

WARSAW
UNIVERSITY
OF TECHNOLOGY
FACULTY OF CIVIL
ENGINEERING

THE MAIN
SCHOOL
OF FIRE
SERVICE
IN WARSAW

VILNIUS GEDIMINAS
TECHNICAL
UNIVERSITY
FACULTY OF CIVIL
ENGINEERING

PRYDNeproVSK
STATE ACADEMY
OF CIVIL
ENGINEERING
AND ARCHITECTURE

Theoretical Foundations of Civil Engineering

POLISH – UKRAÏNIAN – LITHUANIAN
Transactions

РЕШЕНИИ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПОЛОГОЙ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНОЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ С КРУГОВЫМ ОТВЕРСТИЕМ

Иван ХОМА, Оксана СТРИГИНА*

Институт механики им. С.П. Тимошенко НАН Украины

*Луганский Национальный университет им. Т. Шевченко

Ключевые слова

Методом разложения искомым функций в ряды Фурье по полиномам Лежандра толщины в работах [1-3] получены уравнения упругого равновесия нетонких изотропных оболочек. На их основе в [4] приведено решение задачи о напряженном состоянии пологой трансверсально-изотропной сферической оболочки с круговым отверстием, к поверхности которого приложены внешние усилия. В данной работе рассматривается аналогичная задача при смешанных граничных условиях на контуре отверстия. Предполагается, что на поверхности отверстия заданы нормальные перемещения и касательные напряжения.

Основные соотношения

Предположим, что оболочка, занимающая область $\Omega = S \times [-h, h]$ трехмерного пространства, отнесена к криволинейной системе координат x^i ($i = 1, 2, 3$), нормально связанной со срединной поверхностью S . Будем считать, что x^α ($\alpha = 1, 2$) совпадают с гауссовыми координатами поверхности S , а x^3 изменяется вдоль нормали к S в пределах толщины оболочки, т.е. $x^3 \in [-h, h]$. Представим компоненты вектора перемещений $u_j(x^1, x^2, x^3)$ и тензора напряжений $\sigma_{ij}^y(x^1, x^2, x^3)$ в виде конечного ряда Фурье по полиномам Лежандра $P_k(\zeta)$ координаты толщины

$$\{u_j(x^1, x^2, x^3), \sigma_{ij}^y(x^1, x^2, x^3)\} = \sum_{k=0}^N \{u_j^{(k)}(x), h^{-1} \sigma_{ij}^{(k)}(x)\} P_k(\zeta), \quad (1)$$

где $x = (x^1, x^2)$, $\zeta = h^{-1}x^3$; $u_j^{(k)}(x)$, $\sigma_{ij}^{(k)}(x)$ – коэффициенты разложений, именуемые модами. N – натуральное число, которое будем считать четным, т.е. $N = 2n$ ($n = 0, 1, \dots, < \infty$).

Компоненты напряжений $\sigma_{ij}^{(k)}$ удовлетворяют системе уравнений [1]

$$\begin{aligned} \nabla_{\alpha} \sigma_{(k)}^{\alpha\beta} - b_{\alpha}^{\beta} \sigma_{(k)}^{\alpha 3} - (2k+1)h^{-1} \sum_{s=0}^{[k]} \sigma_{(k-2s-1)}^{3\beta} &= 0 \quad (\beta = 1, 2); \\ \nabla_{\alpha} \sigma_{(k)}^{\alpha 3} + b_{\alpha\beta} \sigma_{(k)}^{\alpha\beta} - (2k+1)h^{-1} \sum_{s=0}^{[k]} \sigma_{(k-2s-1)}^{33} + f_3^{(k)} &= 0 \quad (k = \overline{0, N}), \end{aligned}$$

где ∇_{α} – символ ковариантной производной; b_{α}^{β} – коэффициент второй квадрат формы поверхности S ; $K = (k-1)/2$; символ $[K]$ обозначает целую часть числа K

$$f_3^{(k)} = \left(k + \frac{1}{2}\right) (\sigma_{33}^+ - (-1)^k \sigma_{33}^-).$$

Здесь σ_{33}^+ и σ_{33}^- – значения напряжений на лицевых граничных поверхностях S^+ ($x^3 = h$) и S^- ($x^3 = -h$) соответственно.

Уравнения состояния для анизотропного тела записываются таким образом

$$\sigma_{(k)}^j = h c^{ijm} \varepsilon_{im}^{(k)} \quad (k = \overline{0, N}),$$

где c^{ijm} – тензор модулей упругости; $\varepsilon_{im}^{(k)}$ – моменты деформаций вида

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\alpha\beta}^{(k)} &= \nabla_{\alpha} u_{\beta}^{(k)} - b_{\alpha\beta} u_3^{(k)}; \quad \varepsilon_{\alpha 3}^{(k)} = \nabla_{\alpha} u_3^{(k)} + b_{\alpha}^{\beta} u_{\beta}^{(k)}; \\ \varepsilon_{3j}^{(k)} &= h^{-1} \underline{u}_j^{(k)} \quad (\alpha, \beta = 1, 2; \quad j = 1, 2, 3; \quad k = \overline{0, N}), \end{aligned}$$

в которых $\underline{u}_j^{(k)} = (2k+1)(u_j^{(k+1)} + u_j^{(k+3)} + \dots)$, причем $u_j^{(n)} = 0$, если $n > N$.

3. Уравнения трансверсально-изотропной сферической оболочки

Рассмотрим уравнения равновесия сферической оболочки со срединной поверхностью радиуса R . Введем на поверхности сферы изометрическую систему координат x, y , относительно которой первая квадратичная форма принимает вид [5]:

$$ds^2 = \Lambda(dx^2 + dy^2), \quad \Lambda > 0.$$

Кроме того, в изометрической системе координат целесообразно использовать плоскую форму записи рассматриваемых уравнений. Следовательно, вводя комплексные переменные $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$, запишем систему уравнений (2) в виде

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Lambda} \frac{\partial}{\partial z} (\sigma_{11}^{(k)} - \sigma_{22}^{(k)} + 2i\sigma_{12}^{(k)}) + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \frac{1}{\Lambda} (\sigma_{11}^{(k)} + \sigma_{22}^{(k)}) + \frac{1}{R} \sigma_+^{(k)} - \frac{2k+1}{h} \sum_{s=0}^{[k]} \sigma_+^{(k-2s-1)} &= 0; \\ \frac{1}{\Lambda} \left(\frac{\partial \sigma_+^{(k)}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{\sigma}_+^{(k)}}{\partial \bar{z}} \right) - \frac{1}{R \Lambda} (\sigma_{11}^{(k)} + \sigma_{22}^{(k)}) - \frac{2k+1}{h} \sum_{s=0}^{[k]} \sigma_{33}^{(k-2s-1)} + \left(k + \frac{1}{2}\right) [\sigma_{33}^+ - (-1)^k \sigma_{33}^-] &= 0 \end{aligned} \quad (k = \overline{0, N}).$$

будем считать, что внешняя граничная поверхность S^+ свободна от напряжений ($\sigma = 0$), а к внутренней поверхности S^- приложено постоянное давление $p = -q$, $q = const$).

Для трансверсально-изотропной сферической оболочки соотношения упругости (4) записываются в комплексной форме таким образом

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^{(k)} &= 2h\Lambda \left[(c_{12} + c_{66}) \left(e^{(k)} + \frac{2}{R} u_3^{(k)} \right) + \frac{c_{13}}{h} u_3^{(k)} \right]; \quad \sigma_{11}^{(k)} - \sigma_{22}^{(k)} + 2i\sigma_{12}^{(k)} = 4c_{66}h\Lambda \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\frac{u_+^{(k)}}{\Lambda} \right); \\ \sigma_{33}^{(k)} &= h \left[c_{13} \left(e^{(k)} + \frac{2}{R} u_3^{(k)} \right) + \frac{c_{33}}{h} u_3^{(k)} \right]; \quad \sigma_+^{(k)} = hc_{44} \left[2 \frac{\partial u_3^{(k)}}{\partial \bar{z}} - \frac{1}{R} u_+^{(k)} + \frac{1}{h} \underline{u}_+^{(k)} \right], \end{aligned} \quad (7)$$

$c_{12}, c_{13}, \dots, c_{66}$ — упругие постоянные; $\sigma_+^{(k)} = \sigma_{13}^{(k)} + i\sigma_{23}^{(k)}$; $u_+^{(k)} = u_1^{(k)} + iu_2^{(k)}$;

$$e^{(k)} = \frac{1}{\Lambda} \left(\frac{\partial u_+^{(k)}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{u}_+^{(k)}}{\partial \bar{z}} \right). \quad (8)$$

Внеся (7) в равенства (6) и учтя сделанное замечание, то получим систему уравнений относительно моментов перемещений, т.е.

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Lambda} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \Lambda \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\frac{u_+^{(2k)}}{\Lambda} \right) + 2(c_{12} + c_{66}) \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(e^{(2k)} + \frac{2}{R} u_3^{(2k)} \right) + \frac{c_{44}}{R} \left(2 \frac{\partial u_3^{(2k)}}{\partial \bar{z}} - \frac{1}{R} u_+^{(2k)} \right) + \\ + \frac{4k+1}{h} \left(2 \sum_{s=1}^n \rho_{2s-1}^{(k)} \frac{\partial u_3^{(2s-1)}}{\partial \bar{z}} + \frac{c_{44}}{R} \sum_{s=1}^n u_+^{(2s-1)} - \frac{c_{44}}{h} \sum_{s=1}^n \beta_{2s}^{(k)} u_+^{(2s)} \right) = 0 \quad (k=0,1,2,\dots,n); \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} c_{44} \nabla^2 u_3^{(2k)} - \frac{4(c_{12} + c_{66})}{R^2} u_3^{(2k)} - \frac{c_{44} c_{44}}{R} e^{(2k)} + \frac{4k+1}{h} \left[\sum_{s=1}^n \delta_{2s-1}^{(k)} e^{(2s-1)} - \right. \\ \left. - \frac{2c_{13}}{R} \sum_{s=1}^n u_3^{(2s-1)} - \frac{c_{33}}{h} \sum_{s=1}^n \beta_{2s}^{(k)} u_3^{(2s)} \right] = -\frac{(4k+1)p}{R} = 0 \quad (k=0,1,2,\dots,n). \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Lambda} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \Lambda \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\frac{u_+^{(2k-1)}}{\Lambda} \right) + 2(c_{12} + c_{66}) \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(e^{(2k-1)} + \frac{2}{R} u_3^{(2k-1)} \right) + \frac{c_{44}}{R} \left(2 \frac{\partial u_3^{(2k-1)}}{\partial \bar{z}} - \frac{1}{R} u_+^{(2k-1)} \right) + \\ + \frac{4k-1}{h} \left(2 \sum_{s=0}^n \rho_{2s}^{(k)} \frac{\partial u_3^{(2s)}}{\partial \bar{z}} + \frac{c_{44}}{R} \sum_{s=0}^n u_+^{(2s)} - \frac{c_{44}}{h} \sum_{s=1}^n \alpha_{2s-1}^{(k)} u_+^{(2s-1)} \right) = 0 \quad (k=1,2,\dots,n); \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} c_{44} \nabla^2 u_3^{(2k-1)} - \frac{4(c_{12} + c_{66})}{R^2} u_3^{(2k-1)} - \frac{c_{44} c_{44}}{R} e^{(2k-1)} + \frac{4k-1}{h} \left[\sum_{s=0}^n \delta_{2s}^{(k)} e^{(2s)} - \right. \\ \left. - \frac{2c_{13}}{R} \sum_{s=0}^n u_3^{(2s)} - \frac{c_{33}}{h} \sum_{s=1}^n \alpha_{2s-1}^{(k)} u_3^{(2s-1)} \right] = \frac{(4k-1)p}{R} \quad (k=1,2,\dots,n). \end{aligned} \quad (12)$$

$\nabla^2 = \frac{4}{\Lambda} \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}}$ — оператор Лапласа на поверхности сферы; $p = qR/2h$,

$\rho_{2s}^{(k)} = (c_{12} + c_{66})/c_{44}$; $c^* = -1 + 2c_{66}/c_{44}$.

$$\rho_{2s-1}^{(k)} = \begin{cases} -c_{44}, 1 \leq s \leq k; \\ c_{13}, k < s \leq n; \end{cases} \quad \delta_{2s-1}^{(k)} = \begin{cases} -c_{13}, 1 \leq s \leq k; \\ c_{44}, k < s \leq n; \end{cases} \quad (I)$$

$$\alpha_{2s-1}^{(k)} = \begin{cases} s(2s-1), 1 \leq s \leq k; \\ k(2k-1), k \leq s \leq n; \end{cases} \quad \beta_{2s}^{(k)} = \begin{cases} s(2s+1), 1 \leq s \leq k; \\ k(2k+1), k \leq s \leq n. \end{cases}$$

4. Представление общего решения

Изложим метод построения общего аналитического решения системы уравнений (12). Применим к уравнениям (9) и (11) операцию $\Lambda^{-1} \partial_z$ и в найденных равенствах рассмотрим действительные части. Учитывая при этом формулу (8), будем иметь

$$c_{11} \nabla^2 e^{(2k)} + \frac{c_{44}}{R^2} e^{(2k)} + \frac{c_{44}}{R} \nabla^2 u_3^{(2k)} + \frac{4k+1}{h} \left\{ \sum_{s=1}^k \rho_{2s-1}^{(k)} \nabla^2 u_3^{(2s-1)} - \frac{c_{44}}{h} \sum_{s=k+1}^n (\beta_{2s}^{(k)} e^{(2s)} - \frac{h}{R} e^{(2s-1)}) \right\} = 0; \quad (I)$$

$$c_{11} \nabla^2 e^{(2k-1)} + \frac{c_{44}}{R^2} e^{(2k-1)} + \frac{c_{44}}{R} \nabla^2 u_3^{(2k-1)} + \frac{4k-1}{h} \left\{ \sum_{s=0}^k \rho_{2s}^{(k)} \nabla^2 u_3^{(2s)} - \frac{c_{44}}{h} \sum_{s=0}^n (\alpha_{2s-1}^{(k)} e^{(2s-1)} - \frac{h}{R} e^{(2s)}) \right\} = 0,$$

Равенства (14) совместно с (10) и (12) образуют систему уравнений $4(2n+1)$ -го порядка относительно моментов перемещений $u_3^{(k)}$ и деформаций $e^{(k)}$. Решение ее представляется формулами

$$c_{66} u_3^{(k)} = \eta_3^{(k)} h p + u_{2k+1}; \quad c_{66} h e^{(k)} = u_{2k+2} \quad (k = 0, 1, \dots, 2n), \quad (I)$$

где u_k — функции, выражающие общее решение однородной системы (10), (12), которую в стандартной форме запишем таким образом

$$\sum_{p=1}^{4n+2} (a_{kp} - b_{kp} h^2 \nabla^2) u_p = 0 \quad (k = 1, 2, 4n+2), \quad (I)$$

а $\eta_3^{(k)}$ — постоянные, определяющиеся из системы алгебраических уравнений

$$\frac{4(c_{12} + c_{66})h}{(4k+1)c_{66}R} \eta_3^{(2k)} + \frac{c_{33}R}{c_{66}h} \sum_{s=1}^n (\beta_{2s}^{(k)} \eta_3^{(2s)} + \frac{2c_{13}h}{c_{33}R} \eta_3^{(2s-1)}) = ph \quad (k = 0, 1, \dots, n); \quad (I)$$

$$\frac{4(c_{12} + c_{66})h}{(4k-1)c_{66}R} \eta_3^{(2k-1)} + \frac{c_{33}R}{c_{66}h} \sum_{s=0}^n (\alpha_{2s-1}^{(k)} \eta_3^{(2s-1)} + \frac{2c_{13}h}{c_{33}R} \eta_3^{(2s)}) = -ph \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

Рассмотрим характеристическое уравнение

$$\det \| a_{kp} - k b_{kp} \| = 0 \quad (II)$$

можно считать, что оно имеет простые и отличные от нуля корни k_m . Тогда из (16) вариационным методом [1] находим

$$u_k = \sum_{m=1}^{2(2n+1)} G_m^{(k)} V_m, \quad (19)$$

— метагармонические функции, обеспечивающие выполнения равенств

$$\nabla^2 V_m - k_m h^{-2} V_m = 0, \quad (20)$$

— постоянные, определяемые алгебраическими дополнениями элементов какой-либо строки определителя $|a_{kr} - k_m b_{kr}|_{(4n+2) \times (4n+2)}$.

В соответствии с (19) функции (15) примут вид

$$c_{66} u_3^{(k)} = \eta_3^{(k)} h p + \sum_{m=1}^{2(2n+1)} c_m^{(k)} V_m; \quad c_{66} e^{(k)} = h^{-1} \sum_{m=1}^{2(2n+1)} \tilde{c}_m^{(k)} V_m \quad (k = 0, 1, K, 2n), \quad (21)$$

где $c_m^{(k)} = G_m^{(2k+1)}$; $\tilde{c}_m^{(k)} = G_m^{(2k+2)}$. Если учесть формулы (8) и равенства (20), то моменты перемещений $e^{(k)}$ из (21) можно записать таким образом

$$c_{66} \frac{1}{A} \left(\frac{\partial u_3^{(k)}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{u}_3^{(k)}}{\partial \bar{z}} \right) = 2h \sum_{m=1}^{4n+2} a_m^{(k)} \frac{1}{\Delta} \frac{\partial^2 V_m}{\partial z \partial \bar{z}}. \quad (22)$$

где $a_m^{(k)} = 2k_m^{-1} \tilde{c}_m^{(k)}$. Отсюда находим моменты перемещений $u_3^{(k)}$, т.е.

$$c_{66} u_3^{(k)} = h \sum_{m=1}^{4n+2} a_m^{(k)} \frac{\partial V_m}{\partial \bar{z}} + i h \frac{\partial Y_k}{\partial \bar{z}}, \quad (23)$$

где Y_k — произвольные достаточно гладкие вещественные функции. Их необходимо подобрать такими, чтобы выполнялись равенства (9) и (11). Следовательно, если внести в (23) значения моментов (21) и (23) и провести интегрирование по переменной \bar{z} , то получим систему уравнений

$$\begin{aligned} \nabla^2 Y_{2k} + \frac{c^* c_{44}}{c_{66} R^2} Y_{2k} - \frac{(4k+1)c_{44}}{c_{66} h^2} \sum_{s=1}^n \left(\beta_{2s}^{(k)} Y_{2s} - \frac{h}{R} Y_{2s-1} \right) &= 0; \\ \nabla^2 Y_{2k-1} + \frac{c^* c_{44}}{c_{66} R^2} Y_{2k-1} - \frac{(4k-1)c_{44}}{c_{66} h^2} \sum_{s=0}^n \left(\alpha_{2s-1}^{(k)} Y_{2s-1} - \frac{h}{R} Y_{2s} \right) &= 0, \end{aligned} \quad (24)$$

откуда находим

$$Y_k = \sum_{s=1}^{2n+1} b_s^{(k)} w_s, \quad (25)$$

где w_s — метагармонические функции, $b_s^{(k)}$ — константы.

В соответствии с (25) моменты перемещений $u_3^{(k)}$ из (23) примут вид

$$c_{66}u_r^{(k)} = h \sum_{m=1}^{4n+2} a_m^{(k)} \frac{\partial V_m}{\partial \bar{z}} + ih \sum_{s=1}^{2n+1} b_s^{(k)} \frac{\partial w_s}{\partial \bar{z}}. \quad (26)$$

Найденные значения функций (26) совместно с (21) составляют общее аналитическое решение уравнений (9) – (12).

5. Пологая сферическая оболочка с круговым отверстием

Для пологих оболочек, срединная поверхность которой незначительно отличается от плоскости, величину A можно принять равной единице, а оператор ∇^2 заменить оператором Лапласа Δ на плоскости. Учитывая сказанное, введем в области S полярную систему координат r, ϑ и воспользуемся формулами перехода от одной системы координат к другой. Тогда соотношение (7) с учетом (21) и (26) примут вид

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^{(k)} + \sigma_{\vartheta\vartheta}^{(k)} &= \gamma_k hp + 2 \sum_{m=1}^{2(2n+1)} d_m^{(k)} V_m; & \sigma_{33}^{(k)} &= \gamma_{3k} hp + \sum_{m=1}^{2(2n+1)} d_{3m}^{(k)} V_m; \\ \sigma_{rr}^{(k)} - \sigma_{\vartheta\vartheta}^{(k)} + 2i\sigma_{r\vartheta}^{(k)} &= 4h^2 \left(\sum_{m=1}^{2(2n+1)} a_m^{(k)} \frac{\partial^2 V_m}{\partial \bar{z}^2} + i \sum_{s=1}^{2n+1} b_s^{(k)} \frac{\partial^2 w_s}{\partial \bar{z}^2} \right) e^{-2i\vartheta}; & (27) \\ \sigma_{r3}^{(k)} + i\sigma_{\vartheta 3}^{(k)} &= 2h \left(\sum_{m=1}^{2(2n+1)} p_m^{(k)} \frac{\partial V_m}{\partial \bar{z}} + i \sum_{s=1}^{2n+1} q_s^{(k)} \frac{\partial w_s}{\partial \bar{z}} \right) e^{-i\vartheta}, \end{aligned}$$

где γ_k, γ_{3k} и $d_m^{(k)}, d_{3m}^{(k)}, p_m^{(k)}, q_s^{(k)}$ – постоянные.

Моменты перемещений (26) в полярной системе координат представляются формулами

$$c_{66}(u_r^{(k)} + iu_\vartheta^{(k)}) = h \left(\sum_{m=1}^{2(2n+1)} a_m^{(k)} \frac{\partial V_m}{\partial \bar{z}} + i \sum_{s=1}^{2n+1} b_s^{(k)} \frac{\partial w_s}{\partial \bar{z}} \right) e^{-i\vartheta}. \quad (28)$$

На основе приведенных формул рассмотрим задачу о напряженном состоянии полой сферической оболочки с круговым отверстием радиуса r_0 . Оболочка находится под действием постоянного внутреннего давления интенсивности q ($q = const$). Отверстие закрыто крышкой, которая передает на контур отверстия действие перерезывающей силы [6]. Предполагается, что крышка жесткая и не деформируется в радиальном направлении. Это приводит к выполнению равенств

$$u_r^{(k)}(r)_{r=r_0} = 0, \quad (k = \overline{0, 2n}); \quad \sigma_{r3}^{(0)}(r)_{r=r_0} = -qr_0/2; \quad \sigma_{r3}^{(k)}(r)_{r=r_0} = 0, \quad (k = \overline{1, 2n}) \quad (29)$$

Характеристическое уравнение (18) имеет разное количество действительных и комплексно-сопряженных корней. В зависимости от значений этих корней будем определять вид метагармонических функций V_m (функции w_s вихревого решения в осесимметричной задаче отсутствуют). Если, в частности, k_1 – действительный отрицательный, k_2 – действительный положительный корень, а k_3 и k_4 – комплексно-сопряженные корни, то

$$V_1 = A_0 Y_0(\rho x_1); \quad V_2 = B_0 K_0(\rho x_2); \quad V_3 = C_0 H_0^{(1)}(\rho x_3); \quad V_4 = D_0 H_0^{(2)}(\rho x_4). \quad (30)$$

A, B_2, C_0, D_0 – произвольные постоянные; $Y_0(\rho x_1), K_0(\rho x_2), H_0^{(1)}(\rho x_3)$ и $H_0^{(2)}(\rho x_4)$ – бесселевские функции Неймана, Бесселя, Ханкеля первого и второго рода;
 $x_1 = r_0 h^{-1} \sqrt{-k_1}, x_2 = r_0 h^{-1} \sqrt{k_2}, x_3 = r_0 h^{-1} \sqrt{-k_3}, x_4 = \bar{x}_3$.
 Подставляя значения функций (30) в соотношения (27), (28) и учитывая граничные условия (29), получим после некоторых преобразований алгебраическую систему уравнений относительно неизвестных констант. Определив константы и, следовательно, подставляя их в (27), находим, согласно формул (1), компоненты напряжений.

Численные результаты и выводы

Результаты исследования о распределении напряжений около кругового отверстия в плоско-изотропной сферической оболочке в зависимости от упругих характеристик материала. Результаты числовых расчетов приведены в таблицах 1 и 2 и представлены на рисунке. В таблице 1 приведены значения радиальных σ_r / p и кольцевых напряжений на контуре отверстия $\rho = 1$ в точках $\zeta = 0$ и $\zeta = 1; \zeta = -1$ соответственно для некоторых значений отношения E/G' модуля упругости в плоскости к поперечному модулю сдвига. Как видно, концентрация напряжений определяется радиальными напряжениями. Напряжения σ_r создают некоторое давление на оболочку, закрывающей отверстие и величина этого давления зависит от отношения E/G' . С ростом E/G' увеличиваются и радиальные и кольцевые напряжения.

Таблица 1. Зависимость напряжений от отношения E/G'

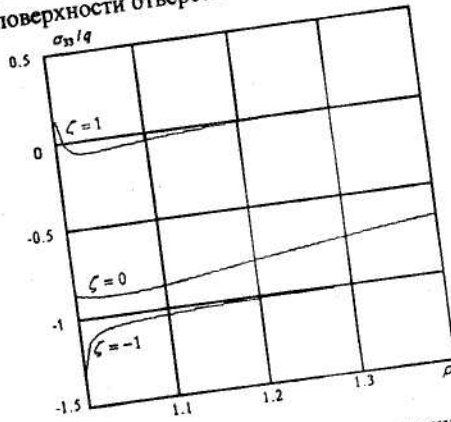
Напряж.	ζ	E/G'				
		5	10	15	20	25
σ_r / p	1	2,6875	2,8309	2,9174	2,9743	3,0133
	0	0,4416	0,4694	0,4403	0,4414	0,4426
	-1	-1,7813	-1,9380	-2,0307	-2,0909	-2,1317
$\sigma_{\theta\theta} / p$	1	1,8875	2,0305	2,0505	2,2634	2,3637
	0	1,3324	1,4450	1,5512	1,6508	1,7448
	-1	0,7774	0,8565	0,9411	1,0267	1,1113

Таблица 2 иллюстрирует изменения напряжений оболочки в зависимости от значений коэффициентов Пуассона ν и ν' в плоскости изотропии и нормальной к ней плоскости. Из данных таблицы следует, что увеличение коэффициента ν (при постоянном ν') приводит к повышению напряжений, а увеличение ν' (при постоянном ν) – к снижению.

Таблица 2. Зависимость напряжений от коэффициентов Пуассона

ζ	ν				ν'			
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,1	0,2	0,3	0,4
1	2,663	2,676	2,702	2,744	2,725	2,701	2,672	2,631
0	0,440	0,441	0,442	0,443	0,434	0,439	0,445	0,456
-1	-1,754	-1,769	-1,798	-1,84	-1,802	-1,788	-1,777	-1,775
1	1,563	1,779	1,997	2,221	1,899	1,891	1,883	1,872
0	1,348	1,339	1,325	1,307	1,321	1,331	1,334	1,343
-1	1,132	0,897	0,653	0,389	0,783	0,781	0,772	0,748

На рисунке приведены кривые изменения нормальных поперечных напряжений σ_{33}/q при удалении от поверхности отверстия в точках $\zeta = 1, \zeta = 0$ и $\zeta = -1$.



При возрастании координаты ρ напряжения σ_{33} на внешней (не нагруженной) поверхности $\zeta = 1$ быстро затухают, приближаясь к нулю, а на внутренней (нагруженной) граничной поверхности $\zeta = -1$ они стремятся к заданным значениям.

7. Литература

- [1] Khoma I. Yu. Complex Representation of the Equations of a Transversally- Isotropic Spherical Shell with Prestressed // Int. Appl. Mech.- 2007.-43,№2.- P. 228-237.
- [2] Хома И.Ю., Кондратенко О.А. О влиянии расщепляющей силы на напряженное состояние полой сферической оболочки с круговым отверстием. //Сб. Актуальные проблемы механики деформируемого твердого тела. – Донецк. 2006. – С.145-147.
- [3] Khoma I. Yu., Kondratenko O.A. Stress Distribution Around a Circular Cylindrical Cavity in a Prestressed Plate // Int. Appl. Mech.- 2008.-44,№1.- P. 23-34.
- [4] Kondratenko O.A. Stress State Around a Circular Hole in a Prestressed Transversally- Isotropic Spherical Shell // Int. Appl. Mech.- 2008.-44,№2.- P. 167-174.
- [5] Векуа И.Н. Основы тензорного анализа и теории ковариантов.– М. Наука.–1986.– 296 с.
- [6] Гузь А.Н., Чернышенко И.С., Чехов Вал. и др. Теория тонких оболочек, ослабленных отверстиями.– Киев: Наук. Думка.– 1980.– 635 с.

ON THE SOLUTION OF THE MIXED PROBLEM FOR A TRANSVERSELY ISOTROPIC SPHERICAL SHELL WITH A CIRCULAR HOLE

Summary

By using the expanding method of the unknown functions in a Fourier Series in Legendre polynomials of the thickness coordinate for a transversely isotropic spherical shell with a circular hole on the contour of which the mixed boundary conditions are set the solution of the stressed state problem is solved. The influence of the elastic constants of the material on the distribution of the stresses near hole is examined.