{t_2}\left(A(z)A(w)K_{\xi}\left(t_1-t_2\right)-(z-w)\right)dzdw=K_{\eta}\left(t_1-t_2\right)=K_{\eta}(\tau)=K_{\eta}(-\tau),$$

что и требовалось доказать.

7.4. Периодический стационарный случайный процесс, спектральное разложение этого процесса и его корреляционной функции

Определение. Стационарный случайный процесс называется *периодическим* с периодом T, если $K_{\xi}(\tau)=K_{\xi}(\tau+T)$.

Пример 1. Задан случайный процесс:

$$\xi(t)=\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k\cos k\omega+\beta_k\sin kt\omega),$$

где ω – неслучайная величина, α_k и β_k – случайные величины, при этом $M\alpha_k=M\beta_k=0$, т.е. α_k и β_k – центрированные и некоррелированные между собой.

$$M(\alpha_k \alpha_j) = M(\alpha_k \beta_j) = M(\beta_k \beta_j) = 0,\ k \neq j;$$

$$D\alpha_k = D\beta_k = \sigma_k^2.$$

Решение

Проверим, является ли процесс периодическим.

$$M(\xi(t)) = \sum_{k=1}^{n} (M\alpha_k \cdot \cos kt + M\beta_k \cdot \sin kt) = 0,$$

следовательно, $\overset{\circ}{\xi} = \xi$.

$$K_\xi(t_1, t_2) =$$

$$= M\left(\sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (\alpha_k \cos kt_1\omega + \beta_k \sin kt_1\omega)(\alpha_j \cos jt_2\omega + \beta_j \sin jt_2\omega \right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \sigma_k^2 \cos k\tau\omega,\ \tau = t_2 - t_1,$$

т.е.

$$K = \sum_{k=1}^{n} \sigma_k^2 \cos k\tau\omega,$$

следовательно, процесс периодический с периодом $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$.

Пример 2. Задан случайный процесс:

$$\xi(t) = \sum_{k=-n}^{n} \gamma_k e^{ikt\omega},$$

где ω – неслучайная величина, $M\gamma_k = 0$, $D\gamma_k = \sigma_k^2$, $M\gamma_k\gamma_j = 0$.

Решение

Покажем, что процесс стационарный и периодический:

$$M\xi(t) = 0;$$

$$K_\xi(t_1, t_2) = M\left[\sum_{k=-n}^{n} \gamma_k e^{ikt_1\omega} \sum_{j=-n}^{n} \bar{\gamma}_j e^{-ijt_2\omega} \right] = \sum_{k=-n}^{n} \sum_{j=-n}^{n} M(\gamma_k \bar{\gamma}_j) e^{i\omega(kt_1 - jt_2)} =$$

$$= M(|\gamma|^2) e^{ik\omega(t_1 - t_2)} = \sum_{k=-n}^{n} \sigma_k^2 e^{ik\tau\omega},\ \tau = t_2 - t_1,$$

процесс стационарный и периодический с периодом $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$.

Пример 3. Задан случайный процесс:

$$\xi(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k e^{ikt\omega}.$$

Показать, что ряд $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \sigma_k^2$ сходится.

Решение

Если $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \sigma_k^2$ сходится, то $\underset{n\to\infty}{l.i.m.} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k e^{ikt\omega}$ существует, это очевидно.

Пусть

$$\underset{n\to\infty}{l.i.m.} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k e^{ikt\omega} = \xi(t),$$

тогда

$$K_\xi(\tau) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sigma_k^2 e^{ikt\omega}.$$

Из этого следует, что ряд сходится абсолютно и период равен $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$.

Периодичность случайного процесса влечет за собой периодичность его реализаций, и наоборот, если сумма неслучайных гармоний представима для его корреляционных функций, то и его реализации так же периодичны.

Нижеуказанные теоремы можно рассматривать как свойства периодических случайных процессов.

Теорема 1. Если $\xi(t)$ стационарный периодический процесс с периодом T, то его реализации с вероятностью, равной единице, являются периодическими с тем же периодом. И наоборот, если реализации некоторого стационарного процесса с вероятностью, равной единице, являются периодическими функциями одного и того же периода, то случайный процесс является периодическим с тем же периодом (то есть его корреляционная функция имеет тот же предел).

(Без доказательства).

Теорема 2. Если корреляционная функция – периодична с периодом T, то она может быть представлена с помощью ряда Фурье в комплексной форме:

$$K_{\xi}(\tau)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k e^{ik\tau\omega}, \; b_k=\frac{1}{T}\int_0^T K_{\xi}(\tau)e^{-ik\tau\omega}d\tau. \quad (7.10)$$

Вопрос в том, можно ли аналогично разложению периодической функции на гармоники, произвести соответствующее разложение случайного периодического процесса на сумму случайных гармонических колебаний?

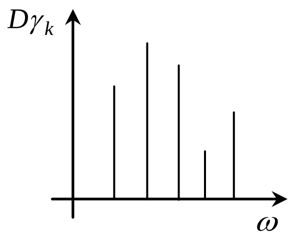

Рис. 5.

Теорема 3. Если $\xi(t)$ – стационарный периодический процесс с периодом T, и его корреляция $K_{\xi}(\tau)$ представима в виде ряда Фурье (7.10), то периодический процесс может быть представлен рядом вида:

$$\xi(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k e^{ikt\omega}, \quad (7.11)$$

где $\omega=\frac{2\pi}{T}$, γ_k – случайная величина, удовлетворяющая условиям:

$$\gamma_k=\frac{1}{T}\int_0^T \xi(t)e^{-ikt\omega}dt,$$

$$M(\gamma_k)=0, \; M(\gamma_k\bar{\gamma}_j)=0, \; D(\gamma_k)=M(|\gamma_k|^2)=b_k.$$

Определение. Представление случайного процесса в виде (7.11) называется *спектральным разложением* процесса в комплексной форме.

Спектральное представление изображает стационарный случайный процесс, разложенным на случайные гармоники различных частот:

$$\omega_1=\omega, \; \omega_2=2\omega, \; \ldots, \omega_k=k\omega, \; \ldots .$$

Общий период $\frac{2\pi}{\omega}$.

Найдем дисперсию случайного процесса, заданного своим спектральным разложением.

Для стационарного случайного процесса имеем:

$$D(\xi(t)) = K_{\xi}(\tau)\Big|_{\substack{\tau=0\\ t_1=t_2}} = M(\overset{\circ}{\xi}(t_1)\overline{\overset{\circ}{\xi}(t_2)})\Big|_{t_1=t_2},$$

т.к. $\overset{\circ}{\gamma}_k = \gamma_k \ \ (M\gamma_k = 0)$, то

$$\overset{\circ}{\xi}(t) = \xi(t),$$

следовательно,

$$D_{\xi}(t) = M(\xi(t_1)\overline{\xi(t_2)})\Big|_{t_1=t_2} =$$

$$= M(\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=-\infty}^{\infty}\gamma_k\bar{\gamma}_j e^{i\omega kt_1 - i\omega jt_2})\Big|_{t_1=t_2} = (\sum_{k=-\infty}^{\infty} M(|\gamma_k|^2)e^{i\omega k(t_2-t_1)})\Big|_{t_1=t_2} =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} M(|\gamma_k|^2) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} D\gamma_k,$$

то есть

$$D_{\xi}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} D\gamma_k.$$

Следовательно, дисперсия стационарного случайного процесса равна сумме дисперсий всех случайных гармоник ее спектрального разложения. Графически распределение дисперсии по частотам можно представить так (рис. 5): сумма ординат спектра, построенного таким образом, равна дисперсии случайного процесса $\xi(t)$ в случае сходимости ряда $\sum_{k=-\infty}^{\infty} D\gamma_k$, то есть спектр стационарной случайной функции описывает распределение дисперсии по различным частотам.

Рассмотрим физический смысл спектральной функции. Если под случайной функцией $\xi(t)$ понимать электрический ток, то функцию $F(u)$ можно интерпретировать следующим образом: процесс $\xi(t)$ представим в виде «континуальной суммы» простых гармонических колебаний со случайными амплитудами, и приращение $F(u_2)-F(u_1)$ $(u_1<u_2)$ равно средней мощности, рассеиваемой гармоническими составляющими процесса, частоты которых лежат в полуинтервале $[u_1, u_2)$.

7.5. Непериодический стационарный процесс и спектральное представление его корреляционной функции

Если периодический стационарный процесс представим рядом Фурье, то по аналогии непрерывный стационарный процесс можно представить интегралом Фурье на отрезке $[0,T]$.

Спектральное представление случайного периодического процесса на конечном интервале $[0,T]$:

$$b_k = \frac{1}{T}\int_0^T K_x(\tau)e^{-ik\omega}d\tau, \; K_\xi(\tau) = \sum b_k e^{ik\omega}. \tag{7.12}$$

Если даже вне интервала времени нам безразлична точность описания процесса, то все равно для непрерывного случайного процесса такое представление дает приближенное описание. Более полное представление о случайном процессе при его спектральном разложении может быть получено при увеличении интервала T $(T\to\infty)$.

Теорема Хинчина. Корреляционная функция стационарного случайного процесса с конечной дисперсией может быть представлена в виде:

$$K_\xi(\tau) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e^{i\omega k\tau} + \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega)e^{i\omega\tau}d\omega, \tag{7.13}$$

где $S(\omega)$– интегрируемая функция, называемая спектральной плотностью случайного процесса $\xi(t)$, при этом $S(\omega)\ge 0$, $\alpha_k > 0$ $\forall k=\overline{1,\infty}$.

(Без доказательства).

Если ввести в рассмотрение спектральную функцию

$$\Phi(\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \theta(\omega-\omega_k) + \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega)d\omega, \tag{7.14}$$

где $\theta(\omega-\omega_k)=\begin{cases}1, & \omega>\omega_k\\ 0, & \omega<\omega_k\end{cases}$ – единичная функция Хевисайда.

Тогда формула (7.13) для $K_\xi(\tau)$ примет вид:

$$K_\xi(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau}d\Phi(\omega). \qquad (7.15)$$

Для получения этого равенства используется δ-функция Дирака $\delta(x)=\dfrac{d\theta(x)}{dx}$. Ее свойство $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-x_0)dx=f(x_0)$. Подставим $\Phi(\omega)$ (см.(7.14)) в выражение (7.15). Тогда:

$$K_\xi(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau}(\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k\delta(\omega-\omega_k)+S(\omega))d\omega=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau}\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k\delta(\omega-\omega_k)d\omega+$$

$$+\int_{-\infty}^{\infty} S(\omega)e^{i\omega\tau}d\omega=\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau}\delta(\omega-\omega_k)d\omega+\int_{-\infty}^{\infty} S(\omega)e^{i\omega\tau}d\omega=$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k e^{i\omega_k\tau}+\int_{-\infty}^{\infty} S(\omega)e^{i\omega\tau}d\omega.$$

Таким образом, равносильность (7.13) и (7.15) доказана.

Из первой формулы для спектральной функции следует, что она состоит из двух слагаемых: первое – кусочно-постоянная функция, второе – дифференцируемая функция (как интеграл по верхнему пределу).

Рассмотрим отдельные частные случаи.

1. $S(\omega)=0\Rightarrow\Phi(\omega)=\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k\theta(\omega-\omega_k)$ и $K_\xi(\tau)=\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k e^{i\omega_k\tau}$. В этом случае говорят, что случайный процесс имеет дискретный спектр частот, а точки $\omega_1,\omega_2,...,\omega_k,...$ называются точками роста спектральной функции $\Phi(\omega)$, которая в этом случае кусочно-постоянная. В этом случае корреляционная функция не является интегральной на вещественной оси.

2. Если $\alpha_k=0\ \ \forall k=\overline{1.\infty}$, т.е. нет дискретных состояний, то

$$K_{\xi}(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}S(\omega)e^{i\omega\tau}d\omega,\ \Phi(\omega)=\int_{-\omega}^{\omega}S(\omega)d\omega.$$

Следовательно, спектральная функция $\Phi(\omega)$ – дифференцированная, т.е. $S(\omega)=\dfrac{d\Phi(\omega)}{d\omega}\geq 0$.

Таким образом, установлена связь между спектральной функцией и спектральной плотностью случайного процесса.

Воспользовавшись обратным преобразованием Фурье, можно получить выражение спектральной плотности через корреляционную функцию стационарного процесса:

$$S(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}K_{\xi}(\omega)e^{-i\omega\tau}d\tau. \qquad (7.16)$$

Этот частный случай приводит к случайному процессу с непрерывным спектром частот.

Для того чтобы корреляционная функция стационарного процесса могла быть представлена в виде интеграла Фурье, достаточна ее абсолютная интегрируемость:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|K_{\xi}(\tau)\right|d\tau<\infty.$$

7.6. Свойства спектральной плотности стационарного процесса. Белый шум

С в о й с т в о 1. $S(\omega)=S(-\omega)$.

Доказательство

На основании выражения (7.16) и четности $K_{\xi}(\tau)$ следует:

$$S(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}K_{\xi}(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}K_{\xi}(\tau)\cos(\omega\tau)d\tau-$$

$$-\frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}K_{\xi}(\tau)\sin(\omega\tau)d\tau=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}K_{\xi}(\tau)\cos(\omega\tau)d\tau\ -$$

интеграл от четной функции по параметру ω, следовательно, $S(\omega)$ – четная функция.

С в о й с т в о 2. Если дисперсия $\xi(t), D_\xi(t)$ – ограниченная величина, то $S(\omega)$ – интегрируемая функция, т.е. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} S_\xi(\omega)d\omega$ – сходится.

Доказательство

Положим, $\tau = 0$ в $K_\xi(\tau) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} S_\xi(\omega)e^{i\omega\tau}d\omega$, следовательно,

$$D_\xi = K_\xi(0) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} S_\xi(\omega)d\omega,$$

но D_ξ – конечная величина, значит, $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} S_\xi(\omega)d\omega$ равен конечному числу, т.е. δ сходится.

С в о й с т в о 3. $S(\omega) \geq 0$.

Доказательство

$S(\omega) = \dfrac{d\Phi(\omega)}{d\omega}$, но $\Phi(\omega)$ неубывающая функция.

Пример 1. Дана $K_\xi(\tau) = \sigma_\xi^2 \cdot e^{-\alpha|\tau|}$. Найти $S_\xi(\omega)$.

Решение

$$S_\xi(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \sigma_\xi^2 e^{-\alpha|\tau|} e^{-i\omega\tau}d\tau = \frac{\sigma_\xi^2}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha\tau}\cos\omega\tau d\tau = \frac{\sigma_\xi^2\alpha}{\pi\left(\omega^2+\alpha^2\right)};$$

$$S(0) = S_{\max} = \frac{\sigma^2}{\alpha\pi}.$$

Если $\sigma^2 = \pi\alpha$, то $S_{\max} = 1$, то $S_\xi(\omega) = \dfrac{\alpha^2}{\omega^2+\alpha^2}$.

Определение. *Белым шумом* называется случайный процесс с постоянной спектральной плотностью для всех частот от $-\infty$, до ∞.

Следовательно, для «белого шума» характерно равномерное с одной и той же интенсивностью распределение энергии случайного процесса по всем частотам; аналогично с белым цветом, состоящим из разных цветов разной частоты, но одинаковой интенсивности. Реально такого процесса нет (не существует), но это понятие является удобной ассоциацией, когда $S_\xi(\omega)$ близко к постоянной величине:

$$S_\xi(\omega)=\frac{\alpha^2}{\omega^2+\alpha^2}\to 1 \text{ при } \alpha\to 1.$$

Пример 2. Известно:

$$S_\xi(\omega)=\begin{cases}\dfrac{1}{\omega_2-\omega_1}, & \omega_1<\omega<\omega_2\\ 0, & \omega\notin(\omega_1,\omega_2)\end{cases}.$$

Найти $K_\xi(\tau)$.

Решение

$$K_\xi(\tau)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}S_\xi(\omega)e^{i\omega\tau}d\tau=\int\limits_{\omega_1}^{\omega_2}\frac{1}{\omega_2-\omega_1}\cdot e^{i\omega\tau}d\tau=$$

$$=\frac{1}{\omega_2-\omega_1}\cdot\frac{e^{i\omega\tau}}{i\tau}\Bigg|_{\tau_1}^{\tau_2}=\frac{1}{\omega_2-\omega_1}\cdot\frac{e^{i\omega_2\tau}-e^{i\omega_1\tau}}{i\tau}.$$

Если интервал (ω_1,ω_2) симметричен, т.е. $\omega_1=-\omega_2$, то

$$K_\xi(\tau)=\frac{1}{2\omega_2}\cdot\frac{e^{i\omega_2\tau}-e^{i\omega_1\tau}}{i\tau}=\frac{1}{\omega_2}\cdot\frac{\sin\omega_2\tau}{\tau}.$$

7.7. Спектральное разложение стационарных случайных функций

Определение. Стационарная в широком смысле случайная функция $\xi(t)$, заданная во всей области определения параметра t, которая задается каноническим разложением вида

$$\xi(t) = m_{\xi} + \sum_{k=0}^{n} U_k \cos\omega_k t + V_k \sin\omega_k t, \tag{7.17}$$

где U_K и V_k – центрированные случайные величины, удовлетворяющие условиям

$$M\left[V_j V_i\right] = M\left[U_j U_i\right] = D_i \delta_{ij};\ M\left[V_j V_i\right] = 0,\ \forall i, j,$$

называется *случайной функцией* с дискретным спектром.

Определение. Если t – время, то случайный процесс, задаваемый формулой (7.17), называется *случайным процессом с дискретным спектром*.

Автоковариационная функция такого процесса имеет такой вид:

$$K_{\xi}(\tau) = \sum_{k=0}^{n} D_k \cos k\omega\tau,\ \omega_k = k\omega. \tag{7.18}$$

Определение. Представления (7.17) и (7.18) называются *спектральным разложением* случайного процесса, случайной функции.

Дисперсия случайной функции с дискретным спектром имеет вид:

$$D_{\xi} = K_{\xi}(0) = \sum_{k=0}^{n} D_k.$$

В случае, если $n \to \infty$, а $\omega_k = k\omega = k\frac{\pi}{T}$, то формулы (7.17) и (7.18) дают наш ряд Фурье, причем $t \in [-T, T]$ – четная функция.

Стационарные случайные функции, рассматриваемые на каждом промежутке $[-T, T]$, всегда могут быть представлены в виде спектральных разложений (7.17) и (7.18). Если корреляционная функция $K_{\xi}(\tau)$ не является периодической, то стационарный случайный процесс $\xi(t)$ не может быть представлен на всей оси $t \in (-\infty; +\infty)$ представлениями в виде (7.17) и (7.18) и, следовательно, не является при всех действительных t процессом с дискретным спектром.

Стационарная случайная функция $\xi(t)$ называется случайной функцией с непрерывным спектром, если существует действительная неотрицательная функция $S_{\xi}(\omega)$, определенная на всей оси частот ω в интервале $(-\infty;+\infty)$, и называется спектральной плотностью, что справедливы следующие интегральные формулы (интегральные формулы Винера-Хинчина):

$$K_{\xi}(\tau)=\int_{0}^{\infty} S_{\xi}(\omega)\cos\omega\tau d\omega, \tag{7.19}$$

$$S_{\xi}(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty} K_{\xi}(\tau)\cos\omega\tau d\tau. \tag{7.20}$$

Для их справедливости достаточно, чтобы ковариационная функция $K_{\xi}(\tau)$ была дифференцируема на $(0,\infty)$. Таким образом корреляционная функция и спектральная плотность стационарной случайной функции с непрерывным спектром связаны друг с другом взаимно обратными косинус-преобразованиями Фурье. Из (7.19), (7.20) и свойств корреляционной функции вытекает, что $S_{\xi}(\omega)$ – четная функция.

В силу четности подынтегральных функций в формулах Винера-Хинчина (7.19), (7.20) последние могут быть записаны в экспоненциальном виде

$$K_{\xi}(\tau)=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} S_{\xi}(\omega)e^{i\omega\tau}d\omega, \tag{7.21}$$

$$S_{\xi}(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} K_{\xi}(\tau)e^{-i\omega\tau}\tau d\tau. \tag{7.22}$$

Из этих формул следует, что дисперсия может быть выражена в виде интеграла от спектральной плотности:

$$D_{\xi}=K_{\xi}(\tau)=\int_{0}^{\infty} S_{\xi}(\omega)d\omega.$$

Условия $S_{\xi}(\omega)\geq 0$, $S_{\xi}(-\omega)=S_{\xi}(\omega)$ для $\forall\omega\in R$ является необходимым условием стационарности в широком смысле стационарной случайной функции $\xi(t)$.

Полезными характеристиками стационарных случайных функций с непрерывным спектром является:

- эффективная ширина спектра $\Delta\omega$;

- средний интервал корреляции $\Delta\tau$ (эффективная длительность корреляционной функции):

$$\Delta\omega = \frac{1}{\max\limits_{\omega} S_{\xi}(\omega)} \int\limits_{-\infty}^{\infty} S_{\xi}(\omega) d\omega = \frac{2\sigma_{\xi}^{2}}{\max\limits_{\omega} S_{\xi}(\omega)}, \tag{7.23}$$

$$\Delta\tau = 2\int\limits_{0}^{\infty} \left| R_{\xi}(\tau) \right| d\tau = \frac{2}{\sigma_{\xi}^{2}} \int\limits_{0}^{\infty} \left| K_{\xi}(\tau) \right| d\tau \tag{7.24}$$

$$\Delta\omega\Delta\tau = \frac{2\sigma_{\xi}^{2}}{\max\limits_{\omega} S_{\xi}(\omega)} \int\limits_{-\infty}^{\infty} S_{\xi}(\omega) d\omega = \frac{2\sigma_{\xi}^{2}}{\max\limits_{\omega} S_{\xi}(\omega)}.$$

7.8. Линейный фильтр

Рассмотрим некоторую систему A, на входе которой наблюдается случайный процесс $\xi(t)$, а на выходе $\eta(t)$ (рис. 6).

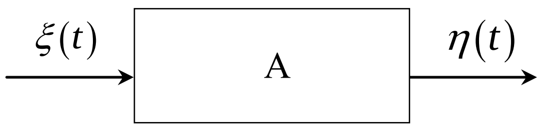

Рис. 6. Воздействие на систему А

Система A осуществляет над этим случайным процессом некоторое преобразование $\eta(t) = A\{\xi(t)\}$.

Все операции такого вида A можно разбить на две группы:

1) линейные:

– однородные,

– неоднородные;

2) нелинейные.

Линейность – это следующее свойство: если на вход системы поступает смесь сигналов, то ее обработка эквивалентна тому, как если бы мы смещали результаты обработки каждого сигнала отдельно.

Оператор A называется *линейным* и *однородным*, если выполняются условия:

1) $L\left(\xi_1(t)+\xi_2(t)\right)=L\left(\xi_1(t)\right)+L\left(\xi_2(t)\right)$;

2) $L\left(C\xi(t)\right)=C\cdot L\left(\xi(t)\right)$.

Очевидно, что операции дифференцирования и интегрирования относятся к линейным однородным.

Пусть на вход линейной динамической системы с постоянными параметрами (такая система называется стационарной линейной системой) поступает стационарный случайный процесс, характеристики которого известны. Требуется определить характеристики случайного процесса на выходе.

В общем случае работа линейной динамической системы с постоянными параметрами описывается дифференциальным уравнением вида:

$$a_n\frac{d'\eta(t)}{dt^n}+...+a_0\eta(t)=b_m\frac{d'\xi(t)}{dt^m}+...+b_0\xi(t). \qquad (7.25)$$

Зависимость между η и ξ будем называть линейным однородным оператором.

Если $m<n$, то интегральный оператор $\eta=a\xi'$.

Если $m>n$, то дифференциальный оператор $\xi=a\eta'$.

Если t достаточно удалено от начала процесса, то все переходные процессы в системе можно считать законченными процессами, и система работает в установленном режиме.

Если на входе стационарный процесс, то и на выходе – стационарный. Пусть в уравнении (7.25) $\eta=\xi'$, где $\xi(t)$ – стационарный процесс с математическим ожиданием m_ξ и корреляционной функцией $K_\xi(\tau)$. Найти связь между спектральной плотностью $S_\eta(\omega)$ и $S_\xi(\omega)$.

Прежде всего известны:

$$K_{\xi}(\tau)=\int_{-\infty}^{+\infty} S_{\xi}(\omega)e^{i\omega\tau}d\omega;\; K_{\eta}(\tau)=\int_{-\infty}^{+\infty} S_{\eta}(\omega)e^{i\omega\tau}d\omega,$$

продифференцируем дважды по параметру τ, предполагая его равномерную сходимость.

С другой стороны, $K_{\eta}(\tau)=-K''_{\eta}(\tau)$.

$$K_{\eta}(\tau)=\int_{-\infty}^{+\infty} S_{\xi}(\omega)e^{i\omega\tau}d\omega=-K''_{\eta}(\tau)=\int_{-\infty}^{+\infty}\omega^2 S_{\xi}(\omega)e^{i\omega\tau}d\omega, \tag{7.26}$$

$$S_{\eta}(\omega)=\omega^2 S_{\xi}(\omega). \tag{7.27}$$

Рассмотрим линейный дифференциальный оператор вида:

$$\eta(t)=b_1\xi(t)+b_1\xi'(t)+b_n\xi^{(n)}(t)=L\left[\xi(t)\right]. \tag{7.28}$$

Или в более компактной форме:

$$\eta(t)=\sum_{k=0}^{n} b_k\frac{d^k\xi(t)}{dt^k}. \tag{7.29}$$

Требуется установить связь между спектральной плотностью при $\eta(\tau)$ на выходе динамической системы.

Пусть корреляционная функция процесса $\xi(t)$ задана в виде $K_{\xi}(\tau)$.

Очевидно, что $\eta(t)=L\left[\xi(t)\right]$ является линейной и однородной, то

$$M\left[\eta(t)\right]=M\left[L(t)\right]=L\left[M\xi(t)\right], \tag{7.30}$$

$$K_{\eta}\left(t_1,t_2\right)=K_{L\left(\xi(t)\right)}\left(t_1,t_2\right)=L_{\xi\left(t_2\right)}\left[L_{\xi\left(t_1\right)}\left(K_{\eta}\left(t_1,t_2\right)\right)\right]. \tag{7.31}$$

Если же процесс комплексный, то:

$$K_{\eta}\left(t_1,t_2\right)=K_{L\left(\xi(t)\right)}\left(t_1,t_2\right)=\bar{L}_{\xi\left(t_2\right)}\left[L_{\xi\left(t_1\right)}\left(K_{\eta}\left(t_1,t_2\right)\right)\right],$$

где $\bar{L}_{\xi\left(t_2\right)}$ – комплексно сопряженная переменная.

Если обозначить записать $\tau=t_1-t_2$, то

$$K_{\eta}(\tau)=\bar{L}_{t_2}\left(L_t,K_{\xi}(\tau)\right). \tag{7.32}$$

Для случая (7.28) мы имеем:

$$K_\eta(\tau)=L_{t_2}\left(\sum_{k=0}^{m} b_k(-1)^k \frac{d^k}{d\tau^k}K_\xi(\tau)\right)=\sum_{j=0}^{m}\bar{b}_i \frac{d^j}{d\tau^j}\left(\sum_{k=0}^{m} b_k(-1)^k \frac{d^k}{d\tau^k}K_\xi(\tau)\right).$$

Допустим, $S_\xi(\omega)$ такова, что интеграл $K_\xi(\tau)=\int_{-\infty}^{+\infty} S_\xi(\omega)e^{i\omega\tau}d\omega$ можно дифференцировать по τ, тогда получим:

$$K_\eta(\tau)=\int_{-\infty}^{+\infty} S_\eta(\omega)e^{i\omega\tau}\ \sum_{j=0}^{m}\bar{b}_i \frac{d^j}{d\tau^j}\left(\sum_{k=0}^{m} b_k(-1)^k \frac{d^k}{d\tau^k}K_\xi(\tau)\right)d\omega.$$

Если обозначить

$$G(i\omega)=\sum_{k=0}^{m} b_k(-i\omega)^k, \tag{7.33}$$

$$\bar{G}(i\omega)=\sum_{k=0}^{m} b_k(i\omega)^k, \tag{7.34}$$

тогда $G(i\omega)\bar{G}(i\omega)=\left|G(i\omega)\right|^2$, и

$$K_\eta(\tau)=\int_{-\infty}^{+\infty} S_\eta(\omega)e^{i\omega\tau}\left|G(i\omega)\right|^2 d\omega, \tag{7.35}$$

$$S_\eta(\omega)=S_\xi(\omega)\left|G(i\omega)\right|^2. \tag{7.36}$$

Функцию $G(i\omega)$ называют частотной характеристикой оператора.

Самый общий случай

$$\sum_{k=0}^{m} a_k\eta^k(t)=\sum_{k=0}^{m} b_j\xi^{(j)}(t), \tag{7.37}$$

это формула (7.25) в общем виде. Тогда можно показать, что

$$G(i\omega)=\frac{\sum_{k=0}^{m} b_j(i\omega)^j}{\sum_{k=0}^{m} a_k(i\omega)^k}, \tag{7.38}$$

что частотная характеристика общего линейного фильтра.

Пример. Пусть динамическая система описывается уравнением

$\eta'(t)+a\eta(t)=\xi(t)$ и $M\xi=0$, $K_{\xi}=e^{-\beta|\tau|}$. Определить D_{η}.

Решение

Находим $G(i\omega)=\dfrac{1}{i\omega+a}$; $\left|G(i\omega)\right|^2=\dfrac{1}{i\omega+a}\cdot\dfrac{1}{i\omega-a}=\dfrac{1}{a^2+\omega^2}$.

Тогда $S_{\xi}(\omega)=\dfrac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-\beta|\tau|}e^{i\omega\tau}d\tau=\dfrac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty}e^{-\beta\tau}\cos\omega\tau d\tau=\dfrac{1-\beta}{\pi\left(\beta^2+\omega^2\right)}$,

$$S_{\eta}(\omega)=\left|G(i\omega)\right|^2\cdot S_{\xi}(\omega)=\frac{\beta}{\pi\left(a^2+\omega^2\right)\left(\beta^2+\omega^2\right)},$$

$$K_{\eta}(\tau)=\frac{\beta}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-i\omega\tau}\frac{1}{\left(a^2+\omega^2\right)\left(\beta^2+\omega^2\right)}d\omega=$$

$$=\frac{2\beta}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{\cos\omega\tau}{\left(a^2+\omega^2\right)\left(\beta^2+\omega^2\right)}d\omega=\frac{1}{a^2-\beta^2}\left(e^{-\beta|\tau|}-\frac{\beta}{a}e^{-a|\tau|}\right).$$

7.9. Преобразование стационарной случайной функции линейными динамическими системами с постоянными коэффициентами

Определение. *Линейной динамической системой с постоянными коэффициентами* называется система

$$\left(a_n\frac{d^n}{dt^n}+a_{n-1}\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}+\ldots+a_0\right)\eta(t)=$$

$$=\left(b_m\frac{d^m}{dt^m}+b_{n-1}\frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}}+\ldots+b_0\right)\xi(t), \qquad (7.39)$$

$$\left(a_n\frac{d^n}{dt^n}+a_{n-1}\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}+\ldots+a_0\right)y(t)=$$

$$=\left(b_m\frac{d^m}{dt^m}+b_{n-1}\frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}}+\ldots+b_0\right)x(t), \qquad (7.40)$$

где $x(t)$ – реализация входного случайного стационарного процесса;

$y(t)$ – реализация процесса на выходе системы.

Уравнение (7.39) описывает связь между случайными функциями на входе и выходе системы, а уравнение (7.40) описывает связь между реализациями входного случайного процесса $x(t)$ и $y(t)$ – реализации процесса на выходе.

Определение. *Передаточной функцией* линейной динамической системы называется функция комплексного переменного p, определенная:

$$H(p) = \frac{b_m p^m + \ldots + b_0}{a_n p^n + \ldots + a_0}. \tag{7.41}$$

Функция $H(p)$ – есть отношение преобразованного по Лапласу выходного сигнала к входному сигналу, определяемых из уравнения (7.40) при нулевых начальных условиях. Свойства сигнала на выходе полностью определяются свойствами передаточной функции $H(p)$ и свойствами входного сигнала. Говорят, что линейная динамическая система удовлетворяет условию устойчивости, если $H(p)$ не имеет полюсов в первой полуплоскости комплексной плоскости p ($\mathrm{Re}\; z_k < 0 \sin^{-1}\theta$).

Если на вход устойчивой линейной динамической системы с постоянными коэффициентами подается стационарный входной сигнал, то по прошествии достаточно большого времени с момента начала воздействия ($t \geq \tau_0$, где τ_0 – характерное время релаксации переходных процессов), сигнал на выходе системы будет близок к стационарному в широком смысле процессу.

Если $\xi(t)$ – входной стационарный сигнал с характеристиками m_ξ и $S_\xi(\omega)$, в стационарном режиме ($t \geq \tau_0$):

$$m_\eta = \frac{b_0}{a_0} \cdot m_\xi \tag{7.42}$$

$$S_\eta(\omega) = \left| H(i\omega) \right|^2 \cdot S_\xi(\omega) \tag{7.43}$$

Функция $\left|H(i\omega)\right|^2$ называется *амплитудно-частотной характеристикой системы*.

$$D_\eta = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} S_\xi(\omega)\,d\omega = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left|H(i\omega)\right|^2 \cdot S_\xi(\omega)\,d\omega. \qquad (7.44)$$

Для конечности дисперсии необходима и достаточна сходимость несобственного интеграла в (7.43). Достаточным, например, является условие, когда порядок оператора дифференциального оператора входного сигнала в формуле (7.40) будет не выше порядка дифференциального оператора выходного сигнала ($m \le n$).

Пример. Дано:

$$y''(t) + 5y'(t) + 4y(t) = x'(t) + 4x(t),$$

$$m_\xi = m,\ K_\xi(\tau) = \sigma_\xi^2 \cdot e^{-\alpha|\tau|},\ \alpha > 0.$$

Определить:

а) D_η, устойчивость;

б) m_ξ, $K_\xi(\omega)$, D_η – на выходе.

Решение

а) $m=1,\ n=2;\ m<n$ – условия устойчивости выполнятся.

$$H(p) = \frac{p+q}{p^2+5p+4} = \frac{1}{p+1};\ p_1 = -4;\ p_2 = -1; \mathrm{Re}\ p_k < 0.$$

Следовательно, условие устойчивости выполнено.

б) $\left|H(i\omega)\right|^2 = H(i\omega)\cdot H(-i\omega) = \dfrac{1}{1+i\omega}\cdot\dfrac{1}{1-i\omega} = \dfrac{1}{1+\omega^2}$.

Для процесса с $K_\xi(\tau) = \sigma_\xi^2 \cdot e^{-\alpha|\tau|}$,

$$S_\xi(\omega) = \frac{\sigma_\xi^2}{\pi}\cdot\frac{2}{\omega^2+\alpha^2}.$$

Находим по формулам (7.41):

$$S_\eta(\omega)=\left|H(i\omega)^2\cdot S_\xi(\omega)\right|=\frac{S_\xi(\omega)}{\omega^2+1}=\sigma_\xi^2\frac{2\alpha}{\pi}\cdot\frac{1}{\left(\omega^2+\alpha^2\right)\left(\omega^2+1\right)}.$$

$$K_\eta(\tau)=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}S_\eta(\omega)e^{i\omega\tau}d\omega=\sigma_\xi^2\frac{\alpha}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{i\omega\tau}}{\left(\omega^2+\alpha^2\right)\left(\omega^2+1\right)}d\omega.$$

Последний интеграл находим по вычетам в верхней полуплоскости:

$$K_\eta(\tau)=\sigma_\xi^2\frac{\alpha}{\pi}\cdot 2\pi i\left\{\underset{i\alpha}{\operatorname{Re}z}\frac{e^{ip\tau}}{\left(p^2+\alpha^2\right)\left(p^2+1\right)}+\underset{i}{\operatorname{Re}z}\frac{e^{ip\tau}}{\left(p^2+\alpha^2\right)\left(p^2+1\right)}\right\}==\ldots=\frac{\sigma_\xi^2}{1+\alpha}\cdot e^{-\alpha\tau}.$$

В силу четности имеем в $1+\alpha$ раз меньше дисперсии на входе. Это объясняется тем, что данная динамическая система по существу является интегрирующей целью, а операция интегрирования процесса сглаживает шум.

7.10. Эргодический стационарный случайный процесс

Если стационарный случайный процесс обладает свойством, суть которого состоит в том, что по одной отдельной реализации можно судить о всех свойствах случайного процесса так же, как по любому количеству реализаций, то такой процесс называется *эргодическим*.

$$m_\xi(t)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}x(t)dt, \tag{7.45}$$

$$D_\xi(t)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}(x(t)-m_\xi(t))^2dt,$$

$$K_\xi(\tau)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}(x(t)-m_\xi(t))(x(t+\tau)-m_\xi(t))dt,$$

где $x(t)$ – некоторая реализация.

Однако стационарные случайные процессы могут обладать свойством *эргодичности* по отношению к вероятностным моментам не всех порядков.

Определение. Если, например, m_ξ можно определить как (7.45), то в этом случае говорят об *эргодичности* относительно математического ожидания.

Рассмотрим случайную величину:

$$\mu_T = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-T}^{T} \xi(t) dt .$$

Определение. Если существует среднеквадратичный предел случайной величины μ_T для множества реализаций случайного процесса $\xi(t) = \{x(t)\}$ при $T \to \infty$ и не зависит от выбора реализации $x(t)$, то предел называется *эргодическим относительно математического ожидания*, т.е.:

$$m_\xi = \underset{T\to\infty}{l.i.m.} \frac{1}{2T} \int\limits_{-T}^{T} \xi(t) dt .$$

Если же это не выполняется, процесс неэргодический.

Теорема 1. Для того чтобы случайный процесс был эргодическим по математическому ожиданию, т.е. чтобы $l.i.m. \mu_T = m_\xi$, достаточно, чтобы корреляционная функция этого предела удовлетворяла условию:

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \int\limits_{0}^{N} K_\xi(\tau) d\tau = 0 . \qquad (7.46)$$

Следствие. Достаточное условие эргодичности случайного процесса относительно математического ожидания можно заменять на более простое:

$$\lim_{\tau\to\infty} K_\xi(\tau) = 0 . \qquad (7.47)$$

Доказательство

Условие $\lim\limits_{\tau\to\infty} K_\xi(\tau)=0$ означает, что $\forall \varepsilon > 0$ существует $N_0(\varepsilon)$ такое, что $\tau > N_0(\varepsilon)$, то $|K_\xi(\tau)| < \varepsilon$. Но тогда:

$$\left| \frac{1}{N} \int\limits_{0}^{N} K_\xi(\tau) d\tau \right| \le \frac{1}{N} \int\limits_{0}^{N_0} |K_\xi(\tau)| d\tau + \frac{1}{N} \int\limits_{N_0}^{N} K_\xi(\tau) d\tau \le \left\{ \frac{dA(\tau)}{d\tau} = |K_\xi(\tau)| \right\} \le$$

$$\le \frac{A(N_0(\varepsilon))}{N} + \frac{\varepsilon(N - N_0)}{N} = \underbrace{\frac{A}{N}}_{\to 0} + \varepsilon \underbrace{\left(1 - \frac{N_0}{N}\right)}_{\to 0} \to \varepsilon$$

$$\left| \frac{1}{N} \int_0^N K_\xi(\tau) d\tau \right| < \varepsilon .$$

Таким образом, процесс, для которого выполнено условие (7.47), эргодичен по математическому ожиданию.

Замечание. Условия эргодичности случайного процесса относительно математического ожидания (7.46) и (7.47) являются достаточными. Вместе с тем условие (7.47) может не выполняться, а условие (7.46) – выполняется как более общее.

Пример. Пусть $K_\xi(\tau) = \sigma^2 \cos \omega\tau$. Будет ли процесс эргодичен по математическому ожиданию?

Решение

Если проверить выполнение условия (7.47), получим, что предел не существует.

Проверим условие (7.46):

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \int_0^N K_\xi(\tau) d\tau = \frac{1}{N} \int_0^N \sigma^2 \cos \omega\tau d\tau = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sigma^2 \left. \frac{\sin \omega\tau}{\omega} \right|_o^N =$$

$$= \frac{\sigma^2}{\omega} \lim_{N\to\infty} \left(\frac{\sin \omega N}{N} \right) = 0$$

– условие эргодичности выполнено, следовательно, процесс эргодичен по математическому ожиданию.

Для выяснения условий эргодичности стационарного процесса относительно его корреляционной функции рассмотрим корреляционную функцию.

$$K_\xi(\tau) = M(\overset{\circ}{\xi}(t) \overline{\overset{\circ}{\xi}(t+\tau)}) . \tag{7.48}$$

Определение. Процесс $\xi(t)$ называется эргодичным по корреляционной функции, если существует среднеквадратический предел вида:

$$\underset{T\to\infty}{l.i.m.}\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-T}^{T}\overset{\circ}{\xi}(t)\overline{\overset{\circ}{\xi}(t+\tau)}dt$$

для любой реализации случайного процесса $\xi(t)=\{x(t)\}$ и

$$K_{\xi}(\tau)=\underset{T\to\infty}{l.i.m.}\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-T}^{T}\overset{\circ}{\xi}(t)\overline{\overset{\circ}{\xi}(t+\tau)}dt.$$

Теорема 2. Достаточное условие эргодичности случайного процесса относительно корреляционной функции. Если процесс $\xi(t)$ стационарный в широком смысле и для процесса $\eta(t)=\overset{\circ}{\xi}(t)\overline{\overset{\circ}{\xi}(t+\tau)}$ выполняется условие эргодичности по математическому ожиданию, т.е.

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\int\limits_{0}^{N}K_{\xi}(\tau)d\tau=0,$$

то процесс $\xi(t)$ будет эргодическим по корреляционной функции, т.е.

$$K_{\xi}(\tau)=\underset{T\to\infty}{l.i.m.}\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-T}^{T}\overset{\circ}{\xi}(t)\overline{\overset{\circ}{\xi}(t+\tau)}dt.$$

Необходимым и достаточным условием эргодичности процесса $\xi(t)$ является выполнение условия

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T^2}\int\limits_{0}^{T}\int\limits_{0}^{T}K_x(t,t')dtdt'=0.$$

РАЗДЕЛ 8. НОРМАЛЬНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ

Определение. Случайный процесс называется *нормальным*, если $\forall n \geq 1$ n-мерные плотности вероятностного процесса нормальны, т.е. одномерные плотности:

$$n=1:\quad f_\xi(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma_\xi(t)}\cdot\exp\left\{-\frac{(x-m_\xi(t))^2}{2\sigma_\xi^2(t)}\right\},$$

$$n=2:\quad f_\xi(x_1,x_2,t_1,t_2)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma_\xi(t_1)\sigma_\xi(t_2)\sqrt{1-r_\xi^2(t_1,t_2)}}\cdot$$

$$\cdot\exp\left\{-\frac{1}{2(1-r_\xi^2(t_1,t_2))}\left(\frac{(x_1-m_\xi(t_1))^2}{\sigma_\xi^2(t_1)}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{2r_\xi(t_1,t_2)(x_1-m_\xi(t_1))(x_2-m_\xi(t_2))}{\sigma_\xi(t_1)\sigma_\xi(t_2)}+\frac{(x_2-m_\xi(t_2))^2}{\sigma_\xi^2(t_2)}\right)\right\},$$

$$\forall n:\quad f_\xi(x_1,\ldots,x_n,t_1,\ldots,t_n)=$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}\cdot\sqrt{\Delta}}\cdot\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}K_{ij}^{-1}(x_i-m_\xi(t_i))(x_j-m_\xi(t_j))\right\},$$

где $\Delta=\det|K|$,

$$K=\begin{pmatrix}\sigma_\xi^2(t_1) & K_\xi(t_1,t_2) & \cdots & K_\xi(t_1,t_n)\\ K_\xi(t_2,t_1) & \sigma_\xi^2(t_2) & \cdots & K_\xi(t_2,t_n)\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ K_\xi(t_n,t_1) & K_\xi(t_n,t_2) & \cdots & \sigma_\xi^2(t_n)\end{pmatrix},$$

$$K^{-1}\cdot K=E,\quad K^{-1}=\left\{K_{ij}^{-1}\right\}.$$

В более компактной матричной форме:

$$f_\xi(\bar{x},\bar{t})=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\mathring{x}^{\mathrm{T}}K^{-1}\mathring{x}\right\},$$

где $\overset{\circ}{x}$ – вектор-столбец центрированных реализаций случайного процесса в моменты времени $t_1, t_2, ..., t_n$, а K^{-1} – матрица, обратная к автокорреляционной, Δ – определитель матрицы корреляций.

Из формулы для $f_\xi(x_1, ..., x_n, t_1, ..., t_n)$ видно, что нормальный случайный процесс полностью задан, если известны его $m_\xi(t)$ и $K_\xi(t_1, t_2)$.

Рассмотрим случайный процесс, стационарный в широком смысле:

$$m_\xi(t) = m_\xi = const,\ D_\xi(t) = \sigma_\xi^2 = const,\ K_\xi(t_1, t_2) = K_\xi(\tau),$$

где $\tau = t_2 - t_1$.

$$f_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\xi} \exp\left\{ -\frac{(x - m_\xi)^2}{2\sigma_\xi^2} \right\},$$

$$f_\xi(x_1, x_2, \tau) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1 - r_\xi^2 \sigma_\xi^2}} \exp\left\{ -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - r_\xi^2(\tau)} \cdot \frac{1}{\sigma_\xi^2} \Big[(x_1 - m_\xi)^2 - \right.$$

$$\left. -2r_\xi(\tau)(x_1 - m_\xi)(x_2 - m_\xi) + (x_2 - m_\xi)^2 \Big] \right\},$$

где $r_\xi(\tau) = \dfrac{K_\xi(\tau)}{\sigma_\xi^2}$,

$$f_\xi(\bar{x}, \bar{t}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \exp\left\{ -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} K_{ij}^{-1} (x_i - m_\xi)(x_j - m_\xi) \right\}, \tag{8.1}$$

$$K = \begin{pmatrix} \sigma_\xi^2 & K_\xi(t_1 - t_2) & \cdots & K_\xi(t_1 - t_n) \\ K_\xi(t_2 - t_1) & \sigma_\xi^2 & \cdots & K_\xi(t_2 - t_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ K_\xi(t_n - t_1) & K_\xi(t_n - t_2) & \cdots & \sigma_\xi^2 \end{pmatrix}. \tag{8.2}$$

Можно показать, что для задания процесса, стационарного в узком и широком смысле, достаточно задать $m_\xi = m = const$;

$$M(\overset{\circ}{\xi}(t_k)\overset{\circ}{\xi}(t_m)) = k_\xi(t_m - t_k) = K_\xi(\tau). \qquad (8.3)$$

Теорема 1. Если нормальный процесс стационарен в широком смысле, то он стационарен и в узком смысле.

Доказательство

Если он стационарен в широком смысле, то верны соотношения (8.1) и (8.2). Проверим, будет ли выполняться равенство:

$$f(x_1,...,x_n;t_1+\tau,...,t_n+\tau) = f(x_1,...,x_n;t_1,...,t_n).$$

В правой части выражения для $f_\xi(\bar{x},\bar{t})$ это изменит элементы матрицы K^{-1} и определитель $\Delta = |K|$, но, согласно (8.3), $K_\xi(t_i+\tau, t_j+\tau) = K_\xi(t_i - t_j)$. Следовательно, выражение для $f_\xi(\bar{x},\bar{t})$ и K не изменится, если к любой временной переменной добавить одно и то же постоянное число t. Таким образом, n-мерная плотность не меняется при сдвиге всех временных переменных. Следовательно, процесс, стационарный в широком смысле, стационарен и в узком смысле.

Теорема 2. Если нормальный случайный процесс стационарен в широком смысле, то из условия $\lim\limits_{\tau\to\infty} K_\xi(\tau) = 0$ следует, что он эргодичен как по математическому ожиданию, так и по корреляционной функции:

$$K_\xi(\tau) = \underset{\mathrm{T}\to\infty}{\underline{l.i.m.}} \frac{1}{2\pi} \int_{-\mathrm{T}}^{\mathrm{T}} \overset{\circ}{\xi}(t)\overset{\circ}{\xi}(t+\tau)d\tau.$$

Теорема. Если случайный процесс $\xi(t)$ нормален, то $\eta = \frac{d\xi}{dt}$ – нормальная функция.

Теорема 3. Если случайный процесс $\xi(t)$ нормален, то $\eta = \int_a^t \xi(s)ds$ – нормальная функция.

Доказательства теорем могут быть проведены с помощью характеристических функций.

Напомним, что случайный процесс $\xi(t)$ называется *процессом с независимыми приращениями* (см. глава 1: Классификация процессов), если для любых значений аргумента $t_1 < t_2 < ... < t_k < t_{k+1} < ...$ случайные величины приращения функции $\xi(t)$

$$U_1 = \xi(t_2) - \xi(t_1), U_2 = \xi(t_3) - \xi(t_2), ..., U_k = \xi(t_{k+1}) - \xi(t_k)$$

независимы.

Определение. Нормальный случайный процесс с независимыми приращениями называется *винеровским* случайным процессом, если его математическое ожидание равно нулю, а дисперсия приращения пропорциональна длине отрезка, на котором оно достигает:

$$m_x = 0,\ D[U_k] = a(t_{k+1} - t_k),$$

где $a > 0$ – постоянный коэффициент.

Пример 1. Стационарный и нормальный процесс $\xi(\tau)$ имеет математическое ожидание $m_\xi = 5$ и корреляционную функцию $K_\xi(\tau) = e^{-2|\tau|}(\cos 2\tau + \sin 2|\tau|)$. Найти: а) одномерную плотность процесса $\eta(t) = \dfrac{d\xi(t)}{dt}$; б) вероятность того, что $|\eta(t)| < \sqrt{3}$.

Решение

а) Положим, $\eta(t) = \xi'(t)$, тогда (см. теорему пункта 7.2) $m_\eta \equiv 0$, а

$$K_\eta(\tau) = -K''_\xi(\tau) = 8e^{-2|\tau|}\{\cos 2\tau - \sin|2\tau|\};\ D = K_\eta(0) = 8.$$

Одновременно плотность $\eta(t)$ будет $f_\eta(x) = \dfrac{e^{-\frac{x^2}{16}}}{4\sqrt{\pi}}$;

б) $P\{|\xi'(t)| < \sqrt{3}\} = \dfrac{1}{4\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} e^{-\frac{x^2}{16}} dx \cong 0,4582$, т.е. в любой момент времени t касательная к произвольной реализации этого процесса с вероятностью, приблизительно равной 0,4582, будет составлять с осью $0t$ угол, больший 60^0.

Пример 2. $\xi(t)$ – случайный процесс с независимыми приращениями $\xi(t')-\xi(t)$, распределенными по нормальному закону с математическим ожиданием $a=0$ и дисперсией $\sigma^2=t'-t$. Найти математическое ожидание, дисперсию и корреляционную функцию этого процесса.

Решение

Так как процесс винеровский, то имеем:

$$m_\xi(t)=\int_{-\infty}^{\infty} x f_1(x;t)dx \equiv 0;\ D_\xi(t)=t.$$

$\xi(t)$ распределена по нормальному закону с математическим ожиданием $a=0$ и дисперсией $\sigma^2=t'-t$, поэтому:

$$f_2(x_1,x_2;t,t')=\frac{1}{2\pi\sqrt{t(t'-t)}}\exp\left\{-\frac{x_1^2}{2t}-\frac{(x_2-x_1)^2}{2(t'-t)}\right\} \text{ при } t'>t.$$

Тогда $K_X(t,t')=\dfrac{1}{2\pi\sqrt{t(t'-t)}}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_1x_2\exp\left\{-\frac{x_1^2}{2t}-\frac{(x_2-x_1)^2}{2(t'-t)}\right\}dx_1dx_2=t$,

но так как $K_X(t',t)=K_X(t,t')$, то имеем окончательно:

$$K_X(t,t')=\begin{cases} t & \text{ï ðè} \quad t\le t' \\ t' & \text{ï ðè} \quad t>t' \end{cases}.$$

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ

1. Рассматривая неслучайную функцию времени $\phi(t)$ как частный вид случайной функции $\xi(t)=\phi(t)$, найти ее характеристики: математическое ожидание $m_x(t)$, дисперсию $D_x(t)$ и корреляционную функцию $K_x(t,t')$. Является ли случайная функция $\xi(t)$ стационарной?

Р е ш е н и е. Т.к. $\varphi(t)$ неслучайна, то, очевидно, $m_x(t)=\varphi(t)$, $D_x(t)=0$, $K_x(t,t')=0$.

В общем случае случайная функция $\xi(t)$ нестационарна, так как при $\varphi(t)\neq const$ имеем $m_x(t)=const$.

2. В условиях предыдущей задачи $\varphi(t)=a=const$, где a неслучайная величина: $\xi(t)=a$. Стационарна ли случайная функция $\xi(t)$? Если стационарна, то обладает ли она эргодическим свойством.

Р е ш е н и е. Случайная функция $\xi(t)$ стационарна, так как $m_x(t)=a=const$, $D_x(t)=0$, $K_x(t,t')=k_x(\tau)=0$, и обладает эргодическим свойством, поскольку выполняется (7.7).

3. Доказать, что $\left|K_x(t_1,t_2)\right|\leq\sigma_{x(t_1)}\sigma_{x(t_2)}$

Р е ш е н и е. Обозначая закон распределения второго порядка для случайной функции $\xi(t)$ через $f(x_1,x_2,t_1,t_2)$, по определению $K_x(t_1,t_2)$ имеем

$$K_x(t_1,t_2)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x_1-m_1)(x_2-m_2)f(x_1,x_2,t_1,t_2)dx_1dx_2.$$

Применение неравенства Буняковского дает

$$\left|K_x(t_1,t_2)\right|^2\leq\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x_1-m_1)^2f(x_1,x_2,t_1,t_2)dx_1dx_2\times$$

$$\times\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left(x_2'-m_2\right)^2f\left(x_1',x_2',t_1,t_2\right)dx_1'dx_2'=\sigma^2_{x(t_1)}\sigma^2_{x(t_2)},$$

что эквивалентно первому неравенству.

4. Пусть $\xi(t)$ – нормальная стационарная случайная функция, математическое ожидание которой равно нулю. Доказать, что если

$$\zeta(t)=\frac{1}{2}\left[1+\frac{\xi(t)\xi(t+\tau)}{\left|\xi(t)\xi(t+\tau)\right|}\right],$$

то $m_z(t)=\frac{1}{\pi}\arccos\left[-k_x(\tau)\right]$, где $k_x(\tau)$ – нормированная корреляционная функция $\xi(t)$.

Р е ш е н и е. Пользуясь тем, что $\xi(t)$ нормальна, плотность вероятности второго порядка можем представить в виде

$$f(x_1,x_2,t,t+\tau)=\frac{1}{2\pi\sigma_x^2\sqrt{1-k_x^2(\tau)}}\exp\left\{-\frac{x_1^2+x_2^2+2k_x(\tau)x_1x_2}{2\sigma_x^2\left[1-k_x^2(\tau)\right]}\right\}.$$

Искомое математическое ожидание может быть представлено в виде

$$m_z(t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2}\left[1+\frac{x_1x_2}{\left|x_1x_2\right|}\right]f(x_1,x_2,t,t+\tau)dx_1dx_2.$$

Так как $\frac{1}{2}\left[1+\frac{x_1x_2}{\left|x_1x_2\right|}\right]$ – тождественно равна нулю в том случае, когда знаки у ординат x_1 и x_2 различны, и равна единице в противном случае, то

$$m_z(t)=\int\limits_{-\infty}^{0}\int\limits_{-\infty}^{0}f(x_1,x_2,t,t+\tau)dx_1dx_2+\int\limits_{0}^{\infty}\int\limits_{0}^{\infty}f(x_1,x_2,t,t+\tau)dx_1dx_2=$$

$$=2\int\limits_{0}^{\infty}\int\limits_{0}^{\infty}f(x_1,x_2,t,t+\tau)dx_1dx_2,$$

что после выполнения интегрирования дает результат, указанный в условии задачи. (При интегрировании удобно ввести новые переменные r,ϕ, положив $x_1=r\cos\phi, x_2=r\sin\phi$.)

5. $\xi(t)$ – случайный процесс с независимыми приращениями $\xi(t')-\xi(t)$, распределенными по нормальному закону с математическим ожиданием $a=0$ и дисперсией $\sigma^2=t'-t$ (винеровский процесс). Пусть $\xi(0)=0$. Найти все n-

мерные плотности этого процесса.

Р е ш е н и е. Очевидно,

$$P\left\{\xi(t) < x\right\} = P\left\{\xi(t) - \xi(0) < 0\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{x} e^{\frac{-z^2}{2t}} dz,$$

поэтому одномерная плотность процесса $\xi(t)$ будет $f_1(x;t) = \dfrac{e^{\frac{-x^2}{2t}}}{\sqrt{2\pi t}}$.

Далее, если известно значение процесса $\xi(t) = x$, то распределение $\xi(t')$ при любом $t' > t$ совпадает с распределением $\left[\xi(t') - \xi(t)\right] + \xi(t)$ и не зависит от предшествующего (до момента t). Следовательно, процесс $\xi(t)$ – марковский (без последействия), а тогда для полной вероятностной характеристики его достаточно знание двумерной плотности $f_2(x, y; t, t')$. По условию, если известно значение x_{i-1}, принятое сечением $\xi(t_{i-1})$, то условная плотность сечения $\xi(t_i)$ будет

$$f_2\left(x_i, t_i \middle| x_{i-1} t_{i-1}\right) = \exp\left\{-\frac{1}{2} \frac{\left(x_i - x_{i-1}\right)^2}{t_i - t_{i-1}}\right\}.$$

Пусть $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ – любые n моментов времени. Тогда

$$f_n(x_1, \ldots, x_n; t_1, \ldots, t_n) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} t_1^{-\frac{1}{2}} \prod_{i=1}^{n} (t_i - t_{i-1})^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(x_i - x_{i-1})^2}{t_i - t_{i-1}}} e^{-\frac{x_1^2}{2t_1}}.$$

6. Найти математическое ожидание, дисперсию и корреляционную функцию синусоиды постоянной частоты ω со случайной амплитудой X, если $MX = 1, \quad DX = 0,2$.

Р е ш е н и е. Для $\xi(t) = x \sin \omega t$ по (7.30) и (7.31) находим $M\xi(t) = \sin \omega t$ и $K_x(t, t') = 0,2 \sin \omega t \sin \omega t'$. Применяя формулу (2.1.6) находим дисперсию $D\xi(t) = K_x(t, t) = 0,2 \sin^2 \omega t$.

7. Найти математическое ожидание, дисперсию и корреляционную

функцию процесса $\zeta(t)=\xi e^{-t^2}$, где ξ – случайная величина с $M\xi=2,\ D\xi=0{,}01$.

Р е ш е н и е. Находим по правилу (7.30) $M\zeta(t)=2e^{-t^2}$; по (7.31) $K_x(t,t')=0,01e^{-(t^2+t'^2)}$; по формуле (2.9) $D_x=0,01e^{-2t^2}$.

8. Найти математическое ожидание, дисперсию и корреляционную функцию случайного процесса $\xi(t)=Ut+Vt^2$, где U и V – некоррелированные случайные величины с $MU=3;\ MV=0,5;\ DU=1;\ \ DV=0,05$.

Р е ш е н и е. Используя свойства математического ожидания получим $M\xi(t)=3t+0,5t^2$. По (6.2) $K_x(t,t')=tt'+0,05t^2t'^2$. Из (6.1) следует, что

$$D_x(t)=\sum_k D_k\varphi_k^2(t), \tag{*}$$

откуда искомая дисперсия равна $D_x=t^2+0,05t^4$.

9. Найти математическое ожидание, дисперсию и корреляционную функцию случайной функции $\xi(t)=x_1\cos\omega t+x_2\sin\omega t+5t$, где x_1 и x_2 – некоррелированные случайные величины, для которых $Mx_1=1;\ \ Mx_2=0,2;\ Dx_1=0,1;\ Dx_2=0,004$.

Р е ш е н и е. Согласно (7.30) $M\xi(t)=\cos\omega t+0,2\sin\omega t+5t$; кроме того, т.к. исходная случайная функция представлена каноническим разложением, то по формулам (6.2) и (*) соответственно находим

$$K_x(t,t')=0,1\cos\omega t\cos\omega t'+0,004\sin\omega t\sin\omega t',$$

$$D_x=0,1\cos^2\omega t+0,004\sin^2\omega t.$$

10. Дана случайная функция $\zeta(t)=2U\sin\omega t+3Vt^2+5$; U и V – случайные величины с $MU=1;\ MV=2;\ DU=0,1;\ DV=0,05;\ r_{UV}=-0,3$.

Найти математическое ожидание и корреляционную функцию.

Р е ш е н и е. Исходная случайная функция представлена каноническим разложением и входящие в ее состав случайные функции коррелированны, поэтому по свойствам математического ожидания и (4.14) получаем

$$MZ(t) = 2\sin\omega t + 4t^2 + 5;$$

$$K_z(t,t') = M\left[Z^0(t)Z^0(t')\right] = M[(2U\sin\omega t + 3Vt^2)(2U\sin\omega t' + 3Vt'^2)] =$$

$$= 4M[U^2]\sin\omega t\sin\omega t' + 6M[UV]t'^2\sin\omega t + 9M[V^2]t^2t'^2 + 6M[UV]t^2\sin\omega t' =$$

$$= 4DU\sin\omega t\sin\omega t' + 9DVt^2t'^2 + 6\sqrt{DUDV}\,r_{UV}(t^2\sin\omega t' + t'^2\sin\omega t) \cong$$

$$\cong 0,4\sin\omega t\sin\omega t' + 0,45(tt')^2 - 0,127t'^2\sin\omega t - 0,127t^2\sin\omega t'.$$

11. Случайный процесс $\xi(t)$ задан следующим образом: $\xi(t) = \phi(t,\eta)$ где $\phi(t,\eta)$ – данная неслучайная вещественная функция своих аргументов, t – время, а η – случайная величина с известным законом распределения. Найти математическое ожидание, дисперсию и корреляционную функцию процесса $\xi(t)$, если а) известна плотность $f_\eta(y)$ величины η; б) известна плотность $f_\eta(y)$ и $\phi(t,\eta) = \phi(t)\eta + \psi(t)$, где ϕ и ψ – данные неслучайные функции; в) $\phi(t,\eta) = \sum_{i=1}^{N}\phi_i(t)\eta_i$, где η_i – компоненты случайного вектора $(\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_n)$ с известным математическим ожиданием $(m_1,m_2,\ldots,m_n)$ и корреляционной матрицей (b_{ik}).

Р е ш е н и е.

а) Применим формулы (2.3) и (2.8)

$$m_x(t) = \int_{-\infty}^{\infty}\phi(t,y)f(y)dy;$$

$$K_x(t,t') = \int_{-\infty}^{\infty}\phi(t,y)\phi(t',y)f(y)dy - m_x(t)m_x(t');$$

б) применим (7.30), (7.31):

$m_x(t) = \phi(t) M\eta + \psi(t)$; $K_x(t,t') = \phi(t)\phi(t') D\eta$;

в) здесь случайный процесс представлен в виде (2.1.28), поэтому

$$m_x(t) = \sum_{i=1}^{N} m_i \phi_i(t);\ K_x(t,t') = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} b_{ij}\phi_i(t)\phi_j(t').$$

12. Найти одно- и двумерный закон распределения и характеристики случайной функции $\xi(t)$, заданной своим каноническим разложением $\xi(t) = m_x(t) + \sum_{i=1}^{n} V_i \varphi_i(t)$, где $V_i \quad (i = 1, 2, ..., n)$ – взаимно-некоррелированные нормально распределенные случайные величины с характеристиками $m_i = 0,\ D_i$.

Р е ш е н и е. Одномерный закон распределения $f(x_1, t)$ – нормальный с характеристиками $m_{x1}(t) = m_x(t)$; $D_{x1}(t) = \sum_{i=1}^{n} D_i \varphi_i^2(t)$.

Корреляционная функция

$$K_x(t', t) = M\left[\sum_{i=1}^{n} V_i \varphi_i\ (t) \sum_{i=1}^{n} V_i \varphi_i\ (t')\right] = \sum_{i=1}^{n} D_i \varphi_i\ (t) \varphi_i\ (t').$$

Двумерный закон распределения $f(x_1, x_2, t, t')$ – нормальный с характеристиками $m_{x_1}(t)$, $m_{x_2}(t')$; $D_{x_1}(t)$; $D_{x_2}(t')$; $K_x(t', t)$. Случайная функция $\xi(t)$ нормальна, поэтому двумерный закон распределения является исчерпывающей характеристикой для любого числа сечений этой функции.

13. Задана случайная функция $\xi(t) = V_1 e^{-\alpha_1 t} + V_2 e^{-\alpha_2 t}$, где V_1, V_2 – некоррелированные случайные величины с характеристиками: $m_{v_1} = m_{v_2} = 0$, D_{v_1}, D_{v_2}. Найти характеристики случайной функции $\xi(t)$.

Р е ш е н и е. Случайная функция $\xi(t)$ представлена каноническим разложением без свободного члена, следовательно, $m_x(t) = 0$;

$$K_x(t',t) = D_{V_1} e^{-\alpha_1 (t+t')} + D_{V_2} e^{-\alpha_2 (t+t')}; D_x(t) = D_{V_1} e^{-\alpha_1 2t} + D_{V_2} e^{-\alpha_2 2t}.$$

14. Случайная величина $\xi(t)$ задана каноническим разложением

$$\xi(t) = t + V_1 \cos \varpi t + V_2 \sin \varpi t,$$

где V_1, V_2 – некоррелированные случайные величины с математическими ожиданиями, равными нулю, и с дисперсиями $D_1 = D_2 = 2$. Определить, является ли стационарной случайная величина $\xi(t)$.

Р е ш е н и е. Согласно (6.1), (6.2) имеем:

$$m_x(t) = t; \; K_x(t',t) = 2(\cos \varpi t \cos \varpi t' + \sin \varpi t \sin \varpi t') = 2 \cos \varpi (t - t').$$

Корреляционна функция случайной функции $\xi(t)$ удовлетворяет условию стационарности (см. (7.5)), однако математическое ожидание $m_x(t)$ зависит от времени. Случайная величина $\xi(t)$ не стационарна, но центрированная случайная величина $\xi^0(t)$ стационарна.

$$K_x(\tau) = \begin{cases} (\lambda+2)(\lambda+1)(1-|\tau|), & |\tau| \le 1 \\ 0, & |\tau| > 1. \end{cases}$$

15. Заданы две случайные функции:

$$\xi(t) = V_1 \cos \varpi_1 t + V_2 \sin \varpi_1 t; \; \eta(t) = U_1 \cos \varpi_2 t + U_2 \sin \varpi_2 t.$$

Математические ожидания всех случайных величин U_1, U_2, V_1, V_2 равны нулю, дисперсии $D_{U_1} = D_{U_2} = 1$, $D_{V_1} = D_{V_2} = 4$, нормированная корреляционная матрица системы (V_1, V_2, U_1, U_2) имеет вид

$$K = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0{,}5 & 0 \\ & 1 & 0 & -0{,}5 \\ & & 1 & 0 \\ & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Определить взаимную корреляционную функцию $\hat{E}_{xy}(t,t')$ и найти значение этой функции при $t=0,\ t'=1$.

Р е ш е н и е. По (4.14), (4.6) получаем:

$$\hat{E}_{xy}\left(t',t\right)=M\left[\xi^{\circ}(t)\eta^{\circ}(t')\right]=M[(V_1\cos\omega_1 t+V_2\sin\omega_1 t)(U_1\cos\omega_2 t'+$$

$$+U_2\sin\omega_2 t')]=\cos\omega_1 t\cos\omega_2 t' M[V_1U_1]+\cos\omega_1 t\sin\omega_2 t' M[V_1U_2]+$$

$$+\sin\omega_1 t\cos\omega_2 t' M[V_2U_1]+\sin\omega_1 t\sin\omega_2 t' M[V_2U_2]=$$

$$=\cos\omega_1 t\cos\omega_2 t'-\sin\omega_1 t\sin\omega_2 t'=\cos(\omega_1 t+\omega_2 t');$$

$$\hat{E}_{xy}\left(0,1\right)=\cos\omega_2;\ \hat{E}_{yx}\left(0,1\right)=\cos\omega_1;$$

$$\hat{E}_{yx}\left(t,t'\right)=\hat{E}_{xy}\left(t',t\right)=\cos(\omega_1 t'+\omega_2 t).$$

16. Комплексная случайная функция $\zeta(t)$ задана в виде $\zeta(t)=\xi(t)+i\eta(t)$, где

$$\xi\left(t\right)=\sum_{k=1}^{3}\left(\alpha_k+V_k\right)e^{-\alpha_k t};\ \eta\left(t\right)=\sum_{k=1}^{3}\left(\beta_k+U_k\right)e^{-\beta_k t}.$$

Математические ожидания всех случайных величин V_k и U_k $\left(k=1,2,3\right)$ равны нулю, а корреляционная матрица системы случайных величин $\left(V_1,V_2,V_3,U_1,U_2,U_3\right)$ имеет вид

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ & 2 & 0 & 0 & -1 & 0\\ & & 3 & 0 & 0 & 3\\ & & & 1 & 0 & 0\\ & & & & 2 & 0\\ & & & & & 3\end{pmatrix}.$$

Найти характеристики случайной функции $\zeta(t)$.

Р е ш е н и е. Воспользуемся (4.17), (4.14).

Математическое ожидание $m_z\left(t\right)=\sum_{k=1}^{3}a_k e^{-\alpha_k t}+i\sum_{k=1}^{3}b_k e^{-\beta_k t}$;

корреляционная функция

$$K_z(t,t')=K_x(t,t')+K_y(t,t')+i\left[\hat{E}_{xy}(t',t)-\hat{E}_{xy}(t,t')\right],$$

где $K_x(t,t')=\sum_{k=1}^{3}ke^{-\alpha_k(t+t')}$; $K_y(t,t')=\sum_{k=1}^{3}ke^{-\beta_k(t+t')}$;

по (4.14)

$$\hat{E}_{xy}(t',t)=e^{-\alpha_1 t'-\beta_1 t}-e^{-\alpha_2 t'-\beta_2 t}+3e^{-\alpha_3 t'-\beta_3 t};$$

$$\hat{E}_{yx}(t,t')=e^{-\alpha_1 t-\beta_1 t'}-e^{-\alpha_2 t-\beta_2 t'}+3e^{-\alpha_3 t-\beta_3 t'}.$$

17. Случайная функция $\xi(t)$ имеет характеристики:

$$m_x(t)=0,K_x(t,t')=\left[1-(t'-t)^2\right]^{-1}.$$

Найти характеристики случайной функции $\eta(t)=\int\limits_0^t \xi(\tau)d\tau$. Определить, стационарны ли случайные функции $\xi(t)$ и $\eta(t)$.

Р е ш е н и е. В силу линейности преобразования $\int\limits_0^t \xi(\tau)d\tau$ по (5.14), (5.16) получаем:

$$m_y(t)=\int\limits_0^t m_x(t)dt=0;$$

$$K_y(t,t')=\int\limits_0^t dt\int\limits_0^{t'} K_x(t,t')dt'=\int\limits_0^t\left(\int\limits_0^{t'}\left[1+(t'-t)^2\right]^{-1}dt'\right)dt=$$

$$=tarctgt+t'arctgt'-(t-t')arctg(t-t')-\frac{1}{2}\ln\left\{(1+t^2)(1+t'^2)(1+(t'-t)^2)^{-1}\right\}.$$

Случайная функция $\xi(t)$ стационарна: $K_x(t,t')=K_x(t-t')$; случайная функция $\eta(t)=\int\limits_0^t \xi(\tau)d\tau$ нестационарна. Действительно, дисперсия случайной функции равна $D_y(y)=K_y(t,t)=2tarctgt-\ln(1+t^2)$, т. е. зависит от *t*.

18. Случайная функция $\xi(t)$ с характеристиками $m_x(t)=t^2+3$, $K_x(t,t')=5tt'$ подвергается линейному, преобразованию вида $\eta(t)=\int_0^t \tau\xi(\tau)d\tau+t^3$. Определить характеристики случайной функции $\eta(t)$: $m_y(t)$, $K_y(t,t')$.

Р е ш е н и е. Применим формулу (5.15):

$$m_y(t)=\int_0^t \tau\left(\tau^2+3\right)d\tau+t^3=\frac{t^4}{4}+\frac{3t^2}{2}+t^3.$$

Однородная часть рассматриваемого линейного преобразования

$$L_t^0\{\xi(t)\}=\int_0^t \tau\xi(\tau)d\tau.$$

Следовательно, по (5.16)

$$K_y(t,t')=\int_0^t d\tau\int_0^{t'}\tau\tau' K_x(\tau,\tau')d\tau'=5\int_0^t \tau\tau\left(\int_0^{t'}\tau'\tau' d\tau'\right)d\tau=\frac{5}{9}t^3(t')^3.$$

19. Случайная функция $\xi(t)$, имеющая характеристики $m_x(t)=0$ и $K_x(t,t')=3e^{-(t+t')}$ подвергается линейному преобразованию вида $\xi(t)=-t\frac{d\xi(t)}{dt}+\int_0^t \tau\xi(\tau)d\tau+\sin\varpi t$.

Найти корреляционный момент случайных величин $\xi(0)$ и $\eta(1)$ (т. е. двух сечений случайных функций: $\xi(t)$ при $t=0$ и $\eta(t)$ при $t'=1$).

Р е ш е н и е. На основании решения предыдущей задачи $K_{xy}(t,t')=L_t^0\left\{K_x(t,t')\right\}$, где L_t^0 – однородная часть линейного преобразования, применённая к аргументу t'. В нашем случае

$$K_{xy}(t,t')=-3t'\frac{\partial e^{-(t+t')}}{\partial t'}+3\int_0^{t'}\tau' e^{-(t+\tau')}d\tau'=$$

$$= 3t'e^{-(t+t')} + 3e^{-t}\left[e^{-t'}\left(-t'-1\right)+1\right] = 3e^{-t}\left(1-e^{-t'}\right).$$

Полагая $t=0$, $t'=1$, получаем $K_{\xi(0)\eta(1)} = K_{xy}(0,1) = 3(1-e^{-1}) \approx 1{,}9$.

20. Случайная функция $\xi(t)$ задана каноническим разложением $\xi(t) = 1 + t + Ut + Vt^2 + Wt^3;\quad DU = 2;\quad DV = 1;\quad DW = 0{,}1$. Найти математическое ожидание, корреляционную функцию и дисперсию производной процесса $\xi(t)$, т.е. процесса $\eta(t) = \dfrac{d\xi(t)}{dt}$.

Р е ш е н и е. Применим формулы (5.7), (5.11):

$M\xi(t) = 1+t$; $M\eta(t) = 1$;

$K_x(t,t') = 2tt' + t^2t'^2 + 0{,}1t^3t'^3$; $K_y(t,t') = 2 + 4tt' + 0{,}9t^2t'^2$;

и по (2.9) находим дисперсию $D\eta(t) = 2 + 4t^2 + 0{,}9t^4$.

21. Доказать, что операции неопределенного интегрирования и дифференцирования случайного процесса, понимаемые в смысле среднего квадратического, взаимно обратные, т. е. если процесс $\xi(t)$ непрерывен в среднем и

$$\eta(t) = \int_0^t \xi(\tau)d\tau \text{, то } \frac{d\eta(t)}{dt} = \xi(t).$$

Р е ш е н и е. Докажем, что $\underset{\Delta t\to 0}{l.i.m.}\dfrac{\eta(t+\Delta t)-\eta(t)}{\Delta t} = \xi(t)$.

Действительно,

$$\frac{\eta^0(t+\Delta t)-\eta^0(t)}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t}\int_t^{t+\Delta t}\xi^0(\tau)d\tau.$$

Тогда

$$M\left\{\frac{\eta^0(t+\Delta t)-\eta^0(t)}{\Delta t} - \xi^0(t)\right\}^2 = M\left\{\frac{1}{\Delta t}\int_t^{t+\Delta t}\xi^0(\tau)d\tau - \xi^0(t)\right\}^2 =$$

$$=\frac{1}{\Delta t^2}\int\limits_t^{t+\Delta t}\int\limits_t^{t+\Delta t}K_x(\tau,\tau')d\tau d\tau'-\frac{2}{\Delta t}\int\limits_t^{t+\Delta t}K_x(t,\tau)d\tau+K_x(t,t').$$

Так как процесс по условию непрерывен, то $K_x(t,t')$ – непрерывная функция, следовательно, применяя к правой части теорему о среднем, получим

$$M\left\{\frac{\eta^0(t+\Delta t)-\eta^0(t)}{\Delta t}-\xi^0(t)\right\}^2=K_x\left(\tau^*,\widehat{\tau}\right)-2K_x(t,\tilde{\tau})+K_x(t,t'),$$

где $t<\tau^*,\widehat{\tau},\tilde{\tau}<t+\Delta t$, а тогда при $\Delta t\to 0$ вся правая часть стремится к нулю, т.е.

$$\underset{\Delta t\to 0}{l.i.m.}\frac{\eta^0(t+\Delta t)-\eta^0(t)}{\Delta t}=\xi^0(t),\text{ или }\frac{d\eta^0(t)}{dt}=\xi^0(t).\text{ Но }\frac{dm_y(t)}{dt}=m_x(t).$$

Складывая почленно эти два равенства, получим требуемое.

22. Пусть $\xi(t)$ – процесс Пуассона с параметром λ и $\eta(t)=\xi^0(t)=\xi(t)-\lambda\, t$. Будет ли этот процесс $\eta(t)$ эргодичен относительно своего математического ожидания?

Р е ш е н и е. Нет, т.к. не выполняется условие (2.1.49). Действительно,

$$\frac{1}{T^2}\int\limits_0^T\int\limits_0^T K_x(t,t')dtdt'=\frac{1}{T^2}\int\limits_0^T dt\left\{\int\limits_0^t K_x(t,t')dt'+\int\limits_t^T K_x(t,t')dt'\right\}=\frac{2\lambda T}{3}-/\to\infty.$$

23. Будут ли непрерывны и дифференцируемы стационарные процессы, имеющие корреляционные функции

1) $De^{-a|\tau|}\cos b\tau;$

2) $De^{-a|\tau|}(\cos b\tau+\frac{a}{b}\sin b|\tau|)$?

Р е ш е н и е. Оба процесса не непрерывны; первый не дифференцируем, так как первая производная $K_x(\tau)$ в нуле разрывна. Второй процесс дифференцируем.

24. Стационарный и нормальный процесс $\xi(\tau)$ имеет математическое ожидание $m_x = 5$ и корреляционную функцию $K_x(\tau) = e^{-2|\tau|}(\cos 2\tau + \sin 2|\tau|)$. Найти а) одномерную плотность процесса $\eta(t) = \dfrac{d\xi(t)}{dt}$; б) вероятность того, что $|\eta(t)| < \sqrt{3}$.

Р е ш е н и е.

а) Положим $\eta(t) = \xi'(t)$, тогда по теореме в пункте 7.2 $m_y \equiv 0$, а

$K_y(\tau) = -K_x''(\tau) = 8e^{-2|\tau|}\{\cos 2\tau - \sin|2\tau|\}$; $D_v = K_y(0) = 8$.

Одновременно плотность $\eta(t)$ будет $f_y(x) = \dfrac{e^{-\frac{x^2}{16}}}{4\sqrt{\pi}}$;

б) $P\{|\xi'(t)| < \sqrt{3}\} = \dfrac{1}{4\sqrt{\pi}} \displaystyle\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} e^{-\frac{x^2}{16}} dx \cong 0,4582$, т.е. в любой момент времени t – касательная к произвольной реализации этого процесса с вероятностью, приблизительно равной 0,4582, будет составлять с осью ot угол, больший 60^0.

25. Стационарный процесс $\xi(t)$ имеет корреляционную функцию $K_x(\tau) = Ae^{-2|\tau|}(1 + 2|\tau|)$. Во сколько раз дисперсия случайной величины $\eta = \displaystyle\int_0^{10} X(t)dt$, больше чем дисперсия процесса $\xi(t)$?

Р е ш е н и е. Находим $D\xi(t) = K_x(0) = A$. Для нахождения $K_б(\tau)$ применим (5.16) к $K_x(\tau)$, т.е. вычислим двойной интеграл

$$K_y(\tau) = K_y(t' - t) = A\int_0^{10}\int_0^{10} e^{-2|t'-t|}(1 + 2|t' - t|)dtdt'.$$

После чего получим

$$\frac{D\eta(t)}{D\xi(t)} = \frac{79}{4} - \frac{49}{4}e^{-20} + 63e^{-40} \cong \frac{79}{4}.$$

26. Угол перемещения радиолокатора в горизонтальной плоскости представляет собой нормальный случайный процесс $\xi(t)$ с математическим ожиданием $m_x = 0$ и корреляционной функцией $k_x(\tau) = D_x e^{-\alpha|\tau|} \cos \beta\tau$, где $D_x = 4\text{ãðàä}^2$; $\alpha = 10^{-3}$ 1/с; $\beta = 0{,}1$ 1/с. В начальный момент $t = 0$ угол перемещения равен нулю: $\xi(0) = 0$. Найти вероятность p того, что в момент $t' = 0{,}2c$ угол перемещения будет меньше одного градуса.

Р е ш е н и е. Обозначим $\xi(0) = \xi_0$; $\xi(t_1) = \xi_1$. Условный закон распределения случайной величины ξ_1 при условии, что случайная величина $\xi_0 = x_0$, найдем из выражения $f(x_1 \mid x_0) = f(x_1, x_0) / f(x_1)$, где $f(x_1, x_0)$ – нормальный закон распределения системы двух случайных величин с характеристиками: $m_1 = m_0 = 0$; $D_1 = D_0 = D_x = 4\text{ãðàä}^2$;

$$k_{x_1,x_0} = k_x(0,2) = D_x e^{-\alpha|0,2|} \cos \beta \cdot 0{,}2 = 3{,}68\text{ãðàä}^2;$$

$$r_{x_1,x_0} = k_{x_1,x_0} / \sqrt{D_{x_1} D_{x_0}} = 0{,}921.$$

Условный закон распределения $f(x_1 \mid x_0 = 0)$ будет нормальным с характеристиками $m_{x_1|x_0} = 0$; $\sigma_{x_1|x_0} = \sigma_2 \sqrt{1 - r_{x_1,x_0}^2} = 0{,}776$. Тогда

$$p = \int_{-1}^{1} f(x_1 \mid x_0 = 0)\, dx = \Phi\left(\frac{1}{0{,}776\sqrt{2}}\right) = 0{,}8852.$$

27. Некоторая система описывается дифференциальным уравнением

$$\frac{d^3 y}{dt^3} + 6\frac{d^2 y}{dt^2} + 11\frac{dy}{dt} + 6y = 7\frac{d^3 x}{dt^3} + 5x.$$

На вход этой системы подается стационарный случайный процесс $\xi(t)$ с математическим ожиданием m_x и корреляционной функции $K_x(\tau) = 2e^{-|\tau|}(1 + |\tau|)$. Найти математическое ожидание и спектральную плотность процесса $\eta(t)$ на выходе этой системы.

Р е ш е н и е. Аналогично предыдущей задаче находим $m_y = \frac{5}{6} m_x$;

имея переходную функцию системы

$$\Phi(i\omega) = \frac{7(i\omega)^3 + 5}{(i\omega)^3 + 6(i\omega)^2 + 11(i\omega) + 6},$$

мы можем пользоваться формулой $s_y(\omega) = \left|\Phi(i\omega)\right|^2 s_x(\omega)$, где $s_x(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} K_x(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau.$

Искомая спектральная плотность $s_y(\omega) = \frac{4(49\omega^2 + 25)}{\pi(\omega^2+1)(\omega^2+4)(\omega^2+9)}$.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Что называется реализацией случайной функции?
2. При каких условиях можно считать случайную функцию заданной?
3. От чего зависят вероятностные характеристики марковского процесса?
4. По каким признакам классифицируют случайные процессы?
5. В чем заключается характерная особенность временных рядов?
6. Приведите примеры временных рядов, которые можно наблюдать почти бесконечно.
7. Каковы особенности наблюдений в случайных рядах?
8. От чего зависит выбор критерия до некоторой степени?
9. Каково распределение числа поворотных точек в случайном ряду?
10. Чему равна вероятность обнаружения поворотной точки в любой группе из трех значений?
11. Что называется дисперсией случайного процесса?
12. Как вычисляется математическое ожидание случайного процесса?
13. Что называется корреляционной функцией случайного процесса?
14. Что играет роль моментов распределения в теории случайных функций?
15. Что называется порядком момента функции?
16. Раскройте смысл коэффициента корреляции.
17. В каком случае случайные процессы являются некоррелированными?
18. Чему равна корреляционная функция суммы случайных процессов, если они некоррелированные?
19. Что необходимо, чтобы случайный процесс $\xi(t)$ был непрерывен в точке?
20. Что следует из непрерывности случайного процесса?
21. Сформулируйте необходимое условие дифференцируемости случайного процесса.

22. Сформулируйте достаточное условие дифференцируемости случайного процесса.

23. Что представляет собой интеграл Стилтьеса?

24. Чему равно математическое ожидание интеграла от случайного процесса?

25. Чему равна корреляционная функция интеграла от случайного процесса?

26. Что называется каноническим разложением действительной случайной функции?

27. В каком случае случайный процесс называется стационарным?

28. От чего не зависит одномерный закон распределения?

29. От чего зависит двумерный закон распределения?

30. Что такое периодический стационарный случайный процесс?

31. Что изображает спектральное представление?

32. Чему равна дисперсия стационарного случайного процесса?

33. Что такое белый шум?

34. Что называют случайным процессом с дискретным спектром?

35. Как связаны корреляционная функция и спектральная плотность стационарной случайной функции с непрерывным спектром?

36. Какие характеристики стационарных случайных функций с непрерывным спектром являются полезными?

37. Что называют линейной динамической системой с постоянными коэффициентами?

38. Что такое передаточная функция линейной динамической системы?

39. Какой процесс называется эргодическим?

40. Если нормальный случайный процесс стационарен в широком смысле, то из какого условия следует, что он эргодичен как по математическому ожиданию, так и по корреляционной функции?

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Случайная функция $\xi(t)$ состоит из отрезков горизонтальных прямых единичной длины, ординаты которых взаимно независимы, могут с одинаковой вероятностью иметь любой знак, а их абсолютные величины подчиняются закону гамма-распределения $f\left(|x|\right)=\dfrac{|x|^{\lambda}}{\Gamma\left(\lambda+1\right)}e^{-|x|}$. Определить $K_x(\tau)$.

2. Процесс $\xi(t)$ изменяет свои значения в случайные моменты времени. Значения $\xi(t)$ в промежутках между каждыми двумя скачками не изменяются и представляют собой независимые случайные величины с математическим ожиданием, равным нулю, и одинаковой дисперсией D. Найти математическое ожидание, дисперсию и корреляционную функцию этого процесса.

3. Случайный процесс $\xi(t)$ может принимать только два значения: ± 1, причем число перемен знака $\xi(t)$ в течение промежутка $\left(t, t+\tau\right)$ – есть случайная величина, распределенная по закону Пуассона с параметром $a\tau$ (a – положительная постоянная). Считая $M\xi(t)\equiv 0$, найти корреляционную функцию и дисперсию этого процесса.

4. Случайная функция $\xi(t)$ задана каноническим разложением

$$\xi(t)=t-3\cos t+U(t+\cos t)+V\cos 2t;\quad DU=1;\quad DV=2.$$

Найти $M\xi(t),\ D\xi(t)$ и $K_x(t,t')$.

5. Пусть дан случайный вектор $\left(x_1, x_2, x_3\right)$ с математическим ожиданием (0, 0, 0) и корреляционной матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ & 4 & 1 \\ & & 9 \end{pmatrix}.$$

Можно ли его линейным преобразованием пространства привести к вектору с попарно некоррелированными компонентами?

6. Дана случайная функция $\xi(t)=x_1 t+x_2\sin t,$ где случайный вектор $\left(x_1, x_2\right)$ имеет математическое ожидание (+1,-1) и корреляционную матрицу

$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ & 3 \end{pmatrix}$. Построить каноническое разложение этой случайной функции; найти ее математическое ожидание и дисперсию.

7. Дан случайный вектор (x_1, x_2, x_3, x_4) с математическим ожиданием (0, 0, 0, 0) и корреляционной матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ & 4 & -1 & 2 \\ & & 9 & 4 \\ & & & 25 \end{pmatrix}.$$

Указать линейное преобразование, приводящее данный вектор к вектору (V_1, V_2, V_3, V_4) с попарно некоррелированными компонентами.

8. Случайная функция $\xi(t)$ с характеристиками $m_x(t) = 0$, $K_x(t', t)$ подвергается линейному неоднородному преобразованию: $\eta(t) = L_t^0\{\xi(t)\} + \varphi(t)$, где $\varphi(t)$ – неслучайная функция. Найти взаимную корреляционную функцию $K_{xy}(t, t')$.

9. Имеется случайный процесс $\xi(t)$ с математическим ожиданием $m_x(t)$ и корреляционной функцией $K_x(t', t)$. Найти характеристики $m_y(t)$, $K_y(t', t)$ и $m_y(t)$ ее производной $\eta(t) = d\xi(t)/dt$. Найти также взаимную корреляционную функцию $K_{xy}(t, t')$.

10. Случайная функция $\xi(t)$ имеет характеристики $m_x(t) = 1$ и $K_x(t, t') = e^{\alpha(t+t')}$. Найти характеристики случайной функции $\eta(t) = t\frac{d}{dt}\xi(t) + 1$. Определить, являются ли стационарными случайные функции $\xi(t)$ и $\eta(t)$.

11. Имеется случайный процесс $\xi(t)$ и даны его характеристики: $m_x(t)$, $K_x(t, t')$. Найти характеристики $m_y(t)$, $K_y(t, t')$ интеграла этого случайного процесса $\eta(t) = \int_0^t \xi(\tau)d\tau$, а также взаимную корреляционную функцию $K_{xy}(t, t')$.

12. Дана случайная функция $\xi(t)=t+x_1\cos t+x_2\sin t$, где случайный вектор (x_1,x_2) имеет математическое ожидание $\left(-\frac{1}{2},1\right)$ и корреляционную матрицу $\begin{pmatrix}3 & -2\\ & 2{,}9\end{pmatrix}$. Построить каноническое разложение процесса, найти его математическое ожидание, дисперсию и корреляционную функцию.

13. В условиях предыдущей задачи найти математическое ожидание, корреляционную функцию и дисперсию процесса $\eta(t)=\frac{d\xi(t)}{dt}$.

14. Дан случайный процесс $\xi(t)=x_1f_1(t)+x_2f_2(t)+x_3f_3(t)$, где $f_1(t), f_2(t), f_3(t)$ – некоторые неслучайные функции, а случайный вектор (x_1,x_2,x_3) имеет математическое ожидание (2,5; 1; 2) и корреляционную матрицу

$$\begin{pmatrix}2 & 1 & 0{,}5\\ & 3 & 2\\ & & 4\end{pmatrix}.$$

Найти каноническое разложение случайного процесса $\xi(t)$; найти математическое ожидание, корреляционную функцию и дисперсию этого процесса.

15. $\xi(t)$ – случайный процесс с нулевым математическим ожиданием и корреляционной функцией $K_x(t,t')=De^{-\alpha|\,t'-t|}$.

Найти приближенное каноническое разложение этого процесса, взяв за случайные коэффициенты линейные комбинации сечений этого процесса в моменты $t_n=(n-1)\tau,\quad n=1,2,\ldots$.

16. Известно, что $M\xi(t)=2t+1$; $K_x(t,t')=e^{-(t'-t)^2}$; $\eta(t)=\frac{d\xi(t)}{dt}$. Найти математическое ожидание, корреляционную функцию и дисперсию процесса $\eta(t)$.

17. На плоскости движется случайная точка M так, что ее полярный угол

φ является случайной функцией времени с корреляционной функцией $K_\varphi = a^2 e^{-b^2(t'-t)^2}$. Найти дисперсию угловой скорости ω полярного радиуса вектора точки M.

18. Дан случайный процесс $\xi(t) = |\sin t|\sin(\omega\, t + \varphi)$, где ω – положительная постоянная, а φ – случайная величина, равномерно распределенная на $[0, 2\pi]$. Будет ли этот процесс дифференцируем, и будут ли дифференцируемы реализации этого процесса?

19. На вход интегрирующего устройства проступает случайная функция $\xi(t)$ с $\xi(t) = 0{,}2\cos^2\omega\, t$ и $K_x(t,t') = 0{,}4\cos\omega\, t\cos\omega\, t'$.

Найти математическое ожидание, корреляционную функцию и дисперсию случайной функции $\eta(t)$ на выходе интегратора.

20. Математическое ожидание и корреляционная функция процесса $\xi(t)$ заданы следующими формулами:

$$m_x(t) = c\sin\omega\,\mathrm{t}\ ,\ K_x(t,t') = De^{-\alpha|t'-t|}\left\{\cos\omega(t'-t) + \frac{a}{\omega}\sin\omega|t'-t|\right\},$$

где a, c, D и ω – положительные постоянные. Найти математическое ожидание, корреляционную функцию и дисперсию производной процесса $\xi(t)$.

21. Пусть φ – случайная величина с плотностью $f_\varphi(x) = \cos x,\ \ 0 \le x \le \frac{\pi}{2}$; a и ω – положительные постоянные. Построим случайный процесс $\xi(t) = a\sin(\omega\, t + \varphi)$.

а) Будет ли этот процесс стационарным?

б) Можно ли, пользуясь одной реализацией этого процесса, на достаточно большом промежутке времени оценить его математическое ожидание?

22. Пусть φ – случайная величина, равномерно распределенная на отрезке $[0, 2\pi]$, a и ω – положительные постоянные. Доказать, что случайный процесс $\xi(t) = a\sin(\omega\, t + \varphi)$ стационарный (в широком смысле).

Таким образом, процесс стационарный.

23. Дан случайный процесс $\xi(t) = a\sin(\omega\, t + \varphi)$, где a и ω – положительные постоянные, φ – нормальная случайная величина с $M\varphi = 0,\ D\varphi = 1.$ Будет ли $\xi(t)$ стационарным процессом? Найти математическое ожидание, корреляционную функцию и дисперсию $\xi(t)$.

24. Случайный процесс $\xi(t)$ изменяется лишь в дискретные моменты времени: $0,1,2,\ldots,n,\ldots$ В промежутках между этими моментами процесс $\xi(t)$ сохраняет постоянные значения, которые являются взаимно-независимыми случайными величинами с плотностью $f(x) = \dfrac{|x|^{\lambda}}{2\Gamma(\lambda+1)} e^{-|x|}, \quad -\infty < x < \infty$.

Будет ли этот процесс стационарным?

25. Пусть $\xi(t)$ – стационарный и нормальный процесс с математическим ожиданием m и корреляционной функцией $K_x(\tau)$. Написать выражение одномерной и двумерной плотностей этого процесса.

26. До какого порядка существуют производные случайной функции $\xi(t)$, если ее корреляционная функция имеет вид $K_x(\tau) = \sigma_x^2 e^{-a|\tau|}\left(1 + \alpha|\tau| - 2\alpha^2\tau^2 + \frac{1}{3}\alpha^3\left|\tau^3\right|\right)$?

27. Сколько производных имеет случайная функция $\xi(t)$, обладающая корреляционной функцией $K_x(\tau) = \sigma^2 e^{-a^2\tau^2}$.

28. Сколько раз можно дифференцировать случайную функцию $\xi(t)$, если $K_x(\tau) = \sigma^2 e^{-a|\tau|}\left(1 + \alpha|\tau| + \frac{1}{3}\alpha^2\tau^2\right)$?

29. При измерении слабого тока зеркальным гальванометром показания прибора непрерывно автоматически записывались в течении промежутка времени длинной T *сек.* Среднее значение полученной функции времени на отрезке $[0,T]$ I_{cp} принято за искомое значение силы тока. Найти дисперсию этой случайной величины I_{cp}, если флуктуация силы измеряемого тока есть стационарный случай процесс с корреляционной функцией $K_I(\tau) = Ae^{-\alpha|\tau|}$.

30. Определить корреляционную функцию $K_x(t_1,t_2)$, если $\xi(t)=\sum_{j=1}^{k}\left(A_j\cos\varpi_j t+B_j\sin\varpi_j t\right)$, где ω_j – заданные числа, а вещественные случайные величины A_j и B_j, взаимно не коррелированны, имеют нулевые математические ожидания и дисперсии, определяемые равенствами $D\left[A_j\right]=D\left[B_j\right]=\sigma_j^2 \quad (j=1,2,...,k)$.

31. $\xi(t)$ – дважды дифференцируемый случайный процесс с корреляционной функцией $K_x(t,t')$;

а) найти корреляционную функцию связи между процессами $\xi(t)$ и $\eta(t)=f(t)\xi(t)+\varphi(t)\dfrac{d^2\xi(t)}{dt^2}$ где $f(x)$ и $\varphi(x)$ – случайные функции времени;

б) то же для случая, когда процесс $\xi(t)$ стационарный.

32. На вход некоторого устройства попадает переменное напряжение, амплитуда которого является стационарным и нормальным случайным процессом $\xi(t)$ со средним $m_x=5$ и корреляционной функцией $K_x(\tau)=9e^{-2|\tau|}\left(1+2|\tau|\right)$. Найти среднюю длительность выброса амплитуды входного напряжения за уровень 8.

33. Найти среднее число максимумов стационарного и нормального процесса $\xi(t)$ в единицу времени, если корреляционная функция процесса $\xi(t)$ равна $K_x(\tau)=\sigma^2 e^{-\alpha|\tau|}\left(1+\alpha|\tau|+\dfrac{\alpha^2\tau^2}{3}\right)$.

34. Стационарный процесс $\xi(t)$ имеет корреляционную функцию $K_x(\tau)=\sigma^2 e^{-\alpha|\tau|}(1+\alpha|\tau|)$. Найти его спектральную плотность.

35. Будут ли дифференцируемы стационарные процессы, имеющие следующие спектральные плотности:

1) $\quad s(\omega)=\dfrac{a}{\omega^2+b^2}$;

2) $$s(\omega)=a\left[\frac{1}{a^2+(\omega-\beta)^2}+\frac{1}{a^2+(\omega+\beta)^2}\right];$$

36. Стационарный процесс $\xi(t)$ имеет корреляционную функцию $K_x(\tau)=\sigma^2 e^{-\alpha|\tau|}(1+\alpha|\tau|+\frac{\alpha^2\tau^2}{3})$. Найти спектральную плотность этого процесса.

37. Стационарный процесс $\xi(t)$ имеет корреляционную функцию $K_x(\tau)=\sigma^2 e^{-\alpha|\tau|}(\cos\beta\tau+\frac{\alpha}{\beta}\sin\beta|\tau|)$. Найти спектральную плотность этого процесса.

38. Найти спектральную плотность процесса $\xi(t)$ имеющую корреляционную функцию $K_x(\tau)=\sigma^2 e^{-\alpha|\tau|}(\cos\beta\tau-\frac{\alpha}{\rho}\sin\beta|\tau|)$. Будет ли этот процесс дифференцируем?

39. Стационарный случайный процесс имеет корреляционную функцию $K_x(\tau)=\sigma^2 e^{-\alpha|\tau|}(1+\alpha|\tau|-2\alpha^2\tau^2+\frac{\alpha^3|\tau|^3}{3})$. Найти его спектральную плотность. Будет ли этот процесс дифференцируем?

40. Стационарный процесс $\xi(t)$ имеет корреляционную функцию $K_x(\tau)=A\,e^{-\alpha^2\tau^2}$. Найти взаимную спектральную плотность $s_{xy}(\omega)$, если $\eta(t)=\frac{d\xi(t)}{dt}$. Найти так же $K_{xy}(\tau)$.

41. Некоторая динамическая система описывается уравнением $5\frac{d\eta}{dt}+\eta=4\frac{d\xi}{dt}+3\xi$. На вход этой системы подается стационарная случайная функция $\xi(t)$ с математическим ожиданием $m_x=3$, корреляционной функцией $K_x(\tau)=2e^{-\alpha|\tau|}$. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной функции $\eta(t)$ на выходе системы.

42. На вход динамической системы, которая описывается дифференциальным уравнением $3y'+y=2x'+3x$; $\left(x=x(t), y=y(t)\right)$, подается стационарный случайный процесс $\xi(t)$, с $m_x = 3$ и $K_x(\tau) = 10e^{-\alpha|\tau|}$. Найти математическое ожидание и дисперсию случайного процесса $\eta(t)$ на выходе системы.

43. $\xi(t)$ и $\eta(t)$ – независимые стационарные процессы, имеющие соответственно математические ожидания m_x и m_y и корреляционные функции $K_x(\tau) = A_1 e^{-\alpha_1|\tau|}$, $K_x(\tau) = A_1 e^{-\alpha_1|\tau|}$.

Найти спектральную плотность процесса $\zeta(t) = \xi(t)\eta(t)$.

44. Стационарный процесс $\xi(t)$ имеет математическое ожидание m_x и спектральную плотность $s_x(\omega)$. Найти спектральную плотность процесса $\eta(t) = \xi^2(t)$.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Булинский А.В. Теория случайных процессов / А.В. Булинский, А.Н. Ширяев. – ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 236 с.

2. Вентцель А.Д. Курс теории случайных процессов / А.Д. Вентцель. – М.: Наука, 1996. – 320 с.

3. Вентцель Е.С. Теория случайных процессов и ее инженерные приложения / Е.С. Вентцель, Л.А. Овчаров. – М.: Высшая школа, 2001. – 382 с.

4. Климов Г.П. Вероятность, процессы, статистика. Задачи с решениями / Г.П. Климов, А.Л. Кузьмин. – М.: изд. МГУ, 1985. – 232 с.

5. Комени Дж. Конечные цепи Маркова / Дж. Комени, Дж Снелл. – М.: Наука, 1982. – 320 с.

6. Крамер Г. Стационарные случайные процессы / Г. Крамер, М. Лидбеттер. – М.: Мир. 1969. – 400 с.

7. Миллер Б.М., Панков А.Р. Теория случайных процессов в примерах и задачах / Б.М. Миллер, А.Р. Панков. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 320 с.

8. Натан А.А. Случайные процессы: Учебное пособие / А.А. Натан. – М.: МФТИ, 1978. – 118 с.

9. Прохоров Ю.В., Розанов Ю.А. Теория вероятностей: Основные понятия. Предельные теоремы. Случайные процессы. – М.: Наука, 1987.

10. Прохоров А.В. Задачи по теории вероятностей. Основные понятия. Предельные теоремы. Случайные процессы / А.В. Прохоров, В. Г. Ушаков, Н. Г. Ушаков. – М.: Наука, 1986. – 328 с.

11. Розанов Ю.А. Введение в теорию случайных процессов / Ю.А. Розанов. – М.: Наука, 1979. – 1984 с.

12. Тутубалин В.Н. Теория вероятностей и случайных процессов / В.Н. Тутубалин. – М.: Изд-во МГУ, 1992. – 400 с.

13. Володин Б.Г. Сборник задач по теории вероятностей, математической статистике и теории случайных функций / Под ред. А.А. Свешникова – М.: Наука, 1970. – 312 с.

14. Большев Л.Н. Таблицы математической статистики / Л.Н. Большев , Н.В. Смирнов. – М.: Наука, Главная редакция физ.-мат. лит., 1983. – 416 с.

15. Гихман И.И. Введение в теорию случайных процессов / И.И. Гихман, А.В. Скороход – М.: Наука, 1977. – 568 с.

16. Севастьянов Б.А. Ветвящиеся процессы / Б.А. Севастьянов. – М.: Наука, 1971. – 436 с.

17. Баруча-Рид А.Т. Элементы теории марковских процессов и их приложения / А.Т. Баруча-Рид. – М.: Наука, 1969. – 512 с.

18. Вишневский Л.Д. Математическая статистика и случайные процессы: Практикум / Л.Д.Вишневский, Д.В.Гусак, Т.А.Погребецкая, Г.Л. Тер-Саакянц. – К.: Вища школа, 1992. – 530 с.

19. Корн Г. Справочник по математике для научных работников и инженеров / Г.Корн , Т.Корн. – М.: Наука, 1974. – 960 с.