КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

ВІСНИК

КИЇВСЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

СЕРІЯ ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНІ НАУКИ

ВИПУСК №3 2011

Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка,
випуск №3, 2011
Серія фізико-математичні науки

З 1991 року серії вісників Київського університету "Математика і механіка", "Физика", "Моделирование и оптимизация сложных систем" реорганізовано у "Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки". У віснику містяться результати нових досліджень у різних галузях математики, інформатики, механіки, фізики та радіофізики для наукових працівників, викладачів, аспірантів, інженерів і студентів. Друкується за рекомендаціями Вчених Рад фізичного, радіофізичного, механіко-математичного факультетів та факультету кібернетики.

Журнал "Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія фізико-математичні науки" включено до переліку фахових видань ВАК України.

Адреса редакційної колегії:

Факультет кібернетики, Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
пр. Глушкова, 4 д, 03680 Тел. (044) 259-01-49

ISBN 978-617-571-036-4
ISSN 1812-5409

ЗМІСТ

АЛГЕБРА, ГЕОМЕТРІЯ ТА ТЕОРІЯ ІМОВІРНОСТЕЙ

Авдєєва Т.В. Централізатори елементів малих рангів симетричної напівгрупи 7

Біліцький А.Р. Операції над скінченими метричними просторами 14

Довгай Б.В. Моделювання розв'язку гіперболічного рівняння 18

Єршов А.В. Граничні теореми для випадкових ламаних 24

Зельдіч М.В. Про можливість реалізації знакозмінної групи підстановок A_n в якості групи ізометрій 29

Касянюк М.В. Про квазіфробеніусові кільця 32

Кириченко В.В., Плахотник М.В. Опис (0, 1)-матриць показників 34

Костишин Э.М. Об абсолютно неразложимых немодулярных матричных представлениях полугрупп $T_2\times T_2\times\ldots\times T_2$ 37

Курченко О.О., Синявська О.О. Бакстерівська оцінка коефіцієнта регресії в одній моделі 40

Швиров В.В. Розмірність Круля напівланцюгових кусково нетерових кілець 46

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ, МАТЕМАТИЧНА ФІЗИКА ТА МЕХАНИКА

Богданов В.Р., Сулим Г.Т. Динамічний розвиток тріщини у компактному зразку за пружно-пластичною моделлю плоского напруженого стану із врахуванням розвантаження матеріалу 53

Бойко М.Я. Про розв'язки із заданими значеннями на границі різницевих рівнянь, що залежать від двох індексів 57

Григоренко О.Я., Яремченко Н.П., Яремченко С.М. Розрахунок напруженого стану гофрованих пластин в уточненій постановці 61

Єфімова Т.Л. Вільні коливання незамкнених циліндричних оболонок з неоднорідних матеріалів 65

Кузенков О.О. Класифікаційна система точок рівноваги лінійної системи диференціальних рівнянь третього порядку 69

Плахтієнко М.П., Забуга А.Т. Поступальні коливання твердого тіла з електромагнітним фрикційним демпфером в механізмі сейсмоізоляції 75

Сиротенко А.В., Городній М.Ф. Про інтегровні з p-м степенем розв'язки операторно-диференціального рівняння 79

Харитонов О.М., Дехтяр О.Т. Оптимізація маневру переведення космічного апарату на сферу впливу планети при старті з еліптичної планетоцентричної орбіти 83

Чайковський А.В. Про наближення обмежених розв'язків диференціальних рівнянь зі зсувами аргументу 87

КОМП'ЮТЕРНІ НАУКИ ТА ИНФОРМАТИКА

Бомба А.Я., Теребус А.В. Про один підхід до моделювання просторової квазіідеальної течії 93

Бондарець І.М. Прогнозування часових рядів на прикладі курсів валют за допомогою нейронних мереж 99

Буй Д.Б., Пузікова А.В. Повнота аксіоматики Армстронга 103

Верченко А.П., Кобзар А.Ю. Про один алгоритм побудови панорамних знімків 109

Власюк А.П., Мартинюк П.М. Математичне моделювання фільтраційної консолідації греблі із зосередженим шляхом фільтрації в її ядрі в умовах тепло-солепереносу 115

Гаращенко Ф.Г., Кручинін Д.С. Оцінки областей практичної стійкості з еліпсоїдальними фазовими обмеженнями і їх використання 123

Головенко А.Д. Обчислювальні технології та алгоритми для побудови автоматизованих моделюючих систем в будівельній аеродинаміці 131

Горбачук В.М., Гаркуша Н.І. Перерозподіл за централізації і децентралізації 139

Демків І.І. Інтерполяційні інтегральні ланцюгові дроби для функціоналів від двох змінних 143

УДК 512.55

В'ячеслав В. Швиров, асистент

Розмiрнiсть Круля напiвланцюгових кусково нетерових кiлець

У роботi вивчається розмiрнiсть Круля напiвланцюгових кусково нетерових кiлець.

Ключовi слова: напiвланцюгове кiльце, нетерове кiльце, кусково нетерове кiльце, розмiрнiсть Круля кiльця.

Vjacheslav V. Shvyrov, assistant

Krull dimension of serial piecewise noetherian rings

We learn Krull dimension of serial piecewise noetherian rings.

Key Words: serial ring, noetherian ring, piecewise noetherian ring, Krull dimension of the ring.

E-mail: slavik_asas@mail.ru

Стаття представлена доктором ф.-м. наук, професором Кириченко В. В.

1 Вступ. Основнi визначення.

Розмiрнiсть Круля напiвланцюгових кiлець вивчалася багатьма авторами. Чаттерс у [7] доводить структурну теорему для первинних напiвланцюгових кiлець зi скiнченною розмiрнiстю Круля. М. Апхам [4] отримує структурну теорему для несiнгулярних напiвланцюгових кiлець з розмiрнiстю Круля одиниця.

Напiвланцюговi кусково нетеровi кiльця вперше з'явилися в роботi Н.М. Губарені i В.В. Кириченко [2]. Метою роботи є описання будови нерозкладних напiвланцюгових кусково нетерових кiлець i вивчення розмiрностi Круля таких кiлець, а також вивчення властивостей напiвланцюгових кiлець зi скiнченною розмiрнiстю Круля. В роботi iстотньо використовуються результати робiт М. Апхам (Райт) [4], Н.М. Губарені, В.В. Кириченко [1],[2], Г. Пунинського [5].

Означення 1.1. Модуль M називається *ланцюговим*, якщо гратка його пiдмодулiв утворює ланцюг, тобто множина всiх пiдмодулiв модулю M є лiнiйно впорядкована вiдносно включення. Модуль називається *напiвланцюговим*, якщо вiн розкладається у скiнченну пряму суму ланцюгових модулiв.

Означення 1.2. Кiльце R називається *ланцюговим справа*, якщо R_R є правим ланцюговим модулем, тобто гратка правих iдеалiв є лiнiйно впорядкована.

Означення 1.3. Кiльце R називається *напiвланцюговим справа*, якщо R_R є напiвланцюговим модулем. Кiльце яке є напiвланцюгове справа та злiва називається напiвланцюговим.

Означення 1.4. Нехай M – правий R-модуль. Розмiрнiсть Круля модуля M будемо позначати через $Kdim(M)$ i визначимо наступним чином:

якщо $M = 0$, тодi $Kdim(M) = -1$;

якщо α – ординал i $Kdim(M) \not< \alpha$, тодi $Kdim(M) = \alpha$, якщо не iснує нескiнченного убиваючого ланцюга

$$M = M_0 \supseteq M_1 \supseteq M_2 \supseteq \dots$$

пiдмодулiв M_i, таких, що для $i = 1, 2, \dots$, $Kdim(M_i/M_{i+1}) \not< \alpha$.

Якщо не iснує ординалу α, такого, що $Kdim(M) = \alpha$, то будемо говорити, що M не має розмiрностi Круля.

Означення 1.5. Правою розмiрнiстю Круля кiльця R називається розмiрнiсть Круля правого регулярного модуля R_R i будемо позначати її через $Kdim(R)$.

2 Розмiрнiсть Круля напiвланцюгових кiлець.

Для напiвланцюгових кiлець права та лiва розмiрнiсть Круля, якщо вони є визначенi збiгаються [9].

Визначимо для кiльця R за допомогою трансфiнiтної iндукцiї послiдовнiсть двобiчних iдеалiв $J(\alpha)(R)$. Покладемо $J(0)(R) = Jac(R)$ i $J(\alpha)(R) = \cap_{\beta<\alpha} J(\beta)(R)$, якщо α граничний ординал. Для $\alpha = \beta + 1$ ми покладемо $J(\alpha)(R) = \cap_{n\in w} J^n(\beta)(R)$.

Якщо кiльце R має $K\dim(R_R) \leq \alpha$, тодi $J(\alpha)(R)$ – нiльпотентний iдеал (див. [5]).

Твердження 1. *([5]) Нехай R – напiвланцюгове кiльце i α – найменший ординал, такий, що* *ідеал $J(\alpha)(R)$ нільпотентний. Тоді ліва і права розмірність Круля кільця R дорівнює α. В інших випадках обі розмірністі не визначені.*

Наступне твердження дає можливість обчислювати розмірність Круля напівланцюгового кільця за допомогою розмірностей діагональних компонентів.

Твердження 2. *([5]) Для кожного напівланцюгового кільця R і натурального m $K\dim(R) \geq m$ тоді і тільки тоді, коли $K\dim(R_i) \geq m$ для кожного i.*

Первинний радікал $Pr(R)$ напівланцюгового кільця R з розмірністю Круля є нільпотентним ([7]).

Напівланцюгові несінгулярні базисні вивчалися у ([5]), якщо R напівланцюгове базісне нерозкладне несінгулярне кільце з розмірністю Круля одиниця 1. Тоді R ізоморфне кільцю виду

$$\begin{pmatrix} V_1 & \dots & V_1 & \dots & D & \dots & D \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ J_1 & \dots & V_1 & \dots & D & \dots & D \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & V_n & \dots & V_n \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & J_n & \dots & V_n \end{pmatrix},$$

де V_i ланцюгові нетерові області цілісності з радікалом Джекобсона J_i і загальним тілом часток D.

Наступний факт ([3]) корисний при обчислюванні розмірності Круля модулів з розмірністю Круля. Якщо модуль M має розмірність Круля, тоді $Kdim(M) \leq \sup\{Kdim(M/E) + 1 \mid E$ – істнотній підмодуль $M\}$.

Якщо R – спадкове нетерове первинне кільце, тоді $Kdim(R) \leq 1$ ([3]).

За визначенням розмірність Круля будь-якого артинового кільця є нуль. Отже напівланцюгові артинові кільця мають розмірність Круля нуль.

Твердження 3. *Нехай R – напівланцюгове нетерове зліва і справа кільце. Тоді $Kdim(R) \leq 1$.*

Доведення. Нехай J – радікал Джекобсона кільця R. Для напівланцюгових нетерових кілець $\cap J^n = 0$ ([7]). З цього $J(1) = \cap J^n = 0$ і $J(1)$ є нільпотентний, за твердженням 1, якщо α є найменший ординал, такий, що $J(\alpha)$ є нільпотентний, тоді розмірність Круля дорівнює α. У артиновому випадку розмірністью Круля дорівнює нулю, з цього маємо $Kdim(R) \leq 1$.

Твердження 4. *Нехай R напівланцюгове нетерове справа базисне кільце. Якщо сагайдак кільця R є цикл, то розмірність Круля кільця R дорівнює 1. Якщо сагайдак R є ланцюг, тоді розмірність Круля кільця R дорівнює 0.*

Доведення. Нехай сагайдак кільця R є цикл. Тоді, за лемою 7.12 [5], якщо R є напівланцюгове нетерове справа кільце і сагайдак якого є цикл, тоді R є двобічно нетерове і $J(1)(R) = \cap_k Jac^k(R) = 0$. З цього випливає, що розмірність Круля R дорівнює 1.

Нехай сагайдак R є ланцюг, за лемою 7.6. [5], якщо R – напівланцюгове базісне нетерове справа, тоді всі модулі e_iR мають скінченну довжину. Одже R є артинове і має розмірність Круля 0.

3 Розмірність Круля напівланцюгових кусково нетерових кілець.

Означення 3.1. Кільце A називається кусково нетеровим справа, якщо воно задовільняє наступним умовам

i) A має скінченну множину попарно ортогональних примітивних ідемпотентів $e_1, \dots, e_n$, таких, що $1 = e_1 + \ldots + e_n$.

ii) e_iAe_i – нетерово справа для кожного примітивного ідемпотента e_i, $i = 1, \dots, n$ (див. [1]).

Аналогічно визначаються кусково нетерові зліва кільця. Кусково нетерове зліва й справа кільце називається кусково нетеровим.

Відзначимо, що кожне нетерове справа кільце є кусково нетеровим. Кусково нетерові кільця можна розглядати як деяке узагальнення нетерових (справа, зліва) кілець, яке пов'язане з наступною теоремою

Теорема. *(теорема 3.6.1. див. [1])Нехай A довільне кільце з ідемпотентом $e^2 = e \in A$. Покладемо $f = 1 - e$, $eAf = X$, $fAe = Y$ і*

$$A = \begin{pmatrix} eAe & X \\ Y & fAf \end{pmatrix}$$

відповідна декомпозиція Пірса кільця A. Тоді кільце A є нетеровим справа (артиновим) тоді *і тільки тоді, коли кільця eAe і fAf є нетеровими справа (артиновими), X – це скінченнопороджений fAf-модуль і Y – скінченнопороджений eAe-модуль.*

Зокрема, відзначимо, що кожне напівланцюгове кільце є напівдосконалим, звідки – умова (i) означення завжди справедлива для таких кілець.

Наведемо також наступні факти про кусково нетерові кільця (див. [2]).

Зважаючи на теорему 3.6.1. [1] Напівланцюгове кусково нетерове справа кільце є кусково нетеровим зліва ([2]). Крім того, напівланцюгове кусково нетерове напівпервинне кільце є нетеровим див. [2].

Означення 3.2. Нехай $Pr(A)$ – первинний радікал кільця A. Кільце $A/Pr(A)$ називається діагоналлю A.

Теорема. *([3]) Якщо A напівланцюгове кусково нетерове кільце, тоді*

(1) первинний радікал $Pr(A)$ – нільпотентен;

(2) діагональ A є нетеровою.

4 Властивості напівланцюгових кусково нетерових кілець.

Лема 1. *Нехай A – кусково нетерове кільце, таке, що всі eAe для будь-якого локального ідемпотенту e є дискретно нормовані кільця. Тоді A є несінгулярне напівспадкове кільце.*

Доведення. За умовою eAe – дискретно нормовані кільця, для будь-якого локального ідемпотенту e, у цьому випадку $Pr(eAe) = ePr(A)e = 0$ і первинний радікал $Pr(A) = 0$. Через те, що сінгулярний ідеал $Sing(A)$ міститься у первинному радікалі кільця, $Sing(A) = 0$. Звідси кільце A є несингулярне. За [11] напівланцюгове несінгулярне кільце є напівспадковим зліва та справа.

Теорема 1. *Якщо A нерозкладне напівланцюгове кусково нетерове кільце, таке, що eAe – дискретно нормовані кільця, для всіх локальних ідемпотентів e, тоді*

(a) A є несінгулярне;

(b) розмірність Круля кільця A дорівнює одиниці;

(c) існують несингулярні, нерозкладні напівланцюгові нетерові кільця $T_1, T_2, \ldots, T_n$ та T_i-T_j-бімодулі $M_{ij},\ i, j \in \{1, \ldots, n\}$, такі, що

(i) для $i > j > k$, $M_{ij} \otimes M_{jk} = M_{ik}$ і для $i < j$, $M_{ij} = 0$.

(ii) для $i > j$, як лівий T_i-модуль M_{ij} є прямою сумою t_j копій единого несингулярного нерозкладного ін'ективного лівого T_i-модуля, де $t_j = rank(T_j)$;

(iii) для кожного $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ існує точний несингулярний ланцюговий правий T_j-модуль X_j, який залежить тільки від j, такого, що для $i > j$, $M_{ij} \cong \otimes_i^{t_i} X_j$, де $t_i = rank(T_i)$;

(iv) для $i > j$ і для будь-якого скінченно породженого правого ідеалу $A \subseteq T_j$, канонічне відображення $Hom(T_j, M_{ij}) \to Hom(A, M_{ij})$ є епіморфізмом;

$$R \cong \begin{bmatrix} T_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ M_{21} & T_2 & 0 & & 0 \\ M_{31} & M_{32} & T_3 & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ M_{n1} & M_{n2} & M_{n3} & \ldots & T_n \end{bmatrix}$$

Доведення. За умовою eAe – є дискретно нормовані кільця для будь-якого локального ідемпотенту e. Одже, у цьому випадку $Pr(eAe) = ePr(A)e = 0$ і $Pr(A) = 0$. Через те, що сінгулярний ідеал $Sing(A)$ міститься у первинному радікалі кільця, $Sing(A) = 0$. Звідси кільце A є несингулярне і пункт (a) доведено.

Покладемо $A_i = e_iAe_i$, $i = 1, \ldots, n$. Зважаючи на твердження 2 і той факт, що A_i є двобічно нетерові кільця, які мають розмірність Круля, то й кільце A має розмірність Круля (ліву і праву).

За теоремою 9.6.3 (див. [1]) дискретно нормовані кільця є спадковими справа і зліва.

Будемо розглядати A_i як регурярний правий модуль (відповідно лівий). Через те, що кільце A_i – нетерово і спадкове, то всі праві (ліві) ідеали є скінченно породженими проективними підмодулями регулярного правого (лівого регулярного) модуля A_i, за [6], якщо P – модуль над нетеровим з двох боків кільцем, такий, що має розмірність Круля і такий, що всі його підмодулі є проективні, тоді $Kdim(P) \leq 1$. Одже $Kdim(A_i) \leq 1$ для кожного $i = 1, \ldots, n$. За умовою A_i є дискретно нормованими кільцями, які є двобічно нетеровими і ланцюговими і мають розмірність Круля одиниця. Одже з твердження 2 випливає, що $Kdim(A) \geq m$ тоді і тільки тоді, коли $Kdim(A_i) \geq m$ для деякого натурального числа m. Звідси випливає, що розмірність Круля напівланцюгового кусково нетерового кільця залежить від розмірностей Круля діагональних компонент розкладу. Одже $KdimA = 1$, пункт (b) доведено.

Через те, що кільце є кусково нетерове $T_i = e_iRe_i$, де e_i – локальні ідемпотенти, T_i є напівланцюгові двобічно нетерові нерозкладні і несінгулярні. Зважаючи на пункти (a) та (b) кільце A задовільняє всім умовам теореми 2.11 роботи [4] і (c) є вже доведено.

Теорема 2. *Якщо A – нерозкладне напівланцюгове кусково нетерове кільце, таке, що eAe – є тіла, для всіх локальних ідемпотентів e, тоді*

(a) розмірність Круля кільця A дорівнює нулю;

(b) кільце A є двобічно артиновим кільцем.

Доведення. Позначимо $A_i = e_iAe_i$, $i = 1, \ldots, n$, за умовою A_i є тіло, одже є просте і артинове кільце, розмірність Круля артинових кілець дорівнює 0. Отже, аналогічно доведеному вище, маємо $KdimA = 0$.

Діагональ кільця A є артиновою, отже для доведення (b) достатньо скористатися теоремою 4.11 (див. [2]), за якою напівланцюгове кільце з артиновою діагоналлю і T-нільпотентним первинним радікалом є двобічно артиновим. Через те, що первинний радікал у кільцях з артиновою діагоналлю збігається з радікалом Джекобсона кільця є досконалими справи і зліва див. 4.10 [2].

Твердження 5. *Кожне напівланцюгове кусково нетерове кільце R з розмірністю Круля одиниця має класичне кільце часток яке є артинове і спадкове.*

Доведення. За лемою 1 і з того, що $Kdim(R) = 1$ кільце R є несінгулярне, за 5.12 [5] кожне несінгулярне напівланцюгове кільце має класичне кільце часток, яке є артинове і спадкове. Отже через те, що R є несінгулярне R має класичне артинове спадкове кільце часток.

Література

1. N.M. Gubareni, V.V. Kirichenko, *Rings and Modules.*// Czestochowa. - 2001. - 306 p.
2. N.M. Gubareni, V.V. Kirichenko, *Serial Rings with T-nilpotent Prime Radical.*// Algebras and Representations Theory (2006) 9, pp. 147-160.
3. J. C. McConnell, J. C. Robson, *Noncommutative Noetherian rings*// Graduate Studies in Mathematics v. 30, -2001.
4. M. H. *Upham, Serial rings with right Krull dimension one*// J. Algebra 109 (1987), 319-333.
5. G. Puninski, *Serial Rings*// Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2001
6. S. Jondrup, *Projective modules with Krull dimension*// Math. Scand. 51 (1982), 227-231
7. A.W. Chatters, Serial rings with Krull dimension, Glasgow Math. J. 32 (1990). 71-78.
8. Wright M. H. Serial rings with Krull dimension one. II. J. Algebra, 117 (1988), 99-116.
9. Wright M. H. Krull dimension in serial rings. J. Algebra, 124 (1989), 317-328.
10. Gordon R., Robson J.C., Krull dimension. Memoirs of the AMS, no. 133. 1973.
11. R. B. Warfield, Serial rings and finitely presented modules // J. Algebra, v. 37 (1975), p.187-222.

Надійшла до редколегії 24.03.11