КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

ВІСНИК

КИЇВСЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

СЕРІЯ ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНІ НАУКИ

ВИПУСК №4 2011

Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка, випуск №4, 2011
Серія фізико-математичні науки

З 1991 року серії вісників Київського університету "Математика і механіка", "Физика", "Моделирование и оптимизация сложных систем" реорганізовано у "Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки". У віснику містяться результати нових досліджень у різних галузях математики, інформатики, механіки, фізики та радіофізики для наукових працівників, викладачів, аспірантів, інженерів і студентів. Друкується за рекомендаціями Вчених Рад фізичного, радіофізичного, механіко-математичного факультетів та факультету кібернетики.

Журнал "Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія фізико-математичні науки" включено до переліку фахових видань ВАК України.

Адреса редакційної колегії:

Факультет кібернетики, Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
пр. Глушкова, 4 д, 03680 Тел. (044) 259-01-49

ISBN 978-617-571-036-4
ISSN 1812-5409

ЗМІСТ

АЛГЕБРА, ГЕОМЕТРІЯ ТА ТЕОРІЯ ІМОВІРНОСТЕЙ

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ, МАТЕМАТИЧНА ФІЗИКА ТА МЕХАНИКА

КОМП'ЮТЕРНІ НАУКИ ТА ИНФОРМАТИКА

УДК 512.55

В'ячеслав В. Швиров, асистент

Про кількість класів еквівалетності напівланцюгових нерозкладних кілець.

У роботі встановлюються зв'язки між кількістю класів еквівалентності напівланцюгових нерозкладних кілець та числами Каталана. Також отримані комбінаторні результати про кількість класів кілець, що мають скінченну розмірність Круля.

Ключові слова: напівланцюгове кільце, розмірність Круля кільця, первинний сагайдак, числа Каталана.

Vjacheslav V. Shvyrov, assistant

On the number equivalence classes of serial indecomposable rings.

We learn connections with the number equivalence classes of serial indecomposable rings and Catalan numbers. Also are obtained some combinatorial results about serial rings with finite Krull dimension.

Key Words: serial ring, Krull dimension of the ring, prime quiver, Catalan numbers.

E-mail: slavik_asas@mail.ru

Стаття представлена доктором ф.-м. наук, професором Кириченко В. В.

1 Вступ. Основні визначення.

Метою роботи є вивчення деяких комбінаторних властивостей, що виникають при класифікації напівланцюгових кілець із скінченною розмірністю Круля, кусково нетерових напівланцюгових кілець, та напівланцюгових кілець з нетеровою діагоналлю нільпотентним первинним радікалом, первинний сагайдак яких є ланцюг.

Розмірність Круля напівланцюгових кілець вивчалася багатьма авторами. Чаттерс у [6] доводить структурну теорему для первинних напівланцюгових кілець зі скінченною розмірністю Круля. М. Апхам [4] отримує структурну теорему для несінгулярних напівланцюгових кілець з розмірністю Круля одиниця. У випадку напівланцюгових кілець із скінченною розмірністю Крулля виникають комбінаторні результати, пов'язані із класифікацією таких кілець. Зв'язки між кількістю допустимих послідовностей та числами Каталана вивчалися у [8]. В роботі істотньо використовуються результати робіт, Н.М. Губарені, В.В. Кириченко [1],[2], а також Г. Пунинського [5].

Означення 1.1. Модуль M називається *ланцюговим*, якщо гратка його підмодулів утворює ланцюг, тобто множина всіх підмодулів модулю M є лінійно впорядкована відносно включення. Модуль називається *напівланцюговим*, якщо він розкладається у скінченну пряму суму ланцюгових модулів.

Означення 1.2. Кільце R називається *ланцюговим справа*, якщо R_R є правим ланцюговим модулем, тобто гратка правих ідеалів є лінійно впорядкована.

Означення 1.3. Кільце R називається *напівланцюговим справа*, якщо R_R є напівланцюговим модулем. Кільце яке є напівланцюгове справа та зліва називається напівланцюговим.

Означення 1.4. Нехай M – правий R-модуль. Розмірність Круля модуля M будемо позначати через $Kdim(M)$ і визначимо наступним чином:

якщо $M = 0$, тоді $Kdim(M) = -1$;

якщо α – ординал і $Kdim(M) \not< \alpha$, тоді $Kdim(M) = \alpha$, якщо не існує нескінченного убиваючого ланцюга

$$M = M_0 \supseteq M_1 \supseteq M_2 \supseteq \dots$$

підмодулів M_i, таких, що для $i = 1, 2, \dots$, $Kdim(M_i/M_{i+1}) \not< \alpha$.

Якщо не існує ординалу α, такого, що $Kdim(M) = \alpha$, то будемо говорити, що M не має розмірності Круля.

Означення 1.5. Правою розмірністю Круля кільця R називається розмірність Круля правого регулярного модуля R_R і будемо позначати її через $Kdim(R)$.

Наступний факт ([3]) корисний при обчислюванні розмірності Круля. Якщо модуль M має розмірність Круля, тоді $Kdim(M) \leq \sup\{Kdim(M/E) + 1 \mid E$ – істнотній підмодуль $M\}$.

Твердження 1. ([5]) Для кожноо напівланцюгового кільця R і натурального n, $Kdim(R) \geq n$ тоді і тільки тоді, коли $Kdim(R_i) \geq n$ для кожного i.

2 Класи еквівалентності напівланцюгових кілець з скінченною розмірністю Круля.

Означення 2.1. Кільце A називається кусково нетеровим справа, якщо воно задовільняє наступним умовам

i) A має скінченну множину попарно ортогональних примітивних ідемпотентів $e_1, \ldots, e_n$, таких, що $1 = e_1 + \ldots + e_n$.

ii) e_iAe_i – нетерово справа для кожного примітивного ідемпотента e_i, $i = 1, \ldots, n$ (див. [2]).

Аналогічно визначаються кусково нетерові зліва кільця. Кусково нетерове зліва й справа кільце називається кусково нетеровим.

У зв'язку з твердженням 1 для напівланцюгових кусково нетерових кілець введемо наступну класифікацію таких кілець. Нехай A і B напівланцюгові кусково нетерові кільця, що мають розмірність Круля 1. $1_A = e_1 + e_2 + \ldots + e_n$, $1_B = f_1 + f_2 + \ldots + f_m$. Позначимо $A_i = e_iAe_i$, $B_j = f_jBf_j, i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, m$. Покладемо

$$A \sim B \Leftrightarrow \{n = m,\ \sum_{i=1}^{n} Kdim(A_i) = \\ = \sum_{j=1}^{m} Kdim(B_i), i, j = 1, \ldots, n)\}.$$

Позначимо через $\mathcal{A}_{1,n}$ класс всіх напівланцюгових кусково нетерових кілець, таких, що мають розмірність Круля одиниця і для кожного кільця $A \in \mathcal{A}_{1,n}$ одиниця є сумою n ортогональних ідемпотентів $1 = e_1 + \ldots + e_n$, $n \in N$. Якщо $\sum_{i=1}^{n} Kdim(A_i) = s$ для деякого i. Відповідний клас еквівалентності будемо позначати через $\mathcal{A}_{1,n,s}$.

Справедлива наступна теорема

Теорема 1. *Нехай $n \in N$, тоді кількість класів еквівалентності за відношенням $\sim$ на множині $\mathcal{A}_{1,n}$ напівланцюгових кусково нетерових кілець дорівнює $n + 1$.*

Доведення. Нехай A – довільне напівланцюгове кусково нетерове кільце. Тоді для будь-якого локального ідемпотенту e, eAe – ланцюгове нетерове кільце. Одже eAe є або дискретно нормоване кільце, або артинове ланцюгове кільце. У першому випадку розмірність Круля $Kdim(eAe) = 1$ оскільки eAe двобічно нетерове і ланцюгове. У другому випадку розмірність Круля дорівнює 0, оскільки eAe артинове.

Нехай $n \in N$, $Kdim(A_i) \leq 1$, $i = 1, \ldots, n$ для будь-якого кусково нетерового кільця. Звідси

$$\sum_{i=1}^{n} Kdim(A_i) \leq n,\ i = 1, \ldots, n.$$

Кількість всіх різних послідовностей довжини n з нулів та одиниць і впорядкованих за зростанням є $n + 1$, одже кількість класів еквівалентності дорівнює $n + 1$.

Позначимо через $\mathcal{A}_{k,n}$ класс всіх нерозкладних напівланцюгових кілець, таких, що мають скінченну розмірність Круля, яка дорівнює k, $k \in N$ і для кожного кільця

$$A \in \mathcal{A}_{k,n} \Leftrightarrow Kdim(A) = k,\ 1_A = e_1 + e_2 + \ldots + e_n.$$

Нехай $A, B \in \mathcal{A}_{k,n}$ Покладемо

$$A \sim_k B \Leftrightarrow \{\exists \pi_n \in S_n \mid \pi_n(f_1, \ldots, f_n) = \\ = (f'_1, \ldots, f'_n) \Rightarrow Kdim(e_iAe_i) = \\ = Kdim(f'_iBf'_i),\ i = 1, \ldots, n), \}$$

де S_n симетрична група переставок на множині з n елементів. Тобто два кільця належать до одного класу тоді і тільки тоді, коли можливо так розташувати їх ідемпотенти, що відповідні діагональні елементи у декомпозиціях Пірса цих кілець мають однакові розмірності Круля.

Позначимо через $\mathcal{A}_{k,n}/\sim_k$ множину класів еквівалентності за відношенням $\sim_k$. Нехай C_n^k позначає кількість сполучень.

Теорема 2. *Кількість класів еквівалентності на множині $\mathcal{A}_{k,n}$ за відношенням $\sim_k$ дорівнює*

$$|\mathcal{A}_{k,n}/\sim_k| = \sum_{i=1}^{n-1} C_{k+i-1}^{i} = C_{n+2k-2}^{k} - 1.$$

Доведення. За твердженням 1

$$Kdim(A) \geq Kdim(A_i),\ Kdim(A) = k,$$

для будь-якого кільця $A \in A_{k,n}$. Одже $Kdim(A_i)$ може набувати значень з множини $\{0,1,\ldots,k\}$. Нехай $A \in A_{k,n}$ довільне кільце, $1 = e_1 + e_2 + \ldots + e_n$. Через те, що кільце A має скінченну розмірність Крулля k отримуємо послідовність натуральних чисел $\{Kdim(A_1), Kdim(A_2), \ldots, Kdim(A_n)\}$, знову з твердження 1 випливає, що $Kdim(A) = maxA_i,\ i = 1,\ldots,n$ та обов'язково існує деякий номер i, такий, що $Kdim(A_i) = k$. Одже кількість класів збігається з кількістю різних послідовностей натуральних чисел від 0 до k довжини n впорядкованих за зростанням. Кількість таких послідовностей будемо шукати у вигляді суми $S = s_1 + s_2 + \ldots + s_n$, де s_i – кількість послідовностей довжини n , що містять рівно i разів число k. Будемо вважати різні числа від 0 до $k-1$ об'єктами. Виникає наступна комбінаторна задача. Маємо об'єкти $k-1$ типів, потрібно обчислити скільки комбінацій можливо зробити так, щоби у кожну комбінацію входило $n-i$ об'єктів. Кожну комбінацію закодуємо за допомогою 0 та 1, 1 буде відповідати об'єктам, 0 виконувати функцію роздільника. Тоді, наприклад, записав $n-i$ одиниць та $k-1$ нуль отримуємо комбінацію, за якою обирається $n-i$ об'єктів першого типу та жодного інших типів. Виконуючи переставки всіма способами $n-i$ одиниць та $k-1$ нулів, кожен раз будемо отримувати деяке розташування з $n-i$ чисел.

$$P(n-i,k-1) = \frac{(n-i+k-1)!}{(n-i)!(k-1)!} = C_{n+k-i-1}^{n-i}.$$

Звідси

$$S = C_{n+k-2}^{n-1} + C_{n+k-3}^{n-2} + \ldots + C_k^1 = \sum_{i=1}^{n-1} C_{i+k-1}^i.$$

Через те, що $C_n^k = C_n^{n-k}$

$$\sum_{i=1}^{n-1} C_{i+k-1}^i = \sum_{i=1}^{n-1} C_{i+k-1}^{k-1} = A$$

За одним з визначень біноміальних коефіцієнтів маємо

$$(x+1)^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i x^i.$$

Одже, C_n^i – коефіцієнт біля x^i у розкладі $(x+1)^n$. Звідси, S є сумою коєфіцієнтів біля x^{k-1} у виразі

$$(x+1)^k + \ldots + (x+1)^{n+k-2}.$$

Спрощуючи як суму геометричної прогресії, отримуємо

$$(x+1)^k + \ldots + (x+1)^{n+k-2} = \\ = \frac{(x+1)^k(1-(x+1)^{n+k-2})}{1-(x+1)} = \\ = \frac{(x+1)^k((x+1)^{n+k-2}-1)}{x} = \\ = \frac{(x+1)^{n+2k-2} - (x+1)^k}{x}$$

Звідси, S – коефіцієнт біля x^k у виразі

$$(x+1)^{n+2k-2} - (x+1)^k$$

Таким чином, $S = C_{n+2k-2}^k - 1$.

3 Про кількість класів еквівалентності напівланцюгових нерозкладних кілець з нетеровою діагоналлю та нільпотентним первинним радікалом.

Означення 3.1. Послідовність $p_1, p_2, \ldots, p_t$ називається допустимою, якщо вона задовольняє наступним нерівностям

$$2 \le p_i \le p_{i+1} + 1,\ i = 1,\ldots,t-1,\ p_t = 1,$$

або нерівностям

$$2 \le p_i \le p_{i+1} + 1,\ i = 1,\ldots,t-1,\ 2 \le p_t \le p_1 + 1,$$

Означення 3.2. Сагайдак Q називається праворядним, якщо із кожної його вершини виходить не більше однієї стрілки.

Означення 3.3. Контуром сагайдака Q називається послідовність попарно різних вершин $\{i_1,\ldots,i_t\}$ та стрілок $\{\sigma_1,\ldots,\sigma_t\}$, таких, що кожна стрілка σ_k з'єднує i_k з i_{k+1} або i_{k+1} з i_k, крім того стрілка σ_t з'єднує i_t з i_1 або i_1 з i_t. Зв'язний сагайдак без контурів називається деревом. Коренем дерева називається вершина із якої не виходить стрілка.

Теорема 3. *Кількість допустимих послідовностей довжини t дорівнює $(t-1)$-му числу Каталана C_{t-1}.*

Доведення. Для доведення теореми встановимо бієкцію між множиною всіх допустимих послідовностей довжини t та множиною всіх однокореневих дерев з t вершинами. За [7] кількість всіх однокореневих дерев з $t+1$ вершиною є t-те число Каталана. Далі, будь-яке однокореневе дерево будемо називати просто деревом.

У випадку $t = 1$ маємо одну допустиму послідовність 1, якщо $t = 2$ маємо послідовність 21, продовжуючи подібним чином побудуємо всі допустимі послідовності довжини 3, це є 221, 321, легко бачити, що на i-му місці у послідовності може бути розташоване тільки одне з чисел $\{2, \dots, t - i + 1\}, \ i = 1, \dots, t - 1$. Допустимі послідовності довжини 4 є:

$$4321, 3321, 2321, 3221, 2221$$

Нехай $p_1, p_2, \dots, p_{t-1}, p_t$ – довільна допустима послідовність. Будемо зіставляти кожній допустимій послідовності довжини t дерево з t вершинами наступним чином: проведемо на площині t паралельних прямих, які позначимо $L_1, L_2, \dots, L_t$, далі, читаючи послідовність зліва направо, зіставимо кожному $p_j, \ 1 \le j \le t$ точку на L_{p_j}-й прямій. Позначимо точки через $P_1, P_2, \dots, P_t$. Будемо сполучувати точки P_i та P_j ребром тоді і тільки тоді, коли $p_j \le p_i + 1$ і $i < j$, $1 \le i, j \le t$. За побудовою, отримана фігура є деревом, що містить t-точок. Відповідність у випадку $t = 4$ див. Рис 1.

Припустимо за індукцією, що допустимі послідовності довжини t відповідають всім деревам з t вершинами. Покажемо, що це справедливо і для випадку $t + 1$. Допустимі послідовності довжини $t + 1$ можна отримати додаючи одне з чисел $\{2, \dots, t + 1\}$ зліва до допустимої послідовності довжини t. Нехай $p_1, \dots, p_t$ довільна допустима послідовність довжини t, T_t – дерево, що відповідає цій послідовності. Нехай $c, p_1, \dots, p_t$ допустима послідовність довжини $t + 1$. Додамо точку C_i на деяку з прямих $L_i, \ i = 2, \dots, t + 1$. З'єднаймо ребром точку C_j з деякою точкою, що міститься на прямій L_{j-1} таким чином, щоб $c \le p_1 + 1$. За побудовою ми знову отримаємо дерево, одже отримані фігури є всіма можливими деревами з $t+1$ вершинами.

Навпаки можна показати, що будь-якому дереву з t вершинами можливо поставити у відповідність допустиму послідовність, якщо провести t паралельних прямих $L_1, \dots, L_t$, та побудувати всі можливі дерева з t вершинами, таким чином, щоб кожна вершина дерева належала деякій прямій $L_i, \ i = 1, \dots, t$. Якщо $P_i \in L_i$ будемо вважати $p_i = i, \ i = 1, \dots, t$. Обходячи всі вершини дерева по гілках, двигаючись з корня дерева, та починаючи з самої короткої лівої гілки будемо виписувати відповідні точки дерева справа наліво $p_1, p_2, \dots, p_t$, після проходу кожної гілки, пройдені ребра зтираються. За [7] кількість таких дерев є C_{t-1}.

У випадку $t = 4$ маємо

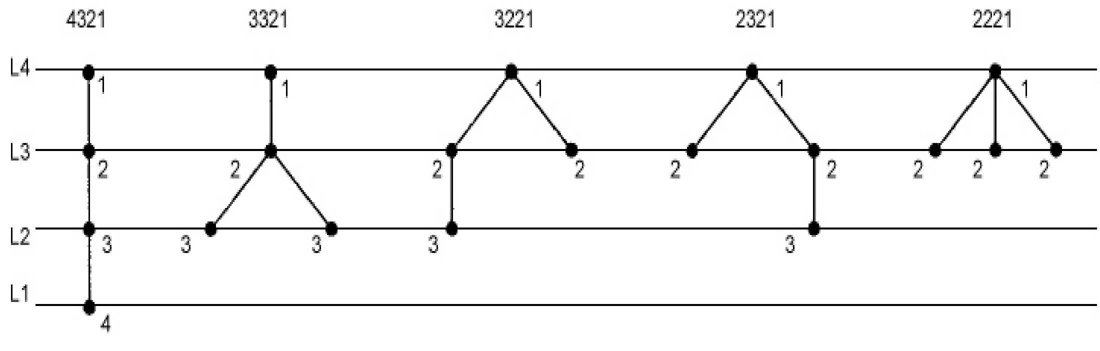

Рис 1.

Означення 3.4. Первинним рядом A-модуля M називається ряд

$$M \supset M\mathcal{L} \supset \cdots \supset M\mathcal{L}^{k-1} \supset M\mathcal{L}^k = 0.$$

Мінімальне число k, таке, що $M\mathcal{L}^k = 0$ називається довжиною первинного ряду. Будемо позначати її через $k = pl(M)$.

Означення 3.5. Напівланцюгове нерозкладне кільце A з нетеровою діагоналлю і нільпотентним первинним радікалом $\mathcal{L}$ та первинним сагайдаком $PQ(A)$ будемо називати кільцем першого типу, якщо $PQ(A)$ є ланцюг.

Означення 3.6. Нехай A_1 та A_2 нерозкладні напівланцюгові кільця з нетеровою діагоналлю і нільпотентним первинним радікалом. Будемо говорити, що A_1 та A_2 належать до одного класу еквівалентності тоді і лише тоді, коли їх первинні сагайдаки збігаються і кільця A_1, A_2 є першого типу.

Зв'язок між кількістю класів еквівалентності напівланцюгових нерозкладних кілець з нетеровою діагоналлю першого типа та числами Каталана виникає завдяки наступній теоремі

Теорема 4. *[2] Нехай A є нерозкладне напівланцюгове кільце з нетеровою діагоналлю і нільпотентним первинним радікалом $\mathcal{L}$*

а) якщо первинний сагайдак кільця A є ланцюг, тоді

$$2 \leq pl_i \leq pl_{i+1} + 1,\ i = 1, \dots, t-1,\ pl_t = 1,$$

b) якщо первинний сагайдак кільця A є цикл, тоді

$$2 \leq pl_i \leq pl_{i+1}+1,\ i = 1, \dots, t-1,\ 2 \leq pl_t \leq pl_1+1,$$

Наслідок. Кількість класів еквівалентності нерозкладних напівланцюгових кілець з нетеровою діагоналлю нільпотентним первинним радікалом, первинний сагайдак яких є ланцюг довжини n є $n-1$-ше число Каталана.

Доведення. За попередньою теоремою, якщо первинний сагайдак кільця є ланцюг довжини n, тоді довжини всіх первинних рядів задовольняють нерівностям.

$$2 \leq pl_i \leq pl_{i+1} + 1,\ i = 1, \dots, n-1,\ p_n = 1,$$

За визначенням послідовність $pl_1, \dots, pl_n$ є допустимою, одже, за теоремою 2, кількість допустимих послідовностей довжини n є $(n-1)$-ше число Каталана, звідси, кількість класів еквівалентності дорівнює $n-1$-му числу Каталана.

Література

1. N.M. Gubareni, V.V. Kirichenko, *Rings and Modules.*// Czestochowa. - 2001. - 306 p.
2. N.M. Gubareni, V.V. Kirichenko, *Serial Rings with T-nilpotent Prime Radical.*// Algebras and Representations Theory (2006) 9, pp. 147-160.
3. J. C. McConnell, J. C. Robson, *Noncommutative Noetherian rings*// Graduate Studies in Mathematics v. 30, -2001.
4. M. H. *Upham, Serial rings with right Krull dimension one*// J. Algebra 109 (1987), 319-333.
5. G. Puninski, *Serial Rings*// Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2001
6. A.W. Chatters, Serial rings with Krull dimension, Glasgow Math. J. 32 (1990). 71-78.
7. Stanley, R.P. (1999): *Enumerative Combinatorics, Vol. 2.* Cambridge University Press. (pp. 212-229)
8. J. O. Hanes, D.D. Wick, *The number of admissible sequences for indecomposable serial rings with simple projective module.* Proceedings of the Louisianna-Mississippi Section of Mathematical Association of America, Spring 2000.

Надійшла до редколегії 19.09.11