КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

ВІСНИК

КИЇВСЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

СЕРІЯ ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНІ НАУКИ

ВИПУСК №1 2011

Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка,
випуск №1, 2011
Серія фізико-математичні науки

З 1991 року серії вісників Київського університету "Математика і механіка", "Физика", "Моделирование и оптимизация сложных систем" реорганізовано у "Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки". У віснику містяться результати нових досліджень у різних галузях математики, інформатики, механіки, фізики та радіофізики для наукових працівників, викладачів, аспірантів, інженерів і студентів. Друкується за рекомендаціями Вчених Рад фізичного, радіофізичного, механіко-математичного факультетів та факультету кібернетики.

Журнал "Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія фізико-математичні науки" включено до переліку фахових видань ВАК України.

Адреса редакційної колегії:

Факультет кібернетики, Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
пр. Глушкова, 4 д, 03680 Тел. (044) 259-01-49

ISBN 978-617-571-036-4
ISSN 1812-5409

ЗМІСТ

АЛГЕБРА, ГЕОМЕТРІЯ ТА ТЕОРІЯ ІМОВІРНОСТЕЙ

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ, МАТЕМАТИЧНА ФІЗИКА ТА МЕХАНИКА

КОМП'ЮТЕРНІ НАУКИ ТА ИНФОРМАТИКА

(The Proceedings of International Conference "Theoretical and Applied Aspects of Program Systems Development")

Вісник Київського національного університету
імені Тараса Шевченка
Серія: фізико-математичні науки

2011, 1

Bulletin of Taras Shevchenko
National University of Kyiv
Series: Physics & Mathematics

УДК 512.55

В'ячеслав В. Шпиров, асистент

Про напівланцюгові справа нетерові зліва напівпервинні кільця

У роботі розглядаються напівлацнюгові справа (зліва) нетерові зліва (справа) напівпервинні кільця. Доведено, що такі кільця є скінченним прямим добутком напівланцюгових нетерових спадкових первинних кілець.

Ключові слова: напівланцюгове кільце, нетерове кільце, напівпервинне кільце, спадкове кільце.

Vjacheslav V. Shvyrov, assistant

On right serial left noetherian semiprime rings

We consider right (left) serial left (right) noetherian semiprime rings. It is proved that such rings are finite direct product of serial noetherian hereditary prime rings.

Key Words: serial ring, noetherian ring, semiprime ring, hereditary rings.

E-mail: slavik_asas@mail.ru
Стаття представлена доктором ф.-м. наук, професором Кириченко В. В.

1 Вступ

Структура напівдосконалих нетерових спадкових первинних кілець вивчалася Г. Міхлером у [9]. Напівланцюгові не артинові кільця вперше вивчалися і були описані В.В. Кириченко у [7],[8]. Використовуючи інший підхід до вивчення нетерових напівланцюгових кілець, аналогічні результати о структурі таких кілець в той же час незалежно були отримані і Уорфілдом [11], зокрема, у цих роботах дається повний опис структури напівланцюгових нетерових кілець. У [3] доведено, що нетерове справа напівланцюгове напівпервинне кільце є скінченним прямим добутком нетерових справа і зліва напівланцюгових напівпервинних кілець. Існують приклади напівланцюгових справа нетерових справа напівпервинних кілець, які не є ні напівланцюговими зліва, ні нетеровими зліва (див. [4]). Основним результатом роботи є теорема 1. Аналогічні результати були отримані А.А. Туганбаєвим у [10]. Користуючись результатами В.В. Кириченко [3], [5], [6] вдалося отримати більш коротке доведення.

Теорема 1. *Для кільця A наступні умови є еквівалентні*

1) A – напівланцюгове справа нетерове зліва напівпервинне кільце.

2) A – напівланцюгове зліва нетерове справа напівпервинне кільце.

3) A – скінченний прямий добуток напівланцюгових нетерових спадкових первинних кілець.

2 Допоміжні визначення і теореми

Означення 2.1. Модуль M називається *ланцюговим*, якщо гратка його підмодулів утворює ланцюг, тобто множина всіх підмодулів модулю M є лінійно впорядкована відносно включення.

Означення 2.2. Модуль називається *напівланцюговим*, якщо він розкладається у скінченну пряму суму ланцюгових модулів.

Означення 2.3. Кільце R називається *ланцюговим справа* (відповідно зліва) якщо R_R є правим (відповідно ${}_RR$ є лівим) ланцюговим модулем, тобто гратка правих ідеалів (відповідно лівих ідеалів) є лінійно впорядкована.

Означення 2.4. Кільце R називається *напівланцюговим справа* (відповідно зліва), якщо R_R (відповідно ${}_RR$) є напівланцюговим модулем. Кільце яке є напівланцюгове справа та зліва називається напівланцюговим.

Означення 2.5. Кільце A називається напівмаксимальним, якщо воно напівдосконале напівпервинне нетерове справа і для будь-якого локального ідемпотенту $e \in A$ eAe – дискретно нормоване кільце, тобто всі $End(P_i)$ – дискретно нормовані кільця.

Означення 2.6. Кільце A називається первинним, якщо 0 є первинний ідеал у A, тобто добуток будь-яких двох ненулевих двосторонніх ідеалів у A не дорівнює нулю.

Означення 2.7. Кільце A називається напівпервинним, якщо 0 є напівпервинний ідеал, тобто A не містить ненулевих нільпотентних ідеалів.

Означення 2.8. Локальна область цілісності $\mathcal{O}$ у якій кожен ідеал головний і така, що має єдиний максимальний ідеал називається дискретно нормованим кільцем.

Наступна теорема дає опис напівланцюгових напівпервинних нетерових справа кілець див. [3] теорема 13.5.3.

Теорема 2. *Напівланцюгове напівпервинне і нетерове справа кільце може бути розкладено у прямий добуток первинних кілець. Напівланцюгове первинне нетерове справа кільце є нетерове зліва і спадкове з обох боків. У артиновому випадку такі кільця є Моріта еквівалентні тілу і у неартиновому випадку вони Моріта еквівалентні $H_m(\mathcal{O})$, де $\mathcal{O}$ – дискретно нормоване кільце. Зворотньо, всі такі кільця є первинні двобічно спадкові і нетерові.*

Означення 2.9. Кільце ендоморфізмів нерозкладного проективного модуля над напівдосконалим кільцем називається головним кільцем ендоморфізмів.

У випадку напівдосконалих кілець має місце наступна теорема про декомпозицію таких кілець.

Теорема 3. *([3], теорема 14.4.3.) Напівпервинне напівдосконале кільце є скінченним прямим добутком нерозкладних кілець. Нерозкладне напівпервинне напівдосконале кільце є або артинове просте кільце, або нерозкладне напівпервинне напівдосконале кільце, таке, що всі головні кільця ендоморфізмів є не-артинові.*

Теорема 4. *([3], теорема 14.5.1.) Наступні умови еквівалентні для напівдосконалого напівпервинного нетерового справа кільця A:*

(a) кільце A є напівдистрибутивне;

(b) кільце A є прямим добутком напівпростого артинового кільця і напівмаксимального кільця.

Теорема 5. *Кожне напівмаксимальне кільце ізоморфне скінченному прямому добутку первинних кілець наступного виду*

$$A = \begin{pmatrix} \mathcal{O} & \pi^{\alpha_{12}}\mathcal{O} & \dots & \pi^{\alpha_{1n}}\mathcal{O} \\ \pi^{\alpha_{21}}\mathcal{O} & \mathcal{O} & \dots & \pi^{\alpha_{2n}}\mathcal{O} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \pi^{\alpha_{n1}}\mathcal{O} & \pi^{\alpha_{n2}}\mathcal{O} & \dots & \mathcal{O} \end{pmatrix},$$

де $n \geq 1$, $\mathcal{O}$ є дискретно нормованим кільцем з первинним елементом π, і α_{ij} є цілі, такі, що

$$\alpha_{ij} + \alpha_{jk} \geq \alpha_{ik}$$

для всіх i, j, k ($\alpha_{ii} = 0$ для будь-якого i).

Теорема 6. *(теорема 3.6.1. див. [5])Нехай A довільне кільце з ідемпотентом $e^2 = e \in A$. Покладемо $f = 1 - e$, $eAf = X$, $fAe = Y$ і*

$$A = \begin{pmatrix} eAe & X \\ Y & fAf \end{pmatrix}$$

відповідна декомпозиція Пірса кільця A. Тоді кільце A є нетеровим справа (артиновим) тоді і тільки тоді, коли кільця eAe і fAf є нетеровими справа (артиновими), X – це скінченнопороджений fAf-модуль і Y – скінченнопородженийeAe-модуль.

Лема 1. *Локальне напівпервинне напівланцюгове справа кільце є первинним.*

Доведення. Нехай $\mathcal{O}$ – локальне кільце з вказаними вище властивостями, тоді, якщо L_1 і L_2 – двобічні ненульові ідеали кільця $\mathcal{O}$, то або L_1 містить L_2, або L_2 містить L_1. З рівності $L_1 \cdot L_2 = 0$ (за умови, що $L_2 \subset L_1$) випливає $L_2^2 = 0$, з напівпервинності кільця $\mathcal{O}$ випливає, що $L_2 = 0$. Отримано протиріччя, яке доводить, що локальне напівланцюгове справа кільце є первинним кільцем.

Лема 2. *(див. [6], лема 1.1) Нехай A локальне нетерове з одного боку кільце з циклічним радикалом $\pi A = A\pi$, причому елемент π не є нільпотентним. Тоді кільце A є дискретно нормованим кільцем.*

Наслідок 1. *(9.6.6. див. [1]). Напівдосконале напівпервинне нетерове зліва і справа спадкове кільце є напівланцюговим.*

3 Доведення теореми 1

Через те, що умова (3) симетрична, достатньо довести $2 \Leftrightarrow 3$. Імплікація $3 \Rightarrow 2$ є очевидною.

Покажемо $2 \Rightarrow 3$. Через те, що напівланцюгові зліва кільця можуть бути розкладені у пряму суму лівих ідеалів, кожен з яких має в точності один максимальний підмодуль, то за теоремою 6.2.8. ([1]), таке кільце є напівдосконале. За теоремою 2, A є скінченний прямий добуток нерозкладних напівпервинних кілець. Кожне нерозкладне кільце є або просте артинове кільце, або напівпервинне напівдосконале кільце, головні кільця ендоморфізмів якого нетерові.

У першому випадку A ізоморфне $M_n(D)$ і таке кільце є напівланцюговим нетеровим спадковим первинним кільцем.

Нехай

$$A = P_1^{n_1} \oplus P_2^{n_2} \oplus \ldots \oplus P_m^{n_m}$$

і

$$1 = e_1 + \ldots + e_m$$

відповідна декомпозиція одиниці кільця A у суму попарно ортогональних локальних ідемпотентів.

За умовою, кільце A – нетерове справа. Однак, кільця e_iAe_i за лемою 1 і теоремою 6 ([1]) є локальні напівланцюгові зліва нетерові справа первинні кільця. Радікал кільця eAe є циклічним. За лемою 2, такі кільця є дискретно нормовані. Звідси кільце A є напівмаксимальним. За теоремами 3 та 4 маємо, що кільце A є скінченним добутком первинних напівдосконалих кілець.

Нехай далі кільце A таке, як у теоремі 4. Покажемо, що кільце A нетерове зліва. Нехай

$$1 = e_1 + \ldots + e_m$$

– декомпозиція одиниці $1 \in A$ у суму ортогональних локальних ідемпотентів, $A_{ij} = e_iAe_j$ для $I, j = 1, \ldots, m$. Позначимо через B_{ij} ($i \neq j$ наступний мінор другого порядку:

$$B_{ij} = \begin{pmatrix} A_{ii} & A_{ij} \\ A_{ji} & A_{jj}. \end{pmatrix}$$

Якщо B_{ij} не є приведеним, тоді

$$B_{ij} \simeq M_2(A_{ii})$$

і B_{ij} є нетерове зліва. Якщо B_{ij} є приведене, тоді $A_{ij}a_{ji} \subset A_{ij}$, $\phi_{ji}\colon A_{ij} \to A_{ii}$ є мономорфізмом лівих A_{ii}-модулів (для будь-якого ненульового a_{ij} таким, що $\phi_{ji}(a_{ij}) = a_{ij}a_{ij}$. Якщо A_{ij} не є скінченно породжений, тоді A_{ii} містить не скінченно породжений лівий A_{ii}-підмодуль $A_{ij}a_{ji}$, де $a_{ji} \neq 0$. Отримали протиріччя. Отже, за лемою 13.3.4 (див. [3]), $A_{ij} \simeq A_{ii}$ і B_{ij} є нетеров зліва, за теоремою 6 (див. [1]). Використовуючи індукцію за числом m і теорему 6, ми отримуємо, що A є нетерове зліва. Отже A є двобічно нетерове.

Через те, що кільце A є напівпервинне первинний радікал $Pr(A) = 0$. Користуючись тим фактом, що сінгулярний ідеал міститься у первинному радикалі отримуємо, що сінгулярний ідеал (лівий, правий) кільця A, $Sing(A) = 0$. Звідси A є несингулярне (зліва і справа). За твердженням 1.6. (див. [10]), несингулярність еквівалентна напівспадковості (справа і зліва). З того, що A є нетерове справа і зліва випливає, що A є спадкове.

Зважаючи на наслідок 1 (див. [1]), напівдосконале напівпервинне нетерове з обох боків спадкове кільце є напівланцюговим (справа і зліва). Отже, A є напівланцюгове нетерове первинне кільце.

4 Приклади

Наведемо приклади (див. [4]) кілець, що є напівланцюговими справа нетеровими справа, але не є напівланцюговими зліва нетеровими зліва.

1. Нехай Q – поле раціональних чисел і $Q(x)$ – поле раціональних функцій над Q від змінної x. Визначимо мономорфізм

$$\alpha\colon Q(x) \to Q(x),$$

вважаючи $\alpha(r(x)) = r(x^2)$. Нехай R складається з правих поліномів від y з коефіцієнтами у $Q(x)$, тобто виразів виду

$$\sum y^i r_i(x),$$

де $r_i(x) \in Q(x)$. Рівність і додавання в R визначаються звичайним чином, множення визначається правилом:

$$r(x)y = y\alpha(r(x)).$$

Легко бачити, R є ланцюговим справа, і, що кожен правий ідеал в R є головним, отже, кільце R – нетерове справа. Але R не є нетеровим зліва.

2. Нехай A – комутативна нетерова область цілісності, що не є полем (наприклад кільце цілих чисел) і нехай F – поле часток для A. Розглянемо кільце R, що утворено матрицями вида

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \gamma \end{pmatrix},$$

де $\alpha \in A$, $\beta, \gamma \in F$ з звичайними операціями додавання та множення. Легко бачити, що R – нетерове справа, але не є нетеровим зліва. Такі кільця також є спадковими справа, і не є спадковими зліва. Достатньо розглянути ліві ідеали виду

$$\begin{pmatrix} 0 & M \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

де M підмодуль A-модуля F, і скористатись тим фактом, що F не є скінченно породженим A-модулем, що суперечить умовам теореми 6.

Клас кілець для яких поняття спадковості справа і спадковості зліва є різними називають кільцями Херстейна-Смолла. Перший приклад таких кілець було сконструйовано І. Капланським. Вище наведені приклади, більш прості-ші, були пізніше сконструйовані Смоллом. Херстейн [4] використав такі кільця як приклад нетерових справа кілець у яких перетин всіх натуральних степенів радікала Джекобсона не дорівнює нулю.

Висновки. У роботі розглянуті напівланцюгові справа (зліва) і нетерові зліва (справа) напівпервинні кільця. Доведено, що такі кільця є скінченним прямим добутком напівланцюгових нетерових спадкових первинних кілець. Аналогічний результат належить А.А. Туганбаєву. Нами при доведенні були використані результати робіт В.В. Кириченко, А.Г. Завадського, Г. Міхлера, що дозволило скоротити доведення. Також наводені приклади кілець, що є напівлацнюговими справа нетеровими справа, але не є напівланцюговими та нетеровими зліва.

Список використаних джерел

1. Gubareni N.M., Kirichenko V.V. Rings and Modules. Czestochowa. // - 2001. - 306 p.
2. Gubareni N.M., Kirichenko V.V. Serial Rings with T-nilpotent Prime Radical.// Algebras and Representations Theory (2006) 9, pp. 147-160.
3. Hazewinkel M,Gubareni N.M., Kirichenko V.V. Algebras, Rings and Modules.Vol.1// - Kluwer Academic Publishers, 2004.-380p.
4. Herstein I. N., Noncommutative Rings, Cams Mathematical Monographs, No. 15, Mathematical. Association of America, Washington, DC, 1968.
5. Кириченко В. В., О полуцепных наследственных и полунаследственных кольцах, Модули и алгебраические группы, Зап. научн. сем. ЛОМИ, 114, Изд-во "Наука", Ленинград. отд., Л., 1982, 137-147.
6. Завадский А. Г., Кириченко В. В., Полумаксимальные кольца конечного типа, Матем. сб., 103(145):3(7) (1977), 323-345.
7. Kirichenko V.V., Generalized uniserial r-ngs. Preprint IM-75-1, Kiev, 1975.
8. Kirichenko V.V., Generalized uniserial r-ngs. Mat. sb. v.99(141), N4 (1975), p. 559-581.
9. Michler G., Structure of semi-perfect h-reditary noetherian rings. // J. Algebra, v. 13, N.3, 1069, p.327-344.
10. Tuganbaev A.A., Modules over serial rings. Mat. Zam. Vol. 65, no 6, pp. 880-892, 1999.
11. Warfield R.B., Serial rings and finitely presented modules. J. Algebra, v. 37 (1975), p.187-222.

Надійшла до редколегії 7.11.10