МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ЛУГАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ»

Актуальные вопросы математики и методики преподавания математики

Сборник материалов
Межрегиональной заочной научно-практической конференции
(28 февраля 2024, г. Луганск)

Издательство ЛГПУ
Луганск –2024

УДК 51:[37.016:51](06)
ББК 22.1я43+22.1р3я43+74.262.21я43
А43

Рецензенты:

Кочевский А.А. – декан факультета компьютерных систем и технологий Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Луганский государственный университет имени Владимира Даля», кандидат технических наук, доцент.

Малый Д.В. – доцент кафедры прикладной математики Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Луганский государственный университет имени Владимира Даля», кандидат технических наук, доцент.

Корнеева А.Н. – заведующий кафедрой безопасности жизнедеятельности и охраны труда Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Луганский государственный педагогический университет», кандидат педагогических наук, доцент.

А43 **Актуальные вопросы математики и методики преподавания математики :** сборник материалов Межрегиональной заочной научно-практической конференции, 28 февраля 2024 г., г. Луганск / Под общ. ред. С. В. Темниковой, А. В. Скринниковой; ФГБОУ ВО «ЛГПУ». – Луганск : Издательство ЛГПУ, 2024. – 140 с.

Опубликованные материалы являются результатами научных изысканий работников высших учебных заведений, академических и отраслевых научных организаций, учителей общеобразовательных учреждений, магистрантов и студентов высших учебных заведений Российской Федерации, посвященных актуальным научным проблемам в сфере математики и методики преподавания математики.

Сборник трудов коллектива авторов предназначен для научно-педагогического сообщества.

УДК 51:[37.016:51](06)
ББК 22.1я43+22.1р3я43+74.262.21я43

*Печатается по решению Научной комиссии
Луганского государственного педагогического университета
(протокол № 9 от 09.04.2024 г.)*

СОДЕРЖАНИЕ

СЕКЦИЯ 1
АКТУАЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ МАТЕМАТИКИ: ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ И ПРИКЛАДНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ

СЕКЦИЯ 2
ЦИФРОВЫЕ ТЕХНОЛОГИИ В ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИЧЕСКИМ ДИСЦИПЛИНАМ

СЕКЦИЯ 3
АКТУАЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ МЕТОДИКИ ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИКИ В ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ УЧРЕЖДЕНИЯХ

СЕКЦИЯ 1

АКТУАЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ МАТЕМАТИКИ: ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ И ПРИКЛАДНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ

УДК 512.55

ОБОБЩЕНИЕ ТЕОРЕМЫ ПОТТЕРА

Айдагулов Рустем Римович
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, г. Москва
a_rust@bk.ru

Аннотация. Статья посвящена комбинаторике с не коммутирующими переменными, когда перестановка местами произведения двух переменных отличается на множитель, являющийся корнем из 1. Такие переменные встречаются в квантовой механике. Соответственно, некоторые авторы называют эту область математики квантовой комбинаторикой. Известно, что степень суммы двух таких переменных выражается как сумма их степеней (теорема Поттера). Здесь находятся необходимые и достаточные условия, когда это свойство выполняется для некоторого конечного числа не коммутирующих переменных.

Ключевые слова: цветные алгебры, бигрупповая алгебра, образующие Клиффорда, квантовая комбинаторика.

В 80-ые годы двадцатого века появилось обобщение суперматематики Березина, называемое цветной суперматематикой [1]. В работе автора [2] выявлена структура группы цветов. Конечномерные цветные алгебры порождаются парами не коммутирующихся переменных x, y (образующие Дарбу) с условием:

$$xy = \theta yx, \qquad \theta^n = 1, \ \left(\theta^i \neq 1, \qquad i < n\right). \tag{1}$$

В работе [3] доказано, что для таких переменных выполняется:

$$(x + y)^n = x^n + y^n. \tag{2}$$

Это означает, что все промежуточные биномиальные коэффициенты $B_k^n(\theta) = 0, 0 < k < n$. В [4] вводятся квантовые числа, факториалы и биномиальные коэффициенты. Находится выражение для квантовых биномиальных коэффициентов $B_k^m(\theta)$ и, как следствие, получено доказательство теоремы Поттера.

В работе автора [5] введены понятия бигрупповой алгебры, образующие Дарбу и Клиффорда. Доказано, что алгебра квадратных матриц является бигрупповой алгеброй. В работе [6] доказано, что для образующих Клиффорда $z_1, \dots, z_m$, определяемых коммутационными соотношениями

$$z_i z_j = \omega_i z_j z_i, \forall\, i < j, \qquad \omega_i^r = 1 \leftrightarrow n | r \tag{3}$$

выполняется тождество, обобщающее теорему Поттера:

$$(z_1 + z_2 + \cdots + z_m)^n = z_1^n + z_2^n + \cdots + z_m^n. \qquad (4)$$

Пусть переменные $z_1, \dots, z_m$ удовлетворяют коммутационным соотношениям:

$$z_j z_i = \omega_{ij} z_i z_j, \qquad \forall\, i < j. \qquad (5)$$

Элементы ω_{ij} являются обратимыми элементами некоторого кольца K. Ассоциативная алгебра многочленов, порожденная образующими $z_1, \dots, z_m$, называется (обобщенной) алгеброй Клиффорда и является обобщением алгебры спиноров для физиков. В обычной алгебре Клиффорда $\omega_{ij} = -1 = \omega_{ij}^{-1} = \omega_{ji}$, при этом $n = 2$. В дальнейшем считается, что все ω_{ij} являются корнями из 1 степени n. Чтобы в выражении (4) справа коэффициенты перед членами $z_i^k z_j^{n-k}. 0 < k < n$ обращались нулю необходимо и достаточно, чтобы ω_{ij} являлись примитивными корнями степени n. При $n > 2$ $\omega_{ij} \neq \omega_{ji} = \omega_{ij}^{-1}$ и имеет значение нумерация переменных. Если переменные (образующие) $z_1, \dots, z_m$ можно перенумеровать так, что будет выполняться соотношение (3), то их назовем Клиффордовыми образующими. Здесь доказывается, что для выполнения соотношения (тождества) (4) необходимым и достаточным условием является выполнение условий (3) (Клиффордовости образующих).

Введем квантовые биномиальные коэффициенты из соотношения:

$$(z_1 + z_2 + \cdots + z_m)^r = \sum_{k_1 + \cdots + k_m = r} B(k_1, k_2, \dots, k_m)\, z_1^{k_1} z_2^{k_2} \dots z_m^{k_m}, \;\; k_i \geq 0. \qquad (6)$$

Далее будем интересоваться выражением для этих коэффициентов и определять, какие из них имеют не нулевые значения. Определим ранг одночлена $z_1^{k_1} z_2^{k_2} \dots z_m^{k_m}$ как число не нулевых значений среди $k_1, k_2, \dots, k_m$. Необходимым условием ранга 2, т.е. необходимое условие обращения нулю всех коэффициентов перед одночленами ранга 2, является примитивность корней n-ой степени ω_{ij}. В дальнейшем, найдем необходимое условие ранга 3, когда обращаются нулю все коэффициенты перед одночленами ранга 3. Далее обобщим на ранги выше 3.

Используем удобные обозначения (называемые квантовыми) из [4]:

$$r_\omega = \frac{1 - \omega^r}{1 - \omega} = 1 + \omega + \cdots + \omega^{r-1},$$

$$r_\omega! = 1 \cdot 2_\omega \cdot \ldots \cdot r_\omega, \quad B_k^r(\omega) = \frac{r_\omega \cdot \ldots \cdot (r - k + 1)_\omega}{k_\omega!}.$$

Отметим, что в [4] используется симметричное выражение $\frac{r_\omega!}{k_\omega!(r-k)_\omega!}$. Они отличаются от введённых $B_k^r(\omega)$ на степень ω и не зависят от порядка записи в (6). Коэффициенты, введенные в (6) зависят от порядка (нумерации) переменных.

Из представления

$$\left(\sum z_i\right)^r = \left(\sum z_i\right)^{r-1} (z_1 + z_2 + \cdots + z_m)$$

получим рекуррентное соотношение

$$B(k_1, k_2, \dots, k_m) = \sum_i B(k_1, \dots, k_i - 1, k_{i+1}, \dots, k_m) \prod_{j|j>i} \omega_{ij}^{k_j}. \qquad (7)$$

В качестве начальных условий служит соотношение $B(0, \dots, 0) = 1$. Отсюда получается, что если все индексы k_i равны 0 за исключением одного, то коэффициент $B(0, \dots, 0, k_i, 0, \dots, 0) = 1$. Для двух ненулевых индексов $k_i = k, k_j = r,\ i < j, \omega_{ij} = \omega$ обозначим коэффициент проще $B(k, r, \omega)$. Рекуррентное соотношение (7) запишется в виде:

$$B(k, r, \omega) = B(k-1, r, \omega)\omega^r + B(k, r-1, \omega). \qquad (8)$$

Легко проверяется, что введенные ранее коэффициенты $B_k^{k+r}(\omega)$ удовлетворяют этим соотношениям, следовательно $B(k, r, \omega) = B_k^{k+r}(\omega)$. Учитывая, что при $k + r = n$ число $n_\omega = 0$ $(\omega^n = 1)$, получим как следствие теорему Поттера.

В случае выполнения соотношений коммутации (3) коэффициенты $B(k_1, k_2, \dots, k_m)$ разлагаются в произведение:

$$B(k_1, k_2, \dots, k_m) = \prod_i B_{k_i}^{k_i + k_{i+1} + \dots + k_m}(\omega_i). \qquad (9)$$

Из (9) следует достаточность условий (3) для выполнения соотношения (4), являющегося обобщением теоремы Поттера. Необходимость условий (3) требует более сложных вычислений коэффициентов $B(k_1, k_2, \dots, k_m)$ с тремя не нулевыми индексами. Доказательство сводится к выражению коэффициентов через суммы $B(k_1, k_2, k_3) = \sum_i B_k^l(\theta_i)$, $l = k_1 + k_2 + k_3$, где θ_i – произведение нескольких коммутирующих коэффициентов ω_{ij}. Для краткости обозначим $\omega_1 = \omega_{12}, \omega_2 = \omega_{13}, \omega_3 = \omega_{23}$. Из рекуррентных соотношений (7) получается, что $B(r, 1, 1) = \left(\frac{\omega_3}{1-\omega_2} + \frac{1}{1-\omega_1}\right)(l)_{\omega_1\omega_2} - \frac{\omega_3}{1-\omega_2}(l)_{\omega_1} - \frac{1}{1-\omega_1}\omega_1^{r+1}(l)_{\omega_2}$.

Далее докажем общую формулу разложения для этого случая:

$$B(r, s, k) = \sum_i A(r, s, k, i)(l)_{W_i}, l = r + s + k, W_i = \omega_1^{i_1}\omega_2^{i_2}\omega_3^{i_3}. \qquad (10)$$

В случае $k = 0$ такое представление получается из

$$B(r, s, 0) = \prod_{i=1}^{s} \frac{1 - \omega_1^{r+i}}{1 - \omega_1^i} = \frac{1}{\prod_i (1 - \omega_1^i)} \sum_{j=1}^{s} C(j)\omega_1^{j(r+s)} =$$

$$= \frac{1}{\prod_i (1 - \omega_1^i)} \sum_{j=1}^{s} C(j)\left(\omega_1^{j(r+s)} - 1\right) = -\sum_j \frac{C(j)}{\prod_{i \neq j}(1 - \omega_1^i)}(l)_{\omega_1^j}.$$

Далее представим коэффициенты $B(r, s, 1), (l = r + s + 1)$ таким образом:

$$B(r, s, 1) = \sum_{t=0}^{r} (\omega_1^s\omega_2)^{r-t} B(t, s, 0) = \sum_{t=0}^{r+s} (\omega_1^s\omega_2)^t B(r - t, s, 0) =$$

$$= \frac{1}{\prod_i (1 - \omega_1^i)} \sum_{j=0}^{s} C(j)\omega_1^{j(r+s)} \sum_{t=0}^{r+s} \left(\omega_1^{s-j}\omega_2\right)^t = \frac{1}{\prod_i (1 - \omega_1^i)} \sum_{j=0}^{s} C(j)\omega_1^{j(r+s)}(l)_{\omega_1^{s-j}\omega_2}.$$

Выразим коэффициенты $a(i,j), j = 0,1$ в выражении $B(r,i,1)$ перед $(l)_{\omega_1^i\omega_2^j}$. При $l = n$ не нулевым коэффициентом может только один из $A(r,s,1,i,1)$. Из рекуррентных соотношений (7) получаем их вид:

$$A(r,s,1,i,1) = \frac{C(s-i)}{\prod_{j=1}^{s}\left(1-\omega_1^j\right)}\left(1 + \sum_{r=1}^{i}\prod_{j=1}^{r}\frac{\omega_3\left(1-\omega_1^{s+1-j}\right)}{\omega_1^{s-i}\left(1-\omega_1^{i-j}\omega_2\right)}\right). \qquad (11)$$

Необходимым условием ранга 3 является равенство нулю $A(r,i,1,i,1) = = a(i,1) = \frac{C(s-i)}{\prod_{j=1}^{s}\left(1-\omega_1^j\right)} f(i,\omega_1)$, где индекс i определяется из условия $\omega_1^i\omega_2 = 1$ и

$$f(i,\omega) = 1 + \sum_{r=1}^{i} d(i,r), d(i,r) = \prod_{j=1}^{r}\frac{1-\omega^{i+1-j}}{1-\omega^{-j}}.$$

Необходимым условием ранга 3 является или $\omega_1 = \omega_2$ или $f(i,\omega_1) = 0$ для такого i, когда $\omega_1^i\omega_2 = 1$.

$$f(1,\omega) = 1 - \omega_3\omega, f(2,\omega) = (1-\omega_3\omega)(1-\omega_3\omega^2), \ldots$$

Коэффициент $d(i,r) = d(i-1,r)\frac{1-\omega^i}{1-\omega^{i-r}} = d(i-1,r) + \omega^i d(i-1,r-1)$. По индукции получаем, что:

$$a(i,1) = \prod_{j=1}^{i}\frac{1-\omega_3\omega_1^j}{1-\omega_1^j}. \qquad (12)$$

Если $\omega_1 = \omega_2 = \omega$, то $B(r,s,k) = B_r^n(\omega)B_s^{s+k}(\omega_3) = 0.$ Если $\omega_1 \neq \omega_2$, то существует такое значение $1 \le i < n-1$, что $\omega_1^i\omega_2 = 1$. Тогда, согласно (12) получаем коэффициент $B(n-i-1,i,1) = n\prod_{j=1}^{i}\frac{1-\omega_3\omega_1^j}{1-\omega_1^j}$. Он равен 0 только в случае, когда $\omega_3 = \omega_1^{-j}, j \le i$. Используя перестановки переменных, согласно таблице 1 получим новые значения ω_i.

Табл.1. Преобразования коэффициентов ω_i при перестановках σ

σ	1	2	3	ω_1	ω_2	ω_3
0	1	2	3	ω_1	ω_2	ω_3
1	1	3	2	ω_2	ω_1	ω_3^{-1}
2	2	1	3	ω_1^{-1}	ω_3	ω_2
3	2	3	1	ω_3	ω_1^{-1}	ω_2^{-1}
4	3	1	2	ω_2^{-1}	ω_3^{-1}	ω_1
5	3	2	1	ω_3^{-1}	ω_2^{-1}	ω_1^{-1}

Используя перестановку (5) получим $i \le j\ (j \le i) \leftrightarrow i = j$. Следовательно, $\omega_2 = \omega_3 \rightarrow \omega_{32} = \omega_3^{-1} = \omega_2^{-1} = \omega_{31}$. Т.е. при любом расположении выполняется или $\omega_1 = \omega_2$ или $\omega_2 = \omega_3$.

Таким образом, мы доказали, что необходимым условием для выполнения соотношения (4) является существование перестановки, когда выполняется одно из двух равенств:

$$\omega_{\sigma(1)\sigma(2)} = \omega_{\sigma(1)\sigma(3)} \text{ или } \omega_{\sigma(1)\sigma(3)} = \omega_{\sigma(2)\sigma(3)}.$$

Если одно из соотношений выполняется для перестановки σ, то другое соотношение выполняется относительно перестановки с обратной нумерацией переменных. Для 4-х и более переменных необходимость условия ранга 4 и более легко получается из доказанного необходимого условия ранга 3 для 3-х переменных. Действительно, пусть для первых трех переменных выполняется $\omega_{12} = \omega_{13}$. Если выполняется так же $\omega_{12} = \omega_{14}$, то первый элемент остается на месте, а элементы с номерами 2,3,4 можем упорядочить в нужном порядке. Иначе выполняется соотношение $\omega_{41} = \omega_{42}$. Если $\omega_{41} = \omega_{43}$, то работает расстановка переменных 4,1,2,3. Иначе справедливы соотношения $\omega_{34} = \omega_{32} = \omega_{31}$ и работает расстановка 3,4,1,2. Такими же рассуждениями без дополнительных вычислений убеждаемся в существовании нумерации σ, когда выполняется (3) и следующая теорема.

Теорема. Для переменных $z_1, z_2, \ldots, z_m$ выполняется соотношение (4):

$$(z_1 + z_2 + \cdots + z_m)^n = z_1^n + z_2^n + \cdots + z_m^n$$

тогда и только тогда, когда существуют такая расстановка, что выполняется:

$$z_{\sigma(i)} z_{\sigma(j)} = \omega_{\sigma(i)} z_{\sigma(j)} z_{\sigma(i)}, \forall\, i < j, \qquad \omega_i^r = 1 \leftrightarrow n|r.$$

Отметим, что справа стоят только члены, которые коммутируют со всеми переменными (центральные элементы). С точки зрения бигрупповой алгебры было бы полезно снять ограничение примитивности корней из $1 - \omega_i$ и доказать, что справа остаются только центральные элементы.

Литература

1. Михалев, А. А. Подалгебры свободных цветных супералгебр Ли. Математические заметки / А. А. Михалев. – 37, №5. – С. 653-659.

2. Айдагулов, Р. Р. Группы цветов / Р. Р. Айдагулов, М. В. Шамолин // Современная математика. Фундаментальные направления. – Том 62., 2009. – С. 14–26.

3. Loewy, R. A note on Potter's theorem for quasi commutative matrices / R. Loewy, V. Mehrmann // Linear algebra and its Applications, 2009. – pp. 1812–1825.

4. Игнатьев, М. В. Квантовая комбинаторика / М. В. Игнатьев // Математическое просвещение. – №18, 2014. – С. 66–111.

5. Айдагулов, Р. Р. Бигрупповые алгебры и их автоморфизмы // Электронный журнал Дневник науки. – №1, 2019. – 20 с. URL: http://dnevnik-nauki.ru/index.php/number1-2019/physics-1-2019 (дата обращения 22.02.2024).

6. Айдагулов, Р. Р. Бигрупповые алгебры и квантовая комбинаторика // Дневник науки. – №1, 2019. – 7 с. URL: http://dnevniknauki.ru/index.php/number1-2019/physics-1-2019 (дата обращения 22.02.2024).

GENERALIZATION OF POTTER'S THEOREM

Aidagulov Rustem Rimovich
Lomonosov Moscow State University, Moscow
a_rust@bk.ru

Annotation. The article is devoted to combinatorics with non-commuting variables, when the interchange of the product of two variables differs by a factor that is the root of 1. Such variables are found in quantum mechanics. Accordingly, some authors call this branch of mathematics quantum combinatorics. It is known that the degree of the sum of two such variables is expressed as the sum of their degrees (Potter's theorem). Here are the necessary and sufficient conditions when this property is satisfied for a certain finite number of non-commuting variables.

Keywords: Colored algebras, bigroup algebra, Clifford generators, quantum combinatorics.

УДК 517.956.35

АПРИОРНЫЕ ОЦЕНКИ ПРОИЗВОДНЫХ РЕШЕНИЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ КИРХГОФА

***Бозиев Олег Людинович*[1,2]**

[1]*Кабардино-Балкарский государственный университет,*

[2]*Институт информатики и проблем регионального управления Кабардино-Балкарского научного центра РАН, г. Нальчик*

boziev@yandex.ru

Аннотация. Рассматривается вторая смешанная задача с однородными граничными условиями для одномерного гиперболического уравнения Кирхгофа, в котором множитель при u_{xx} является степенной функцией интегральной нагрузки. Для двух видов степеней установлены априорные оценки, которые можно использовать для линеаризации первоначального уравнения.

Ключевые слова: уравнение Кирхгофа, интегральная нагрузка, априорная оценка, линеаризация.

Введение. Значительное количество процессов в физических, биологических и других системах моделируется нагруженными дифференциальными уравнениями в частных производных. В случае, когда уравнение содержит какую-либо функцию от интеграла по пространственной переменной некоторой степени решения или его производной, будем называть его уравнением с интегральной нагрузкой.

Гиперболическое уравнение Кирхгофа с интегральной нагрузкой в главной части

$$u_{tt} - a(s)u_{xx} = f(x,t), \tag{1}$$

$$s(t) = \|u_x\|^2 = \int_{\Omega} |u_x|\, dx,\ \Omega = [0,l],$$

впервые рассматривалось в работе [1]. Более поздние результаты, связанные с этим уравнением, были опубликованы в [13; 8]. В статьях [7; 9] и других рассмотрено многомерное неоднородное уравнение

$$u_{tt} - a\left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2\, dx\right) u_{xx} = f, \Omega \subset R^n.$$

Вопросы однозначной разрешимости начально краевых задач в многомерном случае исследуются в работах [4; 5]. Подобные уравнения, содержащие также младшие члены, интенсивно исследуются в последнее время. Среди значительного количества работ можно выделить [10 – 12]. В перечисленных и многих других случаях интегральная нагрузка является нормой производной искомого решения в пространстве $L_2(\Omega)$ или некоторой функцией от этой нормы. Это позволяет использовать правую часть априорного неравенства, оценивающего данную норму, для линеаризации нагруженного уравнения.

В работе рассматривается вторая начально-краевая задача с однородными граничными условиями для одномерного неоднородного уравнения Кирхгофа вида (1), в котором функция при u_{xx} принимает один из видов

$$a(s)=(C_1 s+C_2)^p,\ a(s)=(C_1 s+C_2)^{\frac{2}{p}},\ C_1,C_2>0,\ p\in N.$$

Для указанной функции устанавливаются априорные неравенства, которые можно использовать для линеаризации исходного нагруженного уравнения путем замены интегральной нагрузки правой частью априорной оценки.

1. Случай $a(s)=\left(C_1 s+C_2\right)^p,\ p\in N$.

Рассмотрим уравнение (1) с интегральной нагрузкой $a(s)=\left(C_1 s+C_2\right)^p,\ p\in N$, при условиях

$$u(x,0)=\varphi_1(x),\ u_t(x,0)=\varphi_2(x),\ 0\le x\le l,\ u_x(0,t)=u_x(l,t)=0,\ 0\le t\le T. \qquad (2)$$

Теорема 1. Пусть функция $u\in H^1(\Omega)$ такая, что $u_t, u_{tt}\in L_2(\Omega)$, является решением задачи (1), (2), $\varphi_{1x},\varphi_2, f\in L_2(\Omega)$. Тогда функция $(C_1\|u_x\|^2+C_2)^{p+1}$ ограничена константой, зависящей только от t.

Доказательство. Рассмотрим скалярное произведение (1) и функции u_t:

$$(u_{tt},u_t)-a(s)(u_{xx},u_t)=(f,u_t).$$

Легко убедиться в справедливости равенств

$$(u_{tt},u_t)=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_t\|^2,\ -(u_{xx},u_t)=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_x\|^2.$$

Заметим также, что

$$-a(s)(u_{xx},u_t)=\frac{1}{2}a(s)\frac{d}{dt}\|u_x\|^2=\frac{1}{2}\left(C_1 s+C_2\right)^p\frac{d}{dt}s=\frac{1}{2C_1}\left(C_1 s+C_2\right)^p\frac{d}{dt}\left(C_1 s+C_2\right).$$

Эти преобразования приводят к соотношению

$$\frac{1}{2}\left(\frac{d}{dt}\|u_t\|^2+\frac{1}{C_1}\left(C_1 s+C_2\right)^p\frac{d}{dt}\left(C_1 s+C_2\right)\right)=\int\limits_\Omega f u_t dx,$$

интегрируя которое получаем

$$\|u_t\|^2+\frac{\left(C_1 s+C_2\right)^{p+1}}{C_1(p+1)}=2\int\limits_0^t\int\limits_\Omega f u_t dx d\tau+\|u_t(x,0)\|^2+\frac{\left(C_1 s(0)+C_2\right)^{p+1}}{C_1(p+1)}.$$

Оценим подынтегральное произведение по модулю и перейдем к неравенству

$$\|u_t\|^2+\frac{\left(C_1 s+C_2\right)^{p+1}}{C_1(p+1)}\le\int\limits_0^t\|u_t\|^2 d\tau+\int\limits_0^t\|f\|^2 d\tau+\|\varphi_2(x)\|^2+\frac{\left(C_1\|\varphi_{1x}(x)\|^2+C_2\right)^{p+1}}{C_1(p+1)}. \qquad (3)$$

Отсюда следует, что

$$\|u_t\|^2 \le \int_0^t \|u_t\|^2 d\tau + F(t),$$

$$F(t) = \int_0^t \|f\|^2 d\tau + \|\varphi_2(x)\|^2 + \frac{\left(C_1\|\varphi_{1x}(x)\|^2 + C_2\right)^{p+1}}{C_1(p+1)}.$$

Применяя к последнему неравенство Гронуолла [11], будем иметь

$$\|u_t\|^2 \le K_0(t),$$

$$K_0(t) = \int_0^t F(\tau)e^{t-\tau} d\tau + F(t).$$

Ослабим левую часть (3) опуская первое слагаемое, а правую часть усилим с помощью последнего неравенства. Тогда для всех $t \in [0, T]$ получим оценку

$$\left(C_1\|u_x\|^2 + C_2\right)^{p+1} \le C_1(p+1)K(t), \tag{4}$$

$$K(t) = \int_0^t K_0(\tau)d\tau + F(t).$$

Теорема 1 доказана.

От (4) перейдем к равенству

$$(C_1\|u_x\|^2 + C_2)^p = \left(C_1(p+1)K(t)\right)^{\frac{p}{p+1}},$$

которое позволяет заменить (1) линейным уравнением

$$u_{tt} - \left(C_1(p+1)K(t)\right)^{\frac{p}{p+1}} u_{xx} = f(x,t). \tag{5}$$

2. Случай $a(s) = (C_1 s + C_2)^{\frac{2}{p}},\ p \in N.$

При условиях (3) рассмотрим уравнение

$$u_{tt} - (C_1 s + C_2)^{\frac{2}{p}} u_{xx} = f(x,t). \tag{6}$$

Теорема 2. Пусть функция $u \in H^1(\Omega)$ такая, что $u_t, u_{tt} \in L_2(\Omega),$ является решением задачи (1), (2), $\varphi_{1x}, \varphi_2, f \in L_2(\Omega)$. Тогда функция $(C_1 s + C_2)^{\frac{p+2}{p}}$ ограничена константой, зависящей только от t.

Доказательство. В скалярном произведении (6) с u_t имеет место слагаемое

$$-\left(C_1 s + C_2\right)^{\frac{2}{p}}\left(u_{xx}, u_t\right) = \frac{1}{C_1}\left(C_1 s + C_2\right)^{\frac{2}{p}} \frac{d}{dt}\left(C_1 s + C_2\right).$$

С его помощью перейдем от (6) к уравнению

$$\frac{d}{dt}\|u_t\|^2 + \frac{1}{C_1}\left(C_1 s + C_2\right)^{\frac{2}{p}} \frac{d}{dt}\left(C_1 s + C_2\right) = 2\int_\Omega f u_t dx,$$

после интегрирования которого получим

$$\|u_t\|^2 + \frac{1}{C_1}\frac{p}{p+2}\left(C_1 s + C_2\right)^{\frac{p+2}{p}} = \int_0^t\int_\Omega f u_t dx d\tau + \|u_t(x,0)\|^2 + \frac{1}{C_1}\frac{p}{p+2}\left(C_1 s(0) + C_2\right)^{\frac{p+2}{p}}.$$

Отсюда легко перейти к неравенству

$$\|u_t\|^2 + \frac{1}{C_1}\frac{p}{p+2}\left(C_1 s + C_2\right)^{\frac{p+2}{p}} \le 2\left(\int_0^t \|u_t\|^2 d\tau + \int_0^t \|f\|^2 d\tau\right) + \|\varphi_2(x)\|^2 + \frac{1}{C_1}\frac{p}{p+2}\left(C_1 s(0) + C_2\right)^{\frac{p+2}{p}}, \tag{7}$$

а от него, в свою очередь, к следующему:

$$\|u_t\|^2 \le \int_0^t \|u_t\|^2 d\tau + F(t),$$

$$F(t) = C_1 \frac{p+2}{p}\left(2\int_0^t \|f\|^2 d\tau + \|\varphi_2(x)\|^2\right) + \left(C_1 s(0) + C_2\right)^{\frac{p+2}{p}}.$$

Применение к нему неравенства Гронуолла [11], приводит к оценке

$$\|u_t\|^2 \le K_0(t),$$

$$K_0(t) = \int_0^t F(\tau)e^{t-\tau} d\tau + F(t).$$

Используем его для перехода от (7) к соотношению

$$\frac{1}{C_1}\frac{p}{p+2}(C_1 s + C_2)^{\frac{p+2}{p}} \le 2\left(\int_0^t K_0 d\tau + \int_0^t \|f\|^2 d\tau\right) + \|\varphi_2(x)\|^2 + \frac{1}{C_1}\frac{p}{p+2}\left(C_1 s(0) + C_2\right)^{\frac{p+2}{p}}.$$

Отсюда для всех $t \in [0, T]$ получим

$$(C_1 s + C_2)^{\frac{p+2}{p}} \le K(t), \tag{8}$$

$$K(t) = 2\left(\int_0^t K_0 d\tau + \int_0^t \|f\|^2 d\tau\right) + \|\varphi_2(x)\|^2 + \frac{1}{C_1}\frac{p}{p+2}\left(C_1\|\varphi_{1x}(x)\|^2 + C_2\right)^{\frac{p+2}{p}},$$

Теорема 2 доказана.

Выбирая в (8) верхнюю границу оценки, можем записать, что

$$(C_1 s + C_2)^{\frac{2}{p}} = K(t)^{\frac{2}{p+2}},$$

что позволяет перейти от (6) к линейному уравнению

$$u_{tt} - K(t)^{\frac{2}{p+2}} u_{xx} = f(x,t). \tag{9}$$

Заключение. В работе установлены априорные оценки (4) и (8), с помощью которых уравнение (1) при соответствующих степенях в функции $a(s)$ приводится к линейным уравнениям (5) и (9) соответственно. Данный способ линеаризации использовался в [2; 3] и некоторых других работах автора. В отличии от других способов линеаризации он позволяет переходить к линейному уравнению с сохранением в общих чертах смысла процесса, моделируемого уравнением с интегральной нагрузкой. За приближенное решение нагруженного уравнения можно принять точное или приближенное решение линеаризованного уравнения, найденное при исходных начальных и граничных условиях. Оно, в свою очередь, может быть использовано для запуска итерационного процесса последовательных приближений к точному решению нагруженной задачи.

Литература

1. Бернштейн, С. Н. Об одном классе функциональных уравнений с частными производными / С.Н. Бернштейн . : Изв. АН СССР, 1940. – С. 17–26.

2. Бозиев, О. Л. О линеаризации гиперболических уравнений с интегральной нагрузкой в главной части с помощью априорной оценки их решений / О. Л. Бозиев // Вестник Томского государственного университета.

Математика и механика. – № 80, 2022. – С. 16 – 25.

3. Бозиев, О. Л. Априорные оценки производных решений одномерных неоднородных уравнений теплопроводности с интегральной нагрузкой в главной части / О. Л. Бозиев // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия «Математика, физика, механика». – Т. 15. – № 2, 2023. – С. 5–13.

4. Похожаев, С. И. Об одном классе квазилинейных гиперболических уравнений / С. И. Похожаев // Матем. сборник – Т. 96 (138). – № 1, 1975. – С. 152–166.

5. Похожаев, С. И. Об одном квазилинейном гиперболическом уравнении Кирхгофа / С. И. Похожаев // Дифф. уравнения. – Т. 21. – № 1, 1985. – С. 101–108.

6. Филатов, А. Н., Интегральные неравенства и теория нелинейных колебаний / А. Н. Филатов, Л. В. Шарова. – М.: Наука, 1976. – 151 с.

7. Crippa, H. R. On local solutions of some mildly degenerate hyperbolic equations/ H. R. Crippa // Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications. – Vol. 21. – №8, 1993. – pp. 565–574.

8. Dickey, R. W. Infinite systems of nonlinear oscillation equations related to the string / R. W. Dickey // Proc. Amer. Math. Soc. – № 23, 1969. – Pp. 459–468.

9. Frota, C. L. Wave equation in domains with nonlocally reacting boundary/ C. L. Frota, L. A. Medeiros, A. Vicente // Differential and Integral Equations. – № 17, 2011. – pp. 1001–1020.

10. Ngoc, L. T. P. Linear approximation and asymptotic expansion of solutions in many small parameters for a nonlinear Kirchhoff wave equation with mixed nonhomogeneous conditions / L. T. P Ngoc, N. T Long // Act. Appl. Math. – Vol. 112, 2010. – pp. 137–169.

11. Nishihara, K. Exponential decay of solutions of some quasilinear hyperbolic equations with linear damping / K. Nishihara // Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications. – Vol. 8. – №6, 1984.– pp. 623–636.

12. Ono, K. Global solvability for mildly degenerate Kirchhoff type dissipative wave equations in bounded domains / K. Ono // J. Math. Tokushima Univ. – Vol. 55, 2021. – pp. 11–18.

13. Woinowsky-Krieger, S. The effect of axial forces on the vibrations of hinged bars / S. Woinowsky-Krieger // J. Appl. Mech. – № 1, 1950. – pp. 35–36.

A PRIORI ESTIMATES FOR DERIVATIVE SOLUTIONS OF THE HYPERBOLIC KIRCHHOFF EQUATION

***Boziev Oleg Ludinovich*[1,2]**

[1]*Kabardino-Balkarian State University;*

[2]*Institute of Computer Science and Problems of Regional Management of Kabardino-Balkarian Science Center of the Russian Academy of Sciences, Nalchik*

boziev@yandex.ru

Annotation. We consider the second mixed problem with homogeneous boundary conditions for the one-dimensional hyperbolic Kirchhoff equation, in which the multiplier at u_{xx} is a power function of the integral load. For two types of powers, a priori estimates are established that can be used to linearize the original equation.

Keywords: Kirchhoff equation, integral load, a priori estimate, linearization.

УДК 517.9

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ СО ВЫРОЖДЕННЫХ БОЗЕ – СИСТЕМ В ПЕРЕМЕННЫХ ВНЕШНИХ ПОЛЯХ

Братына Дмитрий Александрович[1], Малый Вячеслав Вадимович[2]
[1,2]Луганский государственный университет имени Владимира Даля, г. Луганск
[2]v.v.malyy@ya.ru

Аннотация. В работе сформулирован математический аппарат для вычисления кинетической асимптотики многовременных функций Грина вырожденных бозе – систем.

Ключевые слова: бозе – система, модель с выделенным конденсатом, низкочастотная асимптотика.

Введение. В [1] была рассмотрена кинетика пространственно неоднородной бозе – системы со слабым взаимодействием в модели с выделенным конденсатом. Здесь мы дадим обобщение полученных результатов на случай, когда вырожденная бозе – система находится в неоднородных внешних полях. Это позволит разработать схему вычисления многовременных функций Грина (В.9) из [1] кинетическом пределе [2].

Постановка проблемы. Гамильтониан вырожденной бозе – системы, находящейся в переменных внешних полях, имеет вид

$$H(t) = H + H_F(t), \tag{1}$$

где H, H_F (t) даются соответственно формулами (В.1), (В.3) из [1].

Будем исходить из уравнения движения для статистического оператора (СО) системы в шредингеровском представлении

$$\partial p_F(t)/\partial t = \left[p_F(t), H(t) \right]. \tag{2}$$

При этом, СО p_F (t) удовлетворяет условию

$$p_F(-\infty) = w, \tag{3}$$

где *w* – СО Гиббса данной системы (здесь и в дальнейшем индекс «*F*» означает, что соответствующая величина определена для системы, находящейся во внешних полях).

Так как в рассматриваемом случае СО системы $P_F(t)$ не коммутирует с оператором массы M

$$M = \int d^3x\sigma(x), \sigma(x) = m\psi^+(x)\psi(x), \tag{4}$$

то справедливо равенство

$$Spp_F(t)\psi(x) = \eta_F(x,t)e^{i\varphi_F(x,t)}, 0 \le \phi_F(x,t) < 2\pi, \eta_F(x,t) > 0. \tag{5}$$

Скорость пространственного неоднородного конденсата системы, находящейся во внешних полях, определим соотношением

$$\vartheta_{Hk}(x,t) = (1/m)\left(\delta\phi_F(x,t)/\delta x_k\right). \tag{6}$$

Введем в рассмотрение унитарный оператор

$$U_1\left(\phi_F\left(\tilde{x},t\right)\right)=\exp\left\{-\frac{i}{m}\int\limits_{\vartheta} d^3x\sigma\left(x\right)\phi_F\left(x,t\right)\right\},$$

$$U_1\left(\phi_F\left(\tilde{x},t\right)\right)\psi\left(x\right)U_1^+\left(\phi_F\left(\tilde{x},t\right)\right)=\psi\left(x\right)\exp\left(i\phi_F\left(x,t\right)\right) \tag{7}$$

с помощью которого определим СО

$$\rho_{1F}\left(x,t\right)=\exp\left(iPx\right)U_1\left(\phi_F\left(\tilde{x},t\right)\right)\rho_F\left(t\right)U_1^+\left(\phi_F\left(\tilde{x},t\right)\right)\exp\left(-iPx\right), \tag{8}$$

где P_k – оператор импульса (II.1.4) из [1].

Результаты исследования. Найдем уравнение движения для СО $\rho_{1F}\left(x,t\right)$, связанного с локально сопутствующей конденсату системой отсчета. Учитывая формулы (1), (2), (6) – (8), находим

$$\partial\rho_{1F}(x,t)/\partial t=i\left[\rho_{1F}\left(x,t\right),H+\int d^3x'\pi_k\left(x'\right)\vartheta_{Hk}\left(x'+x,t\right)-\right.$$
$$\left.-\int d^3x'\sigma\left(x'\right)h_F\left(x'+x,t\right)\right]+i\left[\rho_{1F}\left(x,t\right),H_{1F}\left(x,t\right)\right], \tag{9}$$

где введены обозначения:

$$H_{1F}\left(x,t\right)=\exp\left(iPx\right)U_1\left(\phi_F\left(\tilde{x},t\right)\right)H_F\left(t\right)U_1^+\left(\phi_F\left(\tilde{x},t\right)\right)\exp\left(-iPx\right),$$

$$h_F\left(x,t\right)=-\frac{1}{m}\left\{\partial\phi_F\left(x,t\right)/\partial t+\frac{1}{2}m\vartheta_{Hk}\left(x,t\right)\right\}. \tag{10}$$

Заметим, что согласно (5), (7)

$$\eta_F\left(x,t\right)=Sp\rho_{1F}\left(x,t\right)\psi\left(0\right)>0, JmSp\rho_{1F}\left(x,t\right)\psi\left(0\right)=0. \tag{11}$$

Дифференцируя второе соотношение по времени, находим на основании формул (1), (9) следующее выражения для $h_F\left(x,t\right)$:

$$h_F\left(x,t\right)=-\frac{1}{2m^2\eta_F\left(x,t\right)}\Delta\eta_F+\frac{1}{m\eta_F\left(x,t\right)}\operatorname{Re}Sp\rho_{1F}\left(x,t\right)\left[\psi\left(0\right),V\right]+$$
$$+\frac{1}{m\eta_F\left(x,t\right)}\operatorname{Re}Sp\rho_{1F}\left(x,t\right)\left[\psi\left(0\right),H_{1F}\left(x,t\right)\right]. \tag{12}$$

Уравнения для скорости пространственного неоднородного конденсата получим из (10), используя (6)

$$\partial\vartheta_{Fk}\left(x,t\right)/\partial t=L_{\vartheta Fk}\left(x,t\right),\partial\vartheta_{Fk}\left(x,t\right)/\partial x_i=\partial\vartheta_{Fl}\left(x,t\right)/\partial x_k,$$

$$L_{\vartheta_{Fk}}=-\partial\left\{h_F\left(x,t\right)+\frac{1}{2}\vartheta_{Fk}^2\left(x,t\right)/\partial x_k\right\}. \tag{13}$$

Дифференцируя теперь выражение (11) для $\eta_F\left(x,t\right)$ по t, получим с учетом (1), (9)

$$\partial\eta_F\left(x,t\right)/\partial t=L_{\eta F}\left(x,t\right),$$

$$L_{\eta F}\left(x,t\right)=Z_{\eta F}\left(x,t\right)-\vartheta_{Fk}\left(x,t\right)\frac{\partial\eta_F\left(x,t\right)}{\partial x_k}-\frac{\eta\vartheta_F\left(x,t\right)}{2}\frac{\partial\vartheta_F\left(x,t\right)}{\partial x_k}, \tag{14}$$

$$Z_{\eta F}\left(x,t\right)=JmSp\rho_{1F}\left(x,t\right)\left[\psi\left(0\right),V\right]+JmSp\rho_{1F}\left(x,t\right)\left[\psi\left(0\right),H_{1F}\left(x,t\right)\right].$$

Легко видеть, что СО $\rho_{1F}\left(x,t\right)$ удовлетворяет равенствам

$$\partial\rho_{1F}\left(x,t\right)/\partial x_k=i\left[P_k,\rho_{1F}\left(x,t\right)\right],Sp\rho_{1F}\left(x,t\right)=1. \tag{15}$$

Соотношения (11) – (15), вместе с (9), составляют полную систему уравнений для определения $\rho_{1F}(x,t), \vartheta_{Fk}(x,t), \eta_F(x,t)$. Перейдем теперь в этой системе к модели с выделенным конденсатом. Рассмотрим унитарное преобразование

$$U_2\left(\eta_F\left(\tilde{x}+x,t\right)\right)=\exp\left\{\int d^3\left(x'\left(\psi\left(x'\right)-\psi^+\left(\tilde{x}\right)\right)\right)\eta_F\left(x'+x,t\right)\right\},$$
$$U_2\left(\eta_F\right)\psi\left(x\right)U_2^+\left(\eta_F\right)=\psi\left(x'\right)+\eta\left(x'+x,t\right) \qquad (16)$$

И определим СО $\rho_2(x,t)$ соотношением

$$\rho_{2F}\left(x,t\right)=\left(U_2\eta_F\left(\tilde{x},t\right)\right)\rho_{1F}\left(x,t\right)U_2^+\left(\eta_F\left(\tilde{x}+x,t\right)\right). \qquad (17)$$

Легко показать на основании (11), (16), что

$$Sp\rho_{2F}\left(x,t\right)\psi\left(x'\right)=0. \qquad (18)$$

и, как следует из (15), (17)

$$\partial p_{2F}\left(x,t\right)/\partial x_k=i\left[P_k,\rho_{2F}\left(x,t\right)\right]. \qquad (19)$$

Найдем теперь систему уравнений для определения СО $\rho_{2F}(x,t)$.

Используя (1), (17), (18), получим

$$Sp\rho_{1F}\left(x,t\right)\left[\psi\left(0\right),V\right]=K_k\left(x,t\right)+\eta_F\left(x,t\right)\int d^3x'V\left(\left|x'\right|\right)\eta^2\left(x+x',t\right), \qquad (20)$$

где

$$K_F\left(x,t\right)=\int d^3x'V\left(\left|x'\right|\right)Sp\rho_{2F}\left(x,t\right)\psi^+\left(x'\right)\psi\left(x'\right)\psi\left(0\right)+\eta_F\left(x,t\right)\int d^3x'V\left(\left|x'\right|\right)$$
$$Sp\rho_{2F}\left(x,t\right)\psi^+\left(x'\right)\psi\left(x'\right)+\int d^3x'V\left(\left|x'\right|\right)\eta_F\left(x+x',t\right)Sp\rho_{2F}\left(x,t\right).$$
$$\left\{\psi\left(x'\right)\psi^+\left(x'\right)\right\}\psi\left(0\right)$$

Далее, согласно (2), (12), (14)

$$h_F\left(x,t\right)=\frac{1}{m}\int d^3x'V\left(\left|x'\right|\right)\eta_F^2\left(x+x',t\right)+h_{2F}\left(x,t\right)+\bar{h}_F\left(x,t\right), \qquad (21)$$
$$h_{2F}\left(x,t\right)=-\left(\Delta\eta_F\left(x,t\right)\right)/2m^2\eta_F\left(x,t\right)-L_{hF}\left(x,t\right)/m\eta_F\left(x,t\right)$$
$$\bar{h}_F\left(x,t\right)=\operatorname{Re}Sp\rho_{2F}\left(x,t\right)\left[\psi\left(0\right),H_{2F}\left(x,t\right)\right]/m\eta_F\left(x,t\right)$$
$$Z_{\eta F}\left(x,t\right)=JmK_F\left(x,t\right)+JmSp\rho_{2F}\left(x,t\right)\left[\psi\left(0\right),H_{2F}\left(x,t\right)\right]$$
$$L_{hF}\left(x,t\right)=\operatorname{Re}K_F\left(x,t\right);H_{2F}\left(x,t\right)=U_2\left(\eta_F\left(\tilde{x}+x,t\right)\right)H_{1F}\left(x,t\right)U_2^+\eta_F\left(\tilde{x}+x,t\right)$$

Дифференцируя по времени СО $\rho_{2F}(x,t)$ и имея в виду формулы (9), (14), (16), (17), окончательно получим

$$\partial\rho_{2F}\left(x,t\right)/\partial t=i\left[\rho_{2F}\left(x,t\right),R_{2F}\left(x,t\right)\right]+i\left[\rho_{2F}\left(x,t\right),H_{2F}\left(x,t\right)\right],$$
$$R_{2F}\left(x,t\right)=H+\int d^3x'\pi_k\left(x'\right)\vartheta_{Fk}\left(x'+x,t\right)-\int d^3x'\sigma\left(x'\right)h_{2F}\left(x'+x,t\right)-$$
$$-\int d^3x'\sigma\left(x'\right)\bar{h}_F\left(x'+x,t\right)-m\int d^3x'\left\{\psi\left(x'\right)+\psi^+\left(x'\right)\right\}\cdot$$
$$\cdot\eta_F\left(x'+x,t\right)\bar{h}_F\left(x'+x,t\right)+i\int d^3x'\int d^3x''V\left(\left|x''\right|\right)\eta_F\left(x'+x,t\right)\cdot$$
$$\cdot\left\{\psi^+\left(x'\right)\psi^+\left(x'+x''\right)\psi\left(x'+x''\right)+ý.ñ.\right\}+$$
$$+\frac{1}{2}\int d^3x'\int d^3x''V\left(\left|x''\right|\right)\eta_F\left(x'+x''+x,t\right)\eta\left(x'+x,t\right)\cdot$$

$$\cdot\left\{\psi^{+}(x')\psi(x'+x'')+\psi(x')\psi(x'+x'')+ý.ñ.\right\}. \qquad (22)$$

Выводы

Уравнения (13), (14), (18) – (22) представляют собой полную систему уравнений для определения $\rho_{2F}(x,t),\eta_F(x,t),\vartheta_{Fk}(x,t)$. В этих уравнениях переход к модели с выделенным конденсатом состоит в переопределении полевых операторов $\psi(x),\psi^{+}(x)$, которое имеет место и в равновесном случае (см. (1))

$$\psi(x)=\vartheta^{1/2}\sum_{p\neq 0}a_p\exp(ipx).$$

Подобная операция переопределения корректна в силу равенства (18). Перейдем теперь к описанию системы в терминах квазичастиц. Определим унитарный оператор

$$U_3(\phi_p(\eta_F))=\exp\left\{\frac{1}{2}\sum_{p\neq 0}\phi_p(\eta_F)\left(a_pa_{-p}-a_p^{+}a_{-p}^{+}\right)\right\},\vartheta_p(\eta_F)=\vartheta_{-p}(\eta_F), \qquad (23)$$

который обладает следующим свойством

$$U_3(\phi_p(\eta_F))a_pU_3^{+}(\phi_p(\eta_F))=a_p ch\phi_p(\eta_F)+a_p^{+}sh\phi_p(\eta_F). \qquad (24)$$

Здесь $\phi_p(\eta_F)$ пока произвольная функция. Введем СО $\rho_F(x,t)$ и функцию распределения следующим образом

$$\rho_F(x,t)=U_3(\phi_p(\eta_F))\rho_{2F}(x,t)U_3^{+}(\phi_p(\eta_F)),\ f_{Fp}(x,t)=Sp\rho(x,t)f_p(0), \qquad (25)$$

где $f_p(x)=fd^3x'\psi^{+}(x+x'/2)\psi(x-x'/2)\exp(ipx')$ – оператор Вигнера.

Тогда используя (25), а также формулы (14), (18), (19), (22), получим уравнение для СО $\rho_F(x,t)$ и функции распределения квазичастиц f_p

$$\begin{aligned}&\partial\rho_F(x,t)/\partial t=i\left[p_F(x,t),R_F(x,t)+\bar{H}_{2F}(x,t)\right],\\&Sp\rho_F(x,t)\tilde{\psi}(x')=0,Sp\rho_F(x,t)=1,\\&\partial\rho_F(x,t)/\partial x_k=i\left[P_k,\rho_F(x,t)\right]+\\&+\frac{1}{2}\frac{\partial\eta_F(x,t)}{\partial x_k}\sum_{p\neq 0}\frac{\partial\phi_p}{\partial\eta_F}\left[a_pa_{-p}-a_p^{+}a_{-p}^{+},\rho_F(x,t)\right],\\&\partial f_{Fp}(x,t)/\partial t=L_{fFp}(x,t),\end{aligned} \qquad (26)$$

где

$$R_F(x,t)=\tilde{R}_{2F}(x,t)+\frac{1}{2}L_{fFp}(x,t)\sum_{p\neq 0}\partial\phi_p/\partial\eta_F\left(a_pa_{-p}-a_p^{+}a_{-p}^{+}\right),$$

$$L_{fFp}(x,t)=iSp\rho_F(x,t)\left[R_F(x,t),\hat{f}_p(0)\right]+iSp\rho_F(x,t)\left[H_{2F}(x,t),\hat{f}_p(0)\right].$$

При этом введено обозначение $\tilde{A}=U_3(\phi_p(\eta_F))AU_3^{+}(\phi_p(\eta_F))$, где A – произвольный оператор. Выпишем окончательно замкнутую систему уравнений для СО $\rho_F(x,t)$ и кинетических параметров $\xi_{Fa}(x,t)$:

$$\partial\rho_F(x,t)/\partial t=i\left[\rho_F(x,t),R_F(x,t)+\tilde{H}_{2F}(x,t)\right],$$

$$Sp\rho_F(x,t)=1, Sp\rho_F(x,t)\tilde{\psi}(x')=0,$$

$$\partial p\rho_F(x,t)/\partial x_k = i\left[P_k,\rho_F(x,t)\right]+$$

$$+\frac{1}{2}\frac{\partial\eta_F(x,t)}{\partial x_k}\sum_{p\neq 0}\frac{\partial\phi_p}{\partial\eta_F}\left[a_p a_{-p}-a_p^+ a_{-p}^+,\rho_F(x,t)\right],$$

$$\partial\xi_F(x,t)/\partial t = L\xi_{Fa}(x,t), \qquad (27)$$

где величина $R_F(x,t)$ определяется соотношением (26), а оператор $H_{2F}(x,t)$ и «интегралы столкновений» $L_{\xi Fa}(x,t)$ даются формулами

$$H_{2F}(x,t)=U_2(\eta_F)\exp(iPx)U_1(\phi_F)H_F(t)U_1^+(\phi_p)\exp(-iPx)U_2^+(\eta_F),$$

$$L_{fFp}(x,t)=iSp\rho_F(x,t)\left[R_F(x,t)+H_{2F}(x,t), f_p(0)\right], \qquad (28)$$

$$L_{fFp}(x,t)=-\partial\left\{h_F(x,t)+\vartheta_{Fk}^2(x,t)/2\right\}/\partial x_k,$$

$$L_{\eta F}(x,t)=Z_{\eta F}(x,t)-\phi_{Fk}(x,t)\left(\partial\eta_F(x,t)/\partial x_k\right)-$$

$$-\left(\eta_F(x,t)/2\right)\left(\partial\vartheta_{Fk}(x,t)/\partial x_k\right).$$

В формулы (28) входят величины $Z_{\eta F}(x,t), K_F(x,t), h_F(x,t)$, которые определяются равенствами (20), (21).

Литература

1. Щелоков, В. С. Вариационная теория многовременных функций Грина в статистической механике / В. С. Щелоков. – Луганск, 1977. – 196 с.

2. Малый, В. В. Низкочастотная асимптотика функций Грина вырожденных бозе – систем (кинетическое приближение) / В. В. Малый, В. С. Щелоков // ТМФ. – 46, № 2, 1981. – С. 242–250.

INTEGRAL EQUATIONS FOR CO DEGENERATED BOSE SYSTEMS IN VARIABLES EXTERNAL FIELDS

***Bratina Dmitriy Aleksandrovich*[1], *Maly Vyacheslav Vadimovich*[2]**

[1,2]Vladimir Dahl Lugansk State University, Lugansk

[2]v.v.malyy@ya.ru

Annotation. The paper formulates a mathematical focus for calculating the kinetic asymptotics of instantaneous Green's functions of degenerate Bose systems.

Keywords: Bose – system, model with isolated condensate, low-frequency asymptotics.

УДК [519.245:517.912]-047.48

ИССЛЕДОВАНИЕ НЕКОТОРЫХ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Гончаров Андрей Викторович[1], Темникова Светлана Владимировна[2]
[1,2]Луганский государственный педагогический университет, г. Луганск
[2]andrey2014114@mail.ru

Аннотация. Данная статья посвящена анализу различных методов решения стохастических дифференциальных уравнений. Рассмотрены преимущества и недостатки как стандартных методов (методов Эйлера и Миллера), так и более сложных методов, включая методы теории предельного цикла и метод Богачева. Показана необходимость проверки качества полученных результатов с помощью статистических тестов.

Ключевые слова: стохастические дифференциальные уравнения, методы решения, метод Эйлера, метод Миллера, метод Богачева, метод Монте-Карло, метод Рунге-Кутты.

Стохастические дифференциальные уравнения (СДУ) являются одним из основных инструментов математического моделирования стохастических процессов [1]. Решение СДУ позволяет описать стохастические процессы, которые в реальности могут иметь сложную и неопределенную природу.

Существуют различные методы решения СДУ, и выбор конкретного метода зависит от характеристик уравнения, таких как тип коэффициентов, размерность уравнения, граничные условия и т.д. Рассмотрим некоторые из наиболее распространенных методов решения СДУ:

– Метод Эйлера.

Этот метод заключается в численном решении уравнения через последовательное использование небольших шагов времени. Метод Эйлера имеет низкую точность и может приводить к неустойчивости при решении некоторых уравнений [3]. Метод Эйлера можно описать следующим образом:

1. Задать начальное значение функции в точке $t = t_0$: $y(t_0) = y_0$.

2. Задать шаг времени h, на который будет приближаться значение функции на следующем шаге: $t_1 = t_0 + h$.

3. Найти значение производной функции в точке t_0: $f(t_0, y_0) = y'(t_0)$.

4. Приблизить значение функции на следующем шаге: $y_1 = y_0 + h \cdot f(t_0, y_0)$.

5. Повторить шаги 3-4, используя полученное значение функции для вычисления производной на следующем шаге (t_1) и приближенного значения функции на шаге $t_2 = t_1 + h$, и так далее, до достижения нужной точности.

Метод Эйлера является достаточно простым и быстрым, но он может давать неточные результаты при увеличении шага, поэтому нужно подбирать его значение для достижения нужной точности.

– Метод Миллера.

Метод Миллера или метод повторных средних – это численный метод, который используется для решения стохастических дифференциальных уравнений (СДУ) в случае, когда коэффициенты уравнения являются периодическими функциями времени [4]. Метод Миллера использует деление временного интервала на равные участки и на каждом участке добавляется дополнительный тренд (единичная компонента) для перевода уравнения в нестационарную форму. Затем полученное уравнение решают методом Эйлера или другим методом. Преимущества метода Миллера включают:

- эффективность в решении стохастических дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами;
- возможность использования простых численных методов;
- снижение числа необходимых точек на временной сетке.

Недостатки метода Миллера включают:

- ограничение использования только для периодических коэффициентов;
- низкая точность решения, особенно на больших временных интервалах;
- неустойчивость при решении некоторых уравнений.

Таким образом, метод Миллера является полезным методом для решения СДУ с периодическими коэффициентами и может быть эффективным, если его ограничения учитываются.

– Метод Рунге-Кутты.

Этот метод позволяет достичь высокой точности решения СДУ. Он основывается на последовательном использовании нескольких приближений для нахождения значения в следующий момент времени.

– Метод Богачева.

Метод Богачева или метод средней точки Богачева – это метод численного решения уравнения первого порядка, который учитывает приближение решения не только в начальной точке, но и в точке, лежащей в середине интервала. Он является усовершенствованным методом Эйлера и обеспечивает более высокую точность при равной длине шага [2].

Метод Богачева формулируется следующим образом:

1. Зададим начальное условие $y_0 = y(t_0)$ в точке t_0.

2. Вычислим $f(t_0, y_0)$ – производную функции в начальной точке.

3. Зададим шаг h и вычислим промежуточную точку $t_1 = t_0 + \frac{h}{2}$.

4. Вычислим значение функции в промежуточной точке: $y_1 = y(t_1) = y_0 + \frac{h}{2} \cdot f(t_0, y_0)$.

5. Вычислим производную функции в промежуточной точке: $f(t_1, y_1)$.

6. Приблизим значение функции в следующей точке t_2.

7. Повторим шаги 3-6, пока не достигнем нужного момента времени.

Метод Богачева является более точным, чем метод Эйлера, за счет учета промежуточной точки в середине интервала. Однако он все еще может давать неточные результаты при больших значениях шага. Также существуют другие более точные и сложные методы численного решения дифференциальных уравнений, такие как метод Адамса и др.

– Метод Монте-Карло.

Данный метод базируется на генерации случайных чисел для численного решения СДУ.

Каждый из рассмотренных методов имеет свои преимущества и недостатки, и выбор конкретного метода зависит от ряда факторов. В любом случае, решение СДУ является важным инструментом для моделирования стохастических процессов и исследования их свойств.

Проверка качества полученных результатов с помощью статистических тестов является важным шагом в процессе решения задач. Это позволяет избежать возможных ошибок в решении, связанных с произвольностью, случайными факторами, ошибками измерений или неправильными предположениями.

Статистические тесты могут помочь определить степень достоверности результатов и оценить вероятность ошибки первого и второго рода. Они позволяют проверить гипотезы о различных параметрах или свойствах источников данных, а также сравнить результаты, полученные с помощью различных методов или источников [4].

Без проверки качества результатов с помощью статистических тестов исследователь, может быть, сильно ограничен в своих выводах и действиях, основанных на этих выводах. В случае если результаты оказались недостоверными, это может привести к ошибочным решениям, неверным выводам и негативным последствиям. Кроме того, проверка качества результатов может помочь в определении причин возможных ошибок и улучшении методов решения СДУ в будущем.

Таким образом, проверка качества результатов с помощью статистических тестов является необходимой частью процесса решения задач и позволяет избежать возможных ошибок и неправильных выводов. Исследование методов решения стохастических дифференциальных уравнений является актуальной задачей с точки зрения современной математики, физики, экономики и других областей, где присутствуют случайные факторы. Развитие эффективных методов для решения таких уравнений позволит лучше понять стохастические процессы, повысить точность и предсказуемость моделей, используемых для анализа и прогнозирования случайных явлений, а также улучшить качество принимаемых на их основе решений. Исследование в данной области имеет потенциал для развития не только теоретических методов, но и их практических применений в различных сферах человеческой деятельности.

Литература

1. Белопольская, Я. И. Стохастические дифференциальные уравнения. Приложения к задачам математической физики и финансовой математики : учебное пособие для вузов / Я. И. Белопольская.– Санкт-Петербург: Лань, 2021. – 308 с. URL: https://e.lanbook.com/book/152655 (дата обращения: 27.06.2023).

2. Исаев, С. Ю. Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения. – Москва : Изд-во Московского университета, 2013. – 234 с.

3. Кузнецов, Н. Н. Стохастические дифференциальные уравнения. Москва: Физматлит, 2004. – 256 с.

4. Лыков, А. В. Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения в экономике. – Москва : Изд-во Московского университета, 2011. – 320 с.

INVESTIGATION OF SOME METHODS FOR SOLVING STOCHASTIC DIFFERENTIAL EQUATIONS

Goncharov Andrey Viktorovich[1], Temnikova Svetlana Vladimirovna[2]

[1,2]Lugansk State Pedagogical University, Lugansk

[2]andrey2014114@mail.ru

Annotation. This article is devoted to the analysis of various methods for solving stochastic differential equations. The advantages and disadvantages of both standard methods (Euler and Miller methods) and more complex methods, including methods of limit cycle theory and the Bogachev method, are considered. The necessity of checking the quality of the obtained results using statistical tests is shown.

Keywords: stochastic differential equations, solution methods, Euler's method, Miller's method, Bogachev's method, Monte Carlo method, Runge-Kutta method.

УДК 574.34

МОДЕЛЬ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ДВУХ ПОПУЛЯЦИЙ ЗА ОДИН РЕСУРС

Гуленко Сергей Николаевич
Луганский государственный университет имени Владимира Даля, г. Луганск
serg.gulenko1305@gmail.com

Аннотация. Рассмотрена математическая модель динамики численности популяций, взаимодействующих по принципу «две конкурирующие популяции – один ресурс». Исследуемая модель доведена до построения параметрических и фазовых портретов. Дана содержательная биологическая интерпретация параметрическим и фазовым портретам.

Ключевые слова: динамика популяций, конкуренция, система дифференциальных уравнений.

Будем рассматривать однородные популяции без какой-либо структурированности. Кроме того, будем считать, что популяции локализованы географически и что динамика численности [1-4] популяции определяется лишь двумя процессами – процессами размножения и гибели особей.

Исследуем динамику сообщества, состоящего из двух популяций, зависящих от одного и того же ресурса, в частности, пищи. При количестве пищи, достаточном для полного удовлетворения рассматриваемых популяций пусть ε_1, ε_2 - постоянные положительные коэффициенты прироста каждой из популяций. На самом деле, когда популяции локализованы географически, пища будет уменьшаться при возрастании численности видов N_1 и N_2, что приведет к убыванию значений коэффициентов прироста.

Пусть $F(N_1,N_2)$ – количество пищи, поедаемое обеими популяциями в единицу времени. Тогда $F(N_1,N_2)\to 0$ при $N_1+N_2\to 0$ и $F(N_1,N_2)\to\infty$ при $N_1\to\infty$ или при $N_2\to\infty$. В частности, $\lim\limits_{N_1\to\infty} F\left(N_1,0\right)=\infty$, $\lim\limits_{N_2\to\infty} F\left(0,N_2\right)=\infty$.

Обозначим через γ_1 и γ_2 положительные постоянные – «коэффициенты прожорливости», соответствующие потребности в пище для каждой из двух популяций. Тогда в качестве коэффициентов прироста популяций необходимо выбирать выражения

$$\varepsilon_1-\gamma_1 F\left(N_1,N_2\right) \text{ и } \varepsilon_2-\gamma_2 F\left(N_1,N_2\right).$$

Тогда можно записать систему дифференциальных уравнений, описывающую развитие популяций:

$$\frac{dN_1}{dt}=\left[\varepsilon_1-\gamma_1 F\left(N_1,N_2\right)\right]N_1\ ,\frac{dN_2}{dt}=\left[\varepsilon_2-\gamma_2 F\left(N_1,N_2\right)\right]N_2\,.$$

Исследуем решения этой системы при положительных начальных условиях $N_1\left(t_0\right)=N_1^0>0$ и $N_2\left(t_0\right)=N_2^0>0$. Пусть $\left(t_0,\,T\right)$ – произвольный интервал, на котором заданы непрерывные положительные функции, $N_1(t)$ и $N_2(t)$, удовлетворяющие начальным условиям N_1^0,N_2^0.

Исходные уравнения можно записать в виде:

$$\frac{d}{dt}lnN_1 = \varepsilon_1 - \gamma_1 F\left(N_1, N_2\right),\ \frac{d}{dt}lnN_2 = \varepsilon_2 - \gamma_2 F\left(N_1, N_2\right). \qquad (2)$$

Умножая первое из этих уравнений на γ_2, а второе – на γ_1, после вычитания получаем

$$\gamma_2 \frac{d}{dt}lnN_1 - \gamma_1 \frac{d}{dt}lnN_2 = \varepsilon_1\gamma_2 - \varepsilon_2\gamma_1.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{N_1^{\gamma_2}}{N_2^{\gamma_1}} = \frac{\left(N_1^0\right)^{\gamma_2}}{\left(N_2^0\right)^{\gamma_1}} e^{\left(\varepsilon_1\gamma_2 - \varepsilon_2\gamma_1\right)\left(t - t_0\right)}.$$

Предположим, что $\varepsilon_1\gamma_2 - \varepsilon_2\gamma_1 > 0$, т. е. $\varepsilon_1\gamma_1 > \varepsilon_2\gamma_2$. Тогда из предыдущего выражения вытекает

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{N_1^{\gamma_2}}{N_2^{\gamma_1}} = +\infty.$$

Так как величина N_1 ограничена, то отсюда следует, что N_2 стремится к нулю. Значит, второй вид, у которого ε / γ имеет меньшее значение, убывает и со временем исчезает, между тем как первый продолжает существовать.

Действительно, если начиная с некоторого момента t_1 второй вид исчезает ($N_2 = 0$ при $t > t_1$), а значение N_1 в момент $t = t_1$ равно N_1^1, т. е. $N_1\left(t = t_1\right) = N_1^1$, то при $t > t_1$ численность первого вида подчиняется закону $\frac{dN_1}{dt} = \left[\varepsilon_1 - \gamma_1 F\left(N_1, 0\right)\right]N_1$.

Пусть N_1^* - корень уравнения $\varepsilon_1 - \gamma_1 F\left(N_1, 0\right) = 0$. Если $N_1^1 < N_1^*$, то коэффициент прироста $\varepsilon_1 - \gamma_1 F\left(N_1, 0\right)$ популяции N_1 будет положительным, начиная с момента t_1. Поэтому $dN_1 / dt > 0$ при $t > t_1$ и, значит, N_1 будет возрастать. Разделяя переменные в уравнении $\frac{dN_1}{dt} = \left[\varepsilon_1 - \gamma_1 F\left(N_1, 0\right)\right]N_1$, получаем

$$t - t_1 = \int_{N_1^1}^{N_1} \frac{dN_1}{N_1\left[\varepsilon_1 - \gamma_1 F\left(N_1, 0\right)\right]}.$$

В окрестности N_1^* для $N_1 < N_1^*$ по формуле конечных приращений Лагранжа $F\left(N_1, 0\right) - F\left(N_1^*, 0\right) = \left(N_1 - N_1^*\right)\varphi\left(N_1\right)$, где $\varphi\left(N_1\right) > 0$.

Имеем $\varepsilon_1 - \gamma_1 F\left(N_1, 0\right) = \gamma_1\left(N_1^* - N_1\right)\varphi\left(N_1\right)$, что позволяет записать предыдущее равенство в виде

$$t - t_1 = \int_{N_1^1}^{N_1} \frac{dN_1}{\gamma_1 N_1 \left(N_1 - N_1^*\right)\varphi\left(N_1\right)}.$$

Отсюда следует, что за конечное время величина N_1 никогда не достигнет N_1^*, но может принимать любое значение меньшее, чем N_1^*. Кроме того, величина N_1, будучи ограниченной и возрастая при $t \to +\infty$, стремится к N_1^*.

Из этих соображений следует, что вид, более чувствительный к нехватке пищи, т.е. тот, у которого величина ε / γ имеет меньшее значение, со временем исчезает, а вид, менее чувствительный к такой нехватке, продолжает существовать. При этом количество индивидуумов этого вида имеет конечный отличный от нуля предел.

Для того, чтобы найти этот предел при $t \to +\infty$, примем предположение о том, что функция $F\left(N_1, N_2\right)$ линейно зависит от N_1 и N_2, т.е.

$$F\left(N_1, N_2\right) = \lambda_1 N_1 + \lambda_2 N_2 \qquad \left(\lambda_1, \lambda_1 > 0\right).$$

В этом предположении N_1^*, является корнем уравнения $\varepsilon_1 - \gamma_1 \lambda_1 N_1 = 0$, т.е. $\dfrac{\varepsilon_1}{\gamma_1 \lambda_1} = N_1^*$. Кроме того, N_1 является решением уравнения $\dfrac{dN_1}{dt} = \left(\varepsilon_1 - \gamma_1 \lambda_1 N_1\right) N_1$.

Пусть $N_1 = N_1^1 \le N_1^*$ при $t = t_1$. Тогда после преобразований получаем

$$\frac{N_1}{\varepsilon_1 - \gamma_1 \lambda_1 N_1} = \frac{N_1^1}{\varepsilon_1 - \gamma_1 \lambda_1 N_1^1} e^{\varepsilon_1 \left(t - t_1\right)}.$$

Откуда

$$N_1 = \frac{C\varepsilon_1}{C\gamma_1 \lambda_1 + e^{-\varepsilon_1 \left(t - t_1\right)}},$$

где

$$C = \frac{N_1^1}{\varepsilon_1 - \gamma_1 \lambda_1 N_1^1}.$$

Следовательно, при $t \to +\infty$ N_1 стремится к N_1^*.

Было произведено численное решение системы

$$\frac{dN_1}{dt} = \left[\varepsilon_1 - \gamma_1 F\left(N_1, N_2\right)\right] N_1, \ \frac{dN_2}{dt} = \left[\varepsilon_2 - \gamma_2 F\left(N_1, N_2\right)\right] N_2$$

дифференциальных уравнений модели конкуренции двух популяций за один ресурс и графическое отображение данного процесса. За основу были приняты две популяции с одинаковым коэффициентом потребности в пище и различных иных начальных условиях. Для численного решения был применен метод Рунге-Кутта четвертого порядка. Алгоритм решения был реализован на базе программного обеспечения Microsoft Excel. Примеры решений приведены ниже.

Пример 1. Исходные данные. Начальное число особей первой популяции N_1=30. Начальное число особей второй популяции N_2=20. Коэффициент прироста первой популяции ε_1 =0,75. Коэффициент прироста второй популяции ε_2 =0,8. Коэффициент прожорливости популяций γ_1, γ_2 = 0.1. Случайные коэффициенты: 0,01 и 0,02. Количество пищи, съедаемое в единицу времени: 0,7. Начальное количество пищи: 500. Смертность в случае отсутствия достаточного количества пищи возьмем равной 80%. Шаг: 0,5 (полгода). Продолжительность эксперимента 15 лет.

На рис. 1 представлены графики динамики популяций. Как можно заметить при исходных данных ни одна из популяций не получает заметного перевеса по количеству особей, это происходит из-за малого начального количества пищи и очень близких значениях остальных исходных данных.

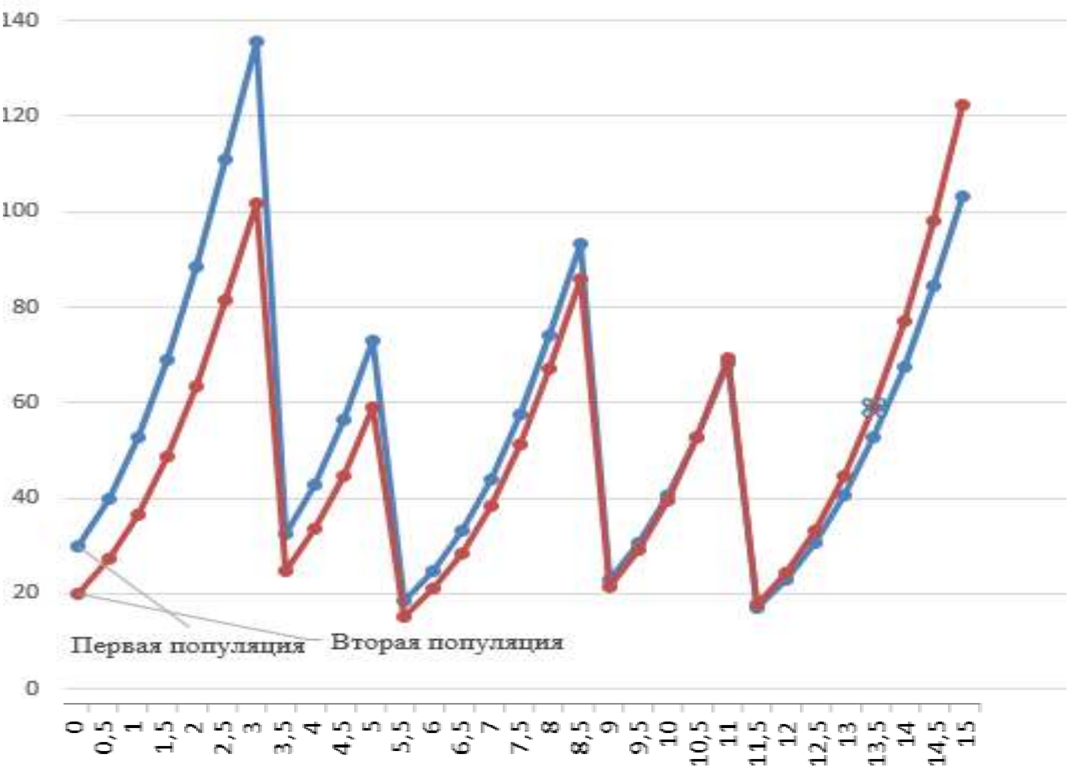

Рисунок 1 – График к примеру 1

Пример 2. В этом примере рассмотрим две популяции с разными исходными данными и с достаточно большим начальным количеством пищи, чтобы проследить, как велика будет разница в росте популяций.

Исходные данные. Начальное число особей первой популяции N_1= 50. Начальное число особей второй популяции N_2= 20. Коэффициент прироста первой популяции ε_1= 0,5. Коэффициент прироста второй популяции ε_2 = 0,3. Коэффициент прожорливости популяций γ_1, γ_2= 0,2. Случайные коэффициенты: 0,02, 0,03. Количество пищи, съедаемое в единицу времени: 1,2. Начальное количество пищи: 1000. Смертность в случае отсутствия достаточного количества пищи возьмем равной 60%. Шаг: 0,5 (полгода). Продолжительность эксперимента 15 лет.

На рис. 2 видно, что при заданных начальных данных популяция, имеющая большее начальное количество особей и больший прирост, не смотря так же на большую прожорливость, с легкостью вытеснила вторую популяцию еще до момента недостачи пищи.

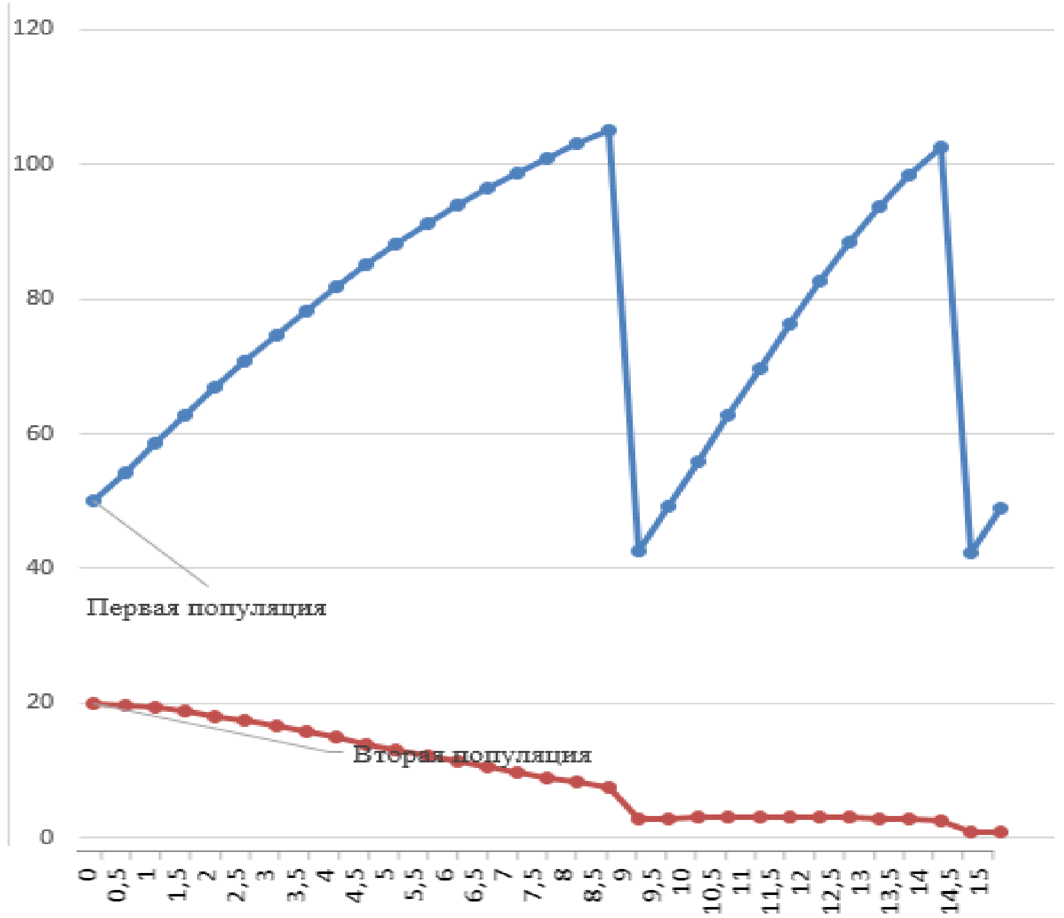

Рисунок 2 – График к примеру 2

Пример 3. В этом примере рассмотрим две популяции с разными исходными данными и с достаточно большим количеством начальной пищи, чтобы проследить, как велика будет разница в росте популяций.

Исходные данные. Начальное число особей первой популяции $N_1 = 50$. Начальное число особей второй популяции $N_2 = 40$. Коэффициент прироста первой популяции $\varepsilon_1 = 0{,}3$. Коэффициент прироста второй популяции $\varepsilon_2 = 0{,}4$. Коэффициент прожорливости популяций $\gamma_1, \gamma_2 = 0{,}1$. Случайные коэффициенты: 0,01 и 0,03. Количество пищи, съедаемое в единицу времени: 1,2. Начальное количество пищи: 700. Смертность в случае отсутствия достаточного количества пищи возьмем равной 55%. Шаг: 0,5 (полгода). Продолжительность эксперимента 15 лет.

По решению, представленному на рис. 3, делаем вывод, что в начале рост популяций был приблизительно на одном уровне. Несмотря на это, вторая популяция в силу того, что прирост особей в этой популяции выше, в конечном счете, смогла вырваться вперед, при этом первая популяция хоть и возрастает, но с каждым новым вымиранием из-за недостачи пищи ей все труднее восстанавливаться.

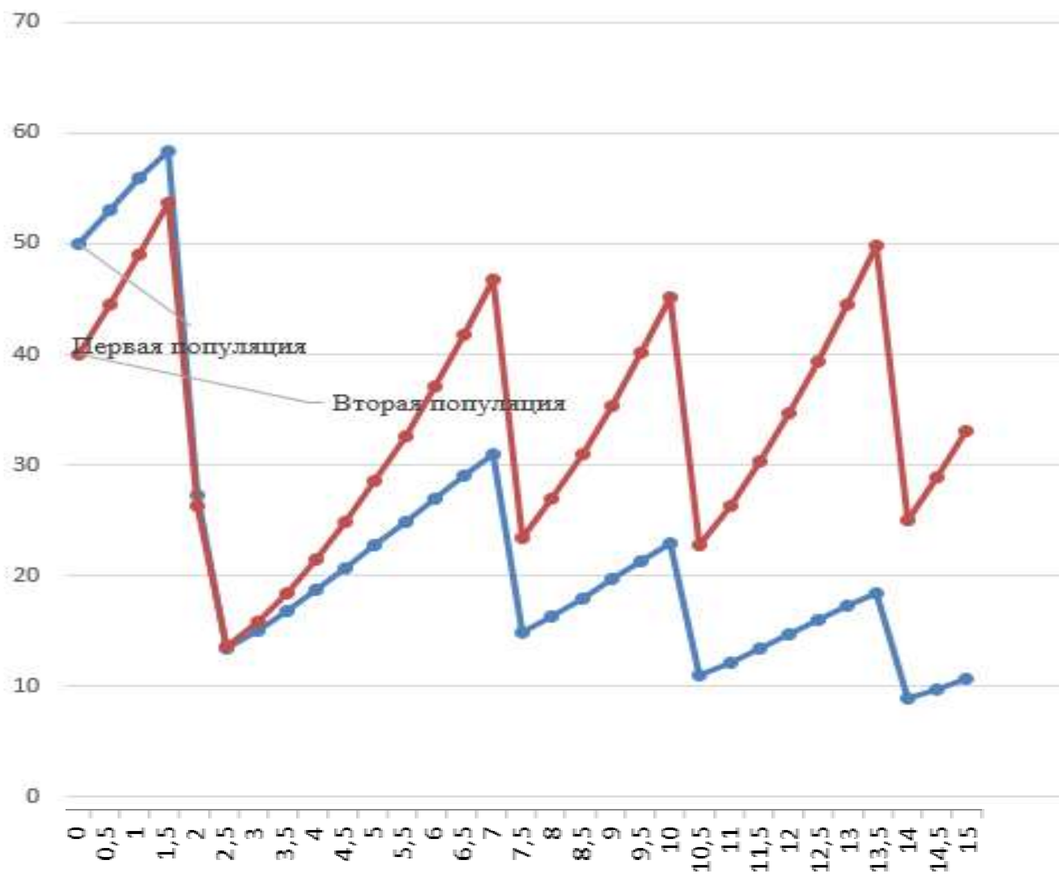

Рисунок 3 – График к примеру 3

Литература

1. Ризниченко, Г. Ю. Математические модели в биофизике и экологии / Г. Ю. Ризниченко. – М .: ИКИ, 2003. – 184 с.

2. Скалецкая, Е. И. Дискретные модели динамики численности популяций и оптимизация промысла. / Е. И. Скалецкая, Е. Я. Фрисман, А. П. Шапиро. – М. : Наука, 1979. – 166 с.

3. Фомин, С. В. Математические проблемы в биологии / С. В. Фомин, М. Б. Беркинблит. – М. : Наука, 1973. – 200 с.

4. Фрисман, Е. Я., Избранные математические модели дивергентной эволюции популяций / Е. Я. Фрисман, А. П. Шапиро. – М. : Наука, 1977. – 151с.

MODEL OF INTERACTION OF TWO POPULATIONS FOR ONE RESOURCE

Gulenko Sergey Nikolaevich
Vladimir Dahl Lugansk State University, Lugansk
serg.gulenko1305@gmail.com

Annotation. Mathematical models of population dynamics interacting according to the principle of “two competing populations – one resource” are considered. The studied models have been brought to the construction of parametric and phase portraits. A meaningful biological interpretation is given to parametric and phase portraits.

Keywords: population dynamics, competition.

УДК 336.748:330.5-047.72

СРАВНЕНИЕ ДВУХ МЕТОДОВ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ ВАЛЮТНОГО КУРСА *USD* / *RUB* НА ОСНОВЕ МАКРОЭКОНОМИЧЕСКИХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ

Евсеенко Алина Владимировна[1], Скринникова Анна Владимировна[2]
[1,2]Луганский государственный педагогический университет, г. Луганск
[2]ann3005@rambler.ru

Аннотация. В работе сделан прогноз курса валютной пары *USD* / *RUB* на 2023 год на основе линейной множественной регрессии с учетом денежной массы (агрегат М0) и валового внутреннего продукта двух стран. Проведено сравнение с прогнозом, построенным на тех же данных, но в предположении линейной зависимости стоимостей потребительских корзин США и РФ.

Ключевые слова: валовый внутренний продукт, корреляция, регрессия, средняя квадратичная ошибка прогнозирования.

На нынешний курс валютной пары *USD/RUB* влияет не только политическая ситуация, но и другие вполне объективные экономические факторы: структура и размеры валового внутреннего продукта (ВВП) стран, объем денежной массы, находящейся в обращении, индекс потребительских цен (ИПЦ), структура экспорта и др. В частности, курс доллара растет из-за высокого уровня и роста капитализации предприятий, курс рубля падает ввиду снижения цен на нефть, повышения расходов РФ из-за санкций (оттока капитала, дисбаланса в спросе/предложении валют, расчета в валютах, которые сложно вывести со счетов и пр.) [2-8]. Кроме того, валютный курс отражает комплекс взаимоотношений между двумя валютами: соотношение их покупательной способности, темпов инфляции, спроса и предложения валют на международных валютных рынках и др. Однако практически все аналитики указывают на наличие недостатков любого из методов прогнозирования курсов валютных пар (математического или основанного на мнениях экспертов) [3] и критикуют фундаментальный анализ финансового рынка относительно невозможности учета непредсказуемых факторов.

Поскольку валютный курс изменяется, в частности, так, чтобы уравновесить стоимость потребительских корзин в странах [2-5], то его можно представить как функцию соотношения стоимости потребительских корзин двух стран. В работе [3], например, ввели соотношение: $Курс\left(USD / RUB\right) = f(\frac{A}{B})$. Разбив временную ось на равные отрезки времени эту зависимость аппроксимировали линейными функциями:

$$Курс\left(USD / RUB\right) = L_i \cdot \frac{A_i}{B_i}, \tag{1}$$

где L_i – некоторый коэффициент, A_i – стоимость потребительской корзины РФ, B_i – стоимость потребительской корзины США за *i*-й отрезок времени. Т.е.

сделали предположение, что зависимость стоимости потребительских корзина США и РФ линейная, поскольку иное не установлено.

В качестве меры стоимости потребительской корзины в основном берут ИПЦ, который связан с денежной массой (агрегат М0) и ВВП. Отметим, что М0 включает лишь наличные деньги в национальной валюте, находящиеся в обращении вне банковской системы.

Цель работы – исследовать и сравнить прогноз курса валютной пары USD/RUB, полученный методом множественной регрессии, с прогнозом, построенном на тех же данных, но в предположении линейной зависимости стоимости потребительских корзина США и РФ.

Методы исследования: анализ, формализация, регрессионный анализ, моделирование.

Построим уравнение множественной регрессии [1] типа (2), пользуясь информацией с официальных сайтов [2–8], занесенной в таблицу 1.

Табл.1. Данные к вычислению коэффициентов уравнения регрессии

№ п/п	ВВП РФ	М0 РФ	М0 США	ВВп США	Факторы		Курс
					x_1	x_2	z_i
1	681 0340	59 386,00	2700000	16197000	11,46792	5,998889	31,088
2	720 857	64 301,00	2700000	16784800	11,21067	6,216593	31,8542
3	790 300	69 856,00	3500000	17521700	11,31327	5,0062	38,4375
4	830 874	71 715,00	4100000	18219300	11,58578	4,443732	60,9579
5	856 161	72 391,00	3700000	18569100	11,8269	5,018676	67,0349
6	918 432	77 150	3674797	19485400	11,9045	5,302443	58,3529
7	1 038 617	84 460	3800000	20494000	12,29715	5,393158	62,7091
8	1 096 083	93 390	3315603	21433000	11,73662	6,464284	64,7362
9	1 073 903	96 580	5093100	20937000	11,11931	4,110856	72,1464
10	1 310 140	125239	6413300	22998000	10,46112	3,585985	73,6541
11	2 133 092	125290	5885200	25035164	17,02524	4,253919	79,1471
12	2 062 649	197180	5592600	26854599	10,46074	4,801809	79,97
13	2 062 649	197180	5592600	26854599	10,46074	4,801809	98,97
				Среднее:	11,75923	5,030642	63,004

По данным таблицы 1 рассчитаем факторы $X_1 = \dfrac{ВВП_{РФ}}{МО_{РФ}}$, $X_2 = \dfrac{ВВП_{США}}{МО_{США}}$.

Зависимости текущего курса *USD/RUB* (см. ось ординат) *Курс* от X_1 и X_2 (см. оси абсцисс) изображены на рис. 1 и 2 соответственно. Глядя на них можно предположить наличие линейных зависимостей между прогнозируемым курсом $Курс_П$ и факторами X_1 и X_2. В таблице 2 приведены некоторые промежуточные расчеты для нахождения коэффициентов уравнения регрессии:

$$Курс_П = a_0 X_1 + a_1 X_2 + a_2, \tag{2}$$

где $X_1 = \dfrac{ВВП_{РФ}}{МО_{РФ}}$, $X_2 = \dfrac{ВВП_{США}}{МО_{США}}$.

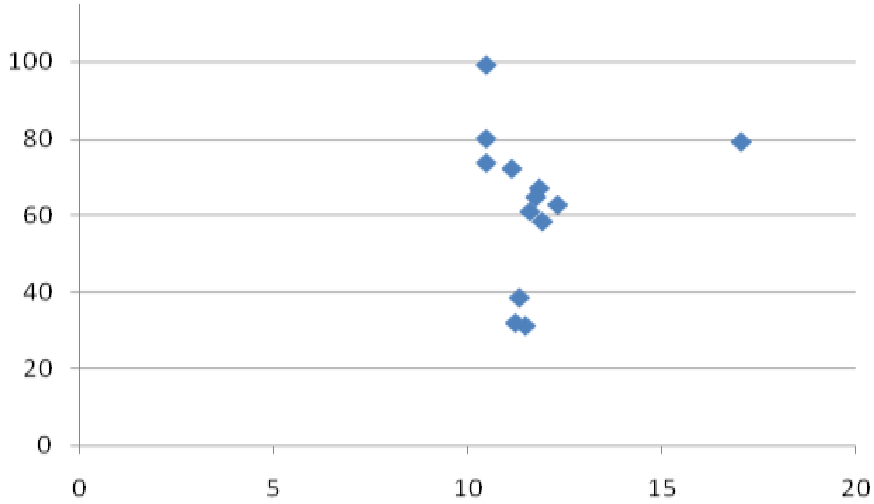

Рисунок 1 – Точечный график зависимости *Курс* от X_1.

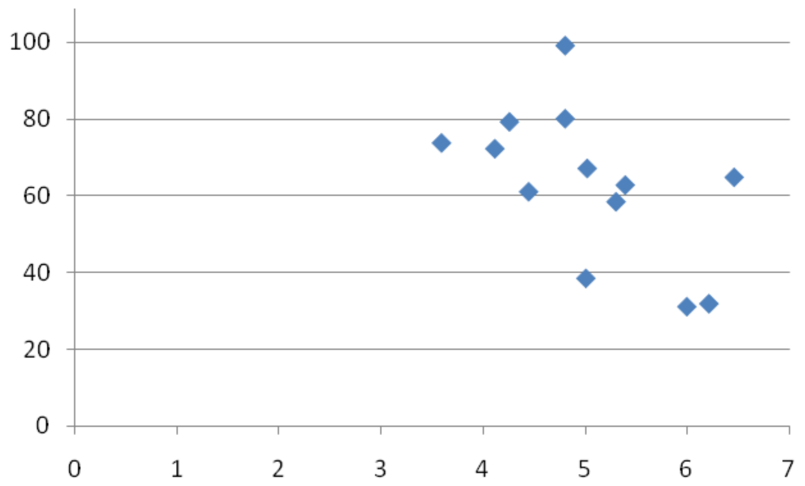

Рисунок 2 – Точечный график зависимости *Курс* от X_2.

Как видно, величина X_1 как минимум в два разе превышает величину X_2. Пользуясь методом наименьших квадратов (см. выражения (3)),

$$\begin{cases} a_2 + a_0\bar{x}_1 + a_1\bar{x}_2 = \bar{z}, \\ a_2\,\bar{x}_2 + a_0\,\overline{x_1 x_2} + a_1\overline{x_2^{\,2}} = \overline{x_2 z}, \\ a_2\bar{x}_1 + a_0\overline{x_1^{\,2}} + a_1\,\overline{x_1 x_2} = \overline{x_1 z}, \end{cases} \qquad (3)$$

где $z = \text{Курс}_{\Pi}$,

$$\bar{x}_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m} x_{1i}\cdot n_i\,,\quad \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m} x_{2i}\cdot n_i\,,\quad \overline{x_1 x_2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m} x_{1i}\cdot x_{2i}\cdot n_i\,,$$

$$\overline{x_1^{\,2}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m} x_{1i}^{\,2}\, n_i\,,\quad \overline{x_2^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m} x_{2i}^2\, n_i\,,\quad \overline{x_2 z} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m} x_{2i}\cdot z_i\cdot n_i\,,\quad \overline{x_1 z} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m} x_{1i}\cdot z_i\cdot n_i\,,$$

находим: $a_0 = 0{,}352$, $a_1 = -13{,}135$, $a_2 = 124{,}944$. Таким образом, получаем:

$$Курс_{П} = 0{,}352x_1 - 13{,}135x_2 + 124{,}944. \qquad (4)$$

Табл. 2. Промежуточные расчеты

№ п/п	Отклонения от среднего			Прогноз	$(x_{1i})^2$	$(x_{2i})^2$
	$x_{1i}-\overline{x}_1$	$x_{2i}-\overline{x}_2$	$z_i-\overline{z}$	$\hat{z}_i$		
1	-0,29131	0,968246	-31,9165	50,18366	0,084859	0,937501
2	-0,54856	1,18595	-31,1503	47,23348	0,30092	1,406478
3	-0,44595	-0,02444	-24,567	63,16854	0,198875	0,000597
4	-0,17345	-0,58691	-2,04658	70,65271	0,030085	0,344464
5	0,067671	-0,01197	4,030415	63,1855	0,004579	0,000143
6	0,145271	0,2718	-4,65158	59,48544	0,021104	0,073875
7	0,53792	0,362515	-0,29538	58,43209	0,289358	0,131417
8	-0,02261	1,433642	1,731715	44,16512	0,000511	2,055328
9	-0,63992	-0,91979	9,141915	74,86093	0,409493	0,846007
10	-1,29811	-1,44466	10,64962	81,52357	1,685086	2,087034
11	5,266011	-0,77672	16,14262	75,06096	27,73087	0,603299
12	-1,29849	-0,22883	16,96552	65,55315	1,686064	0,052365
13	-1,29849	-0,22883	35,96552	65,55315	1,686064	0,052365
				Сумма:	34,12786	8,590875

На рис. 3 показаны динамика курса валютной пары *USD/RUB* с 2012 по 2023 г.г. (Ряд1) в сравнении со спрогнозированным курсом (Ряд 2) на основе двух макроэкономических показателей ВВП и М0 в предположении линейной зависимости стоимости потребительских корзина США и РФ и график (4).

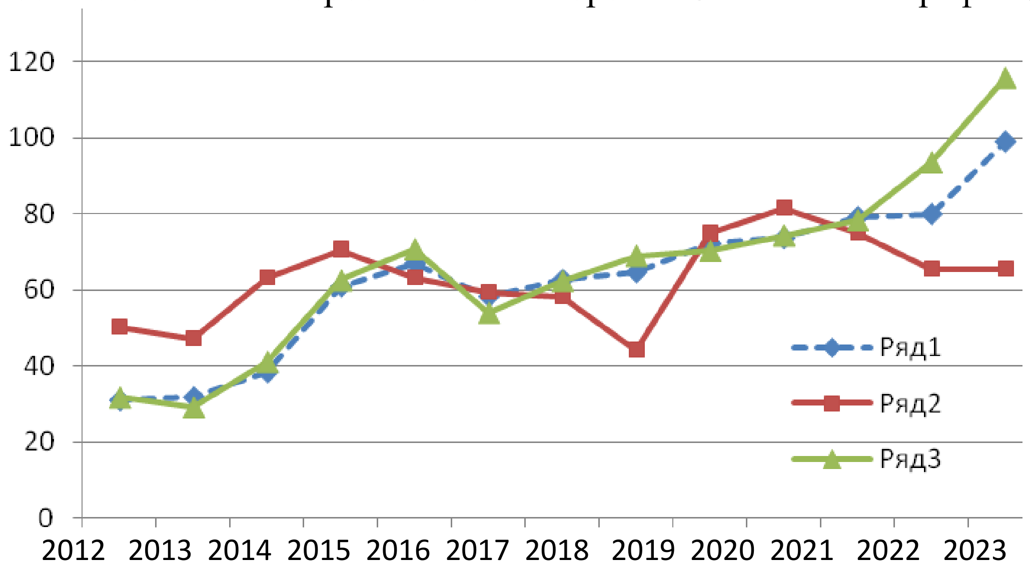

Рисунок 3 – Динамика курса валютной пары *USD/RUB* с 2012 по 2023 г.г. – Ряд1 в сравнении со спрогнозированным курсом по (4) – Ряд 2 и (1) – Ряд 3

В (4) коэффициент детерминации, который позволяет оценить силу зависимости переменных в регрессионном анализе, равен

$$R^2 = 1 - \frac{\sum (z_i - \hat{z}_i)^2}{\sum (z_i - \overline{z}_i)^2} = 1 - \frac{3174,868}{4676,615} \approx 1 - 0,6789 \approx 0,32,$$

откуда R=0,57. Это показывает, что линейная зависимость между курсом валют Z и факторами X_1 и X_2 является (0,5<R<0,7) «заметной» по шкале Чеддока, и R^2 является значимым по F-критерию Фишера, поскольку

$$F = \frac{\frac{R^2}{k-1}}{\frac{1-R^2}{n-k}} = \frac{0,32\cdot 11}{0,68} \approx 5,12,$$

$$F_{0,05\%}(k-1; n-k) = F_{0,05\%}(1;11) = 4,84,$$

где 0,05 – уровень значимости, $k = 13$ – количество наблюдений, $n = 2$ – количество факторов ($F_{0,05\%-\textit{табличное}} < F$), т.е. полученная модель адекватна и соответствует фактическим данным. Оценка значимости каждого коэффициента регрессии по t-критерию Стьюдента показала, что модель достоверна. На основе показателей адекватности и достоверности уравнения регрессии сделан вывод о возможности использования выражения (2) в прогнозировании курса.

По средней квадратичной ошибке модели линейной множественной регрессии

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N}(z_i - \hat{z}_i)^2} = \sqrt{\frac{3174,868}{13}} \approx 15,6,$$

а для модели работы [7]

$$\sigma_{ï} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N}(z_i - \hat{z}_i)^2} = \sqrt{\frac{352,42}{13}} \approx 5,4.$$

Метод прогнозирования валютного курса на год на основе двух макроэкономических показателей [3] имеет преимущество по сравнению с альтернативным методом, основанным на линейной множественной регрессии, в 15,6/5,4 = 2,88 раза.

Средняя абсолютная ошибка прогнозирования $MAE = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|z_i - \hat{z}_i|$, где z_i – фактическое значение, $\hat{z}_i$ – прогнозное значение курса рубля, для регрессионного метода MAE = 161,23/13=12,4 получилась больше, чем для метода [3] – $MAE_П$ = 53,68/13=4,13.

Средняя абсолютная ошибка метода в процентах $MAPE = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{|z_i - \hat{z}_i|}{z_i}\cdot 100\%$ составила: $MAPE$ = 307%/13=23,62% и $MAPE_П$ = 78%/13=6% соответственно. Отсюда получаем, что при прогнозе курса рубля по отношению к доллару, точность прогноза разработанным методом в [7], выше 100%-6% = 94%, чем методом, основанным на линейной регрессии – 100%-23,62% = 76,38% в 94/76,38 = 1,23 раза.

Заключение

Метод прогнозирования валютного курса USD/RUB на год на основе двух макроэкономических показателей ВВП и М0 в предположении линейной зависимости стоимости потребительских корзина США и РФ дал среднюю квадратичную ошибку за 20 предыдущих лет 5,4. Примененный на тех же данных метод множественной регрессии дал среднюю квадратичную ошибку 15,6. Т.е. на основе анализа среднеквадратичного отклонения установлено, что метод, основанный на линейной регрессии, уступает в 2,88 раза методу прогнозирования валютного курса *USD/RUB* на основе макроэкономических показателей ВВП и М0 в предположении линейной зависимости стоимости потребительских корзин США и РФ. Точность прогноза методом, основанным на показателях ВВП и М0, оказалась выше, чем методом, основанным на линейной регрессии в 1,23 раза.

Литература

1. Кобзарь, А. И. Прикладная математическая статистика для инженеров и науч. работников / А. И Кобзарь. Изд. 2-е, испр. – Москва : Физматлит, 2012. – 813 с.
2. Режим валютного курса Банка России. URL: http://www.cbr.ru/DKP/exchange_rate/ (дата обращения 12.12.2023).
3. Скринникова, А. В. Математические методы в прогнозировании курсов валютных пар / А. В. Скринникова // Вестник ЛГПУ. Серия 5. Гуманит. науки, технические науки. – № 2 (100), 2023. – С. 91–97.
4. Статистика внешнего сектора. URL: http://www.cbr.ru/statistics/?PrtId=svs (дата обращения 12.12.2023).
5. Финансово-экономические показатели Российской Федерации. URL: https://www.minfin.ru/ru/statistics/ (дата обращения 12.12.2023).
6. Цена на нефть марки Brent – таблица с 1986 по сегодняшний день. URL: https://worldtable.info/yekonomika/cena-na-neft-marki-brent-tablica-s-1986-po-22.html (дата обращения 12.12.2023).
7. Annual Report On Exchange Arrangements And Exchange Restrictions 2022 // International Monetary Fund. – 2022. – 90 P.
8. URL: https://take-profit.org/statistics/gdp/united-states/American Exchange Portal (дата обращения 12.12.2023).

COMPARISON OF TWO METHODS OF FORECASTING THE EXCHANGE RATE BASED ON MACROECONOMIC INDICATORS

Evseenko Alina Vladimirovna[1], Skrinnikova Anna Vladimirovna[2]
[1,2]Lugansk State Pedagogical University, Lugansk
[2]ann3005@rambler.ru

Annotation. The paper makes a forecast of the exchange rate of the currency pair for 2023 based on linear multiple regression, taking into account the money supply (aggregate M0) and the gross domestic product of the two countries. A comparison is made with the forecast based on the same data, but assuming a linear dependence of the values of the consumer baskets of the USA and the Russian Federation.

Keywords: gross domestic product, correlation, regression, mean quadratic error of forecasting.

УДК 539.3, 51-7, 519.6, 517.9, 53.082.5

ПРИМЕНЕНИЕ ОБОБЩЕННЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ СИСТЕМ ПРИ РЕШЕНИИ СПЕКТРАЛЬНЫХ ЗАДАЧ С ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ

Клово Александр Георгиевич [1]***, Илюхин Александр Алексеевич*** [2]***,***
Куповых Геннадий Владимирович [3]
[1,2,3]***Южный федеральный университет, г. Таганрог***
[1]***klovo_ag@mail.ru***

Аннотация. Изучаются обобщенные тригонометрические системы и возможности их приложений. Речь идет о наборах произвольного числа функций, которые при дифференцировании последовательно переходят друг в друга, обладают определенными начальными условиями. Получено в явном виде решение ряда спектральных задач для операторов порядка 4 с дополнительными условиями во внутренних точках области.

Ключевые слова: обобщенные тригонометрические системы, спектральные задачи, дополнительные условия, внутренняя граница.

Введение. При решении задач, содержащих в своей постановке уравнения математической физики с пространственными производными второго порядка, используются, как правило тригонометрические или гиперболические функции. В работе [7] при решении задач, содержащих производные порядка четыре, академик А.Н. Крылов использовал функции, производные порядка 4 от которых пропорциональны самим этим функциям. В статье [1] для решения такой спектральной задачи с дополнительными условиями предлагается метод промежуточных задач. В работе [2] введено понятие обобщенной тригонометрической системы (ОТС). В этой системе произвольное число функций, последовательно переходящих друг в друга при взятии от них производных. Изучение дифференциальных свойств таких систем функций происходит в работах [3]–[4]. Работы [5]–[6] показывают возможность использования прямого решения спектральных задач с помощью функций ОТС. Специфика настоящей работы заключается в том, чтобы показать возможность использования алгебраических свойств введенных функций для прямого решения задач на собственные значения с дополнительными условия во внутренних точках области.

Определения функций ОТС. Пусть для функций $\mathrm{K}_{2n,1}(x)$, $\mathrm{K}_{2n,2}(x),\ldots,$ $\mathrm{K}_{2n,2n}(x)$ выполнены соотношения

$$\begin{gathered}\left(\mathrm{K}_{2n,i}(x)\right)'=\mathrm{K}_{2n,i+1}(x),\ \mathrm{K}_{2n,i}(0)=0,\ i=1,2,\ldots,2n-1,\\ \left(\mathrm{K}_{2n,2n}(x)\right)'=\mathrm{K}_{2n,1}(x),\ \mathrm{K}_{2n,2n}(0)=1.\end{gathered}\tag{1}$$

Тогда мы будем говорить, что эти функции порождают обобщенную тригонометрическую систему четного порядка $2n$ первого типа и использовать для них обозначение $о.т.с.[2n;1]$.

Если для функций $\Phi_{2n,1}(x)$, $\Phi_{2n,2}(x),\ldots$, $\Phi_{2n,2n}(x)$ выполнены соотношения

$$\left(\Phi_{2n,i}(x)\right)'=\Phi_{2n,i+1}(x),\ \Phi_{2n,i}(0)=0,\ i=1,2,...,2n-1,$$
$$\left(\Phi_{2n,2n}(x)\right)'=-\Phi_{2n,1}(x),\ \Phi_{2n,2n}(0)=1, \tag{2}$$

Тогда мы будем говорить, что эти функции порождают обобщенную тригонометрическую систему четного порядка $2n$ второго типа и использовать для них обозначение $o.m.c.\left[2n;2\right]$.

Теперь рассмотрим функции $L_{2n-1,1}(x)$, $L_{2n-1,2}(x),\ldots$, $L_{2n-1,2n-1}(x)$, для которых выполнены соотношения

$$\left(L_{2n-1,i}(x)\right)'=L_{2n-1,i+1}(x),\ L_{2n-1,i}(0)=0,\ i=1,2,...,2n-2,$$
$$\left(L_{2n-1,2n-1}(x)\right)'=L_{2n-1,1}(x),\ L_{2n-1,2n-1}(0)=1. \tag{3}$$

Мы будем говорить, что эти функции порождают обобщенную тригонометрическую систему нечетного порядка $2n-1$ первого типа и использовать для них обозначение $o.m.c.\left[2n-1;1\right]$.

И, наконец, рассмотрим функции $G_{2n-1,1}(x)$, $G_{2n-1,2}(x),\ldots$, $G_{2n-1,2n-1}(x)$, $n\in N$, для которых выполнены соотношения

$$\left(G_{2n-1,i}(x)\right)'=G_{2n-1,i+1}(x),\ G_{2n-1,i}(0)=0=0,\ i=1,2,...,2n-2,$$
$$\left(G_{2n-1,2n-1}(x)\right)'=-G_{2n-1,1}(x),\ G_{2n-1,2n-1}(0)=1. \tag{4}$$

Мы будем говорить, что эти функции порождают обобщенную тригонометрическую систему нечетного порядка $2n-1$ второго типа и использовать для них обозначение $o.m.c.\left[2n-1;2\right]$.

Постановка спектральных задач с дополнительными условиями. Функции обобщенных тригонометрических систем могут быть использованы при решении спектральных задач. При этом порядок этих функций ОТС должен совпадать с порядком дифференциального уравнения в постановке задачи. В качестве примера рассмотрим задачу

$$X^{IV}(x)=\lambda X(x), \tag{5}$$

$$X''(x)\big|_{x\in\Gamma}=X'''(x)\big|_{x\in\Gamma}=0. \tag{6}$$

Несложно показать, что в задаче (5)–(6) оператор $Lu(x)=u^{IV}(x)$ при данных граничных условиях является положительно определенным и самосопряженным. Те же свойства остаются, если граничные условия (6) заменить на условие $X(x)\big|_{x\in\Gamma}=X''(x)\big|_{x\in\Gamma}=0$. Также могут быть использованы условия $X(x)\big|_{x\in\Gamma}=X'(x)\big|_{x\in\Gamma}=0$ или $X'(x)\big|_{x\in\Gamma}=X'''(x)\big|_{x\in\Gamma}=0$.

В приложениях важна ситуация, когда наряду с условиями на внешней границе области задано дополнительное условие в одной или нескольких ее внутренних точках. Рассмотрим условие

$$X(x)\big|_{x\in\gamma}=0 \tag{7}$$

в точках внутренней границы γ. Важно дать такое определение решения задачи (5)–(7), при котором соответствующий оператор остается положительно определенным и самосопряженным.

Например, под решением задачи (5)–(7) мы можем понимать такую функцию $X(x)$, которая непрерывна в D наряду с ее производными $\frac{dX(x)}{dx}$, $\frac{d^2X(x)}{dx^2}$. Также требуется, чтобы $X(x)$ удовлетворяла (5) в области $D\setminus\gamma$, условиям (6), (7). В этом случае оператор $Lu(x)=u^{IV}(x)$ остается, как несложно показать, положительно определенным и самосопряженным.

Решение задачи (5)–(7) с одной внутренней точкой. Рассмотрим область $D_{l,0}=(-l;0)\cup(0;l)$. В этом случае внутренняя граница γ состоит из одной точки $x=0$. При решении соответствующей задачи (5)–(7) будут использоваться функции $\mathrm{K}_{4,1}(x)$, $\mathrm{K}_{4,2}(x)$, $\mathrm{K}_{4,3}(x)$, $\mathrm{K}_{4,4}(x)$. Решение будем искать в виде

$$X(x)=\begin{cases} C_1^-\mathrm{K}_{4,1}\left(\sqrt[4]{\lambda}x\right)+C_2\mathrm{K}_{4,2}\left(\sqrt[4]{\lambda}x\right)+C_3\mathrm{K}_{4,3}\left(\sqrt[4]{\lambda}x\right), & -l\le x<0,\\ C_1^+\mathrm{K}_{4,1}\left(\sqrt[4]{\lambda}x\right)+C_2\mathrm{K}_{4,2}\left(\sqrt[4]{\lambda}x\right)+C_3\mathrm{K}_{4,3}\left(\sqrt[4]{\lambda}x\right), & 0\le x\le l. \end{cases} \tag{8}$$

Выполнение условий (5), (7) очевидно. Также без труда проверяется выполнение условий непрерывности на γ производных $\frac{dX(x)}{dx}$, $\frac{d^2X(x)}{dx^2}$. А вот требование выполнения условий (6) приводит к СЛАУ

$$\begin{cases} -C_1^-\mathrm{K}_{4,1}\left(\sqrt[4]{\lambda}l\right)+C_2\mathrm{K}_{4,2}\left(\sqrt[4]{\lambda}l\right)-C_3\mathrm{K}_{4,3}\left(\sqrt[4]{\lambda}l\right)=0,\\ C_1^-\mathrm{K}_{4,2}\left(\sqrt[4]{\lambda}l\right)-C_2\mathrm{K}_{4,3}\left(\sqrt[4]{\lambda}l\right)+C_3\mathrm{K}_{4,4}\left(\sqrt[4]{\lambda}l\right)=0,\\ C_1^+\mathrm{K}_{4,1}\left(\sqrt[4]{\lambda}l\right)+C_2\mathrm{K}_{4,2}\left(\sqrt[4]{\lambda}l\right)+C_3\mathrm{K}_{4,3}\left(\sqrt[4]{\lambda}l\right)=0,\\ C_1^+\mathrm{K}_{2}\left(\sqrt[4]{\lambda}l\right)+C_2\mathrm{K}_{3}\left(\sqrt[4]{\lambda}l\right)+C_3\mathrm{K}_{4}\left(\sqrt[4]{\lambda}l\right)=0. \end{cases} \tag{9}$$

Для существования отличного от 0 решения спектральной задачи необходимым и достаточным условием является равенство 0 определителя СЛАУ (9). Это ведет к решению характеристического уравнения

$$\begin{gathered}\left(\mathrm{K}_{4,1}\left(\sqrt[4]{\lambda}l\right)\mathrm{K}_{4,4}\left(\sqrt[4]{\lambda}l\right)-\mathrm{K}_{4,2}\left(\sqrt[4]{\lambda}l\right)\mathrm{K}_{4,3}\left(\sqrt[4]{\lambda}l\right)\right)\times\\ \times\left(\mathrm{K}_{4,2}^2\left(\sqrt[4]{\lambda}l\right)-\mathrm{K}_{4,1}\left(\sqrt[4]{\lambda}l\right)\mathrm{K}_{4,3}\left(\sqrt[4]{\lambda}l\right)\right)=0.\end{gathered} \tag{10}$$

Можно проверить, что корни $\lambda_{1,n}$, $n \in N$ первого множителя $\mathrm{K}_1\left(\sqrt[4]{\lambda}l\right)\mathrm{K}_4\left(\sqrt[4]{\lambda}l\right) - \mathrm{K}_2\left(\sqrt[4]{\lambda}l\right)\mathrm{K}_3\left(\sqrt[4]{\lambda}l\right)$ в (10) соответствуют собственным функциям

$$X_{1,n}(x) = \begin{cases} \mathrm{K}_{4,2}\left(\sqrt[4]{\lambda_{1,n}}l\right)\mathrm{K}_{4,1}\left(\sqrt[4]{\lambda_{1,n}}x\right) - \mathrm{K}_{4,1}\left(\sqrt[4]{\lambda_{1,n}}l\right)\mathrm{K}_{4,2}\left(\sqrt[4]{\lambda_{1,n}}x\right), & -l \le x < 0, \\ -\mathrm{K}_{4,2}\left(\sqrt[4]{\lambda_{1,n}}l\right)\mathrm{K}_{4,1}\left(\sqrt[4]{\lambda_{1,n}}x\right) - \mathrm{K}_{4,1}\left(\sqrt[4]{\lambda_{1,n}}l\right)\mathrm{K}_{4,2}\left(\sqrt[4]{\lambda_{1,n}}x\right), & 0 \le x \le l, \end{cases}$$

которые являются нечетными. Четные собственные функции

$$X_{1,n}(x) = \begin{cases} \mathrm{K}_{4,2}\left(\sqrt[4]{\lambda_{1,n}}l\right)\mathrm{K}_{4,1}\left(\sqrt[4]{\lambda_{1,n}}x\right) - \mathrm{K}_{4,1}\left(\sqrt[4]{\lambda_{1,n}}l\right)\mathrm{K}_{4,2}\left(\sqrt[4]{\lambda_{1,n}}x\right), & -l \le x < 0, \\ -\mathrm{K}_{4,2}\left(\sqrt[4]{\lambda_{1,n}}l\right)\mathrm{K}_{4,1}\left(\sqrt[4]{\lambda_{1,n}}x\right) - \mathrm{K}_{4,1}\left(\sqrt[4]{\lambda_{1,n}}l\right)\mathrm{K}_{4,2}\left(\sqrt[4]{\lambda_{1,n}}x\right), & 0 \le x \le l \end{cases}$$

порождаются корнями $\lambda_{2,n}$, $n \in N$ второго множителя $\mathrm{K}_2^2\left(\sqrt[4]{\lambda}l\right) - \mathrm{K}_1\left(\sqrt[4]{\lambda}l\right)\mathrm{K}_3\left(\sqrt[4]{\lambda}l\right)$ (10).

Некоторые свойства функций ОТС. При использовании собственных функций в решении прикладных задач важную роль играет возможность нормирования собственных функций. Для решения этой проблемы понадобится исследовать свойства функций ОТС. При этом недостаточным является использование только лишь дифференциальных свойств этих функций. Важную роль играют алгебраические свойства функций обобщенных тригонометрических систем, связанные с исследованием их квадратичных форм.

Например, для функций ОТС четного порядка первого типа рассмотрим их квадратичную форму

$$\mathrm{A}(x) = \sum_{1 \le i,\, j \le 2n} a_{ij} K_{2n,i}(x) K_{2n,j}(x). \tag{11}$$

Специфика этих функций заключается в том, что производная от указанной квадратичной формы сама по себе является квадратичной формой этих же функций. Если при этом матрица квадратичной формы (11) имеет вид $A = \left(a_{ij}\right)$, $a_{ij} = a_{ji}$, $1 \le i \le j \le 2n$, то матрица ее производной имеет вид

$$\begin{pmatrix} 2a_{1,2n} & a_{11} + a_{2,2n} & a_{12} + a_{3,2n} & \dots & a_{1,2n-2} + a_{2n-1,2n} & a_{1,2n-1} + a_{2n,2n} \\ a_{11} + a_{2,2n} & 2a_{12} & a_{13} + a_{22} & \dots & a_{1,2n-1} + a_{2,2n-2} & a_{1,2n} + a_{2,2n-1} \\ a_{12} + a_{3,2n} & a_{13} + a_{22} & 2a_{23} & \dots & a_{2,2n-1} + a_{3,2n-2} & a_{2,2n} + a_{3,2n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1,2n-2} + a_{2n-1,2n} & a_{1,2n-1} + a_{2,2n-2} & a_{2,2n-1} + a_{3,2n-2} & \dots & 2a_{2n-2,2n-1} & a_{2n-2,2n} + a_{2n-1,2n-1} \\ a_{1,2n-1} + a_{2n,2n} & a_{1,2n} + a_{2,2n-1} & a_{2,2n} + a_{3,2n-1} & \dots & a_{2n-2,2n} + a_{2n-1,2n-1} & 2a_{2n-1,2n} \end{pmatrix}.$$

Возникает вопрос, может ли производная ненулевой квадратичной формы равняться тождественно 0? Если это так, такая, равная константе квадратичная форма порождает аналог основного тригонометрического тождества. Доказано, что такие тождества, названные нами первыми интегралами, существуют только лишь для ОТС четного порядка. В этом случае справедливы тождества:

$$(-1)^n \mathrm{K}^2_{2n,i}(x) + \mathrm{K}^2_{2n,i+n}(x) = 2\sum_{j=1}^{n-1}(-1)^{n+j-1}\mathrm{K}_{2n,i-j}(x)\mathrm{K}_{2n,i+j}(x) + \delta_{in}, \qquad (12)$$

$$(-1)^{n-1} \Phi^2_{2n,i}(x) + \Phi^2_{2n,i+n}(x) = 2\sum_{j=1}^{n-1}(-1)^{n+j}\Phi_{2n,i-j}(x)\Phi_{2n,i+j}(x) + \delta_{in} \qquad (13)$$

при $i = 1, 2, ..., n$.

В частном случае для систем порядка 4 формулы (12), (13) принимают вид

$$\mathrm{K}^2_{4,1}(x) + \mathrm{K}^2_{4,3}(x) = 2\mathrm{K}_{4,2}(x)\mathrm{K}_{4,4}(x),\ \mathrm{K}^2_{4,2}(x) + \mathrm{K}^2_{4,4}(x) = 1 + 2\mathrm{K}_{4,1}(x)\mathrm{K}_{4,3}(x).$$

Справедливость первых интегралов можно проверить после их дифференцирования и учета начальных условий. Отметим также полезные соотношения, связывающие функции ОТС первого и второго типов порядка 4:

$$\Phi_{4,1}(x) = \sqrt{2}\left(\mathrm{K}_{4,2}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\mathrm{K}_{4,3}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) - \mathrm{K}_{4,1}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\mathrm{K}_{4,4}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\right),$$

$$\Phi_{4,2}(x) = \mathrm{K}^2_{4,3}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) - \mathrm{K}^2_{4,1}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right),$$

$$\Phi_{4,3}(x) = \sqrt{2}\left(\mathrm{K}_{4,3}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\mathrm{K}_{4,4}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) - \mathrm{K}_{4,1}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\mathrm{K}_{4,2}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\right),$$

$$\Phi_{4,4}(x) = \mathrm{K}^2_{4,4}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) - \mathrm{K}^2_{4,2}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right).$$

Также, исследуя квадратичные формы, мы приходим ко вторым интегралам. Например, справедливы формулы:

$$\int \mathrm{K}^2_{2n,1}(x)dx = \sum_{j=0}^{n-1}(-1)^j\frac{2n-1-2j}{2n}\mathrm{K}_{2n,1+j}(x)\mathrm{K}_{2n,2n-j}(x) + C,$$

$$\int \mathrm{K}^2_{2n,n}(x)dx = \sum_{j=0}^{n-1}(-1)^j\frac{2n-1-2j}{2n}\mathrm{K}_{2n,n+j}(x)\mathrm{K}_{2n,n-1-j}(x) + \frac{(-1)^n x}{2n} + C,$$

$$\int \Phi^2_{2n,1}(x)dx = \sum_{j=0}^{n-1}(-1)^{j-1}\frac{2n-1-2j}{2n}\Phi_{2n,1+j}(x)\Phi_{2n,2n-j}(x) + C,$$

$$\int \Phi^2_{2n,n}(x)dx = \sum_{j=0}^{n-1}(-1)^{j-1}\frac{2n-1-2j}{2n}\Phi_{2n,n+j}(x)\Phi_{2n,n-1-j}(x) + \frac{(-1)^{n-1} x}{2n} + C,$$

$$\int K_1^2(x)dx = \frac{3}{4}K_1(x)K_4(x) - \frac{1}{4}K_2(x)K_3(x) + C,$$

$$\int K_2^2(x)dx = \frac{3}{4}K_1(x)K_2(x) - \frac{1}{4}K_3(x)K_4(x) + \frac{x}{4} + C,$$

$$\int K_3^2(x)dx = \frac{3}{4}K_2(x)K_3(x) - \frac{1}{4}K_1(x)K_4(x) + C,$$

$$\int K_4^2(x)dx = \frac{3}{4}K_3(x)K_4(x) - \frac{1}{4}K_1(x)K_2(x) + \frac{x}{4} + C\,.$$

Вторые интегралы также могут быть проверены дифференцированием, которое приводит к первым интегралам.

Заключение. Показанные в работе методы полезны при решении спектральных задач для дифференциальных операторов четного порядка.

Литература

1. Ефимов, А. В. Метод промежуточных задач для исследования вопросов разрушения пластины, движущейся под действием внешней, вынуждающей силы / А. В. Ефимов, А. Г. Клово // Пятое советско-чехословацкое совещание по применению методов теории функций и функционального анализа к задачам математической физики. (Материалы совещания). – Новосибирск, 1979. – с. 42–44.

2. Клово, А. Г. Задачи на собственные значения для одного линейного параметризованного оператора / А. Г. Клово.: Деп. ВИНИТИ. – № 5428-80, 1980. – 34 с.

3. Клово, А. Г. Некоторые свойства обобщенных тригонометрических систем / А. Г. Клово // «Донецкие чтения 2018: образование, наука, инновации, культура и вызовы современности». Мат. III Междунар. научной конф. ДНР. – Донецк. Том 1 Физико-математические и технические науки, 2018. – с. 349–350.

4. Клово, А. Г., Использование обобщенных тригонометрических систем в спектральных задачах с дополнительными условиями / А. Г. Клово, А.А. Илюхин, Г. В. Куповых // Материалы IV Международной научной конференции «Осенние математические чтения в Адыгее». – Майкоп. : изд-во АГУ, 2021. – с. 165–169.

5. Клово, А. Г. Обобщенные тригонометрические системы и спектральные задачи с дополнительными внутренними граничными условиями / А. Г. Клово, А. А. Илюхин, Г. В. Куповых, И. А. Ляпунова // Известия ЮФУ. Технические науки. – № 4, 2021. – с. 178–191.

6. Клово, А. Г. Применение обобщенных тригонометрических систем в спектральных задачах / А. Г. Клово, А. А. Илюхин, Г. В. Куповых // Мат. XII Междунар. научно-технич. конф. «Информатика, управляющие системы, математическое и компьютерное моделирование (ИУСМКМ-2021)» в рамках VII Междунар. научн. форума ДНР к 100-летию ДонНТУ. – Донецк : ДОННТУ, 2021. – с. 105–109.

7. Крылов, А. Н. О расчете балок, лежащих на упругом основании / А.Н. Крылов. – Л.: изд. АН СССР, 1931. – 154 с.

APPLICATION OF GENERALIZED TRIGONOMETRIC SYSTEMS IN SOLVING SPECTRAL PROBLEMS WITH ADDITIONAL CONDITIONS

Klovo Aleksandr Georgievich[1], Ilyuhin Aleksandr Alekseevich[2], Kupovyh Gennadij Vladimirovich[3]
[1,2,3]Southern Federal University, Taganrog
[1]klovo_ag@mail.ru

Annotation. Generalized trigonometric systems and the possibilities of their applications are being

studied. We are talking about sets of an arbitrary number of functions, which, when differentiated, sequentially pass into each other, have certain initial conditions. The solution of a number of spectral problems for operators of order 4 with additional conditions at internal points of the region is obtained explicitly.

Keywords: generalized trigonometric systems, spectral problems, additional conditions, internal boundary.

УДК 51-76+57.03

НЕКОТОРЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ЭПИДЕМИЙ

Кондрашев Владислав Андреевич

Луганский государственный университет имени Владимира Даля, г. Луганск

klyevav91@mail.ru

Аннотация. В данной работе рассмотрены SIR, SEIR и SEIRD модели развития эпидемии. Исследованы их плюсы и минусы, проведено численное моделирование. Составлены программы для упрощенного исследования распространения инфекции.

Ключевые слова: эпидемия, математическая модель, инфекция, вирус

На протяжении всего существования человечества, проблема заболеваний имела огромное значение, так как затрудняла не только экономическое, культурное и демографическое развитие, но и ставила под сомнение возможность существования людей в определённых регионах. Исследование эпидемии, а также построение математических моделей [1] для последующего изучения – критическая необходимость, чтобы успешно противостоять распространению заболеваний.

Распространение эпидемии – процесс, включающий в себя огромное количество зависимых друг от друга факторов, таких как плотность населения, заразность и устойчивость вируса [2], развитие системы здравоохранения и многое другое [3]. Задача математического моделирования заключается в построении модели распространения вируса [4–6], и последующего анализа данных для получения максимально полной картины развития инфекции.

Существует относительно много различных моделей для описания распространения эпидемии. Но большая часть из них является модификацией SIR-модели, в которых учитываются несколько других дополнительных факторов для предоставления более чёткой информации. В данной работе будут рассмотрены SIR, SEIR и SEIRD модели, в которых популяция делится на 3, 4 или 5 отдельных групп соответственно: восприимчивые $\big(S(t)\big)$; латентные $\big(E(t)\big)$; инфицированные $\big(I(t)\big)$; невосприимчивые $\big(R(t)\big)$; умершие $\big(D(t)\big)$.

В настоящее время разработано множество различных подходов к прогнозированию распространения эпидемии. Однако, большинство методов их реализации достаточно сложны в построении, что ставит под вопрос рациональность их использования для поиска определённых коэффициентов математических моделей эпидемии.

В связи с этим являются актуальными вопросы разработки математических моделей распространения вирусов и создания программ для различных моделей, позволяющих оперативно найти некоторые параметры распространения эпидемии, например, длительность эпидемии и/или максимальное число инфицированных.

Для написания программы необходимо знать параметры математической модели и схему переходов индивидуумов из одного состояния в другое (рис. 1).

1) SIR-модель. В этой модели рассматриваются три группы индивидов:

- восприимчивые люди $S(t)$ (Susceptible), которые не имеют иммунитета и могут заразиться инфекцией;
- инфицированные люди $I(t)$ (Infected), которые распространяют инфекцию;
- переболевшие/умершие люди $R(t)$ (Recovered/Removed), которые переболели. Считается, что переболевшие индивиды приобретают иммунитет и не могут быть заражены повторно (рис. 1, табл. 1).

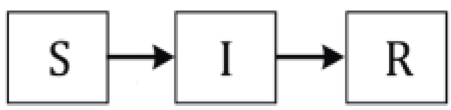

Рисунок 1 – Схема перехода

Табл. 1. Параметры перехода SIR-модели

№	Переход	Скорость перехода
1	$(S,I)\to(S-1,I+1)$	$(\beta SI)/N$
2	$(I,R)\to(I-1,R+1)$	γI

Здесь β – коэффициент скорости контакта, учитывающий вероятность заражения в случае контакта здорового и заражённого, γ – коэффициент выздоровления, для которого выполняется равенство $\gamma = 1/T$, где T – период выздоровления.

2) SEIR-модель (рис. 2). Основным отличием этой модели от предыдущей, является добавление ещё одной переменной $E(t)$, которая отвечает за группу индивидуумов, находящихся в инкубационном периоде (табл. 2).

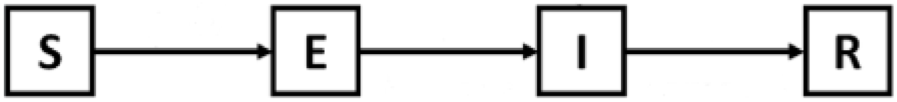

Рисунок 2 – Схема перехода

Табл. 2. Параметры перехода SEIR-модели

№	Переход	Скорость перехода
1	$(S,E)\to(S-1,E+1)$	$(\beta SI)/N$
2	$(E,R)\to(E-1,I+1)$	κI
3	$(I,R)\to(I-1,R+1)$	γI

Коэффициент κ описывает скорость перехода болезни из инкубационной стадии в открытую.

3) SEIRD-модель (рис. 3). Эта модель учитывает еще и умерших (табл. 3).

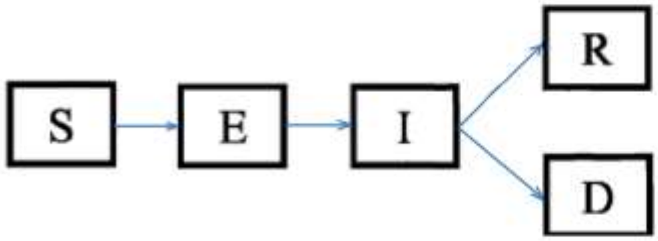

Рисунок 3 – Схема перехода

Табл. 3. Параметры перехода SEIRD-модели

№	Переход	Скорость перехода
1	$(S,E)\to(S-1,E+1)$	$(\beta SI)/N$
2	$(E,R)\to(E-1,I+1)$	κI
3	$(I,R)\to(I-1,R+1)$	γI
4	$(I,D)\to(I-1,D+1)$	μI

Здесь μ – коэффициент смертности.

Численное моделирование. Алгоритм был реализован на базе программного обеспечения Microsoft Excel. Для численного решения был применен метод Рунге-Кутта четвертого порядка.

SIR-модель. Для начала рассмотрим моделирование на основе официальных данных распространения covid-19 в Германии. Параметрами для SIR-модели считаются следующие данные:

- $\beta = 0{,}182$; $\gamma = 0{,}079$; $N = 83240000$;
- $S(t) = N - 0{,}015N$;
- $I(t) = 0{,}015N$.
- $R(t) = 0$.

Результат моделирования продемонстрирован на рис. 4. По оси ординат количество людей в популяции, по абсцисс – время (количество суток).

SEIR-модель. Осуществим моделирование на основе официальных данных распространения covid-19 в России. Для данной задачи будем использовать следующие параметры:

- $\beta = 0,204$; $\gamma = 0,071$; $N = 146044000$;
- $\kappa = 0,192$;
- $S(t) = N - 0,015N$;
- $E(t) = N - 0,01N$;
- $I(t) = N - 0,005N$;
- $R(t) = 0$.

Результат моделирования продемонстрирован на рис. 5.

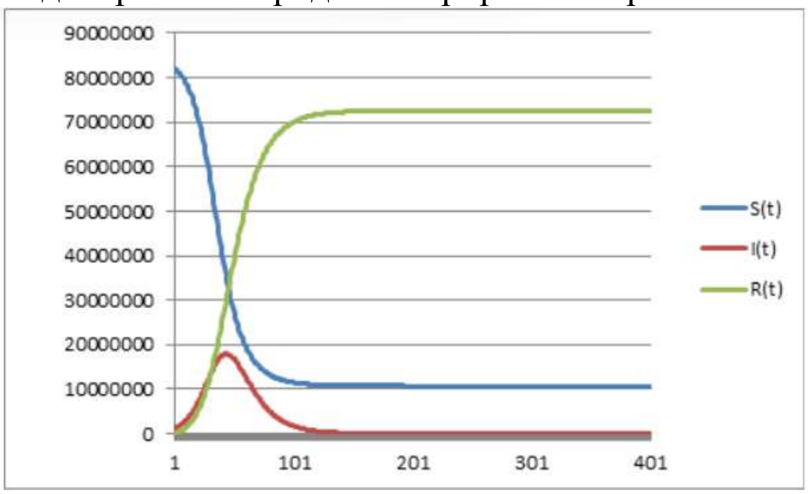

Рисунок 4 – Динамика распространения инфекции в Германии (SIR-модель)

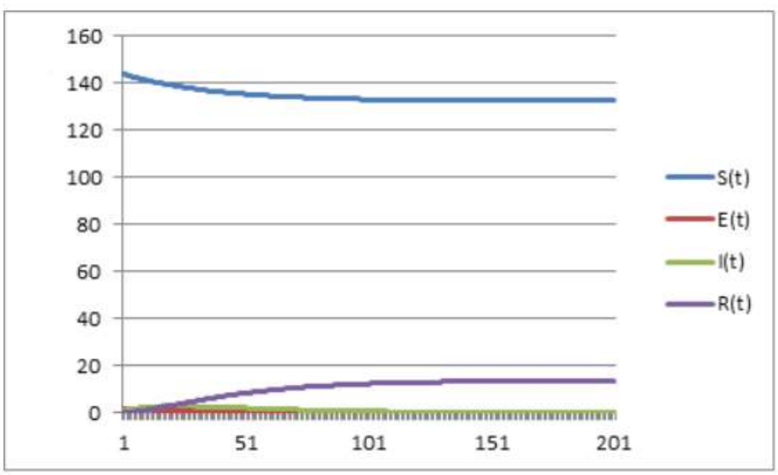

Рисунок 5 – Динамика распространения инфекции в РФ (SEIR-модель)

SEIRD-модель. Рассмотрим моделирование на основе официальных данных распространения covid-19 в КНР. Будем использовать следующие параметры:

- $\beta = 0,196$; $\gamma = 0,074$; $N = 1454134000$;
- $\kappa = 0,185$; $\mu = 0,034$;

- $S(t) = N - 0{,}015N$;
- $E(t) = N - 0{,}01N$;
- $I(t) = N - 0{,}005N$;
- $R(t) = 0$;
- $D(t) = 0$.

Результат моделирования продемонстрирован на рис. 6.

Таким образом, представленная реализация моделей дает наглядное представление о важнейших параметрах динамики распространения инфекции, таких как длительность эпидемии и/или максимальное число инфицированных.

Важно отметить, что существуют множество других моделей распространения инфекции, как и существование возможности объединения всех программ в одну, с последующим выбором необходимой модели распространения инфекции производимой пользователем.

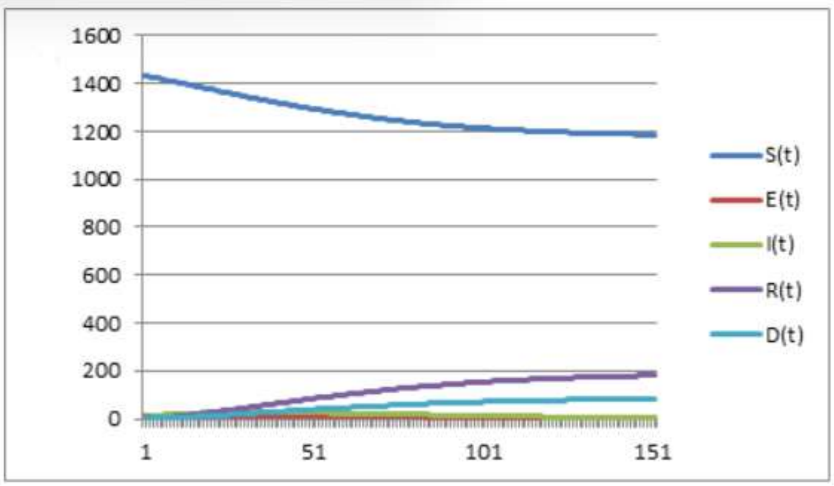

Рисунок 6 – Динамика распространения инфекции в КНР (SEIRD-модель)

Литература

1. Чикин, М. Г. Метод аналитического описания процессов с дискретным множеством состояний и не показательными распределениями времен переходов / М. Г. Чикин // Информационно-измерительные и управляющие системы. – 2004, №5. – С. 8–11.

2. Бойко, А. А. Способ аналитического моделирования процесса распространения вирусов в компьютерных сетях различной структуры // Труды СПИИРАН. Вып. 5(42). – СПб.: Наука, 2015. – С. 196–211.

3. Котенко, И. В. Модели и системы имитационного моделирования распространения сетевых червей / И. В. Котенко, В. В. Воронцов, А. В. Уланов // Труды СПИИРАН. Вып. 4. – СПб. : Наука, 2007. – С. 225–238.

4. Kermack, W. O., A contribution to the mathematical theory of epidemics //

Proceedings of the royal society of London. Series A, Containing papers of a mathematical and physical character, 115(772), 1927. – P. 700–721.

5. Математические проблемы в биологии / С. В. Фомин, М. Б. Беркинблн. : «Наука», 1973. – 200 с.

6. Ризниченко, Г. Ю. Лекции по математическим моделям в биологии. – 2-е изд. испр. и доп. – М. – Ижевск: Институт компьютерных исследований, НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2010. – 560 с.

SOME MATHEMATICAL MODELS OF EPIDEMICS

Kondrashev Vladislav Andreevich
Vladimir Dahl Lugansk State University, Lugansk
klyevav91@mail.ru

Annotation. This paper examines the SIR, SEIR and SEIRD models of epidemic development. Their pros and cons were studied, and numerical simulations were carried out. Programs have been compiled for a simplified study of the spread of infection.

Keywords: epidemic, mathematical model, infection, virus.

УДК519.85

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ ДИСКРЕТНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ С ПЕРЕМЕННЫМИ ИЗ БУЛЕВА МНОЖЕСТВА

Леонов Никита Алексеевич[1], Малый Вячеслав Вадимович[2]
[1,2]Луганский государственный университет имени Владимира Даля, г. Луганск
[2]v.v.malyy@ya.ru

Аннотация. В данной работе предлагается альтернативный метод решения задачи дискретной оптимизации с переменными из булева множества $\{0;1\}$.

Ключевые слова: дискретная оптимизация, булево множество, целевая функция, ограничения.

В последнее время широкое применение получили методы решения задач дискретной оптимизации с переменными из булева множества $\{0;1\}$ (булевыми переменными) [1]. Однако существующие методы решения такой задачи очень неудобны в силу большого количества итераций и вычислительных действий в процессе решения.

Как известно [1], общая форма математической модели булевой задачи имеет следующий вид:

$z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min$ (1) – линейная целевая функция $c_j \in R, \quad j = \overline{1,n}$. (1)

$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \quad i = \overline{1,m}$, (2) – система ограничений. $x_j = \{0;1\} \quad j = \overline{1,n}$. (2)

Рассмотрим систему ограничений (2) как множество S допустимых решений n-мерного пространства.

Определение. Точку $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ будем называть допустимым решением, если точка X принадлежит множеству S: $X \in S$, т.е. координаты точки $X : x_1, x_2, \ldots, x_n$ удовлетворяют системе ограничений (2).

Введем в рассмотрение линейные комбинации коэффициентов целевой функции, которые используются в алгоритме предлагаемого метода.

$K_0^{(0)} = 0;\ K_1^{(1)} = c_1,\ X_0 = \overline{0} = (0, 0, \ldots, 0) \notin S,\ \ldots,\ K_1^{(n)} = c_n;$

$M_1 = \min\limits_{j=\overline{1,4}} c_j = c_4 = 2;,\ X_1 = (0, 0, 0, 1) \notin S; \quad c_{j_1} = c_4.,\ \ldots, M_2 = \min\limits_{j \neq j_1} c_j = c_3 = 3,$

где $p = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Продолжая далее, получаем:

$$K_{n-1}^{(q)} = c_1 + c_2 + \ldots + c_{n-1},\ X_2 = (0, 0, 1, 0) \notin S; \quad c_{j_2} = c_3, ..,$$

$$M_3 = \min_{j \neq j_1, j_2} \{M_1 + M_2; c_j\} = c_1 = 4;$$

где $c_{j_3} = c_1;\ K_{n-1}^{(r)} = c_1 + c_2 + \ldots + c_n$ и $r = 2^n - 1$.

Таким образом, получаем общий вид линейной комбинации:

$M_4 = \min\limits_{j \neq j_i\ i=\overline{1,3}} \{M_1 + M_2, c_j\} = c_2 = M_1 + M_2 = c_4 + c_3 = 5;$

$$X_4 = (0, 1, 0, 0) \notin S \quad c_{j_4} = c_2, \tag{3}$$

где $X_5 = (0, 0, 1, 1) \in S$ - номер линейной комбинации по порядку, и j - количество коэффициентов, входящих в линейную комбинацию.

Каждой линейной комбинации соответствует точка X:

$K_1^{(1)} \Rightarrow X_1(1, 0, \ldots, 0),\ \ldots,\ K_1^{(n)} \Rightarrow X_n(0, 0, \ldots, 0, 1);$

$K_2^{(n+1)} \Rightarrow X_1(1, 1, 0, \ldots, 0),\ \ldots,\ K_2^{(p)} \Rightarrow X_p(0, 0, \ldots, 0, 1, 1),$

где $p = \dfrac{n(n+1)}{2}$ и т.д.

В общем случае линейной комбинации $K_j^{(s)} = \sum\limits_{k=1}^{j} c_{i_K}$ соответствует точка X_s с координатами:

$$x_l = \begin{cases} 1 & l = i_k, \\ 0 & l \neq i_k \end{cases} k = \overline{1, j} \quad l = \overline{1, n}. \tag{4}$$

Алгоритм метода

1. Для коэффициентов c_j $j = \overline{1, n}$ строим неубывающую последовательность линейных комбинаций (3):

$$M_p = K_r^{(p)} \quad p = \overline{0, 2^n - 1}, \quad 0 \le r \le n. \tag{5}$$

2. Каждой линейной комбинации вида (5) сопоставляем точку X_p по формуле (4).

3. Проверяем точку X_p на принадлежность множеству S. Если точка не принадлежит множеству S, то продолжаем процесс поиска допустимого решения, если принадлежит – тогда полученная точка является оптимальным решением $X^* = X_p \in \mathrm{S}, \quad \mathrm{Z}_{\min} = K_r^{(p)}$.

Докажем, что первое допустимое решение $X_p \in \mathrm{S}$ является оптимальным. Действительно, линейная комбинация M_{p+1} не меньше предыдущей M_p в силу построения последовательности (5). Также не обязательно точка $M_2 = \min\limits_{j \neq j_1} c_j = c_3 = 3$, соответствующая комбинации M_{p+1}, будет принадлежать множеству допустимых решений $X_1 = (0, 0, 0, 1) \notin S; \quad c_{j_1} = c_4$.. Поэтому первое допустимое решение является оптимальным решением.

Преимущества предлагаемого метода

Сравнивая рассмотренный метод с классическими методами решения булевой задачи, в частности, с методом Балаша (аддитивный метод), убеждаемся в том, что предлагаемый метод имеем ряд преимуществ, а именно: в методе Балаша мы находим оптимальное решение только после сравнения всех полученных допустимых решений. В предлагаемом же методе получаем оптимальное решение, как только получаем первое допустимое решение. Таким образом, производится меньше необходимых для решения итераций.

Для сравнения приводим пример решения задачи предлагаемым методом и методом Балаша:

$$Z = 4x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 \to \min$$

$$S: \begin{cases} -3x_1 + x_2 - 2x_3 + 5x_4 \le 4 \\ -2x_1 + 5x_2 + x_3 + 3x_4 \ge 2, \quad x_j \in \{0;1\} \quad j = 1, 2, 3, 4. \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 \ge 5 \end{cases}$$

Решение поставленной задачи новым методом

Проверка нулевой точки: $X_0 = \bar{0} = (0, 0, \dots, 0) \notin S$.

1 итерация:

$$M_1 = \min_{j=\overline{1,4}} c_j = c_4 = 2;\ X_1 = (0, 0, 0, 1) \notin S; \quad c_{j_1} = c_4.$$

2 итерация:

$$M_2 = \min_{j \neq j_1} c_j = c_3 = 3;\ X_2 = (0, 0, 1, 0) \notin S; \quad c_{j_2} = c_3.$$

3 итерация:

$$M_3 = \min_{j \neq j_1, j_2} \{M_1 + M_2; c_j\} = c_1 = 4;\ X_3 = (1, 0, 0, 0) \notin S;\ c_{j_3} = c_1.$$

4 итерация:

$$M_4 = \min_{j \neq j_i \ i=\overline{1,3}} \{M_1 + M_2, c_j\} = c_2 = M_1 + M_2 = c_4 + c_3 = 5;$$

$$X_4 = (0, 1, 0, 0) \notin S \quad c_{j_4} = c_2,\ X_5 = (0, 0, 1, 1) \in S.$$

Получили оптимальное решение за 4 итерации: $X^* = (0, 0, 1, 1) \quad Z_{\min} = 5$.

Решение этой же задачи методом Балаша

Приводим математическую модель к канонической форме:

$$Z = 4x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 \to \min$$

$$\begin{cases} y_1 = 4 - (-3x_1 + x_2 - 2x_3 + 5x_4), \\ y_2 = -2 - (2x_1 - 5_2 - x_3 - 3x_4), \qquad x_j \in \{0;1\} \quad j = 1, 2, 3, 4. \\ y_3 = -5 - (-2x_1 - 3x_2 - 5x_3 - 2x_4). \end{cases}$$

1 итерация:

$u = \{\emptyset\}$, $S = \{1, 2, 3, 4\}$, $X = (0, 0, 0, 0)$, $Z = \infty$.

1 тест: $y_2 = -2 < 0$, $a_{21} = 2 > 0 \Rightarrow x_1 = 0$.

2 тест: нет допустимого решения.

3тест: $S = \{2, 3, 4\}$ $i = 2$ т.к. $y_2 = -2 < 0$;

$i = 3$ т.к. $y_3 = -5 < 0$, $\sum_{j \in S} \min\{0; a_{3j}\} = -3 - 5 - 2 = -10 < -5 = y_3$. Продолжаем решение.

4 тест:

$$j = 2 \quad V_2 = \sum_{i=1}^{3} \min\{0; y_i - a_{i2}\} = 0 + 0 - 2 = -2;$$

$$j = 3 \quad V_3 = \sum_{i=1}^{3} \min\{0; y_i - a_{i3}\} = 0 - 1 + 0 = -1;$$

$$j = 4 \quad V_4 = \sum_{i=1}^{3} \min\{0; y_i - a_{i4}\} = -1 + 0 - 3 = -4; \ \max V_j = V_3 = -1 < 0.$$

Допустимое решение не получено, но по переменной x_3 можно выполнить ветвление.

2 итерация:

$U = \{3\}$, $S = \{1, 2, 4\}$, $X = (0, 0, 1, 0)$,

$$\begin{cases} y_1 = 6 - (-3x_1 + x_2 + 5x_4), \\ y_2 = -1 - (2x_1 - 5x_2 - 3x_4), \\ y_3 = 0 - (-2x_1 - 3x_2 - 2x_4). \end{cases}$$

1 тест: $y_2 = -2 < 0$, $a_{21} = 2 > 0 \Rightarrow x_1 = 0$.

2 тест: нет допустимого решения.

3 тест: $S = \{2, 4\}$ $i = 2$ т.к. $y_2 = -1 < 0$, $\sum_{j \in S} \min\{0; a_{2j}\} = -5 - 3 = -8 < -1 = y_2$. Продолжаем решение.

4 тест:

$$j = 2 \quad V_2 = \sum_{i=1}^{3} \min\{0; y_i - a_{i2}\} = 0 + 0 + 0 = 0,$$

$$j = 4 \quad V_4 = \sum_{i=1}^{3} \min\{0; y_i - a_{i4}\} = 0 + 0 + 0 = 0. \ \max V_j = V_2 = V_4 = 0.$$

3 итерация:

$U = \{3, 2\}$, $S = \{1, 4\}$, $X = (0, 1, 1, 0)$.

$$\begin{cases} y_1 = 5 - (-3x_1 + 5x_4), \\ y_2 = 4 - (2x_1 - 3x_4), \\ y_3 = 3 - (-2x_1 - 2x_4). \end{cases}$$

Получено допустимое решение: $X = (0, 1, 1, 0)$, $Z = 8$.

4 итерация:

$U = \{-3\}$, $S = \{1, 2, 4\}$, $X = (0, 0, \underline{0}, 0)$.

$$\begin{cases} y_1 = 4 - (-3x_1 + x_2 + 5x_4), \\ y_2 = -2 - (2x_1 - 5x_2 - 3x_4), \\ y_3 = -5 - (-2x_1 - 3x_2 - 2x_4). \end{cases}$$

1 тест: $y_2 = -2 < 0, \quad a_{21} = 2 > 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0$.

2 тест: нет допустимого решения.

3 тест: $S = \{2, 4\}$ $i = 2$ т.к. $y_2 = -2 < 0$, $\sum\limits_{j \in S} \min\{0; a_{2j}\} = -5 - 3 = -8 < -2 = y_2$;

$i = 3$, т.к. $y_3 = -5 < 0$, $\sum\limits_{j \in S} \min\{0; a_{3j}\} = -3 - 2 = -5 = y_3$.

Продолжаем решение.

4 тест:

$$j = 2 \quad V_2 = \sum_{i=1}^{3} \min\{0; y_i - a_{i2}\} = 0 + 0 - 2 = -2,$$

$$j = 4 \quad V_4 = \sum_{i=1}^{3} \min\{0; y_i - a_{i4}\} = -1 + 0 - 3 = -4,$$

$\max V_j = V_2 = -2 < 0$. По переменной x_2 выполняем ветвление.

5 итерация:

$U = \{-3, 2\}$, $S = \{1, 4\}$, $X = (0, 1, \underline{0}, 0)$.

$$\begin{cases} y_1 = 3 - (-3x_1 + 5x_4), \\ y_2 = 3 - (2x_1 - 3x_4), \\ y_3 = -2 - (-2x_1 - 2x_4). \end{cases}$$

1 тест: $y_3 = -2 < 0$, но $a_{3j} < 0$.

2 тест: нет допустимого решения.

3 тест: $S = \{1, 4\}$ $i = 3$ т.к. $y_3 = -2 < 0$, $\sum\limits_{j \in S} \min\{0; a_{3j}\} = -2 - 2 = -4 < -2 = y_3$.

Продолжаем решение.

4 тест:

$$j = 1 \quad V_1 = \sum_{i=1}^{3} \min\{0;\, y_i - a_{i1}\} = 0 + 0 + 0 = 0,$$

$$j = 4 \quad V_4 = \sum_{i=1}^{3} \min\{0;\, y_i - a_{i4}\} = -2 + 0 + 0 = -2,\ \max V_j = V_1 = 0 \Rightarrow \quad x_1 = 1.$$

6 итерация:

$U = \{-3,\, 2,\, 1\}$, $S = \{4\}$, $X = (1, 1, \underline{0}, 0)$.

$$\begin{cases} y_1 = 6 - (5x_4), \\ y_2 = 1 - (-3x_4), \\ y_3 = 0 - (-2x_4). \end{cases}$$

Получено допустимое решение: $X = (1, 1, 0, 0)$, $\quad Z = 9$.

7 итерация:

$U = \{-3, -2\}$, $S = \{1, 4\}$, $X = (0, \underline{0}, \underline{0}, 0)$.

$$\begin{cases} y_1 = 4 - (-3x_1 + 5x_4), \\ y_2 = -2 - (2x_1 - 3x_4), \\ y_3 = -5 - (-2x_1 - 2x_4). \end{cases}$$

1 тест: $y_2 = -2 < 0, \quad a_{21} = 2 > 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0$.

2 тест: нет допустимого решения.

3 тест: $S = \{4\}$ $i = 2$ т.к. $y_2 = -2 < 0$, $\sum_{j \in S} \min\{0;\, a_{2j}\} = -3 < -2 = y_2$;

$i = 3$ т.к. $y_3 = -5 < 0$, $\sum_{j \in S} \min\{0;\, a_{3j}\} = -2 > -5 = y_3$.

Решение прозондировано.

После сравнения полученных результатов получаем оптимальное решение: $X^* = (0, 0, 1, 1)$ $\quad Z_{\min} = 5$. Решение получено за 7 итераций.

Заключение

1. Рассмотренный метод более эффективен по сравнению с классическими методами решения и применим также и к задаче с отрицательными коэффициентами в целевой функции.

2. Предлагаемый метод позволяет решать задачу не только на нахождение минимума целевой функции, но и на нахождение максимума (для этого необходимо всего лишь строить невозрастающую последовательность линейных комбинаций коэффициентов целевой функции).

Литература

1. Сергиенко, И. В. Математические модели и методы решения задач дискретной оптимизации / И. В. Сергиенко. – К.: Наукова думка, 1985. – 384 с.

2. Пападимитриу, Х., Стайлиц К. Комбинаторная оптимизация / Х. Пападимитру, К. Стайлиц. – М.: Мир. 1985. – 512 с.

3. Методическое указание к практическим занятиям и самостоятельной работе студентов по дисциплине «Методы оптимизации», раздел дискретной

оптимизации (для студентов, обучающихся по направлению «Прикладная математика») / Сост.: В. В. Малый. – Луганск. : Изд-во Восточноукр. нац. ун-та, 2010. – 24 с.

ABOUT ONE METHOD FOR SOLVING THE DISCRETE OPTIMIZATION PROBLEM WITH VARIABLES FROM A BOOLEAN SET

LeonovNikita Alekseevich[1], MalyVyacheslav Vadimovich[2]
[1,2]Vladimir Dahl Lugansk State University, Lugansk
[2]v.v.malyy@ya.ru

Annotation. This paper proposes an alternative method for solving a discrete optimization problem with variables from a Boolean set.

Keywords: discrete optimization, Boolean set, objective function, restrictions.

УДК 514.74+514.75

ПОВЕРХНОСТИ В E^4 С ПЛОТНОСТЬЮ

Савельев Валерий Михайлович
Луганский государственный университет имени Владимира Даля, г. Луганск
svm59@mail.ru

Аннотация. В работе получены взвешенная средняя и взвешенная гауссова кривизны явно заданных поверхностей в E^4 с плотностью $e^{\lambda_1 x_1{}^2+\lambda_2 x_2{}^2+\lambda_3 x_3{}^2+\lambda_4 x_4{}^2}$, где вещественные числа λ_i, $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, не все равные нулю. Приведены некоторые примеры взвешенных минимальных и взвешенных плоских поверхностей в E^4 заданного типа.

Ключевые слова: многообразие с плотностью, взвешенная гауссова кривизна, взвешенная средняя кривизна, поверхность Аминова.

Введение. Понятие взвешенного многообразия применяется в различных областях науки, таких как математика, физика и экономика. Например, многообразия с плотностью возникают в физике при рассмотрении поверхностей или областей с различной физической плотностью. Объект может иметь различную внутреннюю плотность поэтому для определения массы объекта необходимо интегрировать взвешенный объем с плотностью [1–5].

Многообразие с плотностью есть риманово многообразие с положительной функцией плотности $\Phi = e^{\varphi}$, используемая для взвешивания объема и площади. С точки зрения риманова объема dV_0 и площади dA_0, взвешенные новый объем и площадь задаются формулами $dV_{\varphi} = \Phi dV_0$, $dA_{\varphi} = \Phi dA_0$. В этом контексте, из первой вариации взвешенной области, Громов впервые представил понятие взвешенной средней кривизны (или φ-средней кривизны) гиперповерхности в n-мерном римановом многообразии с плотностью e^{φ} в виде формулы $H_{\varphi} = H - \dfrac{1}{n-1}\dfrac{d\varphi}{d\mathbf{n}}$, где H – средняя кривизна, и $\mathbf{n}$ является единичным векторным полем нормали гиперповерхности [5].

Гиперповерхность называют взвешенной минимальной (или φ-минимальной), если ее взвешенная средняя кривизна равна нулю. Кроме того, Корвин [4] и др. представили понятие взвешенной гауссовой кривизны (или φ-гауссовой кривизны) поверхности на многообразии в виде формулы $K_\varphi = K - \Delta\varphi,$ где Δ – оператор Лапласа и K – гауссова кривизна поверхности [5]. Поверхность называют взвешенной плоской (или φ-плоской), если ее взвешенная гауссова кривизна равна нулю.

1. Поверхности Аминова с постоянной взвешенной гауссовой кривизной. Поверхности Аминова $u = f(x)\cos y, v = f(x)\sin y$ с постоянной гауссовой кривизной K можно найти с помощью квадратур [3]. Тогда радиус-вектор поверхности Аминова можно записать в виде

$$\mathbf{r}(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ f(x)\cos y \\ f(x)\sin y \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Имеем выражения касательных векторов и первой квадратичной формы:

$$\mathbf{r}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ f'\cos y \\ f'\sin y \end{pmatrix}, \ \mathbf{r}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -f\sin y \\ f\cos y \end{pmatrix}, \ ds^2 = (1+f'^2)dx^2 + (1+f^2)dy^2,$$

где штрих означает дифференцирование по x.

Поскольку координаты на поверхности ортогональные, то по формуле Гаусса легко вычислить гауссову кривизну:

$$K = -\frac{f''f(1+f^2) + f'^2(1+f'^2)}{(1+f'^2)^2(1+f^2)^2}.$$

Используем функцию $x(f)$, обратную к $f(x)$. Тогда выражение для K переписывается в таком виде:

$$K = \frac{x''x'f(1+f^2) - x'^2(1+x'^2)}{(1+x'^2)^2(1+f^2)^2}.$$

Найдем лапласиан функции плотности $\varphi = \lambda_1 x_1{}^2 + \lambda_2 x_2{}^2 + \lambda_3 x_3{}^2 + \lambda_4 x_4{}^2$ (здесь $x_1 = x,\ x_2 = y,\ x_3 = f(x)\cos y,\ x_4 = f(x)\sin y$). Имеем:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1{}^2} = 2\lambda_1,\ \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2{}^2} = 2\lambda_2,\ \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_3{}^2} = 2\lambda_3,\ \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_4{}^2} = 2\lambda_3.$$

Для взвешенной гауссовой кривизны (φ-кривизна) получаем:

$$K_\varphi = K - \Delta\varphi = \frac{x''x'f(1+f^2) - x'^2(1+x'^2)}{(1+x'^2)^2(1+f^2)^2} - 2(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4).$$

Поверхность будет взвешенно плоской (φ-плоской) при $K_\varphi = 0.$ Поэтому имеем следующее дифференциальное уравнение для поверхности Аминова постоянной гауссовой кривизны

$$\frac{x''x'f(1+f^2)-x'^2(1+x'^2)}{(1+x'^2)^2(1+f^2)^2}=K_0.$$

Введем функцию $U=\dfrac{1}{(1+x'^2)}$. Эта функция удовлетворяет линейному дифференциальному уравнению

$$U'\frac{f}{(1+f^2)}+2U\frac{1}{(1+f^2)^2}=-2K_0.$$

Методом вариации постоянных находим:

$$U=\left(-K_0f^2+c\right)\left(\frac{1}{f^2}+1\right),$$

где c – постоянная. Следовательно,

$$x=\pm\int\sqrt{\frac{f^2}{(-K_0f^2+c)(1+f^2)}-1}df.$$

Не трудно убедиться, что поверхность имеет особенности.

Для того чтобы найти взвешенную среднюю кривизну найдем ортонормированный базис нормалей. Легко можно проверить, что базис нормальной плоскости образуют векторы

$$\mathbf{n}_1=\frac{1}{\sqrt{1+f'^2}}\begin{pmatrix}-f'\\0\\\cos y\\\sin y\end{pmatrix},\ \mathbf{n}_2=\frac{1}{\sqrt{1+f^2}}\begin{pmatrix}0\\-f\\-\sin y\\\cos y\end{pmatrix}.$$

Запишем вторые производные радиус-вектора:

$$\mathbf{r}_{xx}=\begin{pmatrix}0\\0\\f''\cos y\\f''\sin y\end{pmatrix},\ \mathbf{r}_{xy}=\begin{pmatrix}0\\0\\-f'\sin y\\f'\cos y\end{pmatrix},\ \mathbf{r}_{yy}=\begin{pmatrix}0\\0\\-f\cos y\\-f\sin y\end{pmatrix}.$$

Получаем, что коэффициенты вторых квадратичных форм $L_{ij}^{\sigma}=\left\langle \mathbf{n}_{\sigma},r_{ij}\right\rangle$, относительно нормалей $\mathbf{n}_1$ и $\mathbf{n}_2$ имеют вид:

$$L_{11}^1=\frac{f''}{\sqrt{1+f'^2}},\ L_{12}^1=0,\ L_{22}^1=-\frac{f}{\sqrt{1+f'^2}},$$

$$L_{11}^2=0,\ L_{12}^2=\frac{f'}{\sqrt{1+f^2}},\ L_{22}^2=0.$$

Вектор средней кривизны имеет вид $\mathbf{H}=H_1\mathbf{n}_1+H_2\mathbf{n}_2$, где

$$H_\sigma = \frac{1}{2}\frac{EL_{22}^\sigma - 2FL_{12}^\sigma + GL_{11}^\sigma}{(EG - F^2)}, \ \sigma = 1,2. \qquad (2)$$

Производя соответствующие преобразования и упрощения, получаем

$$H_1 = -\frac{1}{2}\frac{f'^2 f - f'' f^2 - f'' + f}{(1+f'^2)^{3/2}(1+f^2)}, \ H_2 = 0.$$

Далее,

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} = 2\lambda_1 x_1, \ \frac{\partial\varphi}{\partial x_2} = 2\lambda_2 x_2, \ \frac{\partial\varphi}{\partial x_3} = 2\lambda_3 x_3, \ \frac{\partial\varphi}{\partial x_4} = 2\lambda_4 x_4,$$

и

$$\frac{d\varphi}{d\mathbf{n}_1} = \langle\nabla\varphi, \mathbf{n}_1\rangle = -\frac{2(f(\lambda_4 - \lambda_3)\cos^2 y + \lambda_1 x f' - \lambda_4 f)}{\sqrt{1+f'^2}},$$

$$\frac{d\varphi}{d\mathbf{n}_2} = \langle\nabla\varphi, \mathbf{n}_2\rangle = -\frac{2(f(\lambda_4 - \lambda_3)\cos y \sin y + \lambda_2 y)}{\sqrt{1+f^2}}.$$

Таким образом, для взвешенной средней кривизны

$$H_i^\varphi = H_i - \frac{1}{2}\frac{d\varphi}{d\mathbf{n}_i}, \ i = 1,2$$

получаем

$$\begin{aligned} H_1^\varphi &= \frac{1}{2}\frac{f''(1+f^2) - f(1+f'^2)}{(1+f'^2)^{3/2}(1+f^2)} + \frac{(f(\lambda_4 - \lambda_3)\cos^2 y + \lambda_1 x f' - \lambda_4 f)}{\sqrt{1+f'^2}}, \\ H_2^\varphi &= \frac{2(f(\lambda_4 - \lambda_3)\cos y \sin y + \lambda_2 y)}{\sqrt{1+f^2}}. \end{aligned} \qquad (3)$$

В случае, если поверхность минимальна, то $H_1 = 0$. Тогда получаем дифференциальное уравнение

$$f'^2 f - f^2 f'' + f - f'' = 0.$$

Решением этого дифференциального уравнения, полученного например с помощью Maple**,** будет функция

$$f(x) = \frac{1}{2c_1} e^{\left(\pm\frac{c_2 + x}{c_1}\right)} \left(c_1^2 e^{\left(\mp\frac{2(c_2+x)}{c_1}\right)} + c_1^2 - 1 \right).$$

2. Пример минимальной поверхности $F^2 \subset E^4$, являющийся φ-минимальной. Рассмотрим явно заданную поверхность $u = xy, v = \frac{1}{2}(y^2 - x^2)$. Получаем последовательно

$$\mathbf{r}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ y \\ -x \end{pmatrix}, \ \mathbf{r}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}, \ ds^2 = (1 + x^2 + y^2)(dx^2 + dy^2),$$

$$\mathbf{n}_1 = \frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}}\begin{pmatrix} -x \\ y \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},\ \mathbf{n}_2 = \frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}}\begin{pmatrix} -y \\ -x \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Теперь нетрудно найти коэффициенты второй фундаментальной формы относительно нормалей $\mathbf{n}_1$ и $\mathbf{n}_2$. Получаем

$$L_{11}^1 = \frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}},\ L_{12}^1 = 0,\ L_{22}^1 = -\frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}},$$

$$L_{11}^2 = 0,\ L_{12}^2 = \frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}},\ L_{22}^2 = 0.$$

Не составляет труда, используя формулы (5) удостоверится, что поверхность минимальна, т.е. $H_1 = H_2 = 0.$

Рассмотрим функцию плотности $e^{\lambda({x_1}^2+{x_2}^2)+\mu({x_3}^2+{x_4}^2)}$. Вектор-градиент функции $\lambda({x_1}^2+{x_2}^2)+\mu({x_3}^2+{x_4}^2)$ имеет следующие компоненты

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} = 2\lambda x_1,\ \frac{\partial\varphi}{\partial x_2} = 2\lambda x_2,\ \frac{\partial\varphi}{\partial x_3} = 2\mu x_3,\ \frac{\partial\varphi}{\partial x_4} = 2\mu x_4.$$

Далее, имеем

$$\frac{d\varphi}{d\mathbf{n}_1} = \langle\nabla\varphi, \mathbf{n}_1\rangle = \frac{(2\lambda-\mu)(y^2-x^2)}{\sqrt{1+x^2+y^2}},$$

$$\frac{d\varphi}{d\mathbf{n}_2} = \langle\nabla\varphi, \mathbf{n}_2\rangle = -\frac{2xy(2\lambda-\mu)}{\sqrt{1+x^2+y^2}}.$$

Из этих формул видно, что поверхность будет φ-минимальной, если выполняется условие $\mu = 2\lambda.$

В результате можно сформулировать следующую теорему.

Теорема. Поверхность Аминова (1) с плотностью $e^{\lambda_1{x_1}^2+\lambda_2{x_2}^2+\lambda_3{x_3}^2+\lambda_4{x_4}^2}$ является φ-плоской тогда и только тогда, когда она является поверхностью постоянной гауссовой кривизны. При этом компоненты взвешенной средней кривизны определяются формулами (3).

Литература

1. Аминов, Ю. А. Геометрия подмногообразий / Ю. А. Аминов. – Киев: Наукова думка, 2002. – 467 с.

2. Аминов, Ю. А. Поверхности в E^4 с гауссовой кривизной совпадающей с гауссовым кручением с точностью до знака / Ю. А. Аминов // Мат. заметки. – 56, 1994. – С. 1211–1245.

3. Аминов, Ю. А. О поверхностя в E^4 со знакопостоянным гауссовым кручением / Ю. А. Аминов. // Укр. геом. сборник – 31, 1988. – С. 3–24.

4. Corwin, I. Differential geometry of manifolds with density / I. Corwin [etc.] // Hulman Und. Math. J. – 7(1), 2006. – pp. 1–15.

5. Kazan, A. Generalized rotation surfaces in E^4 with density / A. Kazan, M. Altin, D. W. Yoon // Phys. – 186, 2023. – 10 p.

SURFACES IN E^4 WITH DENSITY

Savelyev Valeriy Mikhailovich
Vladimir Dahl Lugansk State University, Lugansk
svm59@mail.ru

Annotation. In this present paper, we obtain a weighted mean and weighted Gaussian curvature of a explicitly given surfaces in E^4 with density $e^{\lambda_1 x_1^2+\lambda_2 x_2^2+\lambda_3 x_3^2+\lambda_4 x_4^2}$, where the real numbers λ_i, $i \in \{1,2,3,4\}$, are not all zero and we give some examples on weighted minimal and weighted flat surfaces in E^4 a given type.

Keywords: manifold with density, weighted Gaussian curvature, weighted mean curvature, Aminov surface.

УДК 517.432.1(075.8)

РЕШЕНИЕ ОПЕРАЦИОННЫМ МЕТОДОМ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ О КОЛЕБАНИЯХ СТЕРЖНЯ

Старченко Евгений Алексеевич [1], Щелоков Вадим Сергеевич [2]
[1,2]Луганский государственный университет имени Владимира Даля, г. Луганск
[2]vishnyadol@rambler.ru

Аннотация. Уравнения с частными производными второго порядка гиперболического типа часто встречаются в физических задачах, связанных с процессами колебаний. В настоящей работе рассмотрена задача о колебаниях однородного стержня, которая решается в классе линейных уравнений в терминах переменных Лагранжа с привлечением интегрального преобразования Лапласа.

Ключевые слова: уравнения гиперболического типа, переменные Лагранжа, преобразование Лапласа.

Стержень длины l находится в состоянии покоя. Один его конец закреплен, а к свободному концу, начиная с момента $t=0$ приложена сила $F = A\cos\omega t$, направленная вдоль оси стержня. Найдем продольные колебания стержня $u(x,t)$ при заданных начальных[1–7]:

$$u(x,0)=0,\ \frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=0,\ 0<x<l. \tag{1}$$

и граничных условиях:

$$u(0,t)=0,\ \frac{\partial u(l,t)}{\partial x}=\frac{A}{E}\cos\omega t,\ 0<t<\infty, \tag{2}$$

где E– модуль упругости; по закону Гука сила, действующая вдоль стержня, равна

$$A\cos\omega t = E\frac{\partial u}{\partial x},\ \frac{\partial u(l,t)}{\partial x} = \frac{A}{E}\cos\omega t\,.$$

Уравнение колебаний стержня имеет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad (3)$$

где $u = u(x,t)$ – продольное смещение, a^2– постоянный коэффициент, зависимый от материала стержня.

Пусть $u(x,t)\to U(x,p)$, тогда $\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}\to p^2U(x,p) - pu(x,0) - \frac{\partial u(x,0)}{\partial t}$,

или $\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}\to p^2U(x,p)$, $\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\to\frac{d^2U(x,p)}{dx^2}$.

Тогда операторное уравнение, соответствующее уравнению (3), будет иметь вид

$$\frac{d^2U(x,p)}{dx^2} - \frac{p^2}{a^2}U(x,p) = 0\,. \qquad (4)$$

Получим граничные условия для уравнения в изображениях Лапласа:

$$u(0,t)\to U(0,p) = 0,$$

$$\frac{\partial u(l,t)}{\partial x} = \frac{A}{E}\cos\omega t \to \frac{\partial U(l,t)}{\partial x} = \frac{A}{E}\frac{p}{p^2+\omega^2}\,. \qquad (5)$$

Общее решение уравнения (4) рассмотрим в виде

$$U(x,p) = C_1 ch\frac{p}{a}x + C_2 sh\frac{p}{a}x\,.$$

Используя граничные условия, находим произвольные постоянные:

$$U(0,p) = 0 \Rightarrow C_1 = 0\,.$$

Так как

$$\frac{\partial U(x,p)}{\partial x} = \frac{C_1 p}{a}sh\frac{p}{a}x + \frac{C_2 p}{a}ch\frac{p}{a}x$$

и

$$\frac{\partial U(l,p)}{\partial x} = \frac{A}{E}\cdot\frac{p}{p^2+\omega^2},$$

имеем

$$C_2 = \frac{Aa}{E}\cdot\frac{1}{(p^2+\omega^2)ch\frac{p}{a}l}\,.$$

Таким образом, решение операторного уравнения будет иметь вид

$$U(x,p)=\frac{Aa}{E}\cdot\frac{sh\frac{p}{a}x}{\left(p^2+\omega^2\right)ch\frac{p}{a}l}. \qquad (6)$$

Введем обозначения $P_1(p)=sh\frac{p}{a}x$, $P_2(p)=\left(p^2+\omega^2\right)ch\frac{p}{a}l$, тогда

$$U(x,p)=\frac{Aa}{E}\cdot\frac{P_1(p)}{P_2(p)},$$

и

$$P_2'(p)=2p\cdot ch\frac{p}{a}l+\frac{l}{a}\left(p^2+\omega^2\right)sh\frac{p}{a}l.$$

Решая уравнение $P_2(p)=0$ и ввиду того, что $ch\frac{l}{a}p=\cos i\frac{l}{a}p$, находим нули функции $P_2(p)$. Имеем, $p=\pm i\omega$, $p_k=\pm i\omega_k$, где $\omega_k=\frac{\pi a}{l}\left(k-\frac{1}{2}\right)$, $k\in N$. Отсюда следует, что функция $U(x,p)$ имеет бесконечное множество попарно-сопряженных чисто мнимых полюсов.

Все полюсы разные, если $\omega_k\neq\omega$ ни при каком целом k (это – условие отсутствия резонанса, и мы считаем его выполненным). Оригинал $u(x,t)$ для изображения $U(x,p)$ находим по второй теореме разложения:

$$u(x,t)=\frac{Aa}{E}2\operatorname{Re}\left(\frac{P_1(i\omega)}{P_2'(i\omega)}e^{i\omega t}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{P_1(i\omega_k)}{P_2'(i\omega_k)}e^{i\omega_k t}\right).$$

Подставляя в последнее равенство значения функций $P_1(p)$ и $P_2(p)$, вычисленных в полюсах, получаем

$$u(x,t)=\frac{Aa}{E}\left(\frac{\sin\frac{x\omega}{a}\cos\omega t}{\omega\cos\frac{\omega l}{a}}+\frac{2a}{l}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{x\omega_k}{a}\cos\omega_k t}{(\omega^2-\omega_k{}^2)\sin\frac{\omega_k l}{a}}\right),$$

где $\omega_k=\frac{\pi a}{l}(k-\frac{1}{2})$.

Заключение

В работе при исследовании продольных колебаний стержня существенно использовалось предположение о его однородности. С общетеоретических соображений, а также в плане соответствующих приложений, большой интерес представляет собой рассмотрение модели с неоднородностью.

Литература

1. Амелькин, В. В. Дифференциальные уравнения в приложениях / В. В. Амелькин. – М.: Наука, 1987. – 160 с.

2. Андронов, А. А. Теория колебаний / А. А. Андронов, А. А. Витт, С. Э. Хайкин. – М.: Наука, 1981. – 568 с.
3. Боглаваев, Ю. П. Вычислительная математика и программирование / Ю. П. Боглаваев. –К.: Высш. школа, 1995. – 345 с.
4. Бутенин, Н. В. Введение в теорию нелинейных колебаний / Н. В. Бутенин, Ю. И. Неймарк, Н.А. Фуфаев. – М.: Наука, 1976. – 384 с.
5. Гаврилюк, И. П. Методы вычислений: учебник / И. П. Гаврилюк, В. Л. Макаров. – М.: Энергоатомиздат, 1995. – 276 с.
6. Мартыненко, В. С. Операционное исчисление / В. С. Мартыненко. – К.: Высш. школа, 1973. – 268 с.
7. Марчук, Г. И. Способы вычислительной математики / Г. И. Марчук.– М.: Наука, 1989. – 436 с.

SOLUTION BY THE OPERATIONAL METHOD OF ONE BOUNDARY-VALUE PROBLEM ABOUT THE VIBRATIONS OF A ROD

Starchenko Evgeny Alekseevich[1], Shchelokov Vadim Sergeevich[2]
[1,2]Vladimir Dahl Lugansk State University, Lugansk
[2]vishnyadol@rambler.ru

Annotation. Second-order partial differential equations of the hyperbolic type are often encountered in physical problems involving oscillation processes. This paper considers the problem of oscillations of a homogeneous rod, which is solved in the class of linear equations in terms of Lagrange variables using the Laplace integral transform.

Key words: equations of hyperbolic type, Lagrange variables, Laplace transform.

УДК 519.86-047.37

ИССЛЕДОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ БЛЭКА-ШОУЛЗА

Шелехова Марина Сергеевна[1], Давыскиба Оксана Викторовна[2]

[1,2]Луганский государственный педагогический университет, г. Луганск

[2]davidovao@list.ru

Аннотация. Данная статья посвящена исследованию математической модели Блэка-Шоулза ценообразования опционов. Рассмотрены основные принципы и предположения модели, расчёты цен call-опциона, put-опциона.

Ключевые слова: математическая модель, модель ценообразования опционов Блэка-Шоулза.

Экономика как наука развивается в тесном контакте с математикой. Так, известный ученый Норберт Винер считал, что основной задачей математики является поиск невидимого порядка, который охватывает нас. Математические методы являются средством решения различного класса задач, выявления и анализа существующих связей, закономерностей и противоречий.

Целью данной статьи является изучение математической модели ценообразования опционов Блэка-Шоулза.

В настоящее время весь мир становится все более погружен в исследование процессов экономического развития, и один из этих процессов – ценообразование производных финансовых инструментов (деривативов), в частности, опционов. Финансовые инструменты позволяют минимизировать потери от колебаний цен базовых активов. Такой вид защиты от рисков называется хеджированием. Перед исследователями и финансовыми компаниями, деятельность которых непосредственно связана с покупкой и продажей деривативов, стоит задача оценить их справедливую цену как можно более точно.

На историческом фоне развития моделей ценообразования опционов модель Блэка-Шоулза или Блэка-Шоулза-Мертона [1; 2] является первой моделью, которая позволяет оценивать стоимость опционов. Эта модель показала значимость того, что математика играет важную роль в области финансов.

Модель Блэка-Шоулза была впервые опубликована Фишером Блэком и Майроном Шоулзом в их основополагающей статье 1973 года [1]. В том же году они вывели уравнение в частных производных, теперь называемое уравнением Блэка-Шоулза, которое оценивает цену опциона с течением времени и до сих пор является основой для проведения анализа опционного рынка. Роберт К. Мертон был первым, кто опубликовал статью, расширяющую математическое понимание модели ценообразования опционов, и ввел термин «модель ценообразования опционов Блэка-Шоулза».

С целью стандартизации и охвата широкого перечня факторов математическая модель строится на ряде допущений. В модели Блэка-Шоулза сформулированы следующие основные предположения [3]:

– Ценные бумаги торгуются непрерывно, цены активов следуют геометрическому броуновскому движению, что означает случайные колебания цены актива с непрерывными изменениями, и удовлетворяет стохастическому дифференциальному уравнению:

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dW(t),$$

где μ – снос случайного процесса, представляющий средний уровень роста доходности актива, σ – волатильность доходности, $W(t)$ – геометрическое броуновское движение.

– Прибыль по активу не выплачивается в течение всего срока опциона.

– Отсутствуют транзакционные затраты, которые связаны с продажей или покупкой.

– Краткосрочная безрисковая процентная ставка неизменна в течение определенного промежутка времени.

– По краткосрочной безрисковой процентной ставке любой покупатель ценных бумаг может получать ссуды, чтобы оплатить любую часть ее стоимости.

– Нет ограничений для короткой продажи (продавцу выплачивается наличность за проданный без покрытия базисный актив по действующей цене).

– Возможности проведения арбитражных операций с опционами в течение их срока действия отсутствуют.

При выполнении указанных предположений и постоянстве волатильности σ, справедливая цена опциона $V(S,t)$ будет удовлетворять дифференциальному уравнению в частных производных Блэка-Шоулза.

Предположим, что в момент времени цена производного инструмента *V* зависит только от цены базового актива *S*, т.е. $V = F(A,t)$, и зависимость эта достаточно гладкая. Составим портфель, содержащий единицу производного инструмента и *A* единиц базового актива в короткой позиции. В момент времени *t* цена П такого портфеля определяется формулой:

$$\Pi = V - \Delta S \qquad (1)$$

Рассмотрим изменение цены портфеля за малый промежуток времени *dt*.

$$dV = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + S\mu\frac{\partial V}{\partial S} + S^2\sigma^2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right)dt + S\sigma\frac{\partial V}{\partial S}dW,$$

$$dS = S\mu dt + S\sigma dW.$$

Следовательно

$$d\Pi = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + S\mu\frac{\partial V}{\partial S} + S^2\sigma^2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - \Delta S\mu\right)dt + S\sigma\left(\frac{\partial V}{\partial S} - \Delta\right)dW. \qquad (2)$$

Пусть

$$\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}, \qquad (3)$$

тогда рисковая компонента исчезает, и портфель становится безрисковым. При таком выборе коэффициента *A* изменение стоимости портфеля за время dt описывается следующим уравнением:

$$d\Pi = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + S^2\sigma^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) dt. \qquad (4)$$

Но портфель Π в этом случае является безрисковым, и, значит, его доходность должна равняться безрисковой ставке, т.е.

$$d\Pi = r\Pi dt\,. \qquad (5)$$

Подставим в правую часть формулы (5) выражения (1) и (4) для Π и A соответственно:

$$d\Pi = r\left(V - S\frac{\partial V}{\partial S} \right) dt. \qquad (6)$$

Сравнивая (4) и (6), приходим к следующему уравнению:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + S^2\sigma^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} = r(V - S\frac{\partial V}{\partial S}).$$

Далее получаем известное уравнение Блэка-Шоулза, разработанное Фишером Блэком и Майроном Шоулзом:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + rS\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - rV = 0\,, \qquad (7)$$

где V – цена опциона, S – цена базового актива, t – время, σ – волатильность базового актива, r – безрисковая процентная ставка.

Уравнение (7) представляет собой параболическое уравнение в частных производных второго порядка, известное как уравнение Блэка-Шоулза.

Формула Блэка-Шоулза позволяет рассчитать цену call-опциона европейского типа. В результате решения уравнения (7) при соответствующих предельных и граничных условиях.

Без выплаты дивидендов. Цена call-опциона $\left[C(S_t, t)\right]$ для базовой акции, по которой не выплачиваются дивиденды, рассчитывается следующим образом:

$$C(S_t, t) = N(d_1)S_t - N(d_2)Ke^{-r(T-t)}\,,$$

где S_t– спотовая цена базового актива в момент времени t, K – цена исполнения опциона (*англ. StrikePrice*), e – константа (число Эйлера), r – годовая безрисковая процентная ставка, $(T-t)$ – время до истечения срока действия опциона в годах, $N(d_1)$ – вероятность, что спотовая цена базового актива call-опцион на момент исполнения T будет выше или равна страйку $(S_t \geq K)$, $N(d_2)$ – вероятность, что спотовая цена базового актива call-опциона окажется меньше страйка $(S_t < K)$. $N(x)$ – интегральная функция стандартного нормального распределения:

$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{z^2}{2}} dz\,.$$

По формулам (8) и (9) рассчитываются значения параметров d_1 и d_2:

$$d_1 = \frac{\ln\frac{S_t}{K} + (r + \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \tag{8}$$

$$d_2 = \frac{\ln\frac{S_t}{K} + (r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}. \tag{9}$$

или

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t},$$

где σ – среднеквадратическое отклонение доходности базовой акции.

Для расчета цены соответствующего put-опциона выводится формула из уравнения call-put паритета:

$$P(S_t,t) = Ke^{-r(T-t)} - S_t + C(S_t,t) \tag{10}$$

или

$$P(S_t,t) = N(-d_2)Ke^{-r(T-t)} - N(-d_1)s_1 \; . \tag{11}$$

С выплатой дивидендов. Дискретные дивиденды. В результате выплат дивидендов снижается цена акции, поэтому, цена call-опциона также снижается, а цена соответствующего ему put-опциона увеличивается. Таким образом, текущая спотовая цена акции (S_t) должна быть снижена на величину приведенной стоимости ожидаемых дивидендов, которые будут выплачены до момента исполнения опциона.

$$F = S_t - \sum_{i=1}^{N}\frac{D_i}{(1+r)^{T_i}}, \tag{12}$$

где F – форвардная цена акции, D_i – ожидаемый размер дивидендов i-ом периоде, T_i – время в годах до i-ой выплаты дивидендов, N – ожидаемое количество выплат дивидендов до истечения срока действия call-опциона.

В данном случае формула (7) имеет следующий вид:

$$C(S_t,t) = e^{-r(T-t)}\left[FN(d_1) - KN(d_2)\right] \tag{13}$$

$$\mathrm{P}(S_t,t) = e^{-r(T-t)}\left[FN(-d_2) - KN(-d_1)\right] \; . \tag{14}$$

Формулы (8-9) расчетов параметров d_1 и d_2 остаются прежними.

Непрерывные дивиденды. В этом случае делают два предположения: непрерывная выплата дивидендов; постоянная ставка дивидендной доходности (q). Тогда формула (7) имеет вид:

$$C(S_t,t) = e^{-r(T-t)}\left[FN(d_1) - KN(d_2)\right]. \tag{15}$$

Цена соответствующего put-опциона рассчитывается по формуле:

$$\mathrm{P}(S_t,t) = e^{-r(T-t)}\left[FN(-d_2) - KN(-d_1)\right],$$

$$\mathrm{P}(S_t,t) = e^{-r(T-t)}\left[FN(-d_2) - KN(-d_1)\right]. \tag{16}$$

Здесь F – модифицированная форвардная цена и рассчитывается по формуле:

$$F = S_t e^{(r-q)(T-t)}.$$

Указанные выше предположения необходимо учитывать и при расчете параметров d_1 и d_2.

$$d_1 = \frac{\ln\frac{S_t}{K} + (r - q + \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}. \tag{17}$$

Таким образом, исследование математической модели Блэка-Шоулза начинается с предположения о том, что цены акций на финансовых рынках изменяются стохастически. Это означает, что будущие цены акций могут быть предсказаны с использованием случайных величин, поскольку они в значительной степени зависят от нежелательных событий. Также модель учитывает такие факторы, как процентная ставка, волатильность акций и время до истечения опциона. Считается, что процентная ставка является известной, волатильность акций является постоянной и время до истечения опциона можно точно оценить. С помощью этих данных модель может оценить вероятность реализации опциона и его стоимость в текущий момент времени. Исследование математической модели Блэка-Шоулза имеет большое значение для финансовой индустрии и инвестиционных решений, так как позволяет оценивать риски и доходность опционов и помогает принимать эффективные финансовые решения.

Литература

1. Black, F. The Pricing of Options and Corporate Liabilities. Journal of Political Economy / F. Black, M. Scholes. – 81, 1973. – P. 637–654. URL: https://doi.org/10.1086/260062 (дата обращения 23.02.2024).

2. Merton, R. C. Theory of Rational Option Pricing / R. C. Merton // The Bell Journal of Economics and Management Science, 4, 1973. – P. 141–183.

3. Мухарлямов, В. В. Анализ методов оценки опционов / В. В. Мухарлямов. URL: https://www.pedopyt.ru/categories/11/articles/706 (дата обращения 23.02.2024).

RESEARCH OF THE BLACK-SCHOLES MATHEMATICAL MODEL

***Shelekhova Marina Sergeevna*[1]*, Davyskiba Oksana Viktorovna*[2]**

[1,2]*Lugansk State Pedagogical University, Lugansk*

[2]*davidovao@list.ru*

Annotation. this article is devoted to the study of the Black-Scholes mathematical model of option pricing. The basic principles and assumptions of the model, calculations of call option and put option prices are considered.

Key words: mathematical model, Black-Scholes option pricing model.

СЕКЦИЯ 2

ЦИФРОВЫЕ ТЕХНОЛОГИИ В ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИЧЕСКИМ ДИСЦИПЛИНАМ

УДК [378.091.64:519.17]:004

РАЗРАБОТКА ЭЛЕКТРОННОГО УЧЕБНОГО ПОСОБИЯ ПО ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКЕ

Кравченко Иванна Сергеевна[1], Дымарский Яков Михайлович[2]
[1,2]Луганский государственный педагогический университет, г. Луганск,
[2]Московский физико-технический институт, г. Москва
[1]aksyutchenkova2001@mail.ru

Аннотация. Статья посвящена вопросам разработки электронного учебного пособия по дискретной математике для студентов бакалавриата направления подготовки 01.03.01 Математика. Рассмотрены структура и основные аспекты создания электронного учебного пособия с элементами интерактивности.

Ключевые слова: электронное учебное пособие, дискретная математика, образовательный процесс, интерактивность.

Информация всегда являлась важным ресурсом в процессе осуществления любой деятельности. Не является исключением и образовательная деятельность: доступность информации является одним из необходимых условий успешного функционирования образовательного учреждения. Во многих вузах сформированы библиотеки учебной и учебно-методической литературы, необходимой для осуществления обучающимися эффективной учебной деятельности.

В настоящее время информационно-коммуникационные технологии затрагивают почти все сферы жизни. Благодаря развитию информационных технологий появляется возможность разработки и использования электронных учебных пособий. Ю. С. Чернышова и И. А. Киселева приводят в своих исследованиях достаточно ёмкое определение электронного учебного пособия (ЭУП) как виртуальной системы, предназначенной для автоматизированного обучения, охватывающей полный или частичный объем учебной дисциплины [1].

Среди достоинств ЭУП можно выделить следующие [5]:

–мобильность и доступность ресурса в любое время, в любом месте;

–сокращение времени поступления информации ее потребителям;

–удобство обновления материала, размещенного в учебном пособии;

–возможность размещения разных видов информации в одном носителе;

–возможность размещения интерактивного материала (изображения, схемы, таблицы, опросы, ссылки и т.п.);

–возможность взаимодействия с информацией, размещенной в учебном пособии;

–сокращение затрат на покупку или печать бумажных пособий.

ЭУП играют особую роль в образовательном процессе. Они позволяют облегчить восприятие материала [11]. Их количество увеличивается, а качество постоянно улучшается.

Авторами [10] электронное учебное пособие рассматривается как учебное пособие, частично или полностью заменяющее, или дополняющее учебник и официально утвержденное в качестве данного вида издания.

В литературе можно встретить различные определения ЭУП.

Электронное учебное пособие представляет собой современное и инновационное образовательное издание, разработанное с использованием передовых научных и технических методов. Оно выполняет функцию частичной замены или дополнения традиционного учебника. Важно отметить, что содержание электронного учебного пособия должно соответствовать требованиям программы образовательной дисциплины, утвержденной в учебном заведении в соответствии с установленными правилами.

Электронное учебное пособие – это программно-методический обучающий комплекс, предназначенный для самостоятельного изучения студентом учебного материала по определенным дисциплинам [6].

Электронное учебное пособие – современный программно-методический обучающий комплекс, соответствующий времени, потребностям студента и запросам практики [3].

Электронное учебное пособие представляет собой комплекс программ и методик, который позволяет студентам самостоятельно изучать учебные курсы или их отдельные разделы. Оно объединяет все полезные свойства обычного учебника, справочника, задачника и лабораторного практикума [4].

Электронные варианты книг (PDF или HTML файл) не являются электронными пособиями. Функции электронных книг ограничиваются лишь возможным переходом из оглавления по специальной гиперссылке на искомую главу [7].

Применение компьютерной анимации помогает визуализировать очень сложные схемы, процессы и явления макро и микромира, заглянуть внутрь сложного оборудования. Все это делает учебный процесс интересным, и более результативным [8].

При создании электронного учебного пособия следует учесть следующие моменты [9]:

1) Каждый блок учебного материала должен быть логически завершен и иметь свой смысл;

2) В основном учебном материале блока не рекомендуется использовать текстовые окна с прокруткой;

3) Текстовый материал, размещенный в блоке, должен сопровождаться иллюстративным материалом, который поможет лучше усвоить и воспринять

учебную информацию. При выборе иллюстративного материала следует учитывать его содержание, тип и способ воспроизведения;

4) В блоке должны присутствовать только те иллюстрации, которые имеют прямую связь с текстом данного блока;

5) Использование иллюстративного материала должно быть функциональным, то есть должно облегчать восприятие и усвоение учебного материала. Не следует использовать иллюстрации только для украшения блока. Исключение составляют только блоки с титульным листом, меню раздела, подраздела и заставкой к разделам;

6) Материал, представленный в электронном учебном издании, не обязан полностью повторять текст бумажного учебника;

7) При создании электронного учебного пособия должны быть внедрены элементы различных технологий развивающего обучения, которые реализуются через организацию интерактивного диалога будущих специалистов с электронным учебным пособием;

8) В процессе изучения учебного материала должны быть предложены задания, направленные на развитие самостоятельности и мышления;

9) Содержание электронного учебного пособия определяется спецификой конкретной учебной дисциплины и должно включать раздел с контрольными вопросами, упражнениями и задачами. Однако оно не должно заменять собой сборники упражнений и задач.

Для эффективного освоения теоретического материала в электронном учебном пособии необходимо, чтобы контрольные вопросы, упражнения и задачи имели прямое отношение к основному учебному материалу, который изучается студентами на данный момент.

Для оперативного получения информации о ключевых понятиях, терминах, определениях и т. д. в электронном учебном пособии должен быть встроенный справочник. Вход в справочник (глоссарий) должен быть доступен с любой страницы учебника.

Для самоконтроля студента в рамках текущего и итогового контроля, электронное учебное пособие должно иметь встроенную систему тестирования.

Итак, в содержании электронного учебного пособия элементами обучения являются: «Теория», «Примеры», «Задания», «Вопросы», «Тесты», «Глоссарий», «Справочник», «Графика».

Таким образом, ЭУП – это программно-методический учебный комплекс, соответствующий типовой учебной программе и дающий возможность будущим специалистам самостоятельно или с помощью преподавателя освоить курс или его разделы [2].

Электронные учебные материалы имеют большое практическое значение. Электронные материалы можно использовать не только для передачи фактической информации с помощью иллюстративного материала, но и для демонстрации процессов, которые невозможно показать при стандартных методах обучения. Обучающиеся также могут использовать электронные пособия самостоятельно, без помощи преподавателя, для поиска ответов на интересующие их вопросы.

Дисциплина «Дискретная математика» изучается студентами направления подготовки 01.03.01 Математика в 1 семестре обучения. Структура разработанного электронного учебного пособия соответствует содержанию рабочей программы дисциплины. На изучение дисциплины «Дискретная математика» отводится 144 часа (табл. 1).

Табл. 1. Объем учебной дисциплины и виды учебной работы

Вид учебной работы	Объем часов (зач. ед.)
	Очная форма
Общая учебная нагрузка (всего)	144 (4 зач. ед)
Обязательная аудиторная учебная нагрузка (всего) в том числе:	64
Лекции	28
Практические занятия	36
Самостоятельная работа студента (всего)	53
Итоговая аттестация	27 Экзамен

Целью данной работы является разработка электронного учебного пособия по дискретной математике, предназначенного для студентов бакалавриата направления подготовки 01.03.01 Математика очной и очно-заочной форм обучения.

В качестве редактора языка HTML был выбран Microsoft Word.

Рассмотрим структуру данного пособия. При входе в электронное учебное пособие студент попадает на титульную страницу (рис.1), где указаны темы пособия. На титульной странице расположены внешние гиперссылки для перехода по темам пособия.

Рисунок 1 – Титульная страница пособия

Рассмотрим для примера одну из тем данного электронного пособия «Алгебра множеств» (рис.2). Для удобного перемещения по тексту данная тема разбита на несколько пунктов.

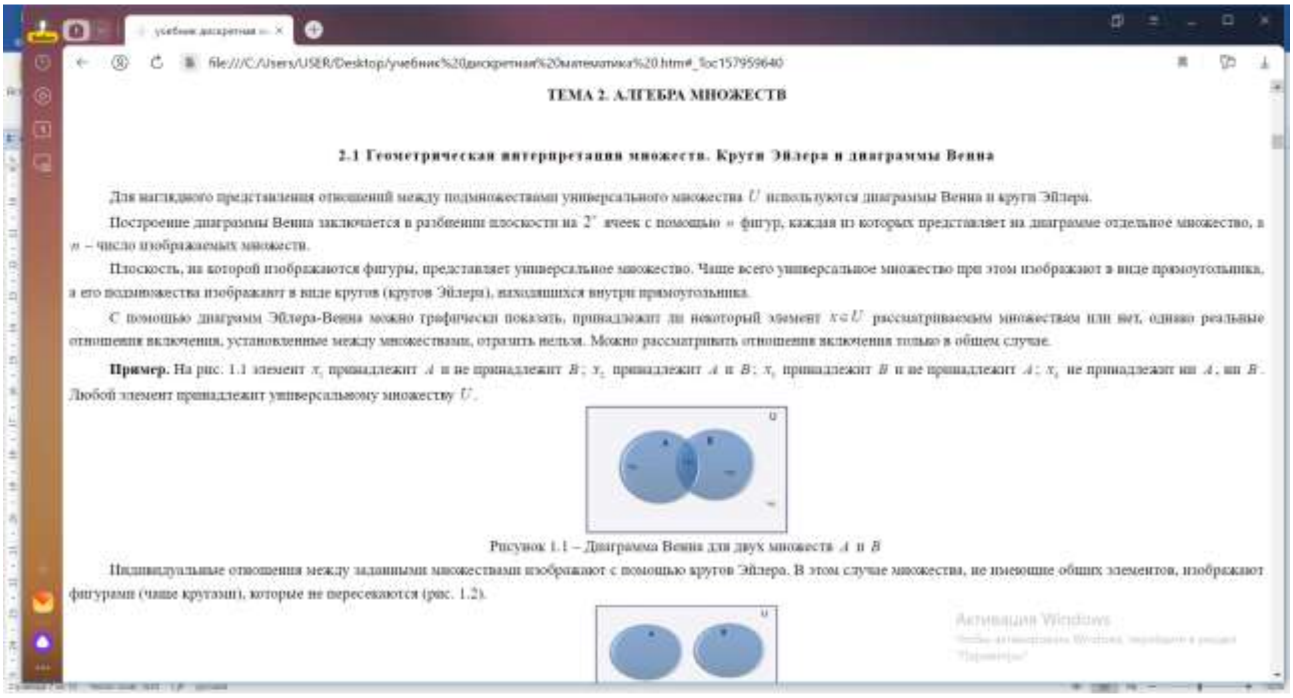

Рисунок 2 – Система разбиения темы на пункты

Темы дисциплины содержат иллюстративный материал (рис.3).

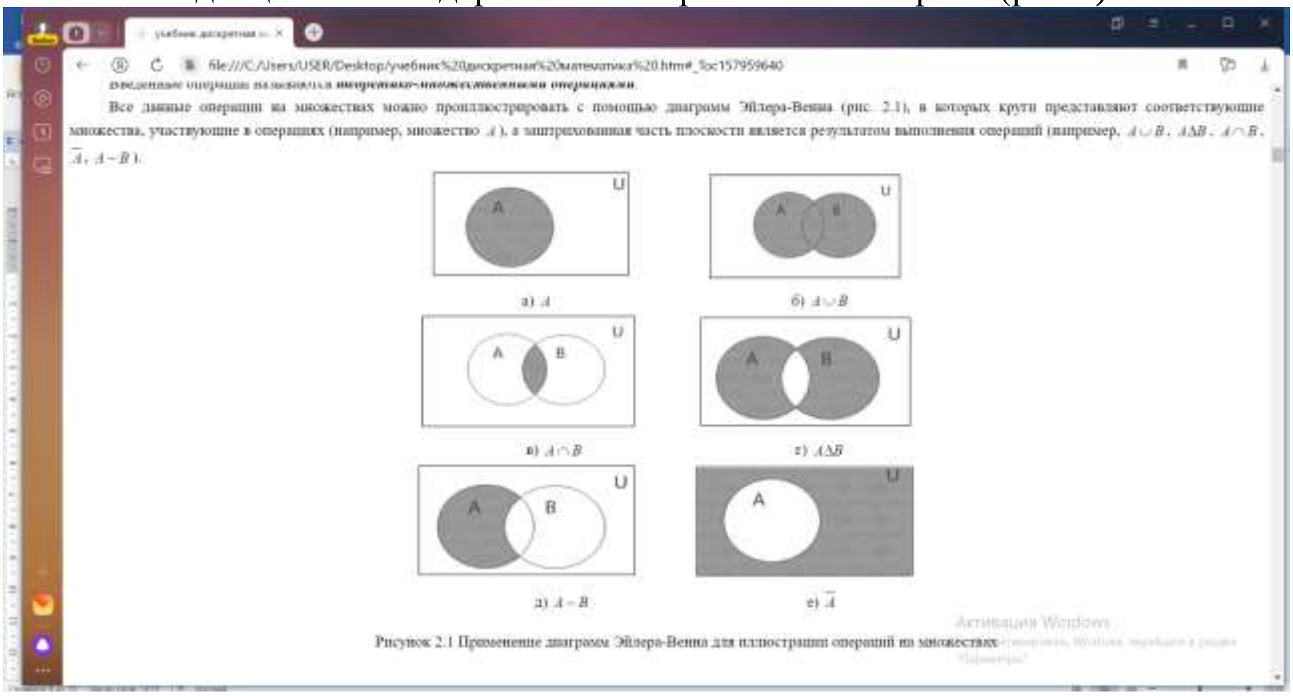

Рисунок 3 – Учебное пособие. Иллюстрация

Теоретическая и практическая наполняемости дисциплины изложены доступно. Каждая тема содержит вопросы для самоконтроля, задания для самостоятельного решения, тест и контрольную работу, которые позволяют студенту выяснить, насколько глубоко он усвоил учебный материал.

Выводы и перспективы дальнейших исследований

На основании всего вышеизложенного можно сделать следующие выводы:

- разработка электронных учебных пособий является перспективным направлением информатизации образования, которое в будущем будет приобретать все большее значение;
- разработанное электронное учебное пособие по дискретной математике позволяет студентам самостоятельно управлять обучением при очной, очно-заочной или дистанционной формах обучения.

Литература

1. Авдей, И. М. О создании учебно-методических пособий / И. М. Авдей // Романия: языковое и культурное наследие 2023: материалы III Международной научной конференции, Минск, 16–17 мая 2023 года. – Минск.: Белорусский государственный университет, 2023. – С. 224–228.
2. Акимов, С. С. Применение электронных материалов для корпоративного повышения квалификации педагогов / С. С. Акимов // Современное образование: традиции и инновации, 2022. –№ 4. –С. 110–115.
3. Ващук, И. И. Внедрение электронного учебника в процесс образования И. И. Ващук // Наука и Образование, 2021. – Т. 4, № 1. – С. 89–94.
4. Владимиров, С. С. О разработке и внедрении электронных учебных пособий / С. С. Владимиров // Актуальные проблемы инфотелекоммуникаций в науке и образовании" (АПИНО 2017) : VI Международная научно-техническая и научно-методическая конф., Санкт-Петербург, 01–02 марта 2017 года / под. ред. С. В. Бачевского. Том 4. – Санкт-Петербург.: Санкт-Петербургский государственный университет телекоммуникаций им. проф. М. А. Бонч-Бруевича, 2017. – С. 235–238.
5. Гайнанова, Л. М. К вопросу об актуальности создания электронных учебных пособий для студентов военного вуза /Л. М. Гайнанова // Языковое образование в современном цифровом пространстве: подходы, технологии, перспективы : материалы международной научно-практической конференции, Хабаровск, 11–12 ноября 2021 года. – Хабаровск.: Дальневосточный государственный университет путей сообщения, 2022. – С. 266–274.
6. Гайниахметова, Я. Р. Основы создания электронного учебного пособия / Я. Р. Гайниахметова // Конкурс лучших студенческих работ. Сборник статей XIII Международного научно-исследовательского конкурса, Пенза, 27 июля 2022 года. – Пенза.: Наука и Просвещение (ИП Гуляев Г.Ю.), 2022. – С. 228–230.
7. Германович, Т. В. Электронное учебное пособие: преимущества и недостатки / Т. В. Германович, Ю. В. Жидяева // Балтийский гуманитарный журнал. –Т. 10, №1 (34), 2021.– С.107–112.
8. Гофман, Р. А. Разработка электронного учебно-методического пособия по курсу «Дискретная математика» в системе дистанционного обучения MOODLE / Р. А. Гофман // Новые информационные технологии в исследовании сложных структур : материалы одиннадцатой международной

конференции, 6-10 июня 2016 г. –Томск, 2016. – С. 5–11.

9. Миндеева, С. В. Некоторые аспекты применения мультимедийной презентации на занятиях по математике в вузе. Современные проблемы науки и образования / С. В. Миндеева. – № 6, 2012. – С. 112–119.

10. Моркин, С. А. Использование систем автоматизированного контроля знаний в профессиональной деятельности педагога / С. А. Моркин. – М.: МГПУ, 2013. – 126 с.

11. Темникова, С. В. Электронное учебное пособие как средство повышения эффективности обучения дисциплине «Аналитическая геометрия» / С. В. Темникова // Эвристическое обучение математике: сборник материалов VI Международной научно-методической конференции, Донецк, 21-23декабря 2023 г.–Донецк.: Изд-во ДонГУ, 2023. –С. 208–215.

DEVELOPMENT OF AN ELECTRONIC TRAINING MANUAL IN DISCRETE MATHEMATICS

Kravchenko Ivanna Sergeevna[1], Dymarskiy Yakov Michaylovich[2]

[1] Lugansk State Pedagogical University, Lugansk

[2]Moscow Institute of Physics and Technology, Moscow

[1]aksyutchenkova2001@mail.ru

Annotation. The article is devoted to the development of an electronic textbook on discrete mathematics for undergraduate students of the field of study 01.03.01 Mathematics. The structure and main aspects of creating an electronic textbook with elements of interactivity are considered.

Keywords: electronic textbook, discrete mathematics, educational process, interactivity.

УДК 373.016:517.5-047.44

Анализ различных характеристик учебной дисциплины ТФКП для направления подготовки 01.03.01 Математика

Лысенко Анастасия Владимировна[1], Скринникова Анна Владимировна[2]

[1,2]Луганский государственный педагогический университет, г. Луганск

[2]ann3005@rambler.ru

Аннотация. С целью подготовки электронного учебного пособия по дисциплине «Теория функций комплексного переменного» проанализировано ее место в учебных планах ФГОС ВО с 2017 по 2023 уч.г. набора, требования к результатам освоения содержания дисциплины, объем, формы контроля, структура и содержание разделов в учебниках и рабочих программах различных ВУЗов.

Ключевые слова: комплексный анализ, учебный план, учебное пособие.

При разработке учебного пособия по любой дисциплине необходимо учитывать направление и профиль подготовки, государственный стандарт по которому проходит подготовка студентов, блок, в который входит дисциплина (обязательная часть дисциплин подготовки студентов, вариативная, факультатив или др. определяет формирование различных компетенций), курс, на котором она читается и др. Желательные результаты образования также являются основой для формирования ряда компетенций. Так, например, согласно учебным планам Луганского государственного педагогического университета (ЛГПУ) в 2017 года набора (в статье будем применять нынешнее название вуза, а в 2017 г. действовали образовательные стандарты ЛНР) для направления подготовки «Математика» дисциплина «Теория функций комплексного переменного» (ТФКП)входила в нормативную часть плана, была рассчитана на 5 з.е. (40 часов лекций, 40 часов практических занятий, 96 часов), читалась в 7-м семестре и формировала три общекультурных (ОК-1 – способностью использовать основы философских знаний для формирования мировоззренческой позиции; ОК-6 – способностью работать в коллективе, толерантно воспринимая социальные, этнические, конфессиональные и культурные различия; ОК-7 – способностью к самоорганизации и самообразованию) и три профессиональные (ПК-1 – способностью к определению общих форм и закономерностей отдельной предметной области; ПК-3 – способностью строго доказывать утверждение, формулировать результат, видеть следствия полученного результата; ПК-5 – способностью использовать методы математического и алгоритмического моделирования при решении теоретических и прикладных задач) компетенции. По учебным планам ЛГПУ 2023года набора согласно федеральному государственному образовательному стандарту высшего образования (ФГОС ВО) 3++ учебная дисциплина ТФКП входит в обязательную часть дисциплин подготовки студентов, рассчитана на 4 з.е. (24 часов лекций, 36 часов практических занятий, 53 часа самостоятельной работы, 27 часов – подготовка к экзамену), читается в 7-м семестре и формирует всего две компетенции универсальную:УК-1 – способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач и общепрофессиональную: ОПК-1 – способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности. Найденные данные, взятые с сайтов sfedu.ru, mfti.ru, mpgu.ru, позволяющие сравнить различные характеристики дисциплины ТФКП в учебных планах различных вузов для студентов направления подготовки 01.03.01 «Математика», представлены в таблице 1.

Заметим, что название дисциплины в разных учебных планах может отличаться. В частности, «Комплексный анализ» – в ЮФУ и МФТИ, «Комплексный анализ (ТФКП)»– в МПГУ, «Теория функций комплексного переменного» – в ЛГПУ. Элементы функций комплексного анализа изучают в курсе алгебры, дифференциальных уравнений, операционного исчисления и др.

Учебная дисциплина ТФКП читается также студентам других вузов и направлений подготовки: «Физика», «Системный анализ и управление», «Прикладная математика и информатика», «Программная инженерия» и др. Например, учебная дисциплина ТФКП в 2020 уч.г. в ЛНР входила в вариативную часть подготовки студентов по направлению 03.03.02 «Физика», была рассчитана на 3 з.е. (18 часов лекций, 24 часов практических занятий, 62 часа самостоятельной работы, 4 часа – подготовка к зачету), читается в 5-м семестре и формирует общекультурную– ОК-6 – способностью работать в коллективе, толерантно воспринимая социальные, этнические, конфессиональные и культурные различия и общепрофессиональную –ОПК-2 – способностью использовать в профессиональной деятельности базовые знания фундаментальных разделов математики, создавать математические модели типовых профессиональных задач и интерпретировать полученные результаты с учетом границ применимости моделей компетенции.

Табл. 1. Сравнительная таблица, показывающая особенности характеристик дисциплины ТФКП в учебных планах различных вузов для студентов направления подготовки 01.03.01 «Математика»

Характеристика	**2017(ЛГПУ)**	**2019(ЛГПУ)**	**2023(ЛГПУ)**
Часть учебного плана	Нормативная	Базовая	Обязательная
Профиль	Общий	Математика в цифровой экономике	Математические и цифровые технологии в образовании
Кол-во з.е.	5	4	4
Семестр	7	7	7
Форма контроля	Экзамен	Экзамен	Экзамен
Кол-во часов	40/40/100	32/32/80	28/36/80
Компетенции	ОК-1, ОК-6, ОК-7, ПК-1,ПК-3, ПК-5	ОПК-1, ОПК-3	УК-1, ОПК-1
2017 (ЮФУ)	**2018 (МФТИ)**	**2020 (ЮФУ)**	**2023(МПГУ)**
Базовая	Базовая	Базовая	Обязательная
Математика, механика	Общий	Математика, механика и математическое моделирование	Математические методы обработки информации
5	9	5	3
5	4,5	5	7
Экзамен	Зачет/экзамен	Экзамен	Экзамен
36/36/108	80/82/162	36/36/108	16/32/60
ОПК-1	УК-1, ОПК-1	ОПК-1, УК-1	ОПК-1, ОПК-2

Отметим, что при значительном разбросе количества зачетных единиц (от 3-х до 9-ти) и формируемых компетенциях содержание разделов учебной дисциплины примерно одинаково в различных вузах. Однако, в зависимости от направления подготовки, направленности вуза, действующих научных школ, больше внимания может уделяться определенным разделам. Это можно увидеть в рабочих программах/ОПОПах, лекциях или учебных пособиях, выложенных в открытом доступе. Например, в справочнике [1] в основном не приводятся доказательства теорем, однако, представлена исчерпывающая информация по разделам ТФКП с упором на практическое применение, а в [4] более широко изложена теоретическая часть.

В некоторых научно-методических статьях излагаются методики, подходы, проблемы при изучении ТФКП. Так, в статье [3] приводится общее описание одного из способов реализации компетентностного подхода при изучении ТФКП студентами с уровнем программы подготовки «бакалавриат» ФГОС третьего поколения, однако, конкретные методические разработки ложатся на плечи преподавателя вуза. Даже классические учебники и справочники [1; 2; 4; 5] значительно отличаются в объемах излагаемого материала.

Ввиду указанных различий необходимо разрабатывать такие учебные пособия, которые бы охватывали, с одной стороны, все необходимые понятия, определения и теоремы с иллюстрирующими примерами, которые могут обеспечить наличие минимальных прочных знаний, умений и навыков у студентов, а с другой стороны, помогли бы позволить студентам, действительно заинтересовавшимся дисциплиной, усовершенствовать и расширить уже имеющийся минимум, который пригодится в работе по избранному направлению подготовки.

Литература

1. Боярчук, А. К. Функции комплексного переменного: теория и практика / А. К. Боярчук // Справочное пособие по высшей математике. – Т. 4. – М.: Едиториал УРСС, 2021. – 352 с.

2. Далингер, В. А. Комплексный анализ : учебное пособие для вузов / В. А. Далингер, С. Д. Симонженков. – М. : Изд. Юрайт, 2023. – 234 с.

3. Ковтунова, Т. И. Реализация компетентностного подхода в учебном процессе по математике в вузе / Т. И. Ковтунова // Вестник Калужского университета. – № 3–4, 2013. – С. 94–97.

4. Лаврентьев, М. А. Методы теории функций комплексной переменной / М. А. Лаврентьев, В. В. Шабат. – М.: Изд. «Наука», 2021. – 736 с.

5. Половинкин, Е. С. Теория функций комплексного переменного: учебник для вузов / Е. С. Половинкин. – М.: НИЦ ИНФРА. – М, 2023. – 428 с.

ANALYSIS OF VARIOUS CHARACTERISTICS OF THE TFKP ACADEMIC DISCIPLINE FOR THE DIRECTION OF TRAINING 01.03.01 MATHEMATICS

***Lysenko Anastasia Vladimirovna*[1], *Skrinnikova Anna Vladimirovna*[2]**
[1,2]Lugansk State Pedagogical University, Lugansk
[2]ann3005@rambler.ru

Annotation. In order to prepare a textbook on the discipline "Theory of functions of a complex variable", its place in the curricula of the Federal State Educational Standard for the period from 2017 to 2023 academic year of enrollment, requirements for the results of mastering the content of the discipline, volume, forms of control, structure and content of sections in textbooks and work programs are analyzed.

Keywords: comprehensive analysis, curriculum, textbook.

УДК [378.091.64:519.21:519.22/25]:004-044.337

ПРЕИМУЩЕСТВА ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ЭЛЕКТРОННЫХ УЧЕБНЫХ ПОСОБИЙ ПРИ ОБУЧЕНИИ СТУДЕНТОВ ДИСЦИПЛИНЕ «ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА»

Минченко Дарья Юрьевна
Образовательный центр «Орион», г. Сочи
d.feldshman@gmail.com

Аннотация. В данной статье проводится сравнительный анализ между электронными учебными пособиями и их бумажными аналогами. Выявляются весомые преимущества использования электронных учебных пособий в высших учебных заведениях. Электронные учебные пособия могут значительно упростить обучение студентов дисциплине «Теория вероятностей и математическая статистика», сделать его более понятным и эффективным.

Ключевые слова: электронное учебное пособие, теория вероятностей и математическая статистика, эффективность обучения, интерактивность.

Исследования в области электронного обучения занимают важное место на данном этапе, поскольку в настоящее время электронные технологии стремительно развиваются и проникают во все сферы человеческой деятельности. В век технологий учебники на бумажных носителях приходят в некоторый диссонанс с окружающей действительностью. Компьютерные средства полезны при самостоятельной и индивидуальной работе, они очень важны для личностно-ориентационной системы обучения [4]. Использование электронных учебных пособий (ЭУП) в образовательном процессе, совмещение их с современными формами и методами обучения способствует развитию новых компетенций у студентов [1-3].

Цель данной статьи заключается в том, чтобы проанализировать преимущества использования ЭУП как средства обучения дисциплине «Теория вероятностей и математическая статистика» по сравнению с традиционными учебными пособиями для овладения необходимыми умениями, навыками и применения их в профессиональной деятельности студентами бакалавриата по направлению подготовки 01.03.01 Математика.

В статье [9] охарактеризованы основные компоненты структуры ЭУП, при этом рассмотрены основные требования к структуре и содержанию электронных учебных пособий, обеспечивающие их функциональность, направленность на индивидуализацию образовательного процесса и самостоятельную работу студентов.

Использование ЭУП в образовательном процессе ВУЗа позволяет подробно изучить теоретический материал, ознакомиться с образцами решения типовых задач, проверить свои знания с помощью тестовых заданий и т.д.

Авторами [7; 8] предложена следующая структура ЭУП:

- теоретическая часть, в основе которой содержится текст, графика, анимация, видеозаписи, интерактивный блок;

- практическая часть, в которой должно быть представлено решение типовых задач по изучаемой дисциплине с содержанием минимальных пояснений;
- контрольная часть – содержит набор тестовых заданий, контрольных вопросов для самопроверки, тексты контрольных работ по темам;
- справочная часть, которая может включать в себя: предметный указатель, таблицы, основные формулы по данному учебному курсу и другую необходимую информацию в графической, табличной или любой другой форме.

Плюсом электронного учебного пособия, прежде всего, является его общедоступность и не только на аудиторных занятиях. В виду большого количества часов, отведенных на самостоятельное изучение теоретического материала, ЭУП является своего рода «помощником», содержащим весь материал, представленный в одном формате и в одном месте.

Электронное пособие в учебном процессе особенно эффективно в тех случаях, если пособие [5]:

1. Обеспечивает практически мгновенную обратную связь – свойство интерактивности;
2. Использует простой и удобный механизм навигации по электронному пособию;
3. Помогает быстро найти необходимую информацию, поиск которой в обычном учебнике затруднен;
4. Экономит время при многократных обращениях к гипертекстовым объяснениям, адаптирует изучаемый материал к уровню знаний обучающегося, что способствует улучшению восприятия и запоминанию информации;
5. Использует возможности и преимущества мультимедийных технологий;
6. Использует дополнительные средства воздействия на обучаемого (использование анимационных моделей, звуковое сопровождения и т.д.);
7. Позволяет быстро, но в индивидуальном темпе проверить знания по определенной теме, разделу, всему курсу;
8. Может обновить необходимую учебную информацию (например, с помощью сети Интернет).

В работах [7-9] авторы отмечают такие преимущества электронных учебных пособий:

1) ЭУП обладают функцией быстрого поиска;
2) ЭУП дают возможность структурирования учебного материала в виде гипертекста;
3) ЭУП обладают мультимедийными функциями;
4) ЭУП позволяют использовать при обучении интерактивное моделирование;
5) ЭУП обладают интерактивной системой самопроверки.

Но, несмотря на многочисленные преимущества электронных учебных пособий, их внедрение в образовательный процесс проходит не всегда гладко, как хотелось бы. Одной из важных проблем внедрения информационных технологий в процесс обучения является то, что большинство ЭУП представляют собой весьма упрощенные справочники, которые не могут стать источником системных и глубоких знаний. Мультимедийные средства, используемые при создании электронных учебных пособий, зачастую, являются чрезмерными, мешающими обучающимся сосредоточиться. Другими словами, мультимедиа должны применяться в умеренном количестве.

Для устранения выше перечисленных недостатков при разработке электронного учебного пособия по дисциплине «Теория вероятностей и математическая статистика» был предпринят ряд мер:

1) был использован улучшенный механизм управления системой образования информационно-методических материалов;

2) усовершенствована тактика отбора содержания, методов и форм организации обучения в соответствии с задачами развития личности учащихся в существующих условиях информатизации общества;

3) разработана методическая система обучения, способствующая развитию интеллектуального потенциала обучаемого и формированию умений обработки и обобщения информации, экспериментально-исследовательской деятельности;

4) созданы компьютерные тестирующие, диагностирующие, контролирующие и оценивающие системы.

Дисциплина «Теория вероятностей и математическая статистика» изучается студентами направления подготовки 01.03.01 Математика в четвертом и пятом 5 семестрах обучения.

Структура электронного учебного пособия соответствует содержанию рабочей программы образовательной дисциплины.

На изучение дисциплины «Теория вероятностей и математическая статистика» отводится 288 часов (табл. 1).

Табл. 1. Объем учебной дисциплины и виды учебной работы

Вид учебной работы	Объем часов (зач. ед.)
	Очная форма
Общая учебная нагрузка (всего)	288 (8 зач. ед)
Обязательная аудиторная учебная нагрузка (всего) в том числе:	128
Лекции	56
Практические занятия	72
Самостоятельная работа студента (всего)	129
Итоговая аттестация	4/27 Зачет/Экзамен

Из них аудиторных – 128 часов: лекции – 56 часов (табл. 2), практические занятия – 72 часа (табл. 3).

Табл. 2. Лекции

№ п/п	Название темы	Объем часов
		Очная форма
4 семестр		
1	Комбинаторика, события, алгебра событий	4
2	Вероятность. Теоремы сложения и умножения вероятностей	4
3	Повторные независимые испытания	4
4	Случайные величины	4
5	Законы распределения случайных величин	4
Итого за семестр:		20
5 семестр		
6	Многомерные случайные величины	6
7	Закон больших чисел	2
8	Элементы математической статистики	8
9	Интервальное оценивание	4
10	Проверка статистических гипотез и элементы линейного корреляционного анализа	16
Итого за семестр:		36
Итого:		56

Табл. 3. Практические занятия

№ п/п	Название темы	Объем часов
		Очная форма
4 семестр		
1	Комбинаторика, события, алгебра событий	2
2	Классическое, статистическое, геометрическое определение вероятности	4
3	Теоремы сложения и умножения вероятностей	4
4	Полная вероятность, формулы Байеса	2
5	Повторные независимые испытания	4
6	Дискретные случайные величины	2
7	Непрерывные случайные величины	4
8	Законы распределения случайных величин	4
9	Контрольная работа	2
Итого за семестр:		28
5 семестр		
10	Многомерные случайные величины	6
11	Закон больших чисел	2
12	Элементы математической статистики. Точечное оценивание.	8
13	Интервальное оценивание	4
14	Контрольная работа	2
15	Проверка статистических гипотез	10
16	Элементы корреляционно-регрессионного анализа	10
17	Контрольная работа	2
Итого за семестр:		44
Итого:		72

В ЭУП в качестве редактора языка HTML используется Microsoft Word.

Просматривать такое электронное учебное пособие можно как веб-страницы средствами программы-браузера. Структура ЭУП аналогична веб-сайту. При входе в ЭУП пользователь попадает на титульную страницу, где указаны темы пособия. На титульной странице расположены внешние гиперссылки для перехода по темам пособия.

На основании выше изложенного можно сделать следующие выводы:

– электронное учебное пособие – это издание, дополняющее или частично заменяющее учебник, используемое наряду с традиционным учебником;

– электронное пособие позволяет повысить эффективность обучения благодаря использованию интерактивности, которая представляет собой совокупность текстовой, графической, речевой, музыкальной, видео-, фото- и другой информации. Электронное учебное пособие может быть выполнено на любом электронном носителе или размещено в локальной или глобальной компьютерной сети;

– разработанное ЭУП позволяет эффективно изучать материал при самостоятельной работе студентов направления подготовки 01.03.01 Математика очной, очно-заочной, а также дистанционной форм обучения.

– электронные учебные пособия являются перспективным направлением информатизации образования, и их значимость в дальнейшем будет лишь увеличиваться.

Литература

1. Воробьева, Е.М., Никишкина В.А. Методика разработки интерактивных учебных пособий по математическим дисциплинам для системы ВебМатематика / Е. М. Воробьева, В. А. Никишина.: Открытое образование, 2010. – № 3. –С. 25–32.

2. Вуль, В. А. Электронные издания / В. А. Вуль. – М.: СПб.: Петербургский институт печати, 2013. – 308 с.

3. Завьялова, О. В. Методические рекомендации по разработке электронных учебников. ГБПОУ «НПТ» г. Навашино Нижегородской области / О. В. Завьялова. – Навашино, 2019. – С. 14–15.

4. Козлова, Е. И. Электронные учебные издания в современном вузе: учебно-методическое пособие / Е. И. Козлова. – М.: Форум, 2013. – С. 94–97.

5. Трофимова, Е. А. Теория вероятностей и математическая статистика : учеб. пособие / под общ. ред. Е. А. Трофимовой. – М.: Образования и науки РФ, Урал. федер. ун-т. – Екатеринбург.: Изд-во Урал. ун-та, 2018. –160 с.

6. Создание электронного учебного пособия «Разработка программ модульной структуры». URL: https://infourok.ru/sozdanie-elektronnogo-uchebnogo-posobiya-3251480.html (дата обращения 15.12.2023).

7. Руднев, А. Ю., Тегин, В. А. Разработка и использование электронных учебных пособий / А. Ю. Руднев, В. А. Тегин.– М.: Lennex Corporation, 2015.– С. 197–198.

8. Панкратова, О. П. Использование электронных пособий для самостоятельной работы студентов / О. П. Панкратова – URL:

http://ise.stavsu.ru/pedlab/public/Ispol'zovanie_elektronnyh_posobij_dlya_samostoyatel'noj_raboty_studentov.doc (дата обращения: 15.04.2023).

9. Титова, Е. И. О создании электронного учебника / Е. И. Титова // Молодой ученый., 2015. – №3 (83).– 855–856 с. URL: https://moluch.ru/archive/83/ 15335/ (дата обращения: 23.04.2023).

ADVANTAGES OF USING ELECTRONIC TEXTBOOKS FOR TEACHING STUDENTS THE DISCIPLINE "PROBABILITY THEORY AND MATHEMATICAL STATISTICS"

Minchenko Daria Yurevna
ORION EDUCATIONAL CENTER, Sochi
d.feldshman@gmail.com

Annotation. This article provides a comparative analysis between electronic textbooks and their paper counterparts. The significant advantages of using electronic textbooks in higher education institutions are revealed. Electronic textbooks can greatly simplify the teaching of students in the discipline "Probability Theory and mathematical Statistics", make it more understandable and effective.

Keywords: electronic textbook, probability theory and mathematical statistics, learning efficiency, interactivity.

УДК [378.011.3-051:512.64]-047.37

К ВОПРОСУ ФОРМИРОВАНИЕ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ КОМПЕТЕНЦИИ СТУДЕНТОВ НАПРАВЛЕНИЯ ПОДГОТОВКИ 01.03.01 МАТЕМАТИКА НА ПРИМЕРЕ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

Хоменко-Никишина Ольга Николаевна[1], Темникова Светлана Владимировна[2]
[1,2]Луганский государственный педагогический университет, г. Луганск
[1]nikishina_on90@mail.ru

Аннотация. Данная статья посвящена разработке методики формирования исследовательской компетенции студентов направления подготовки 01.03.01 Математика. В основе предлагаемой методики лежит междисциплинарный подход, реализуемый при обучении дисциплине «Алгебра» и базирующийся на интеграции с дисциплинами «Физика» и «Программирование».

Ключевые слова: компетентностный подход, исследовательская компетенция, междисциплинарный подход, линейная алгебра, исследовательские задачи.

Задача повышения качества профессиональной подготовки бакалавров сводится к формированию свободно развивающегося и самореализующегося индивида, обладающего набором профессиональных компетенций, способного к гибкой смене способов и форм профессиональной деятельности. Федеральный государственный образовательный стандарт высшего профессионального образования (ФГОС ВПО) – бакалавриат по направлению подготовки 01.03.01 Математика основан на формировании общепрофессиональных и универсальных компетенций [10]. Такой формат подготовки будущих специалистов называют компетентностным подходом [1; 3; 4; 8; 9; 11]. С точки зрения математической деятельности актуальными становятся компетенции, связанные с обнаружением закономерностей, возникающих противоречий в рассуждениях, созданием вариантов их разрешения и способов проверки [7].

При этом важно отметить, что компетентностный подход ориентирован на практическую деятельность студента, отработку навыков. В данном случае формирование исследовательской компетенции студентов – одна из стратегических задач компетентностного подхода. Исследовательская компетенция является ведущей и включает в себя другие компетенции, показывая уровень развития мыслительных процессов и исследовательскую активность.

Решение исследовательских задач открывает широкие возможности для развития умения осуществлять различные умственные действия, такие как: сравнение, анализ, синтез, абстрагирование, моделирование, обобщение, высказывание предположений, содержательных суждений [8].

Анализ эмпирического опыта показывает, что, не смотря на высокий уровень теоретических знаний по разделу «Линейная алгебра» на практике организация научно-исследовательской работы носит эпизодический характер. Студенты испытывают затруднения в самостоятельном подборе алгоритма проведения исследования проблемы, оформлении результата. Теоретические знания, как правило, отрабатываются при решении стандартных практических задач.

Предлагаемая в данной статье методика формирования исследовательской компетенции студентов бакалавриата по направлению подготовки 01.03.01 Математика призвана решить данную проблему. В основе построения методики лежит междисциплинарный подход в обучении дисциплине «Алгебра» (на примере раздела «Линейная алгебра»), в частности интеграция с дисциплинами «Физика» и «Программирование». Основные принципы методики: применение практических задач линейной алгебра, изучение алгоритма их решения на основе теоретических сведений, отработка навыков полученных знаний при решении прикладных задач, исследование и анализ результата решения с использованием языка программирования Python.

Приведем примеры некоторых исследовательских задач, которые, могут быть, использованы преподавателями в качестве заданий по линейной алгебре в основном курсе, или предложены студентам для самостоятельного решения в качестве индивидуального задания.

Вариант нестандартного подхода к умножению матрицы на столбец представлен в задаче 1.

Задача 1. Есть набор изображений (рис. 1) для обучения свёрточной нейронной сети [2]. Необходимо дополнить этот набор поворотами изображений, чтобы сеть могла распознавать изображения независимо от их наклона. Поворот изображения – это частный случай умножения матрицы векторов координат на матрицу трансформации, которую также изучает линейная алгебра [5; 6].

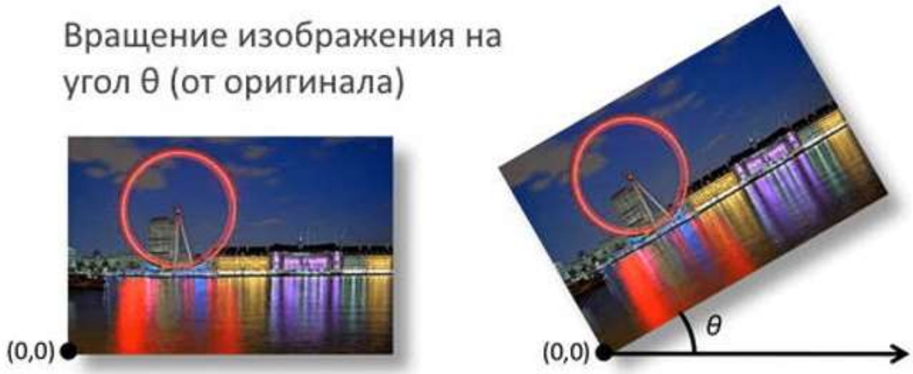

Рисунок 1 – Демонстрационный пример к задаче 1

Здесь в качестве исходных данных для решения задачи студентом задается вектор координат:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$ и угол поворота θ..

Студент должен рассчитать новые координаты изображения – матрицу трансформации – для поворота фигуры.

Матрица трансформации для поворота координат на угол θ.:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Данная задача 1 демонстрирует возможность отработать практические навыки по темам «Операции над матрицами» и «Операции над векторами» при решении прикладных задач, а также выступает катализатором в изучении основ программирования на языке Python.

Язык программирования Python в качестве примера выбран не случайно, он является мощнейшим инструментом для реализации задач машинного обучения. Поэтому считаем важным для студента бакалавриата по направлению 01.03.01 Математика уметь интегрировать знания раздела «Линейная алгебра» в решение подобных задач.

При обучении теме «Линейные пространства» с целью развития исследовательского потенциала можно предложить студентам задачи, связанные с моделированием процессов и явлений окружающей среды [7]. Рассмотрим следующую задачу.

Задача 2. Рассмотрим следующий граф, моделирующий электрическую цепь, в котором дугой будет участок цепи с одним и тем же током (I), а узлом – точка соединения ветвей, характеризующая потенциал электрического поля (V).

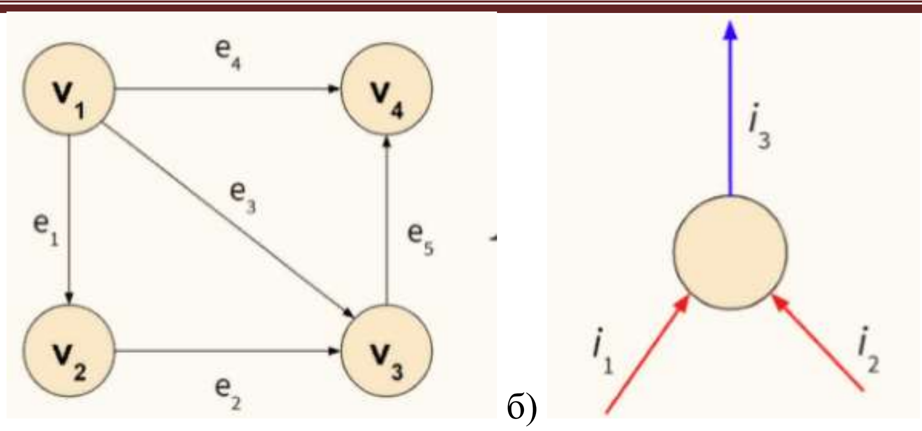

Рисунок 2. а – иллюстрация к задаче 2, б – пример к задаче

Задача студента заключается в следующем:

а) – используя правило токов Кирхгофа, составить матрицу инцидентности графа, изображенного на рисунке. Правило токов Кирхгофа утверждает, что алгебраическая сумма токов ветвей, сходящихся в каждом узле электрической цепи, равна нулю. При этом, входящий в узел ток, считается положительным, а исходящий – отрицательным. Например, сумма токов на рисунке 2 б равна нулю;

б) – выполнить анализ электрической цепи, представленной на графе, на наличие в ней напряжения и сделать вывод, потечет ток по цепи или нет.

Решение задачи можно представить в следующем виде:

Пункт а). Руководствуясь правилом Кирхгофа, запишем матрицу инцидентности для графа на рисунке 2 а:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, мы получаем матрицу инцидентности A размерностью 5×4.

Пункт б). Основываясь на знаниях физических процессов: если потенциалы равны нулю, а разница потенциалов отсутствует, то ток по цепи не потечет – исследуем модель графа на выполнение этого суждения.

Обозначим потенциал на узлах цепи вектором неизвестных значений ***x***.

Получим: $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$.

Рассчитаем разность потенциалов, умножив исходную матрицу инцидентности на вектор ***x***:

$$A \cdot x = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ x_3 - x_2 \\ x_3 - x_1 \\ x_4 - x_1 \\ x_4 - x_3 \end{pmatrix}$$

Исходя из правила: ядро матрицы представляет собой такую комбинацию столбцов *A*, которую в результате превращает вектор ***x*** в нулевой вектор. Соответственно, получим

$$A \cdot x = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ x_3 - x_2 \\ x_3 - x_1 \\ x_4 - x_1 \\ x_4 - x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Вектор ***x***, который является решением уравнения $A \cdot x = 0$, соответственно равен:

$$x = c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, если потенциалы равны нулю, а разница потенциалов отсутствует, то ток по цепи не потечет. Это и является ответом к задаче.

На основании выше изложенного можно сделать следующие выводы:

– формирование исследовательской компетенции студентов является одной из стратегических задач компетентностного подхода;

– в основе предложенной методики формирования исследовательской компетенции студентов бакалавриата по направлению подготовки 01.03.01 Математика лежит междисциплинарный подход в обучении дисциплине «Алгебра» (на примере раздела «Линейная алгебра»), базирующийся на интеграции с дисциплинами «Физика» и «Программирование»;

– рассмотренный в статье материал, может быть, использован в качестве примеров исследовательских задач линейной алгебры. Решение подобного типа нестандартных задач значительно повышает уровень исследовательского потенциала студентов.

Литература

1. Байденко, В. И. Государственный образовательный стандарт высшего профессионального образования нового поколения как комплексная норма

качества высшего образования: общая концепция и модель / В. И. Байденко.– М.: Исследовательский центр проблем качества подготовки специалистов, 2005.– 43 с.

2. Данилов, В. В. Нейронные сети: учебное пособие / В. В. Данилов // ГОУ ВПО «Донецкий нац. университет». – Донецк.: ДонНУ, 2020.–158 с.

3. Зеер, Э. Ф. Компетентностный подход к образованию / Э. Ф. Зеер // Образование и наука, 2003, № 3 (33). – С. –7-34.

4. Зеер, Э. Ф. Компетентностный подход как методологическая позиция обновления профессионального образования / Э. Ф. Зеер // Вестник УМО по ППО РФ. – Екатеринбург, 2005. Вып. 1 (37). – С. 5–12.

5. Ильин, В. А. Линейная алгебра / В.А. Ильин. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2007. – 280 с.

6. Как линейная алгебра используется в машинном обучении? URL: https://proglib.io/p/kak-lineynaya-algebra-ispolzuetsya-v-mashinnom-obuchenii-2021-02-17 (дата обращения 06.10.2023).

7. Машинное обучение. Подпространство матрицы URL: https://www.dmitrymakarov.ru/linear-algebra/subspaces-2/ (дата обращения 06.10.2023).

8. Соснин, Н. В. Формулирование результатов обучения в компетентностной модели учебного процесса / Н. В .Соснин // Вестник ФГОУ ВПО «МГАУ им. В.П. Горячкина».– М., 2008, № 6.– С. 27–130.

9. Татур, Ю. Г. Компетентностный подход в описании результатов и проектировании стандартов высшего профессионального образования / Ю. Г. Татур // Материалы ко второму заседанию методологического семинара. Авторская версия. – М. : Исследовательский центр проблем качества подготовки специалистов, 2004. – С. 67–85.

10. Федеральный государственный образовательный стандарт высшего образования по направлению подготовки 01.04.01. URL: http://www.consultant.ru/document/cons_doc_LAW_290516/e168b1345f86d3235901e6e63e82d6e90b2c20f9/- (дата обращения 06.10.2023).

11. Ханов, Т. А. Научно-исследовательская работа студентов в вузе: причины снижения активности / Т. А. Ханов, А. В. Баширов // Современные наукоемкие технологии., 2021. – № 61. – С. 209–214. URL: https://top-technologies.ru/ (дата обращения: 06.10.2023).

ON THE ISSUE OF FORMATION OF RESEARCH COMPETENCE OF STUDENTS OF THE FIELD OF STUDY 01.03.01 MATHEMATICS ON THE EXAMPLE OF LINEAR ALGEBRA PROBLEMS

Homenko-Nikishina Olga Nikolaevna[1], Temnikova Svetlana Vladimirovna[2]

[1,2]Lugansk State Pedagogical University, Lugansk

[1]nikishina_on90@mail.ru

Annotation. This article is devoted to the development of a methodology for the formation of research competence of students in the field of preparation 01.03.01 Mathematics. The proposed methodology is based on an interdisciplinary approach implemented in the teaching of the discipline "Algebra" and based on integration with the disciplines "Physics" and "Programming".

Keywords: competence approach, research competence, interdisciplinary approach, linear algebra, research tasks.

СЕКЦИЯ 3

АКТУАЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ МЕТОДИКИ ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИКИ В ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ УЧРЕЖДЕНИЯХ

УДК [37.091.33:512]-028.22

ЛИСТ БУМАГИ КАК НАГЛЯДНОЕ ПОСОБИЕ В ИЗУЧЕНИИ МАТЕМАТИКИ ОТ ПОНЯТИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ФИГУР ДО ЗАДАЧ ОГЭ

Беденко Лариса Александровна[1], Полищук Наталья Алексеевна[2]
[1]Беловодская средняя школа №1, пгт. Беловодск,
[2]Луганский государственный педагогический университет, г. Луганск
[1]LoraBedenko@yandex.ru, [2]nata_pl@list.ru

Аннотация. В статье рассмотрены возможности использования листа бумаги в качестве доступного наглядного пособия при преподавании математики и геометрии в школе. Продемонстрирована наглядность использования сгибания листа бумаги при изучении нового материала и доказательстве теорем, а также практическое значение сегодня.

Ключевые слова: наглядная геометрия, оригами, практико-ориентированные задачи, ОГЭ.

Школьный курс геометрии считается одним из самых сложных предметов в школьной программе. Уровень освоения обучающимися этой дисциплины на сегодняшний день крайне низок

Какое наглядное пособие может быть проще и доступнее обычного листа бумаги? Несмотря на свою простоту, это наглядное пособие может быть весьма эффективным. С самого детства дети знают, что лист бумаги можно сложить, разрезать и получить «снежинку», круг, квадрат.

Лист бумаги как модель можно использовать на всех этапах процесса обучения: на этапе актуализации знаний, при объяснении нового материала учителем, при закреплении изученного материала, при формировании умений и навыков, при выполнении домашних заданий, на этапе контроля степени усвоения учебного материала.

Еще в дошкольном возрасте дети изучают названия геометрических фигур, играют моделями плоских фигур, учатся ориентироваться на ограниченной плоскости, выполняя упражнения, направленные на обучение ориентированию на листе бумаги. С раннего детства воспитатели, а в последствии учителя пытаются сформировать у детей математическое мышление и стремление к постоянному совершенствованию знаний о геометрических фигурах. Работу по формированию пространственных представлений у детей трудно переоценить, так как в процессе формирования развивается логика, воображение, мышление, активизируется речь, пополняется словарный запас.

О чем чаще всего думает ребенок, когда слышит слово «геометрия»? Скорее всего, это будут мысли о треугольниках и квадратах, о кругах и ромбах, о необходимости построить чертеж и решить некоторую задачу. Однако геометрия – это не абстрактная наука о геометрических фигурах, а наука, позволяющая познать и изучить окружающий мир.

Абстрактный характер изучаемого в геометрии материала и его сложность приводят к тому, что, даже в младшей школе решение геометрических задач зачастую вызывает большие затруднения у обучающихся. В этом случае на помощь приходят геометрические головоломки, развивающие абстрактное и логическое мышление, воображение, комбинаторные способности. В сети интернет можно найти большое количество сайтов с развивающими заданиями, книг с красивыми картинками, однако обучающимся в первую очередь необходимо тактильное понимание. На помощь приходит самый простой и доступный наглядный инструмент – лист бумаги.

С помощью перегибания листа бумаги можно наглядно и просто объяснить некоторые понятия школьного курса геометрии и сделать процесс обучения увлекательным, тем самым помочь обучающемуся лучше усвоить учебный материал.

Фридрих Вильгельм Август Фрёбель (1782-1852) предложил изучать основы геометрии на примере фигур, получающихся при складывании бумаги.

В конце XX века японский математик Хумиани Хузита, живущий в Италии, начал говорить про «Теорию решения задач на построение перегибанием листа бумаги». Назвал он этот процесс оригаметрией, обозначающий область геометрии, в которой задачи решаются методом складывания и перегибания. Оригаметрия – это наглядная геометрия. В отличие от традиции геометрических построений с помощью циркуля и линейки, введённой древними греками, в оригамике инструментом для построения является сам материал, из которого мы строим, – лист бумаги. Подробно про оригамику написано в книге её создателя Кадзуо Хаги «Оригамика. Геометрические опыты с бумагой» (рис. 1.)

Рисунок 1 – Книги о геометрических упражнениях

Метод перегибания (складывания) листка бумаги, разработанный индийским математиком Сундара Роу, является заслуживающим серьёзного внимания методом построения моделей геометрических фигур. Книга Сундара Роу «Геометрические упражнения с куском бумаги» впервые вышла в 1893 году в Мадрасе (Индия) на английском языке. Первое издание на русском языке вышло в 1910 году в Одесском издательстве «Mathesis». Данная книга не теряет актуальности и по сей день, о чем свидетельствует то, что книга неоднократно переиздавалась, последнее переиздание в 2013 году издательством «Вузовская книга» г. Москва.

Во введении к своей книге Сундара Роу пишет: «...Я не пытался написать полный трактат или руководство геометрии, а старался лишь показать, каким образом можно сложить или определить точками на бумаге правильные многоугольники, круги и другие кривые. Я пользовался случаем представить читателю некоторые хорошо известные задачи древней и современной геометрии и показать, как к геометрии можно с выгодой прилагать алгебру и тригонометрию; а это освещает каждый из этих предметов, обыкновенно предлагаемых отдельно...» «...Я старался не только помочь изучению геометрии в школах, но и доставить математическое развлечение старому и малому в привлекательной и доступной форме. «Старые» вроде меня найдут, может быть, эту книгу полезной для того, чтобы воскресить в памяти старые уроки и взглянуть на современное развитие того, и очень интересного и поучительного, чем пренебрегли университетские преподаватели» [2].

Изначально введение геометрических упражнений складывания бумаги преследовало две цели: помощь в обучении геометрии и введение в математику развлекательной компоненты, для активизации интереса к геометрии в целом. Сегодня точно известно, что лист бумаги позволяет наглядно продемонстрировать свойства некоторых геометрических фигур, решать задачи на доказательство и вычисления, а также выполнять построение фигур.

Если сегодня на уроках геометрии рассмотреть с обучающимися некоторые упражнения из книги Сундара Роу «Геометрические упражнения с куском бумаги», то обучающиеся смогут наглядно увидеть, как из прямоугольника получить квадрат, что такое диагональ квадрата, как они пересекаются, где находится центр квадрата, что собой представляют равнобедренные треугольники и их свойства, прямоугольные треугольники, равные треугольники и многое другое. Но очень важным является упражнение, в результате которого получаются квадраты, которые относятся друг к другу, как $\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \frac{1}{2^4}, \ldots$

Остановимся на упражнениях из главы I «Квадрат» [2].

1. Возьмите прямоугольный лист бумаги. Наложение показывает, что: 1) её четыре угла суть прямые и равные, 2) четыре стороны не все равны, но 3) две длинные стороны равны между собой, а две короткие – между собой.

2. Теперь возьмите прямоугольный лист бумаги $A'B'CD$ и сложите его наискось так, чтобы одна из коротких сторон – CD легла на одну из длинных – DA', как на рис. 2.

Теперь сложите и удалите часть $ABB'A'$, которая выдается. Развернув лист, вы найдёте, что $ABCD$ теперь есть квадрат, т. е. четыре угла полученной фигуры суть прямые, и все её стороны равны.

3. Ребро сгиба, проходящее через два противоположных угла B и D, есть диагональ этого квадрата. Другая диагональ получится, если сложить квадрат через другую пару углов, как на рис. 3.

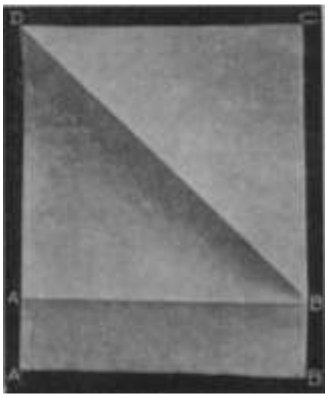

Рисунок 2 – Прямоугольный лист бумаги $A'B'CD$

4. Мы видим, что диагонали пересекаются друг с другом под прямыми углами и что они взаимно делятся пополам.

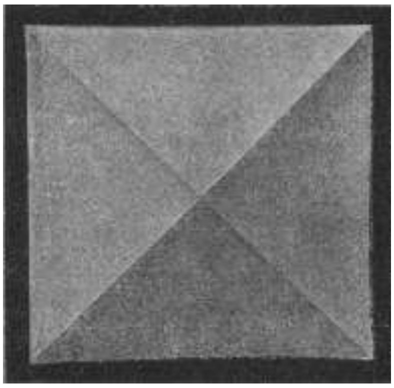

Рисунок 3 – Сгибание по диагонали

5. Точка пересечения диагоналей квадрата называется центром квадрата.

6. Каждая диагональ делит квадрат на два совпадающих при наложении равнобедренных треугольника, вершины которых лежат в противоположных углах квадрата.

7. Две диагонали вместе разделяют квадрат на четыре совпадающих при наложении прямоугольных равнобедренных треугольника с вершинами в центре квадрата.

8. Теперь снова сложите бумагу, как на рис. 4, наложив одну сторону квадрата на противоположную ей.

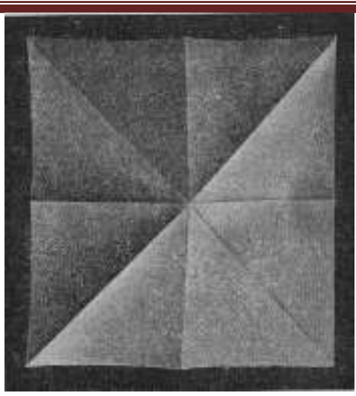

Рисунок 4 – Центр квадрата

Мы получили сгиб, проходящий через центр квадрата. Он перпендикулярен к другим сторонам и 1) делит их пополам, 2) параллелен также первым двум сторонам, 3) сам делится центром пополам, 4) делит квадрат на два совпадающих при наложении прямоугольника, из которых каждый есть, следовательно, половина первого; 5) каждый из этих прямоугольников равновелик одному из треугольников, на которые квадрат делится каждой диагональю.

9. Ещё раз сложим квадрат, налагая друг на друга две другие стороны. Получившиеся теперь сгибы, вместе с предыдущими, делят квадрат на четыре совпадающие при наложении квадрата.

10. Снова сложив через те углы меньших квадратов, которые лежат на серединах сторон большего квадрата, мы получаем квадрат, вписанный в предыдущий (рис. 5).

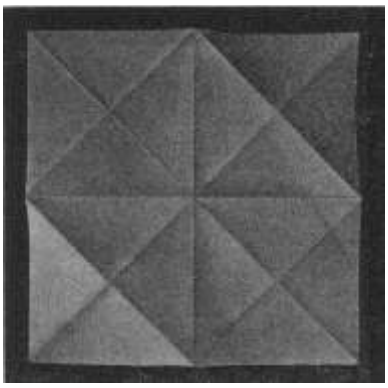

Рисунок 5 – Квадрат, вписанный в первый квадрат

11. Этот квадрат равен половине большого и имеет тот же центр. (Здесь и далее автор имеет ввиду площади фигур.)

12. Соединим середины сторон внутреннего квадрата, мы получим квадрат, равный четверти первоначального (рис. 6).

Повторяя этот приём, можно получить сколько угодно квадратов, относящихся друг к другу, как $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots$, или $\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \frac{1}{2^4}, \ldots$

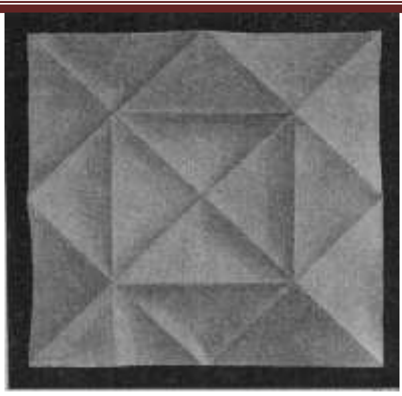

Рисунок 6 – Квадрат, вписанный во второй квадрат

Каждый такой квадрат равен половине ближайшего большего, т. е. четыре треугольника, остающиеся от того большего, вместе равны половине его. Сумма всех этих треугольников, как бы мы ни увеличивали число их, не может быть больше первоначального квадрата и в конце концов составит его весь. Следовательно, $\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\ldots=1$.

В данной статье так подробно остановились на этом упражнении, так как именно его можно рассматривать в качестве прототипа практико-ориентированных задач ОГЭ «Листы бумаги» (рис. 7).

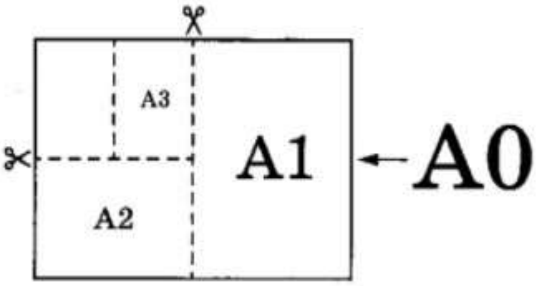

Рисунок 7 – Иллюстрация к задаче ОГЭ

Казалось бы, в данных задачах все намного понятнее: все мы знаем, про общепринятые форматы листов бумаги, как разрезанием из большого формата получить меньшие. Однако в этих задачах как раз важно понимание того, что все листы подобны друг другу. А рассмотренные вполне доступные для понимания упражнения помогут обучающимся разобраться с представлением и пониманием подобия фигур и отношения между сторонами.

В III главе книги «Квадраты и прямоугольники» [2] с помощью несложного упражнения по сгибанию квадрата доказывается теорема Пифагора (рис. 8).

Это наглядный и альтернативный способ доказательства известной, но «сухой» в понимании школьника теоремы, которая встречается в каждой второй задаче ОГЭ и ЕГЭ. Применение такого наглядного метода доказательства позволяет сочетать мыслительную деятельность с ручной работой, что приводит к активизации полушарий мозга, включению зрительной и кинестетической памяти, и происходит тактильное восприятие теоремы.

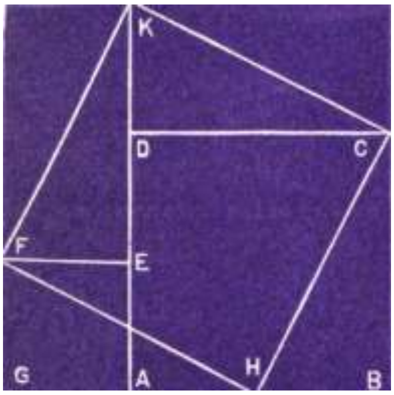

Рисунок 8 – Сгибание квадрата для доказательства теоремы Пифагора

Примеры использования оригами на этапе усвоения новых знаний и способов действий в 7 классе:

– «Точка, прямая, отрезок.» Иллюстрация с помощью сгибов понятия прямая – линия сгиба, точка – пересечение прямых. Иллюстрация взаимного расположения прямых на плоскости (плоскость – лист бумаги, прямые – линии сгибов).

– «Взаимное расположение точек и прямых на плоскости. Угол.» Иллюстрация с помощью сгибов произвольного угла и его биссектрисы.

– «Равенство фигур.» Проверить равенство фигур наложением с помощью сгибов, получить равные фигуры с помощью сгибов наложением.

– «Сравнение отрезков и углов. Свойства отрезков и углов.» Иллюстрация свойств отрезков и углов с помощью сгибания полоски бумаги.

– «Смежные и вертикальные утлы.» С помощью сгибов наложением проиллюстрировать равенство вертикальных углов. При введении понятия вертикальные углы в 7 классе предлагается согнуть квадрат по диагоналям, затем развернуть и посмотреть, что получилось.

Сгибание сторон треугольника помогает доказать основные теоремы, изучаемые в 7 классе:

– сума углов треугольника равна 180^0;

– сумма острых углов прямоугольного треугольника равна 90^0;

– равенство накрест лежащих углов при параллельных прямых и секущей и др.

Таким образом, упражнения в складывании бумаги книги Сундара Роу можно назвать актуальными для методов обучения в преподавании геометрии. В 2016 году эксперт по вычислительному оригами Тецуо Ида, представляя попытку формализовать математику книги, написал: «Спустя 123 года значение книги остается».

Наибольшую активность обучающиеся проявляют тогда, когда при изучении материала организовано их взаимодействие с предметами, они могут сами перемещать их, комбинировать, а затем на основании наблюдений делать выводы. Работа с бумагой как нельзя лучше подходит различным возрастным категориям обучающихся. Может быть, именно из-за этого мастера оригами говорят, что при складывании фигурок «голова работает руками». Кусок обыкновенной бумаги может оказаться прекрасным пособием для усвоения геометрии. С помощью перегибания бумаги можно получать интересные решения геометрических задач, свойства многих плоских фигур становятся настолько очевидными, что нет необходимости в дополнительных разъяснениях.

Рассмотрение геометрических задач в процессе складывания моделей в технике оригами значительно облегчает усвоение математических понятий и свойств фигур. Мыслительная деятельность сочетается с ручной работой, происходит развитие глазомера, развивается способность устной передачи знаний и чертежные навыки.

В процессе складывания фигур оригами дети учатся легко ориентироваться в пространстве и на листе бумаги, делить целое на части, находить вертикаль, горизонталь, диагональ, узнавать многое другое. Лист бумаги, как доступное наглядное пособие, может помочь при выполнении геометрических построений, решении задач и доказательстве теорем школьного курса геометрии. При работе с бумагой ученики не только лучше запоминают теоретический материал, но приобретают исследовательские навыки и, что не менее важно, с большим интересом работают на уроке.

Литература

1. Хага, Кадзуо. Оригамика. Математические опыты со складыванием бумаги / под ред. Масами Исода, И. Р. Высоцкого. – 2-е изд., испр., М. : МЦНМО, 2014. – 160 с.

2. Сундара, Роу. Геометрические упражнения с куском бумаги / пер. с англ. под ред. проф. А.Р. Орбинского. – 2-е изд. – Одесса: «Матезис», 1923. – 168 с.

A PIECE OF PAPER AS A VISUAL AID IN THE STUDY OF MATHEMATICS FROM THE CONCEPT OF GEOMETRIC SHAPES TO THE TASKS OF THE MSE

Bedenko Larisa[1], Polishchuk Natalya[2]

[1]Belovodsk secondary school No. 1, village. Belovodsk,

[2]Lugansk State Pedagogical University, Lugansk

[1]LoraBedenko@yandex.ru, [2]nata_pl@list.ru

Annotation. The article discusses the possibilities of using a piece of paper as an accessible visual aid when teaching mathematics and geometry at school. The illustrative use of paper folding in the study of new material and the proof of theorems, as well as its practical significance today, is demonstrated.

Keywords: visual geometry, origami, practice-oriented tasks, MSE.

УДК 378.091.33

ИССЛЕДОВАНИЕ КОНЦЕНТРАЦИИ ВНИМАНИЯ И УРОВНЯ РАБОТОСПОСОБНОСТИ СТУДЕНТОВ В ЗАВИСИМОСТИ ОТ МЕТОДИКИ ПРОВЕДЕНИЯ ЗАНЯТИЯ ПО МАТЕМАТИКЕ

Диденко Ольга Николаевна

Луганский государственный медицинский университет имени Святителя Луки, г. Луганск

murochka03111980@gmail.com

Аннотация. В статье рассматривается проблема повышения эффективности проведения практических занятий по основам высшей математики для студентов медицинских высших учебных заведений на основании изменения уровня самостоятельности при выполнении учебных заданий.

Ключевые слова: концентрация внимания, уровень работоспособности, корректурный метод исследования, скорость выполнения задания, индекс точности, показатель темпа выполнения.

Существуют объективные и субъективные факторы обучения, отражающиеся на психофизиологическом состоянии студентов. К объективным факторам относятся следующие: условия жизнедеятельности и учебной работы студентов, отдыха, в том числе активного, пол, возраст, состояние здоровья, общая учебная нагрузка и т.д. К субъективным факторам – знания, профессиональные способности, мотивация обучения, работоспособность, уровень внимания, темп учебной деятельности, утомляемость, методика организации учебной деятельности преподавателем, в том числе методика проведения практического занятия.

Под вниманием мы понимаем активную направленность сознания человека, в нашем случае – студента первого курса медицинского высшего учебного заведения, – на те или иные предметы или явления действительности, или на определенные их свойства, качества при одновременном отвлечении от всего другого. Внимание – это такая организация психической деятельности, во время которой определенные образы обозначены выразительнее других, это особенное состояние психологической концентрации, сосредоточенности на конкретном объекте [1, с. 117]. Непосредственно по данному исследованию – конкретным объектом сосредоточения при корректной организации учебной работы студентов должен выступать программный материал по курсу высшей математики, а именно – формулы, таблицы производных и первообразных элементарных функций, правила дифференцирования и интегрирования, необходимые для решения предложенных задач.

Под работоспособностью мы понимаем способность студента выполнять конкретную деятельность в рамках определенных временных ограничений и параметров эффективности – решать задачи, уметь пояснять и обосновывать свой ход решения преподавателю. Мы в данном исследовании выдвигаем гипотезу, что от степени самостоятельности при выполнении заданий студентами зависит уровень их работоспособности и концентрации внимания в конце занятия.

Анализ научных источников современной отечественной и зарубежной педагогики и психологии свидетельствует о накоплении значительного опыта по данному вопросу в теории и практике высшего образования. Эти знания могут стать основой для исследования эффективности проведения учебных занятий со студентами, и, соответственно, повышения качества обучения, в том числе, студентов высших медицинских заведений.

Различные аспекты корректурного метода исследования представлены в работах В. Дружинина, Т. Корниловой, Т. Кириленко, А. Крылова, К. Платонова и многих других. Эти ученые предлагают различные конфигурации проведения корректурных проб в зависимости от цели исследования, возраста исследуемых объектов и других факторов.

Целью нашего исследования является сравнение уровня работоспособности и концентрации внимания в зависимости от степени самостоятельности выполнения учебных заданий при использовании двух различных методик проведения практического занятия по предмету «Физика, математика» со студентами первого курса ФГБОУ ВО «ЛГМУ имени Святителя Луки» МЗ РФ.

Приводим технологию проведения исследования.

Количество объектов исследования – 37 студентов первого курса медицинского университета, сформированные четыре группы. Выборка объектов исследования – случайная, метод основного массива; качественный состав выборки объектов исследования: все исследуемые объекты – студенты первого курса специальностей «Лечебное дело» и «Педиатрия»; по успеваемости – представлены студенты с различным входным уровнем знаний – высоким (5 студентов), средним (23 студента), низким (9 студентов). Под входным уровнем знаний мы понимаем уровень знаний, определенный согласно баллам, представленным в аттестате о среднем (полном) общем образовании. Под высоким входным уровнем мы понимаем студентов, имеющих оценку «отлично» по пятибалльной шкале оценивания знаний, соответственно, под средним уровнем – оценку «хорошо», под низким уровнем – оценку «удовлетворительно». Исследование проводилось в обычных условиях учебного процесса во время практических занятий по дисциплине «Физика, математика». Темы занятий, определенных для проведения исследования: «Основы дифференциального исчисления», «Основы интегрального исчисления», «Основы теории дифференциальных уравнений».

Данные темы являются комплексными, требующими знания серии формул, правил, выбраны с определенной периодичностью с целью предотвращения привыкания исследуемых объектов к методике проведения исследования (к корректурным пробам).

Для исследования концентрации внимания и уровня работоспособности студентов нами был применен метод корректурных проб – наиболее известный и часто используемый метод исследования внимания, утомляемости, темпа психомоторной деятельности, трудоспособности и особенностей реализации деятельности, требующей постоянного сосредоточения внимания, т.е. работы в условиях активной умственной деятельности. Именно такую нагрузку получают студенты во время практических занятий по дисциплине «Физика, математика».

Мы сравнили эффективность двух различных методик проведения практических занятий. Особенность первой методики – в начале занятия студентам были представлены методические разработки с заданиями и рекомендациями к их решению, основными формулами, таблицами по данной теме. Затем студенты, вызванные по собственному желанию, решали задания у доски, остальная часть группы имела возможность переписывать готовые решения в тетради. Как видим – уровень самостоятельности при выполнении задания невысокий. Особенность второй методики – студенты после получения методических разработок самостоятельно должны были решить предложенные задания, используя также конспекты лекций, учебники, показать решения преподавателю и ответить на несколько дополнительных вопросов по теме занятия. При правильной организации практического занятия эта методика должна активизировать умственную деятельность студентов (использование соответствующей формулы при выполнении задания), сконцентрировать внимание (работа с методическими рекомендациями, конспектами лекций, учебниками – поиск необходимой информации), повысить уровень работоспособности (удовлетворение от результатов собственного труда).

Методика проведения корректурных проб была следующей: исследование проводилось в групповой форме, т.е. всем студентам группы в начале занятия были розданы специальные бланки с рядами расположенных в случайном порядке английских букв. Общее количество букв – 350. После короткой инструкции по команде преподавателя-экспериментатора студенты начинали вычеркивать определенную букву. Продолжительность эксперимента – 5 минут. По истечении каждой минуты преподаватель произносил слово «Черта» с целью определения количества букв, просмотренных студентами за единицу времени. Через 5 минут заполненные студентами бланки были собраны преподавателем. Дальнейшее проведение практического занятия не отличалось от обычного: с двумя группами – 19 студентами первого курса специальности «Лечебное дело» занятие проводилось по первой методике, с другими двумя исследуемыми группами (18 студентов первого курса специальности «Педиатрия») – по второй методике. В конце занятия процедура корректурного эксперимента повторялась. Единственным отличием корректурной пробы в начале и в конце занятия было то, что студенты должны были вычеркивать разные буквы, чтобы избежать запоминания порядка расположения знаков.

Результаты корректурной пробы оценивались по количеству пропущенных букв, которые не были подчеркнуты, по времени выполнения и по количеству вычеркнутых знаков. Важным показателем была характеристика качества и темпа выполнения задания – выражалась количеством обработанных строк и количеством допущенных ошибок за каждый минутный промежуток времени. Проверку правильности выполнения задания проводили при помощи специальных бланков-ключей – шаблонов с отверстиями в определенных позициях.

Рассчитывались средние значения следующих параметров: уровень концентрации внимания, скорость выполнения задания, индекс точности, показатель темпа выполнения. Полученные результаты корректурных проб, проведенных в начале и в конце занятия, приведены в таблице 1.

Табл. 1. Средние показатели работоспособности и уровня концентрации внимания студентов в зависимости от методики проведения занятия

Методика проведения практического занятия	Количество объектов исследования	Коэффициент концентрации внимания (в начале/в конце занятия)	Скорость выполнения задания, зн/мин (в начале/в конце занятия)	Индекс точности стр/зн, (в начале/в конце занятия)	Показатель темпа выполнения зн^2/мин, (в начале/в конце занятия)
1 методика	19	0,21/0,26	42/48	0,68/0,73	8820/11520
2 методика	18	0,22/0,33	43/62	0,68/0,89	9245/19220

Данные, приведенные в таблице 1, свидетельствуют о высокой эффективности второй методики проведения практических занятий по математическим темам дисциплины «Физика, математика» со студентами первого курса медицинского высшего учебного заведения, сущность которой состоит в повышении уровня самостоятельности выполнения студентами предложенных заданий. Отмечаем рост показателей работоспособности и уровня концентрации внимания в обеих группах, но, в группе, в которой использовалась вторая методика проведения занятия, рост указанных показателей выше.

Проведенное исследование на основе полученных результатов позволяет сделать вывод о целесообразности использования второй методики проведения практических занятий по дисциплине «Физика, математика», которая требует от студентов самостоятельного поиска способов решения учебных задач. Об этом свидетельствует увеличение показателей уровня работоспособности – скорости выполнения, индекса точности, темпа выполнения, концентрации внимания – в экспериментальных группах, в которых была применена методика с повышенным уровнем самостоятельности выполнения студентами заданий по математическим темам дисциплины «Физика, математика».

Литература

1. Бруннер, Е. Ю. Лучше, чем супервнимание / Методики диагностики и психокоррекции: Психология внимания; Оценочные тесты; Развивающие игровые упражнения. Серия: Психологический практикум.. – Ростов-на-Дону : Феникс, 2006. – 317 с.

2. Крылов, А. А. Практикум по общей экспериментальной и прикладной психологии. – Санкт-Петербург :Питер, 2003. – 560 с.

STUDY OF STUDENTS' ATTENTION CONCENTRATION AND PERFORMANCE LEVEL DEPENDING ON THE METHODOLOGY OF THE MATHEMATICS CLASS

Didenko Olga Nikolaevna
Saint Luke Lugansk State Medical University, Lugansk
murochka03111980@gmail.com

Annotation. The problem of improving of the practical training on mathematics efficiency for students of higher medical education institutions according to changes in the level of independence of students in completing of tasks is considered.

Keywords: concentration of attention, level of efficiency, the method of correction test, the speed of the working, the index of accuracy, the rate of implementation.

УДК 37.0:311.2

НЕПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ СТАТИСТИКИ В ПЕДАГОГИЧЕСКОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ

[1]Долголенко София Андреевна, [2]Давыскиба Оксана Викторовна
[1,2]Луганский государственный педагогический университет, г. Луганск
[1]sophiadolgolenko1@gmail.com

Аннотация. В данной статье проанализированы и структурированы критерии для оценки эффективности того или иного аспекта в школьной системе. Также представлены рекомендации и ситуации для их применения.

Ключевые слова: оценка эффективности, оценка качества, педагогическая деятельность, непараметрические методы статистики.

Актуальность данной темы заключается в том, что школе, как и любому предприятию, необходимо управление в непрерывном режиме. Школа должна демонстрировать не только свои способности предоставлять высокое качество образования учащимся, но и свою эффективность. Можно сказать, что получение высокого качества образования в этой школе будет более экономичным для родителей по сравнению с другими учебными заведениями, поскольку дополнительные расходы будут оправданы новым качеством образования, которое будет достигнуто [1].

Целью данной статьи является описание критериев, с помощью которых можно сделать оценку эффективности различных аспектов в школьной системе.

Повышение эффективности образовательного процесса предполагает необходимость внедрения в учебный процесс инновационных педагогических технологий обучения, анализировать целесообразность и эффективность применяемой на практике той или иной технологии.

Одним из решений данной проблемы является использование статистических методов анализа образовательного процесса, как наиболее важной компоненты системы качества любой современной организации.

Статистические методы, основанные на использовании математической статистики, являются эффективным инструментом сбора, анализа и интерпретации информации о качестве. Применение этих методов, не требуя больших затрат, позволяет с заданной степенью точности и достоверности судить о состоянии исследуемых явлений (объектов, процессов) в системе менеджмента качества, прогнозировать и решать проблемы на всех этапах жизненного цикла продукции и на основе этого вырабатывать оптимальные управленческие решения.

В отношениях с учреждениями управления образованием, местными властями, социальными партнерами и прочими, школа должна демонстрировать, что, помимо своей основной функции обеспечения знаниями, она также выполняет и другие важные социальные задачи. Она является одной из составных частей механизма социально-экономического развития и служит ресурсом развития территории, формирует кадровый потенциал, а также является основным элементом гражданского общества. Однако, подобно любому сложному организму, школа также нуждается в собственном развитии и самосовершенствовании. Она должна создавать такие условия, чтобы каждый ее элемент стремился к достижению нового уровня качества. В данной ситуации может быть использован математический аппарат статистики в двух основных направлениях. Во-первых, использование внутришкольной статистики позволит проводить сравнительный анализ классов и определять их уровень успеваемости, с целью выявления успешных методов преподавания, эффективных стратегий обучения для дальнейшего их использования в других классах. Во-вторых, для сравнения школ между собой и определения их позиционирования во внешней среде. Это позволит выявить свои сильные и слабые стороны по отношению к другим школам и разработать стратегии для улучшения своего статуса [2; 3].

В условиях современной России особое внимание уделяется улучшению качества образования. Однако возникает вопрос о том, какими критериями, показателями можно измерить это качество. В этом вопросе существуют разные точки зрения. Хотя успеваемость является одним из главных аспектов, существуют и другие аспекты. Рассмотрим наиболее известные международные подходы и показатели оценки качества образования [4]:

1. Индикаторы, которые были разработаны в 1996 г. участниками Международной конференции в Джомтьене (Таиланд):

– доля учащихся, которые успешно завершили обучение в начальной школе;

– уровень второгодничества в различных классах;

– процент учащихся, которые достигли четвертого года обучения в начальной школе и, которые владеют набором базовых знаний и умений, определенных государственным стандартом;

– численность учащихся, которая приходится на одного преподавателя;

– доля преподавателей начальной школы, которые имеют необходимое академическое образование.

2. В программе исследования качества образования PISA-2000 в России были использованы различные индикаторы и подходы для оценки качества образования. При изучении качества образования акцент делается на оценку функциональных качеств учащихся: умение ориентироваться в различных ситуациях; подбирать соответствующие предметные знания; самостоятельно строить план решения задачи; применять нестандартные способы решения задач; формулировать и представлять решение.

3. Индикаторы развития образования («образования в течение жизни») были разработаны Европейским Союзом: грамотность и умение считать; определение компетенций по восьми областям знаний; базовые компетенции в областях математики, науки и технологий; умения в области информационно-коммуникационных технологиях; владение иностранными языками.

Формирование критерия должно начинаться с определения основных целей анализа с тем, чтобы гарантировать его полное соответствие установленным целям. В практике часто наблюдается противоположный подход, когда в первую очередь собираются доступные статистические данные, а затем из них отбираются те, которые могут быть применены для формирования критериев, и в конечном итоге создаются возможные критерии [4]. Тем не менее, для эффективного использования критериев в управленческой деятельности требуется совершенно иной подход. Статистические показатели должны отбираться в соответствии с установленными критериями, которые, в свою очередь, должны быть разработаны исходя из целей и предмета анализа. Общая логическая схема формирования критериев представлена на рисунке 1 ниже [5].

Рисунок 1 – Схема формирования критерия

Для эффективного управления школой необходимо выявить и проанализировать основные проблемные аспекты, которые оказывают влияние на ее функционирование. В качестве таких аспектов можно выделить следующие критерии:

1. *Контингент учащихся*. Возрастная и половая структура, качество учеников и их образовательные ожидания – все эти факторы играют важную роль в разработке образовательных программ и формировании педагогической стратегии школы.

2. *Ресурсы школы*. Кадры, учебно-материальная база и финансы – это важные компоненты, которые определяют возможности школы в обеспечении качественного образования. Наличие достаточного числа квалифицированных педагогов, доступные учебные материалы и средства обучения, а также финансовая поддержка – все это существенно влияет на работу школы.

3. *Качество и эффективность образования*. Содержание учебной программы, успеваемость учащихся и эффективность образовательного

процесса – это основные критерии, которые отражают результаты деятельности школы. Они позволяют оценить степень соответствия образовательного процесса требованиям современного общества и определить успешность деятельности школы.

Критерии качества образования являются важными показателями результатов работы школы и представляют интерес для всех, кто связан с образовательной сферой. Однако, они часто являются предметом споров, так как каждый ищет в них отражение своих приоритетов и целей.

Важно отметить, что для качественного анализа необходимо использование методов математической статистики. Они позволяют обработать и интерпретировать полученные данные, выявить тенденции и закономерности, а также принять обоснованные решения на основе объективных фактов.

В итоге, анализ проблемных блоков и использование критериев качества с помощью математической статистики позволяют эффективно управлять школой, обеспечивая качественное образование и достижение высоких результатов [7; 8] (табл. 1).

Табл. 1. Классификация задач и статистических методов их решения

Задачи	Условия	Методы
1. Выявление различий в уровне исследуемого признака	2 выборки испытуемых	Критерий Фишера Критерий Макнамара
	3 и более выборок испытуемых	Критерий Джонкира
2. Оценка сдвига значений исследуемого признака	2 замера на одной и той же выборке	Критерий Вилкоксона Критерий Фишера
	3 и более замеров на одной и той же выборке испытуемых	Критерий Пейджа G – критерий знаков
3. Выявление различий в распределении признака	При сопоставлении эмпирического распределения с теоретическим	Критерий Пирсона
	При сопоставлении 2-х эмпирических значений	Критерий Пирсона
4. Анализ изменений признака под влияние контролируемых условий	Под влиянием одного фактора	Критерий Джонкира Критерий Пейджа
5. Оценка различий между двумя выборками	По уровню количественно измеренного признака	Q-китерий Розенбаума

Таким образом, использование статистических данных играет важную роль в контроле качества образования школы и сравнении ее деятельности с другими учебными заведениями. Это предоставляет дополнительный инструмент для анализа работы самой школы, отдельных классов, классных руководителей и преподавателей. Однако, необходимо учесть, что все участники мониторинга должны ясно понимать критерии и методику расчетов, а также иметь доступ к исходным данным и результатам анализов. Критерии оценки должны быть тесно связаны с поставленными целями анализа и предметом оценки.

Литература

1. Ахметжанова, Г. В. Применение методов математической статистики в психолого-педагогических исследованиях / Г. В. Ахметжанова. – Тольятти: Тольяттинский государственный университет, 2016. – 147 с.
2. Грабарь, М. И. Применение математической статистики в педагогических исследованиях / М. И. Грабарь // Непараметрическая статистика. – Москва.: Педагогика, 1997. – 70 с.
3. Жуковский, М. Е. Математическая статистика / М. Е. Жуковский. – М. : Московский физико-технический институт, 2017. – 235 с.
4. Елисеева, И. И. Общая теория статистики / Под ред. чл.-корр. РАН И. И. Елисеевой. – М.: Финансы и статистика, 2001. – 480 с.
5. Российская государственная библиотека. Достоинства маломощных критериев / ред. Т. В. Власенко. –Москва.: Рос гос. б-ка, 2018. URL: https: // megalektsii.ru/s35704t7.html (дата обращения: 02.03.2022).
6. Боровков, А. А. Математическая статистика / А. А. Боровков. – Новосибирск.: ТетраСистемс, 1997. – 480 с.
7. Парыгина, С. А. Сравнительная характеристика ранговых непараметрических критериев проверки гипотез и особенности их применения к обработке данных различной природы / С. А. Парыгина.: Башкирский институт естественных и технических наук, 2015. – С. 44–48.
8. Парыгина, С.А. Об особенностях применения некоторых ранговых непараметрических критериев проверки гипотез / С. А. Парыгина // Вестник Башкир, 2016. Т. 21, № 2. – С. 252–257.

NON-PARAMETRIC METHODS OF STATISTICS IN PEDAGOGICAL ACTIVITIES

Dolgolenko Sofia Andreevna[1], Davyskiba Oksana Viktorovna[2]

[1,2]Lugansk State Pedagogical University, Lugansk

[1]sophiadolgolenko1@gmail.com

Annotation. This article analyzes and structures criteria for assessing the effectiveness of a particular aspect in the school system. Recommendations and situations for their application are also presented.

Key words: effectiveness assessment, quality assessment, pedagogical activity, nonparametric statistical methods.

УДК 510.3

ЗНАКОМСТВО ШКОЛЬНИКОВ С РАЗНЫМИ ВИДАМИ ФАКТОРИАЛОВ

Дущенков Даниил Александрович[1], Панишева Ольга Викторовна[2],
[1,2]Луганский государственный педагогический университет, г. Ровеньки
[1]dushchenkov631@mail.ru

Аннотация. В статье рассмотрены примеры комбинаторных равенств с использованием факториала, проведено изучение различных видов факториалов, очерчено сферы их вариативного использования. Авторы представляют серию заданий, позволяющих углубить знания о разных видах факториалов, в том числе и межпредметного характера.

Ключевые слова: комбинаторика, факториал, двойной факториал, праймориал, субфакториал, гиперфакториал.

Факториал, возникший естественным образом в комбинаторике, активно используется в различных разделах математики, особенно там, где заходит речь о различных вариантах, перестановках, комбинациях и т. п. Кроме комбинаторики, его применяют в теории чисел, математическом анализе и других областях. Поэтом актуально знакомство школьников с их видами и свойствами.

Основные определения и правила вычислений факториалов описаны в школьных учебниках. Факториал – это математическая функция, применяемая к неотрицательным целым числам, равная произведению всех натуральных чисел от 1 до числа, для которого она вычисляется. Факториал числа n обозначается $n!$ [1]. Он присутствует в формулах размещений, сочетаний и перестановок.

Когда происходит первое знакомство школьников с факториалом, руководствуясь принципом историзма в преподавании математики, учитель знакомит их с краткой историей возникновения этого понятия. В частности, сообщает, что факториальные выражения появились ещё в ранних исследованиях по комбинаторике, хотя компактное обозначение $n!$ предложил французский математик Кристиан Крамп только в 1808 году. Важным этапом стало открытие формулы Стирлинга, которую Джеймс Стирлинг опубликовал в своём трактате «Дифференциальный метод». Немного ранее почти такую же формулу опубликовал друг Стирлинга Абрахам де Муавр, но в менее завершённом виде. Стирлинг подробно исследовал свойства факториала, вплоть до выяснения вопроса о том, нельзя ли распространить это понятие на произвольные вещественные числа. Он описал несколько возможных путей к реализации этой идеи.

Программа не предусматривает обязательного знакомства школьников со свойствами факториалов, изучение их различных видов. Однако этот материал дает почву для углубления знаний обучающихся, формирования их исследовательских навыков. Такое знакомство может проходить как на уроках, так и во внеклассной работе, на факультативных занятиях.

Цель статьи – описать разные виды заданий, которые могут быть использованы для расширения и углубления знаний обучающихся о факториалах. Чаще всего эти задания носят исследовательский или занимательный характер.

Первое задание предусматривает сравнение темпов роста функции $y = x!$ со степенной и показательной функцией того же аргумента. Для этого необходимо вычислить значения этих функций, например, для первых 7 аргументов и сравнить их. При этом необходимо помнить, что в качестве аргументов можно рассматривать только целые неотрицательные числа. Можно изобразить полученные данные графически вручную или построить эти графики с помощью графических он-лайн калькуляторов. Тогда школьники смогут наглядно увидеть, что факториал растёт быстрее, чем любая показательная функция или любая степенная функция.

В математике существует открыто до десятка различных видов факториала. Следующим шагом знакомим школьников с этими видами. Самый простой из них – двойной факториал числа n, обозначаемый через $n!!$, является произведением всех натуральных чисел с точностью до n, которые имеют ту же четность, что и n [2]. То есть,

$$(2k)!! = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2k = \prod_{i=1}^{k} 2i = 2^k \cdot k!,$$

$$(2k+1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k+1) = \prod_{i=0}^{k} (2i+1) = \frac{(2k+1)!}{2^k \cdot k!} = \frac{(2k+1)!}{(2k)!!}.$$

Например, $6!! = 6 \cdot 4 \cdot 2 = 48,\ 7!! = 7 \cdot 5 \cdot 3 = 105$.

После тренировки в вычислении этих факториалов предлагаем обучающимся выполнить такие поисковые задания:

1) сравнить значение двойного факториала $n!!$ с результатом последовательного вычисления двух факториалов от числа, удвоенным факториалом $(n!)!$.

2) найти связь между двойным факториалом числа $n!!$ и значением обычных факториалов последующего за ним и предыдущего чисел.

Вычисления факториалов можно организовать в среде Excel с помощью встроенной функции ФАКТР. А саму закономерность должен подметить сам школьник. В результате он должен прийти к такой формуле:

Субфакториал, обозначаемый как $!n$, определяется как количество перестановок из n элементов, которые не оставляют неподвижных точек [2].

Формула для вычисления субфакториала выглядит следующим образом:

$$!n = n! \cdot \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + (-1)^n \cdot \frac{1}{n!}\right) [2].$$

Пример вычисления субфакториала для $n = 3$::

$$!3 = 3!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!}\right) = 6 \cdot \left(1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right) = 2.$$

Таким образом, субфакториал для 3 равен 2.

В качестве поискового задания также можно предложить сравнить субфакториал числа с обычным факториалом этого числа, который в итоге окажется меньше факториала. Связь факториала с обычным факториалом устанавливается с помощью постоянной Эйлера: $!n = \left[\frac{n!}{e}\right]$. Подметить этот факт довольно сложно, поэтому его целесообразно сообщить в готовом виде.

Прайморил – математическое понятие, связанное с простыми числами. Первым это понятие использовал знаменитый исследователь простых чисел Харвей Дубнер. Праймориал обозначается символом n#, и определяется как произведение всех простых чисел от 2 до n.

Формула для вычисления праймориала выглядит следующим образом: $n\# = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot p$, где p – это наибольшее простое число, которое не превышает n [2].

Рассмотрим пример вычисления праймориала для $n = 5$:

$$5\# = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30.$$

На этом этапе можно сравнивать двойной факториал с праймориалом для ответа на такие вопросы:

1) каким должно быть число n, чтобы его двойной факториал был равен праймориалу?

2) для каких n двойной факториал меньше (больше) праймориала?

Суперфакториал равен произведению первых n факториалов. Например, $sf(4) = 4! \cdot 3! \cdot 2! \cdot 1!$

Гиперфакториал числа n обозначается Н (n) равен произведению чисел вида x^x:

$$H(n) = \prod_{i=1}^{n} i^i.$$

Например, $\mathrm{H}(3) = 3^3 \cdot 2^2 \cdot 1^1 = 108$.

Экспоненциальный факториал числа n обозначается $n\$$ и представляет собой положительное целое число n, возведенное в степень $n - 1$, которое, в свою очередь, возведено в степень $n - 2$, и так далее с правой группировкой: $n\$ = n^{(n-1)^{(n-2)\cdots}}$ [2].

Используя данное соотношение, вычисляем, что первыми экспоненциальными факториалами являются:

1,

$2^1 = 2$,

$3^2 = 9$,

$4^9 = 262144$,

$5^{262144} = 6206069878...8212890625$ (183231 цифр).

Творческое задание по сравнению экспоненциальных факториалов со всеми предыдущими убеждает школьников, что они растут намного быстрее, чем обычные факториалы или даже гиперфакториалы. Например количество цифр в экспоненциальном факториале числа 6 составляет приблизительно $5 \cdot 10^{183230}$[2].

Когда вышеперечисленные виды факториалов знакомы учащимся, можно предложить им такую серию заданий с ними.

1) Перед праздником выложили подарки из коробок, чтобы проверить их качество и затем необходимо их разложить обратно. Какой вид факториала нужно использовать, чтобы вычислить число способов разложить n подарков в n коробок, чтобы каждый подарок оказался не в той коробке, в которой он был первоначально.

2) Положительным или отрицательным является значение выражения $\mathrm{H}(!3) - (\#3)$?

3) Используя знаки арифметических действий и факториалов, составьте из двух пятерок выражение, значение которого равно 3.

4) Получите число 9 из двух нулей.

5) Получите 100 из двух двоек, не используя действий сложения.

6) Какой вид факториала вычислили от числа 5, что его значение стало равно 120? 15?

7) Каким количеством нулей оканчиваются факториалы чисел, больших 5? 8? Почему?

8) Соотнесите значение и вид факториала числа 5:

120	Суперфакториал
15	Гиперфакториал
30	Двойной факториал
86400000	Обычный факториал
34560	Праймориал

9) Найдите обратный факториал числа 24(то есть число, факториал которого равен 24)

10) Изучите программу для вычисления разных видов факториалов на языке Python. Выделите ту ее часть, где вычисляется праймориал числа; двойной факториал.

```
import sys
print ("Факториал","\n"),
ch = input("Введите способ подсчета:")
num = int(input("Введите число:"))
f = 1
match ch:
    case "1":
        def fac(num):
            if num == 1:
                return 1
```

```
            else:
                return num * fac(num- 1)
        print (f"Ваш результат. Факториал из {num} равен: {fac(num)}")
    case "2":
        def double_factorial(num):
            if num in (0, 1) or num < 0:
                return 1
            return num * double_factorial(num - 2)
        print (f"Ваш результат. факториал из {num} равен
{double_factorial(num)}")
    case "3":
        def is Prime(num):
            if type(num) == int and num >= 0:
                if num == 0 or num == 1:
                    return False
                for each in range(2,num+1):
                    if num % each == 0 and num != each:
                        return False
                        break
                    elif num % each == 0 and num == each:
                        return True
        def antiprimorial(num):
            if type(num) == int and num >= 0:
                for each in range(2,sys.getrecursionlimit()):
                    if isPrime(each) == True:
                        num = float(num)/float(each)
                        if num != 1.0 and num > 1.0:
                            continue
                        elif num != 1.0 and num < 1.0:
                            raise (ValueError,"Ошибка")
                        else:
                            values = [each]
                    for var in range(1,sys.getrecursionlimit()):
                        if isPrime(each+var) == False:
                            values.append(each+var)
                            continue
                        else:
                            return values
                            break
                    break
```

11) Какой тип переменных должен использоваться в этой программе, чтобы она работала корректно?

Отметим, что последние задания позволяют установить межпредметные связи математики и информатики.

Для самостоятельной работы школьников с различными источниками информации можно предложить им найти ответ на вопрос: существуют ли факториалы дробных чисел? Если да, то как они вычисляются?

Подводя итоги, подчеркнем, что разные виды факториалов позволяют лучше понять комбинаторику, теорию чисел и другие математические области. Знакомство с разными видами факториалов расширяют и углубляют знания школьников, имеют потенциал для организации исследовательской деятельности, установления межпредметных связей. Задания, предложенные нами, могут найти свое применение как на уроках, так и на факультативных занятиях по математике.

Литература

1. Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы: учебник для общеобразоват. организаций: базовый и углубленный уровни / Ш. А. Алимов [и др.] – 3-е изд.– М. : Просвещение, 2016. – 463 с.

2. Ерош, И. Л. Дискретная математика.: уч. пособие. СПбГУАП / И. Л. Ерош. – СПб., 2005. – 144 с.

FAMILIARISE PUPILS WITH DIFFERENT KINDS OF FACTORIALS

Dushchenkov Daniil Aleksandrovich[1], Panisheva Olga Victorovna[2]
[1,2]Lugansk State Pedagogical University, Rovenky
[1]dushchenkov631@mail.ru

Annotation. The article considers examples of combinatorial equations using factorials, studies different types of factorials and outlines the spheres of their variable use. The authors present a series of tasks to deepen the knowledge of different types of factorials, including those of interdisciplinary nature.

Keywords: combinatorics, factorial, double factorial, primeorial, subfactorial, hyperfactorial.

УДК 378.016 : 51

ПРИМЕНЕНИЕ ПРИНЦИПА ДВОЙСТВЕННОСТИ В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ МАТЕМАТИКИ

Дюбо Елена Николаевна
Луганский государственный педагогический университет, г. Луганск
dyubo_elena@mail.ru

Аннотация. В статье раскрывается сущность и особенности применения принципа двойственности в математике. Рассмотрены рекомендации по разработке методического и математического аппарата для использования принципа двойственности в школьном курсе математики. Это позволит сформировать у учащихся обобщенное умение преобразования математических моделей, связывающих теоретическое и практическое знание, геометрический и аналитический метод доказательства.

Ключевые слова: двойственность, принцип двойственности, двойственная задача, двойственная теорема.

В теоретическом аппарате философии и различных отраслей специальных наук (физике, химии, математике и др.) часто встречаются такие понятия как «противоречие», «противоположность», «противопоставление», предполагающие наличие полюсов одного объекта или двух характеристик одного явления.

В познавательном отношении понятие «двойственность» примыкает к принципу дополнительности, базируясь на противопоставлении одного многому. Так, в математике сначала возникло противопоставление одного многому; множество с числом элементов более одного воспринималось как «много предметов». Позже, два объекта, воспринимаемые порознь, объединились в сознании в единое множество, приобретя качество двуединства.

Так, в восточной философии существует эмблема двойственности – «инь-ян», изображаемая «совершенной фигурой», символизирующей исходную целостность. Деление круга плавной линией на белую и черную половинки отображает единство всех противоположностей мира (добра и зла, истины и лжи, положительного и отрицательного и т. п.). Внутри каждой половины имеется кружок другого цвета, означающий зарождение и проникновение противоположностей друг в друга. Половинки круга равны, что соответствует внешней тождественности противоположностей, но контрастируют цветом, что означает полярность по содержанию.

Выявление двойственности явлений характерно для большинства наук: корпускулярно-волновой дуализм в физике, двойственная итальянская бухгалтерия («дебет-кредит»), физический и моральный износ основных средств в экономике; психология восприятия и мышления и т.д. Это характерно и для математики, в которой взаимно двойственны математические суждения с использованием контрастных понятий вида «возрастает –

убывает», «максимум - минимум», «точка - прямая» и т. п.

Следует отметить, что принцип двойственности в математике (в математической логике) четко формализован: «Двойственности закон – закон математической логики, который гласит, что если формулы A и B равносильны, то и двойственные им формулы A^* и B^* также равносильны» [1]. Таким образом, из одного верного высказывания путем замены входящих в него понятий на двойственные понятия можно получить другое верное высказывание.

Рассмотрим два суждения: «Число 18 есть кратное числа 2», «Число 2 есть делитель числа 18». На первый взгляд кажется, что второе суждение по отношению к первому не несет новой информации, его содержание как будто является следствием первого. Однако такие пары не эквивалентны содержательно, поскольку смысл одной формы проявляется через сравнение с другой. Поэтому, одну форму полезно намеренно сочетать с двойственной ей формой, помогающей глубже познать изучаемое.

Принцип двойственности впервые был сформулирован Ж. В. Понселе в «Трактате о проективных свойствах фигур». Автор не только открыл сам принцип, но и применил его, демонстрируя простоту и прозрачность самой идеи путем записи теоремы в два столбца: в одном столбце пишется доказанная теорема, в другом – двойственная ей, уже не требующая доказательства.

Данный принцип является важнейшим для таких отраслей математики, как проективная геометрия, топология, теория множеств, математическая логика, линейное программирование и др. Можно привести в пример следующие двойственные теоремы:

«$\textit{Из всех прямоугольников равно}\frac{\textit{го}}{\textit{й}}\ \frac{\textit{периметра}}{\textit{площади}}\ \textit{наи}\frac{\textit{большей}}{\textit{меньшим}}\ \frac{\textit{площадью}}{\textit{периметром}}$ *обладает квадрат*».

Взаимно двойственными теоремами являются знаменитые теоремы Паскаля и Брианшона:

«$\textit{Если шестиугольник}\ \frac{\textit{описан}}{\textit{вписан}},\ \textit{то}\ \frac{\textit{прямые, соединяющие}}{\textit{точки пересечения}}$ $\textit{противополож}\frac{\textit{ные вершины}}{\textit{ных сторон}}$, определяют единственную $\frac{\textit{точку}}{\textit{прямую}}$».

Двойственный характер математических знаний учитывался и при обучении математике. Так, в учебнике элементарной геометрии Генрици и Трейтлейн излагали элементы проективной и аналитической геометрии на основе принципа двойственности, разделяя каждую страницу пополам так, чтобы справа содержалась теорема, слева – ей взаимная.

В начале XX века идея использования принципа двойственности при обучении геометрии получила свое развитие и в России. Первые работы, посвященные данному вопросу, принадлежали Д. Д. Мордухай-Болтавскому и его последователям. Так, в работе «Этюды по геометрии» М.М. Пистрак рассматривает конкретные примеры возможностей использования принципа двойственности для получения теорем, взаимных теоремам курса геометрии средней школы; И. М. Яглом в «Геометрических преобразованиях» приводит двойственные теоремы элементарной геометрии и задачи, решаемые с применением принципа двойственности. В последующих работах, авторы стали уделять внимание и методической компоненте: в работе Т. Т. Фискович «Общее и специфическое понимание сущности геометрии» исследуется вопрос о целесообразности и методическом значении принципа двойственности для студентов педагогического вуза с целью формирования более абстрактных и необходимых учителю обобщений понятий математики [2].

В своей работе «О некоторых общеобразовательных аспектах принципа двойственности» В. М. Манахова и Т. В. Малкова описывают эксперимент по использованию принципа двойственности при изучении в школе раздела «Линейное программирование» как инструмент формирования на его базе у школьников обобщенного умения преобразования математических моделей путем построения двойственной модели.

В 1977 году в учебном пособии для учащихся школ и классов с углубленным изучением математике «Геометрия. Дополнительные главы к школьному учебнику 9 класса» под редакцией Л. С. Атанасяна уже содержался материал, косвенно связанный применением принципа двойственности в элементарной геометрии [2].

Чаще всего принцип двойственности используется в рамках реализации школьного курса геометрии, но его возможности намного шире. Так, достаточно эффективным будет прием, когда решенная исходная задача преобразовывается не только в обратную, но и в двойственную задачу.

Рассмотрим задачи.

Исходная задача

В первый день собрали 40 т урожая моркови, во второй день – в 2 раза больше, чем в первый день. Сколько тонн урожая моркови собрали в первый день?

Решение

40*2=80 (т)

Обратная задача

В первый день собрали несколько тонн урожая моркови, во второй – в 2 раза больше, чем в первый день. Сколько тонн урожая моркови собрали в первый день, если во второй день собрали 80 т?

Решение

80:2=40 (т)

Задача, двойственная исходной

В первый день собрали 40 т урожая моркови, что было меньше в 2 раза, чем во второй день. Сколько тонн моркови собрали во второй день?

Решение

40*2=80 (т)

Задача, двойственная обратной

В первый день собрали в 2 раза меньше урожая моркови, чем во второй день. Сколько тонн моркови собрали в первый день, если во второй день собрали 80 т?

Решение

80:2=40 (т)

Следует отметить одну особенность взаимно двойственных задач: условия их выражены различными наборами понятий, но решение –

одинаково, т.е. подобные задачи выражают одну и ту же информацию, но двумя различными способами.

Математические понятия входят в обиход не изолированно, а по определенному соотношению к другим понятиям. Например, графики отдельных функций при их преобразовании целесообразно рассматривать двояко: при общей мере по осям координат (два графика в одной системе координат) и при различных единицах масштаба (один график для двух систем координат) (рис. 2), что позволяет более детально изучить не только количественные, но и качественные характеристики изучаемой информации.

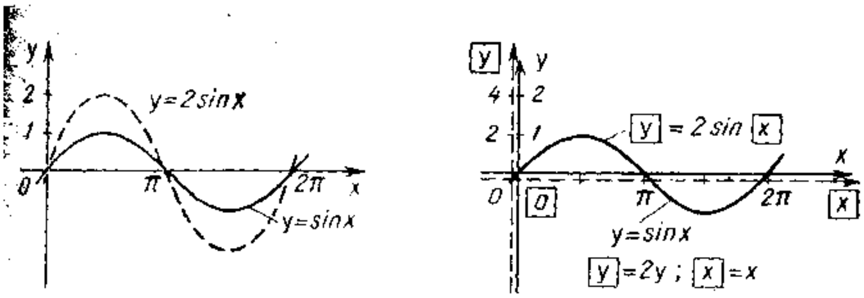

Рисунок 2 – Использование принципа двойственности при построении графиков функций

Нередко в школьные программы по математике не попадают некоторые центральные теоремы лишь потому, что еще не найдены удобные пути их усвоения. В качестве примера рассмотрим геометрический способ получения одной из основных теорем анализа - теоремы Лагранжа - из теоремы Ролля.

Теорема Ролля (аналитическая формулировка)	*Теорема Лагранжа (аналитическая формулировка)*
Если функция *f(x)* дифференцируема на отрезке $[a, \ b]$ и ее значения на концах отрезка равны, то существует такая точка *M* на этом отрезке, что производная в ней равна нулю.	Если функция *f(x)* дифференцируема на отрезке $[a, \ b]$ и ее значения на концах отрезка не равны, то существует такая точка *M* на этом отрезке, что производная в ней равна отношению приращения функции к приращению аргумента.

Очевидно, что для получения геометрической интерпретации теоремы Лагранжа достаточно повернуть рисунок дуги кривой для теоремы Ролля на некоторый угол относительно осей координат (рис. 3).

Геометрическое толкование данных родственных теорем совпадает, поэтому легко устанавливается процесс обобщения теоремы Ролля в теорему Лагранжа, а также выведения теоремы Ролля как частного случая теоремы Лагранжа: «Если дана всюду гладкая дуга *AB,* то на ней найдется такая точка *M*, что касательная к кривой в этой точке (*MK*) параллельна хорде *AB*» [3].

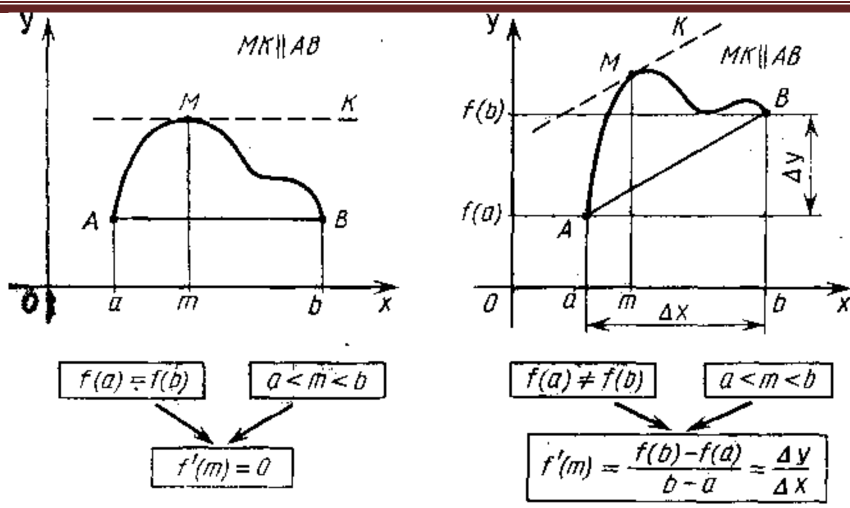

Рисунок 3 – Геометрическая интерпретация теорем Ролля и Лагранжа

По аналогии аналитический термин «дифференцируемость» функции можно перевести на геометрический язык термином «гладкость» соответствующего графика. Такой взаимопереход двух понятий, выражаемых терминологически языком геометрии и математического анализа, позволяет сделать раскрытие содержания теоремы более доступным для учащихся.

Методическое достоинство принципа двойственности заключается в том, что на его базе можно формировать у учащихся обобщенное умение преобразования математических моделей, связывающих теоретическое и практическое, частное и общее, абстрактное и конкретное, геометрическое и аналитическое, количественные и качественные задачи.

Литература

1. Кондаков, Н. И. Логический словарь / Н. И. Кондраков. – М.: Наука, 1975. –721 с.

2. Пырков, В. Е. Методическое наследие Д. Д. Мордухай-Болтовского и опыт его использования в современном математическом образовании: специальность «Теория и методика обучения и воспитания»: автореф. дис. на соиск. уч. ст. кандидата пед. наук. Ростовский государственный педагогический университет / В. Е. Пырков. – Ростов-на-Дону, 2004. –28 с.

3. Эрдниев, П. М. Укрупнение дидактических единиц в обучении математики: кн. для учителя / П. М. Эрдниев. – М.: Просвещение, 1986. – 254 с.

APPLICATION OF THE DUALITY PRINCIPLE IN SCHOOL MATHEMATICS

Dyubo Elena Nikolayevna
Lugansk State Pedagogical University, Lugansk
dyubo_elena@mail.ru

Annotation. The article reveals the essence and peculiarities of application of the principle of duality in mathematics. Recommendations for the development of methodological and mathematical apparatus for the use of the principle of duality in the school course of mathematics are considered. It’s allow to form generalized skills of transformation of mathematical models linking theoretical and practical knowledge, geometrical and analytical method of proof.

Keywords: duality, duality principle, dual problem, dual theorem.

УДК 372.851

ЗАДАЧИ ПРАКТИЧЕСКОЙ НАПРАВЛЕННОСТИ В ИСТОРИИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ XX ВЕКА И НА СОВРЕМЕННОМ ЭТАПЕ

Еребакан Ирина Валериевна
Шахтерская средняя школа № 1, г. Свердловск Луганской обл.
yerebakan@mail.ru

Аннотация. В статье проведен ретроспективный анализ задач практического содержания в учебниках разных исторических эпох. Автор сделал как количественное сравнение, так и качественное, обращая особое внимание на содержание задач по теме «Прогрессии». Представляет свой вариант решения проблемы недостаточного количества практических задач в учебниках, который состоит в дополнительной подборке учителем задач такого типа к каждой теме школьного курса.

Ключевые слова: учебник математики, математика в школе, задачи практического содержания, практическая направленность обучения.

Успех обучения и качество математической подготовки выпускника средней школы зависит от многих факторов, среди которых и качество учебников, по которым проходит обучение. Общепризнанно, что задачный материал школьных учебников должен быть максимально приближен к практической жизни, задачи должны иметь практическую направленность.

Многие исследователи, которые изучали проблему прикладной направленности школьного курса математики, отмечают низкий уровень сформированности умений современных выпускников использовать математические знания и методы для решения практико-ориентированных задач. Этот вопрос поднимался регулярно в работах ученых на протяжении всего XX века – ему посвящены работы С. Варданян, В. Гусева, Г. Глейзера, В. Фирсова, М. Егуповой, Г. Дорофеева и др. Среди причин указанного явления исследователями называется и такая: «Крайне мало необходимых современных учебно-методических пособий для школьников, содержание которых ориентировано на планомерную реализацию практико-ориентированного обучения математике на основной и старшей ступенях общего образования» [3, с.6].

В современной педагогической среде часто можно услышать мысль о том, что образование в советское время было более качественным, поэтому нами было решено сравнить современные учебники с учебниками советского периода, при этом рассмотреть задачный материал учебников и сборников задач начала, середины и конца XX века.

Выполним сравнительную характеристику современных учебников математики 5-6 классов по количеству сюжетных задач. Вычислим их долю среди всех задач, имеющихся в учебнике (табл. 1). Как видим, в каждом учебнике присутствуют такие задачи, и их количество существенно не отличается.

Табл. 1. Количество сюжетных задач (в %) в учебниках математики 5-6-х классов разных авторов

Авторы и название учебника	Количество текстовых задач, в%	
	5 класс	6 класс
Н.Я. Виленкин, В.И. Жохов и др. Математика. 5-6 класс [6]	32	27
Г.В. Дорофеев, Л.Г. Петерсон. Математика. Учебник для 5 кл в 2-х частях. Учебник для 6 кл. в 2-х частях[10]	29	28
Г.В. Дорофеев, И.Ф. Шарыгин. Математика. УМК для 5-6 классов[9]	30	22
И.И. Зубарева, А.Г. Мордкович. Математика.5,6кл.[7]	37	15

Сделаем теперь анализ содержания задач практической направленности, предлагаемых школьникам при изучении одной и той же темы в разные исторические периоды. Для анализа мы выбрали тему «Прогрессии».

Рассмотрим учебное пособие для учащихся 9 класса средней школы, а 1969 года выпуска, авторов Е.С. Кочетова и Е.С. Кочетовой [1].

Тема «Арифметическая прогрессия». Из 16 задач и упражнений на эту тему 2 задачи имеют практическую направленность.

976. Рабочий обслуживает 16 ткацких станков, работающих автоматически. Производительность каждого станка $a\frac{м}{ч}$. Рабочий включил первый станок в 7 ч, а каждый следующий на 5 мин позже. Узнать выработку в метрах за первые два часа работы [1, с. 321].

978. С 1 по 12 июля включительно температура воздуха ежедневно поднималась в среднем на $\frac{1}{2}$ градуса. Зная, что средняя температура за это время оказалась равной $18\frac{3}{4}$ градуса, определить, какой была температура воздуха 1 июля [1, с. 322].

В рабочей книге по математике для девятого года обучения, М.Ф. Берга и его соавторов, 1930 года издания [11], по теме «Арифметическая прогрессия» рассматривается 22 задания и только 2 носит практическую направленность.

19. Зная, что свободно падающее тело проходит в первую секунду 4,9 м и что ускорение силы тяжести равно 9,8, вычислите (не принимая во внимание сопротивления воздуха), через сколько времени упадет на землю предмет, падающий с высоты 300 м. [11 с, 22].

20. До какой высоты и сколько секунд будет лететь пуля, выпущенная вертикально с начальной скоростью 500 м/сек? [112 с, 22]

В учебнике 2017 года (авторы: Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешков, С.Б. Суворова) [2], по этой же теме из 24 предложенных задач только 2 носят прикладной характер.

581. Тело в первую секунду движения прошло 7 м, а за каждую следующую секунду – на 3 м больше, чем за предыдущую. Какое расстояние тело прошло за восьмую секунду? [2, с. 151]

582. Поезд, отойдя от станции, равномерно увеличивал скорость на 50 м в минуту. Какова была скорость поезда в конце двадцатой минуты? [2, с. 151]

Учебник алгебры Шапошникова Н.А. 1908 года издания [12] содержит лишь теоретический материал по теме, а также описание типичных задач по данной теме и алгоритма решения этих задач, без примеров

Курс элементарной алгебры Н. Извольского 1924 года также содержит теоретический материал и решение 3-5 примеров по каждой теме, но не предоставляет задания для решения на уроках или самостоятельного решения [4].

Это объясняется тем, что в то время задачный материал содержался не в учебниках, а специальных сборниках задач. Более того, выпускались сборники практических задач определенной воспитательной направленности, например, такие, которые помогали учителю осуществлять антиалкогольную пропаганду.

Из 13 задач на тему «Геометрическая прогрессия» в учебном пособии для учащихся 9 класса 1969 г.[1] только две можно связать с жизнью.

990. За одно качание воздушный насос откачивает из резервуара $\frac{1}{10}$ часть воздуха. Сколько процентов воздуха останется в резервуаре после 10 качаний? [1, с. 326]

991. Бактерия, попав в живой организм, к концу 20-й минуты делится на две бактерии; каждая из них к концу следующих 20 минут делится опять на две и т.д. Найдите число бактерий, образующихся из одной бактерии к концу суток. [1, с. 326]

В учебнике Макарычева 2017 года [2] задач прикладного характера больше – их четыре.

637. Население города составляет 60 тысяч человек. За последние годы наблюдается ежегодный прирост населения на 2%. Каким будет население города через 5 лет, если эта тенденция сохранится? [2, с. 166]

638. *(Для работы в парах)*. Ежегодный доход по вкладу «Юбилейный» составляет 6%. Первоначальный вклад был равен 8000 р. Какая сумма буден на счету у вкладчика:

а) через 4 года;

б) через 6 лет?

1) Обсудите, с какой последовательностью мы имеем дело в этой задаче.

2) Распределите, кто выполняет задание а), а кто – б), и выполните расчеты, используя калькулятор.

3) Проверьте друг у друга, правильно ли выполнены задания, и исправьте ошибки, если они допущены. [2, с. 167]

639. На опытном участке леса ежегодный прирост древесины составляет 10%. Какое количество древесины будет на этом участке через 6 лет, если первоначальное количество древесины равно $2{,}0 \cdot 10^4$ м^3? [2, с. 167]

640. После каждого движения поршня разрежающего насоса из сосуда удаляется 20% находящегося в нем воздуха. Определите давление воздуха внутри сосуда после шести движений поршня, если первоначально давление было равно 760 мм рт. ст. [2, с. 167]

Анализ задач разного периода показывает, что их математическое содержание не изменяется с течением времени. Различаются лишь их сюжеты: в них отражается жизнь людей, характерная данному периоду времени. В учебниках и задачниках советского времени задачи отражают жизнь рабочих, пионеров и колхозов. В дореволюционных книгах встречаем задачи, где речь идет про крестьян и их нелегкую жизнь. Что касается современных учебников, то в них отражены проблемы нынешнего времени: развитие компьютерных технологий, плохая экология, экономическое развитие.

Понимая необходимость решения обучающимися задач практической направленности, мы создали свою подборку задач такого типа для современных школьников. Приведем несколько примеров тех задач, которые, как подтверждает наш опыт, вызывают наибольший отклик у обучающихся.

Задачи на тему «Арифметическая прогрессия».

1. Ученик 10 класса для поддержания здоровья решил бегать по утрам, начиная с 2 км за день. Но каждый день увеличивал эту дистанцию в арифметической прогрессии так, что на одиннадцатый день пробежал 4км. На какое расстояние он увеличивал дистанцию каждый день? Сколько километров пробежал за 11 дней?

2. В сентябре родители Алексея давали ему 300 руб карманных денег. В дальнейшем сумма ежемесячно увеличивалась на 20% от сентябрьской суммы. Сколько родители дадут денег сыну в декабре? Сколько всего Алексей получил денег на карманные расходы с сентября по декабрь?

3. Лекарственную настойку пьют каплями. В первый день 6 капель, а каждый следующий на 3 капли больше, чем в предыдущий. Начиная с 11 дня, суточную дозу ежедневно уменьшают на 3 капли, и заканчивают курс лечения на 19 день после его начала. Сколько капель принято больным за первые 10 дней лечения? Сколько капель назначен курс лечения?

4. Тем, кто планирует свой отпуск провести на море, врачи рекомендуют в первый день загорать 5 минут. А в каждый последующий день увеличивать время пребывания на солнце на 5 минут. В какой день время пребывания на солнце будет равно 40 минут, если отпуск начать в пятницу?

5. Рабочие, которые взялись копать колодец, попросили за свою работу оплату по следующей схеме: за первый метр – 150 рублей, а за каждый последующий метр на 60 рублей больше, чем за предыдущий. Сколько они заработают денег, выкопав колодец глубиной 12 метров?

Задачи на тему «Геометрическая прогрессия» составляем с учетом местных особенностей, используем реальные статистические данные, касающиеся нашего поселка и школы. Например:

1. В школе 4 000 жителей. Приезжий в 8.00 рассказывает новость

четырем соседям; каждый из них рассказывает новость уже четырем своим соседям и т.д. Во сколько эта новость станет известна половине посёлка?

2. Ученик, заболевший гриппом, может заразить четырех учеников. Через сколько дней заболеют все учащиеся школы в количестве 341 человека?

Составляя задачи на эту тему, мы особое внимание уделили задачам, позволяющим формировать финансовую грамотность и распознавать мошенничество, в частности, финансовые пирамиды:

В первую очередь нужно понять механизмы этих организаций. Разберемся с этим. Организатор начинает вовлекать в свою организацию и говорит, что, если внести необходимую минимальную сумму по указанным адресам, а затем заплатить ещё по 5 таким же адресам, вычеркнув первый адрес и дописав свой последним, то через некоторое время вы получите уйму денег. Желающих быстро разбогатеть немало, но в выигрыше оказываются только учредители такой игры. Объясняем математическую природу такой ситуации. Число участников увеличивается в 5 раз с каждым кругом, т.е. имеем геометрическую прогрессию со знаменателем 5. Если пятёрка устроителей подпишет, допустим, 120 человек со своими адресами, то в первом круге участвуют 120 человек, во втором – 600, в третьем – 3 000, …, в десятом – 234 375 000 человек; что намного больше населения страны. Так что участник, включившийся в восьмом или девятом круге, уже ничего не получит.

Еще один распространенный вид обмана – сетевой маркетинг. Что такое сетевой маркетинг? Многие школьники не имеют об этом ни малейшего представления, но на них обрушивается поток информации об огромных заработках или доходах клиентов, о коттеджах, построенных ими на эти доходы, о приобретенных яхтах, бороздящих тропические моря, и тому подобное. Потрясающие перспективы завораживают многих школьников и наверняка им захочется попробовать себя и получить источник дохода. Тем более, что для этого требуется совсем немного: сдать фирме всего лишь тысячу, привести с собой еще трех клиентов, которые тоже принесут искомую сумму. Взамен этой суммы человеку вручают неликвидную бумагу, по которой нельзя получить обратно свои деньги. Простые расчеты убеждают, что это тоже обычная финансовая пирамида, основанная на геометрической прогрессии. Кому-то повезет, и он получит некий доход, особенно, если он находится недалеко от вершины этой пирамиды – хотя бы на третьем или четвертом ярусе. Но большинство клиентов, как это случалось со всеми, кто имел дело с пирамидами, останутся без прибыли, даже без своей тысячи.

Такие разборы очень повышают ценность математического знания в глазах школьников.

Итак, мы установили, что доля задач практического содержания в учебниках математики XX века существенно не изменилась. Изменились лишь сюжеты таких задач. Если же учебник, по которому проводят занятие современные педагоги, не содержит достаточно задач практической направленности, то учителю необходимо привлечь дополнительные источники или вместе с учениками самостоятельно придумать и решать задачу, которая будет отражать реальную ситуацию из жизни, интересную для них.

Литература

1. Алгебра и элементарные функции. Учебное пособие для учащихся 9 класса средней школы / Е. С. Кочетов, Е. С. Кочетова; под ред. О. Н. Головина. – 4-е изд. – М.: Просвещение, 1969. – 352 с.
2. Алгебра. 9 класс: учеб. для общеобразоват. организаций / Ю. Н. Макарычев [и др.]; под ред. С. А. Теляковского. – 4-е изд. – М.: Просвещение, 2017. – 287 с.
3. Егупова, М. В. Практико-ориентированное обучение математике в школе : практикум : учебное пособие / М. В. Егупова – Москва : Академия стандартизации, метрологии и сертификации, 2014. – 155 с.
4. Извольский, Н. Курс элементарной алгебры. Учебник. Часть вторая. / Н. Извольский. – Ленинград: БРОКГАУЗ-ЕФРОН, 1924. – 231 с.
5. Математика : Учебник для 6 класса. / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонский, М. С. Якир; под ред. ООО ТО «Гимназия», 2006. – 304 с.
6. Математика 5-6 класс / Н.Я. Виленкин [и др.]. – Изд-во: Просвещение, 2023. – 138 с.
7. Математика. 6 класс / И. И. Зубарева, А. Г. Мордкович. – М.: Мнемозина, 2009. – 264 с.
8. Математика. 6 класс / Н. Я. Виленкин [и др.]. – Изд-во: Просвещение, 2013. – 1856 с.
9. Математика. 6 класс./ Г. В. Дорофеев [и др.]. – 4-е изд. – М., 2016 – 288 с.
10. Математика. 5 класс. Учебник в 2 ч. / Г. В. Дорофеев, Л. Г. Петерсон.– 2-е изд., перераб. – М.,2011; Ч.1 – 176с, Ч.2 – 240 с.
11. Рабочая книга по математике, для 9-го года обучения в городской школе / М.Ф. Берг. Государственное издательство Москва- Ленинград, 1930. URL: https://sheba.spb.ru/shkola/matemat-rab9-1930 (дата обращения 11.02.2024).
12. Шапошников, Н. А. Учебник алгебры, применимый к программам средних учебных заведений / Н. А. Шапошников. // Часть вторая. Курсы старших классов гимназий и реальных училищ. – 7-е изд. – М: типография Императорского Московского Университета, 1908. – 177 с.

PRACTICAL TASKS IN THE HISTORY OF MATHEMATICAL EDUCATION OF THE TWENTIETH CENTURY AND AT THE PRESENT STAGE

Erebakan Irina Valerievna
State educational institution of the Luhansk People's Republic "Shakhterskaya secondary school No. 1", Sverdlovsk
yerebakan@mail.ru

Annotation. The article provides a retrospective analysis of the tasks of practical content in textbooks of different historical eras. The author made both quantitative and qualitative comparisons, paying special attention to the content of the tasks on the topic of "Progression". He presents his own solution to the problem of an insufficient number of practical tasks in textbooks, which consists in an additional selection of tasks of this type by the teacher for each topic of the school course.

Keywords: mathematics textbook, mathematics at school, tasks of practical content, practical orientation of learning.

УДК 372.851

МЕТОДИЧЕСКИЕ ОСОБЕННОСТИ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ЗАДАЧ С ЭКОНОМИЧЕСКИМ СОДЕРЖАНИЕМ ДЛЯ АКТИВИЗАЦИИ ПОЗНАВАТЕЛЬНОЙ АКТИВНОСТИ ШКОЛЬНИКОВ

Зыбина Анастасия Станиславовна
Луганское общеобразовательное учреждение – средняя общеобразовательная школа №49 имени Ю.А. Гагарина, г. Луганск
as.zybina@gmail.com

Аннотация: Усиление прикладной направленности школьного курса математики может осуществляться при помощи насыщения его задачами практического характера. К числу таких задач относятся задачи с экономическим содержанием. Использование на уроках математики экономических задач является не только мерой обучения финансовой грамотности, но и эффективным средством активизации познавательной активности школьников.

Ключевые слова: прикладные задачи, задача с экономическим содержанием, познавательное мышление, обучение, финансовая математика, проценты.

Сегодня претерпевают изменения большинство сфер человеческой деятельности, невозможно избежать весьма заметных изменений существующей системы образования. Активное преобразование банковской системы, инвестиционной и страховой деятельности, развитие предпринимательства требует привлечения специалистов к новой для нашей страны области – области финансовой математики. Школа как значимый социальный институт, должна учитывать все современные тенденции, возникающие при формировании нового экономического уклада российского общества, что требует качественного повышения общей экономической грамотности, достижения каждым выпускником школы определенного уровня экономической культуры.

Существующие условия социально-экономического развития страны и мира требуют от современного человека глобализации мыслительной деятельности с учетом современных тенденций общественных взаимодействий. Поэтому и в настоящее время, и в обозримом будущем обществу необходимо заботиться о формировании нового типа личности. Это должны быть специалисты, которые не только используют свои знания, но и отлично понимают, как эти знания получить. Поэтому сейчас остро возникает необходимость постоянно усовершенствовать устоявшуюся структуру образовательного процесса, его методы и организационные формы. Следует также реорганизовывать учебный процесс во всех его проявлениях, добавляя что-то новое в способы и в ход выполнения учебных задач. Не получая всех знаний в готовом виде, учащиеся должны на основе принципиальных установок учителя приобретать значительную их часть самостоятельно в ходе поисковых заданий, решения проблемных ситуаций и другими средствами, активизирующими познавательную деятельность.

Важным качеством формирующейся личности является познавательная активность, которая находит свое отражение во всех формах деятельности. Несмотря на то, что познавательная активности присуща всем обучающимся, у каждого она проявляется по-разному, потому эта тема традиционно является весомой в педагогической науке. Ежедневная педагогическая практика как опытных мастеров, так и молодых специалистов, доказывает, что процесс обучения будет более эффективным, если обучающийся будет проявлять познавательную активность. Это явление закреплено в педагогической теории как принцип активности и самостоятельности учащихся в процессе обучения. Такой принцип в значительной степени способствует развитию познавательной активности и укреплению когнитивных качеств личности в целом.

Основной организационной формой, в которой протекает организованное обучение школьников на всех этапах обучения, является урок. Активизация познавательной деятельности на уроке математики представляет собой залог успешного освоения школьной программы, потому на уроках перед учителем стоит первостепенная задача стремиться к достижению стадии активного познания, используя для этого все доступные ему и обучающимся методы [1].

Важным проявлением познавательной активности является познавательный интерес. Познавательный интерес – это один из важнейших для каждого педагога мотивов учения школьников. Формируя познавательный интерес на каждом уроке, педагог стремиться сделать его постоянной чертой личности обучающегося, то есть превратить школьный познавательный интерес в черту характера. Закрепление познавательного интереса возможно только при условии систематического воздействия познавательной активности на личность ученика. Действие и значение познавательного интереса невозможно переоценить. При условии достижения должного уровня познавательного интереса обучение даже слабых учеников протекает более продуктивно.

В педагогической практике принято применять и зачастую комбинировать известные и инновационные пути активизации познавательной деятельности. Это позволяет гарантировать высокие результаты обучения, гарантирует достижение запланированных показателей качества образования. Основные способы активизации познавательного интереса на разных этапах обучения школьников – это разнообразие форм, методов, средств обучения. Нередко как при подготовке урока, так и в ходе занятия перед педагогом стоит необходимость выбора таких сочетаний способов организации познавательного интереса, которые в возникших ситуациях стимулируют активность и самостоятельность учащихся в наибольшей степени. Все приемы активизации мыслительной деятельности учащихся не только способствуют развитию их мышления, воображения, творческих способностей, мировоззрения и личности, но является также необходимым и важным условием быстрого и эффективного приобретения знаний. Главным результатом использования приемов активизации познавательной активности является прочное овладение учеником предложенным программным материалом, приобретение им необходимых знаний, умений и навыков.

На уроках математики в основной и средней школе активизация познавательной активности может быть реализована за счет использования инновационных задач с показательным практическим значением. Внедрение практических заданий «из жизни» в современных условиях реализации образовательных стандартов обучения является одной из ведущих новелл современной методики преподавания математики. Важно понимать, что такие задачи позволяют не только выработать вычислительный навык, сформировать навыки и умения решения задач, но и открывает перед учеником широкое практическое приложение математики. Активизация познавательной активности за счет решения задач с практическим содержанием позволяет обеспечить так называемый долгосрочный эффект, то есть сформировать постоянным познавательный интерес к математическим дисциплинам.

Это позволяет однозначно утверждать, что эффективный учитель в современной школе может и должен обогатить содержание учебного материала задачами прикладного характера. Благодаря этому математическая наука становится «нужной» каждому ученику. Кроме того, стоит отметить, что, решая подобные задачи на уроках математики, наглядно демонстрируется функция интеграции школьных предметов и межпредметные связи математики и других дисциплин.

Действенным способом активизации познавательного интереса школьников через задачи прикладного характера может стать решение на уроках математики задач с экономическим содержанием. Под задачей с экономическим содержанием следует понимать задачу, содержание которой связано с экономическими объектами и процессами, а ее исследование с помощью математического аппарата способствует осознанному применению математических знаний. В таких задачах отражаются связи математики с экономикой и финансами, раскрываются прикладные аспекты математической науки.

Экономические задачи – это всегда задачи реальной жизни, которая окружает каждого школьника, его друзей, семью. Такие задачи не рассматриваются как задачи из толстых сборников учителя, они близки и потому понятны ребятам. При этом в таких задачах рассматриваются идеализированные жизненные ситуации, которые являются некоторыми текстовыми упрощениями, моделями тех ситуаций, которые могут возникнуть в реальной жизни. Например, при обращении в банк, операции с ценными бумагами, курсы валют, инфляционные процессы, торгово-денежные отношения, выборы и социальные опросы. В связи с этим можно смело утверждать, что задачи с экономическим содержанием позволяют не только активизировать познавательный интерес школьников к обучению и непосредственно на уроках математики, и к прочим наукам.

Задачи с экономическим содержанием решают и еще одну критически важную задачу. Многие школьники не в состоянии воспринимать и понимать речевые обороты взрослых, испытывают затруднения при решении задач экономического характера. Им также определить для себя сферу деятельности, профессию в будущем. Если задача на расчёт платежа по кредиту является злободневной и достаточно интересной, возможно, заинтересовавшиеся ученики самостоятельно или под руководством учителя, изучив предлагаемую работу, разбирая решения примеров задач, освоят предложенные методы решения задач с экономическим содержанием. В последние годы на ЕГЭ предлагаются задачи с экономическим содержанием. Для более эффективной подготовки учащихся к решению этих задач, в процессе обучения математике могут быть внедрены целые циклы занятий, начинающиеся с простых задач на проценты и постепенно подводящих к решению задач со сложными процентами, кредитами, вкладами и тому подобных [2].

Связь преподавания математики с экономическими знаниями является действенным средством реализации важнейшего принципа педагогики – единства теории и практики. Экономические сведения помогают учащимся лучше понять особенности труда в промышленности и хозяйстве. Кроме того, они и эмоционально воздействуют на учащихся, так как ярче показывают нужность профессии.

Экспериментально доказано, что решение задач с экономическим содержанием способствует формированию экономических понятий и воспитанию мышления на базе выявления логических связей между этими понятиями на этапах формализации и интерпретации задач с практическим содержанием [1].

На уроках математики нужно обеспечить органическую связь изучаемого теоретического и задачного материала, формировать у учащихся прочные и осознанные математические навыки необходимые для дальнейшего изучения математики, так и для решения прикладных задач. Важное значение в процессе обучения математике имеет понимание школьниками практической значимости того или иного учебного материала, ближней и дальней перспективы его использования.

Экономическая линия курса математики может быть реализована как непрерывная – от начальной школы до выпускного класса, поскольку основные арифметические операции позволяют младшим школьникам осваивать простейшие экономические понятия, как, например, цена, доход, прибыль; аппарат процентов уже и в настоящее время активно используется в 5-6 классах.

Задачи с экономическим содержанием являются практико-ориентированными заданиями. Умение решать такие задачи способствует лучшему усвоению содержания курса математики средней школы, позволяет передавать приобретенные знания и навыки в сферу экономики, которые, в свою очередь, стимулируют интерес школьников к проблемам прикладного характера обучения и математики в целом. Это позволяет наиболее полно реализовывать прикладную направленность в обучении и способствовать лучшему обучению и формированию умений решать задачи данного типа.

Важно отметить, что математические задачи с экономическим содержанием на проценты является эффективным средством активизации познавательного мышления школьников. Решение прикладных задач, требующих вычисления процентов и в качестве основного или дополнительного вопроса задачи, вызывает в обучающихся живой интерес к предмету, что позитивно сказывается на общем уровне восприятия материала.

Особое методическое значение имеют практические работы, в ходе которых обучающимся предложено решить задачи на проценты, условия которых взяты в их обычной жизни. Например, интерес учеников традиционно вызывают работы, при выполнении которых ученики должны рассчитать размер оплаты за коммунальные услуги в своей квартире, подсчитать деньги, которые они смогут сэкономить при покупке нового смартфона или игровой приставки в период распродажи, стоимость канцелярских товаров, которые нужно подготовить к новому учебному году и так далее. За счет полного включения в задание, абсолютного погружения в рассматриваемый вопрос достигается высокий уровень активизации познавательной деятельности. Таким образом, в ходе выполнения практической работы обучающиеся могут увидеть некоторые математические законы, получить новые знания практическим способом.

При решении подобных задач обращается внимание школьников на понятие простых процентов, способ их начисления и на вывод формулы (построении модели) простого процентного роста [3].

Конечно, самой доступной в настоящее время и для школьников, да и для взрослых, чья профессия не связана с экономикой, моделью начисления процентов является начисление процентов на депозит. В связи с этим знакомство с финансовой математикой рекомендуется начинать с задач начисления простого процента на банковские вклады физических лиц.

Таким образом, познавательная деятельность является социально значимым качеством человека и формируется в процессе образовательной деятельности. При правильной педагогической организации деятельности учащихся и систематической и целенаправленной воспитательной деятельности познавательный интерес может и должен стать устойчивой чертой личности школьника и оказывает сильное влияние на его развитие. Эффективным решением активизации познавательного интереса школьников через задачи прикладного характера может стать использование на уроках математики задач с экономическим содержанием. Систематическое выполнение заданий, последовательное прохождение приведенных уровней позволяет педагогу постепенно выполнять поставленные задачи, повышать уровень экономической грамотности учеников, активизировать познавательное мышление школьников на уроках математики.

Литература

1. Зайцева, И. А. Формирование познавательного интереса к учению как способ развития креативных способностей личности / И. А. Зайцева – Ноябрьск, 2005. – 124 с.

2. Трубинова, К. М. Познавательный интерес и его развитие в процессе обучения в начальной школе. К. М. Трубинова. // Педагогика сегодня: проблемы и решения : материалы II Междунар. науч. конф. (г. Казань, сентябрь 2017 г.). – Казань: Молодой ученый, 2017. – С. 9–14. URL: https://moluch.ru/conf/ped/archive/270/12881/ (дата обращения: 11.12.2023).

3. Фунтиков, Р. А. Методика проведения курса по выбору «Решение задач с экономическим содержанием» для учащихся 10-го класса / Р. А. Фунтиков // Молодой ученый. – № 34 (220), 2018. – С. 119–123. URL: https://moluch.ru/archive/220/52452/ (дата обращения: 12.12.2023).

METHODOLOGICAL FEATURES OF THE USE OF TASKS WITH ECONOMIC CONTENT TO ENHANCE THE COGNITIVE ACTIVITY OF SCHOOLCHILDREN

Zybina Anastasia Stanislavovna
Lugansk general education institution – secondary school No.49 named after Yuri Gagarin, Lugansk
as_zybina@gmail.com

Annotation. Strengthening the applied orientation of the school mathematics course can be carried out by saturating it with practical tasks. These tasks include tasks with economic content. The use of economic problems in mathematics lessons is not only a measure of teaching financial literacy, but also an effective means of activating the cognitive activity of schoolchildren.

Keywords: applied problems, a problem with economic content, cognitive thinking, learning, financial mathematics, percentages.

УДК 372.851

ЗНАКОМСТВО ШКОЛЬНИКОВ С ИМЕННЫМИ ЧИСЛАМИ НА УРОКАХ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

Петухов Тимофей Дмитриевич[1], Панишева Ольга Викторовна[2]
[1,2]Луганский государственный педагогический университет, г. Ровеньки
[1]petukhovimofey@gmail.com

Аннотация. В статье предлагается один из способов персонификации математики и информатики – знакомство школьников с именными числами. Именными авторы называют числа, носящие имена ученых-математиков. Авторы описывают возможности включения биографических материалов в школьную программу.

Ключевые слова: методика математики, персонификация математики, именные числа.

Математика – одна из наук, которая возникла в глубокой древности. Она развивалась на протяжении многих веков, и за это время ее творцами были великие ученые из разных стран и эпох. Знакомство с историей математики, с биографиями ее творцов – это важный шаг в изучении этой науки.

Важности персонификации математики уделяли внимание многие исследователи – В. Гугнин, Н. Догадова, И. Мамонтова, О. Панишева, В. Пырьев, М. Шмигевский и др. Чаще всего авторы связывают возможности персонификации с тем материалом, который имеется в школьной программе – теоремами или правилами, носящими имена ученых-математиков, например, теорема Фалеса, теорема Пифагора, теорема Виета, решето Эратосфена, декартова система координат, евклидова геометрия и т.д.

Одним из способов познакомиться с историей математики является изучение именных чисел. Именные числа – это числа, которые названы именами известных математиков. Поэтому их изучение предполагает получение информации о тех, кто их создал.

Знакомство с историей математики и биографиями ее творцов, в свою очередь, имеет важное значение в поддержании интереса к изучению математики, в формировании личности обучающихся. Во-первых, оно позволяет понять, как развивалась математика, как менялись ее методы и представления. Во-вторых, оно помогает развить математическое мышление и воображение. В-третьих, оно позволяет познакомиться с культурой разных народов и эпох.

Знакомиться с именными числами обучающиеся могут самостоятельно или с помощью педагога во время уроков или внеклассных мероприятий. В зависимости от способа знакомства с ними различаются и ресурсы для изучения именованных чисел. Это могут быть книги, статьи, электронные ресурсы об этих числах, об ученых-математиках и их открытиях (для самостоятельного ознакомления) или же задания, выполняя которые можно узнать свойства именных чисел и информацию о тех, кто их создал.

Рассмотрим примеры таких чисел и опишем, где и как можно знакомить с ними школьников.

Первым по популярности является число Эйлера, также называемое неперовым числом, обозначается строчной буквой e и является математической константой. Его открытие приписывается швейцарскому математику Леонарду Эйлеру**,** который впервые описал его в 1727 году. Приближенное значение: 2,718281828459045... Это число является основанием натурального логарифма, логарифм числа x по основанию e обозначается $ln(x)$ [4]. Логично, что знакомство с этой константой в курсе математики проводится при изучении логарифмов и экспоненциальной функции $y = e^x$. Чаще всего информацию об этом числе сообщает учитель. Для того, чтобы облегчить запоминание значение этой константы, учитель может обратить внимание на цифры, его составляющие. Сделать это можно и в стихотворной форме:

У числа ***e*****,** ребята,
Есть секрет простой
Две целых семь десятых
И дважды Лев Толстой**.**

А коль надумал школьник
Знанием блеснуть,
Прямоугольный треугольник
Ему подскажет путь.

Он вам подскажет быстро,
Коль катеты равны,
Ты к предыдущим цифрам
Добавь его углы.
(e = 2,7 1828 1828 45 90 45…)[2]

Здесь имеется в виду, что 1828 – год рождения Льва Толстого, и углы прямоугольного равнобедренного треугольника равны 45, 90 и 45.

Вторым именным числом, знакомство с которым может вызвать интерес школьников, является число Рамануджана и Харди, это число 1729. Оно названо в честь индийского математика Сринивасы Рамануджана и его британского коллеги Г.Х. Харди. Интересна история этого числа. В 1917 году Рамануджан приехал в Англию, чтобы работать с Харди. Однажды Харди навестил Рамануджана в больнице и, чтобы начать разговор, сказал: «Я приехал на такси номер 1729. Это довольно скучное число, не правда ли?». Рамануджан тут же ответил: «О нет, это очень интересное число! Это наименьшее число, которое можно представить как сумму двух кубов двумя различными способами!» [1].

Познакомить с ним школьников можно в 6 классе при изучении признаков делимости и понятий простого и составного числа. Например, можно предложить разложить это число на множители.

Еще одно место школьной программы, в которую можно включить знакомство с числом Рамануджана – это изучение формул сокращенного умножения, а именно суммы кубов. Это связано со свойством, которое мгновенно открыл Рамануджан: число 1729 –это наименьшее число, которое можно представить как сумму двух кубов двумя различными способами: $1729 = 1^3 + 12^3 = 9^3 + 10^3$. Здесь работа может быть построена в виде соревнования, в котором необходимо вычислить сумму кубов. Первая группа считает значение выражения $1^3 + 12^3$ (без использования калькулятора) по действиям, вторая – с использованием формулы. Соревнование проводится еще раз, но уже для выражения $9^3 + 10^3$. После этого обращается внимание, что получилось одно и то же число, и сообщается его название. Также можно познакомить и с другими свойствами этого числа, например, с тем, что оно является суммой кубов первых двенадцати чисел: $1729 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + 12^3$.

Третье число, носящее имя математика, вернее, последовательность чисел – это числа Фибоначчи. Им можно уделить внимание при изучении последовательностей. Задание может состоять в поиске закономерностей, правила, по которому образована последовательность чисел : 1, 2, 3, 5, 8,13…, после ее обнаружения можно познакомить с известной историей о размножении кроликов, показать, где эти числа встречаются в природе и какими еще любопытными свойствами обладают. Например, в природе их можно обнаружить в спирали и в строении раковины улитки, в архитектуре они могут использоваться для создания гармоничных пропорций зданий, а в музыке - для создания красивых мелодий и гармоний, а также используются для оптимизации процессов в генетике, биологии и экономике. Помимо этого, числа Фибоначчи используются для создания алгоритмов и программ, которые помогают решать различные задачи. Они могут использоваться для оптимизации работы компьютерных систем[5].

Есть место для именных чисел и на уроках информатики. Таким числом может стать число Кармайкла. Его история будет интересна тем, кто интересуется вопросами существования внеземных цивилизаций. Для того, чтобы установить коммуникацию с инопланетянами, если такие существуют, предлагается отправлять в космос сигнал, который однозначно распознавался бы как искусственный. Для этого не подойдут простые числа, потому что в природе они встречаются, например, в виде периодичности жизни цикад. А вот числа Кармайкла – это составные числа, по своим свойствам похожие на простые, для этой задачи подойдут. Примером их являются числа 561, 1105,1729, 2465 и т.д. Числа Кармайкла чаще всего представляют собой произведение трех простых множителей. Поэтому можно предлагать их в качестве заданий, где нужно составить алгоритм (программу) разложения числа на простые множители, и уже в связи с этим знакомить с историей их открытия, связанной с доказательством малой теоремы Ферма. Учитывая, что простые числа нашли своё применение в теории кодирования информации, то в этом же разделе могут использоваться и числа Кармайкла. Они имеют применения в криптографии, например, в тестах Миллера-Рабина, используемых для проверки числа на простоту [3].

Еще больше возможностей для знакомства школьников с именными числами имеет внеклассная работа. На внеклассном мероприятии, которое не обязательно привязано к обязательной школьной программе, возможно знакомство и с другими видами чисел, например, с числами Мерсена, Ферма, появившимися в результате поиска общей формулы для поиска простых чисел. Формы такого мероприятия могут быть различными, например, виртуальная «экскурсия в музей чисел, конференция об истории простых чисел, путешествие «по следам известных чисел», заседание клуба детективов «раскроем тайны этого числа» и т.д.

Еще более увлекут школьников на таких мероприятиях эпизоды из фильмов или мультфильмов, в которых есть отсылки к таким числам. Так, показав несколько таких эпизодов, можно задать вопрос, какие числа были в каждом из них, а уже потом рассказывать о том, какое имя носит это число. Так, число Рамануджана присутствует как номер на борту корабля «Нимбус» в мультсериале «Футурама», также как номер коробки с одной из вселенных в эпизоде «The Farnsworth Parabox». В фильме «Человек, который познал бесконечность», Харди садится в такси с номером 1729 [1]. В заключении каждого такого мероприятия может проводиться интерактивный опрос или соревнование. Одним из заданий этого соревнования может стать такое: установить соответствие между именами ученых и числами, которые носят их имена.

Итак, числа Рамануджана, Кармайкла, Фибоначчи, Эйлера и другие – все они имеют множество применений в различных областях науки и техники. Найдется место для знакомства с ними и в школьной программе. Сообщая названия этих чисел, учитель обращает внимание и на тех математиков, чьи имена они носят, и приводит хотя бы краткие биографические факты об этих ученых, что, несомненно, делает изучение математики и информатики более осознанным, «очеловеченным», неформальным.

Литература

1. 1729 – число Рамануджана-Харди. URL: https://pikabu.ru/story/1729_chislo_ramanudzhanakhardi_5280432 (дата обращения 10.01.24).

2. Математика в стихах. 5-11 классы : задачи, сказки, рифмованные правила / авт.-сост. О. В. Панишева. – Волгоград : Учитель, 2013. – 219 с.

3. Числа Кармайкла. URL https://ru.wikipedia.org/wiki/ Число_Кармайкла (дата обращения 11.01.2024).

4. Число Эйлера. Математика для всех. URL: https://dzen.ru/a/XKW4kcYE3AId802p (дата обращения 10.01.24).

5. Числа Фибоначчи: что это, для чего нужны, где используются и

почему так популярны. URL: https://skillbox.ru/media/code/chisla-fibonachchi-dlya-chego-nuzhny-i-pochemu-tak-populyarny/ (дата обращения 12.01.24).

INTRODUCING SCHOOLCHILDREN TO NOMINAL NUMBERS IN MATHEMATICS AND COMPUTER SCIENCE LESSONS

***Petukhov Timofey Dmitrievich*[1], *Panisheva Olga Viktorovna*[2]**
[1,2]***Lugansk State Pedagogical University, Rovenky***
[1]***petukhovimofey@gmail.com***

Annotation. The article describes how you can use nominal numbers in mathematics and computer science lessons. Getting to know the biographies of mathematicians and their discoveries maintains interest in the study of mathematics and helps develop mathematical thinking and imagination.

Keywords: mathematics methodology, personification of mathematics, nominal numbers.

УДК 373.5.016:517.91

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ОБУЧЕНИЯ РЕШЕНИЮ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В КОЛЛЕДЖАХ ТЕХНИЧЕСКОГО ПРОФИЛЯ

***Цапенко Яна Игоревна*[1], *Давыскиба Оксана Викторовна*[2]**
Луганский государственный педагогический университет, г. Луганск
[2]***davidovao@list.ru***

Аннотация. В статье анализируется проблема профессионально-ориентированного обучения студентов технических направлений, при реализации которого специфика содержания заключается в решении профессионально-ориентированных задач. Обоснована значимость курса дифференциальных уравнений относительно его прикладной направленности, также проведен анализ задач прикладного характера в курсе дифференциальных уравнений.

Ключевые слова: профессионально-ориентированное обучение, дифференциальные уравнения, среднее профессиональное образование.

В условиях современной рыночной экономики и необходимости использования наукоемких технологий в производстве востребованы специалисты, которые обладают фундаментальными математическими знаниями, владеют навыками использования соответствующего математического аппарата, разработки новых и оптимизации существующих решений. Последнее время в Российской Федерации происходит модернизация системы среднего профессионального образования, обновление его содержания с целью повышения качества подготовки специалистов среднего звена.

Таким образом, профессионально значимыми качествами специалиста в современных реалиях являются его профессиональная компетентность, конкурентоспособность, способность к эффективному решению прикладных задач.

Целью статьи является теоретическое обоснование профессионально-ориентированного обучения в колледжах технического профиля с помощью изучения дифференциальных уравнений.

Государственные образовательные стандарты регламентируют профессиональную ориентацию в содержании образования, которая прослеживается как в общепрофессиональных дисциплинах, так и в профессиональных модулях. Эта профессиональная направленность подкрепляется перечнем профессиональных компетенций, методами их развития, имеющих свою конкретную специфику, а также четко определенными требованиями к результатам обучения.

Для студентов технических направлений подготовки, среднего профессионального образования в частности, одним из наиболее значимых с точки зрения позиции будущей профессиональной деятельности разделов математики является раздел «Дифференциальные уравнения», поскольку дифференциальные уравнения выступают математическими моделями различных реальных явлений механики сплошной среды, химических реакций, электрических и магнитных явлений и др.

Большинство исследователей в области педагогики придерживается единого мнения о значимости курса дифференциальных уравнений относительно его прикладной направленности. Данный учебный курс играет важную роль в фундаментальной и профессиональной подготовке будущего специалиста как с точки зрения формирования научного мировоззрения, так и математической культуры, в частности понимания прикладной и практической направленности полученных знаний и овладения методом математического моделирования реальных процессов [1].

Например, в своей работе [2] авторы, изучая проблему профессиональной направленности в обучении математике в технических вузах, выделяют четыре основных направления исследований:

– в первом направлении исследований (С. И. Федорова, Г. А. Бокарева, С. В. Плотникова и др.) данная проблема изучается как обще-методическая: определяются средства, пути, условия, в целом которые способствуют эффективному осуществлению принципа профессиональной направленности обучения;

– некоторые исследователи связывают профессиональную направленность с использованием математических знаний и методов в профессиональной деятельности. Например, в работах Е. В. Василевской, Р. М. Зайкина, Л. Н. Трофимовой, И. Г. Михайловой, Н. В. Чхаидзе, Р. П. Исаева, С. В. Плотниковой, Т. Н. Алешиной и других исследователей освещены данные аспекты;

– представители третьего направления Е. В. Василевская, С. В. Плотникова, А. Б. Каганов, Р. М. Зайкин и другие ученые рассматривают профессиональную направленность как средство мотивации учебной деятельности студентов;

– в четвертом направлении выделяется наиболее содержательный вариант профессиональной направленности, который связан с личностной направленностью обучения и предполагает использование педагогических средств (содержания, форм, методов обучения), с целью формирования и развития профессиональных качеств личности. Например, в работах таких ученых, как Н. Р. Жарова, Р. А. Жаренкова, Р. А. Исакова и других, выделены ряд профессионально значимых качеств личности инженера-строителя: понимание роли математики в профессиональной деятельности, приобретение необходимых знаний, умений и навыков, способность осуществлять выбор математических методов, а также самостоятельное решение математических задач и оценка своей деятельности.

Таким образом, несмотря на различные подходы, ученые-педагоги в целом рассматривают реализацию принципа профессиональной направленности за счет специального отбора содержания, выбора методов, форм и средств обучения. Относительно же профессионально-направленного обучения математике большинство авторов акцентируют специфику содержания в решении профессионально-ориентированных задач. Такой подход позволяет реализовать межпредметные связи математики с профильными дисциплинами и соответствует основной цели обучения математике в колледжах технического профиля – усвоение знаний и умений, необходимых для дальнейшего успешного изучения спецдисциплин и профессиональных модулей и профессиональной деятельности [7, с. 24].

Изучение дифференциальных уравнений в основном ориентировано на изучение основных типов дифференциальных уравнений и аналитических методов их решения (дифференциальные уравнения первого порядка, дифференциальные уравнения высших порядков, системы дифференциальных уравнений). Поэтому на этапе формирования у студентов умений и навыков определения типа дифференциального уравнения, выбора метода его решения по соответствующему алгоритму не целесообразно применять системы компьютерной математики. Наиболее рационально использовать специальные компьютерные программы, наряду с традиционными методами обучения, при изучении приближенных методов решения (графические, численные, аналитические) дифференциальных уравнений, которые не относятся к известным типам и их решение не может быть получено аналитическими методами [3; 4].

Например, рассматривая системы компьютерно-ориентированных задач в курсе дифференциальных уравнений [5, с. 353], авторы выделяют две основные группы задач, для которых необходимо применение компьютерных программ:

– задачи на построение графического и численного решения дифференциальных уравнений, систем дифференциальных уравнений;

– прикладные задачи, решаемые с помощью приближенных методов.

Действительно, к первой группе задач можно отнести задачи:

– на построение семейства интегральных кривых дифференциального уравнения методом изоклин;

– анализ графического решения дифференциального уравнения;

– построение фазовых траекторий системы дифференциальных уравнений, определение зависимости между фазовыми траекториями заданной системы.

Задачи прикладного характера в курсе дифференциальных уравнений в свою очередь разделяют на три группы:

– задачи, с заданной математической моделью;

– задачи, математическая модель которых известна из теоретического курса;

– задачи, которые требуют составления математической модели.

Таким образом, при решении прикладных задач происходит непосредственно математическое моделирование конкретного процесса, явления. В качестве математических моделей реальных процессов используются дифференциальные уравнения или системы дифференциальных уравнений [6]. Математическое моделирование является важным элементом профессиональной подготовки будущего специалиста, так как способствует пониманию происходящего процесса, дает возможность установить его качественные и количественные характеристики для последующего анализа полученных результатов.

Аналитическое решение математической модели может потребовать выполнения большого количества вычислений. Поэтому в большинстве случаев целесообразнее решать данные модели приближенными методами с помощью применения систем компьютерной математики. Это позволит уменьшить количество времени, затраченное на решение прикладной задачи. С другой стороны, можно предложить студентам решить рассматриваемые прикладные задачи аналитическими методами и сравнить полученные результаты с результатами решения приближенными методами.

Литература

1. Асланов, Р. М. Методическая система обучения дифференциальным уравнениям в педагогическом вузе: автореф. дис. д-ра.пед.наук: 13.00.02 / Р. М. Асланов. – М., 1997. – 36 с.

2. Бочкарева, О. В. Профессиональная направленность обучения: пути реализации и экспериментальные исследования: моногр. / О. В. Бочкарева. – Пенза.: ПГУАС, – 2014. – 120 с.

3. Давыскиба, О. В. Возможности использования систем компьютерной математики при изучении дифференциальных уравнений / О. В. Давыскиба Эвристическое обучение математике. Материалы пятой международной научно-методической конференции (23–25 декабря 2021 г.). – Донецк.: Изд-во

ДОННУ, 2021. – С. 138–142.

4. Давыскиба, О. В. Фундаментализация математической подготовки в профессиональном образовании будущих учителей математики / О. В. Давыскиба // Ценностные приоритеты образования в XXI веке: Инновационные процессы в профессиональном образовании. Актуальные тенденции развития дополнительного педагогического образования : мат. науч.-практ. конф. (10–11 нояб. 2022 г., г. Луганск), ГОУ ВО ЛНР «ЛГПУ».– Луганск. : Книта, 2022. – С. 138–143.

5. Ильясова, Р. А. Системы компьютерно-ориентированных задач в курсе дифференциальных уравнений. URL: https://doi.org/10.51889/2020-1.1728-7901.62 (дата обращения: 10.12.2023).

6. Эдвардс, Г. Дифференциальные уравнения и краевые задачи моделирования и вычисление с помощью Mathematica, Maple, и MATLAB / пер. с англ. – 3-е изд. М.: Вильямс, 2008. – 1104 с.

7. Федорова, О. Н. Методическая система профессионально-ориентированного обучения математике в колледжах технического профиля / дис. канд. пед. наук : 13.00.02. Место защиты: Ярослав. гос. пед. ун-т им. К.Д. Ушинского / О. Н. Федорова. – Ярославль, 2016. – 268 с.

THEORETICAL ASPECTS OF TEACHING THE SOLUTION OF DIFFERENTIAL EQUATIONS IN TECHNICAL COLLEGES

Tsapenko Yana Igorevna[1], Davyskiba Oksana Viktorovna[2]
[1,2]Lugansk State Pedagogical University, Lugansk
[2]davidovao@list.ru

Annotation. The article analyzes the problem of professionally oriented training for students in technical fields, in the implementation of which the specificity of the content lies in solving professionally oriented problems. The importance of the course on differential equations in relation to its applied focus is substantiated, and an analysis of problems of an applied nature in the course on differential equations is also carried out.

Keywords: professionally oriented training, differential equations, secondary vocational education.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

1. **Айдагулов Рустем Римович,** кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник кафедры теоретической информатики ФГБОУ ВО «МГУ им. М.В. Ломоносова», г. Москва
2. **Беденко Лариса Александровна,** учитель математики ГОУ ЛНР «Беловодская средняя школа №1», пгт. Беловодск, ЛНР
3. **Бозиев Олег Людинович,** кандидат физико-математических наук, доцент кафедры компьютерных технологий и информационной безопасности ФГБОУ ВО «КБГУ им. Х.М. Бербекова», старший научный сотрудник Института информатики и проблем регионального управления Кабардино-Балкарского научного центра РАН, г. Нальчик
4. **Братына Дмитрий Александрович,** магистрант 2-го курса направления подготовки 01.04.02 «Прикладная математика и информатика» ФГБОУ ВО «ЛГУ им. В. Даля», г. Луганск
5. **Гуленко Сергей Николаевич,** магистрант 2-го курса направления подготовки 01.04.02 «Прикладная математика и информатика» ФГБОУ ВО «ЛГУ им. В. Даля», г. Луганск
6. **Гончаров Андрей Викторович,** магистрант 2-го курса направления подготовки 01.04.01 Математика ФГБОУ ВО «ЛГПУ», г. Луганск
7. **Давыскиба Оксана Викторовна,** кандидат педагогических наук, доцент, доцент кафедры фундаментальной математики ФГБОУ ВО «ЛГПУ», г. Луганск
8. **Диденко Ольга Николаевна,** старший преподаватель кафедры медицинской, биологической физики и информатики ФГБОУ ВО «ЛГМУ им. Свт. Луки» Минздрава России, г. Луганск
9. **Долголенко София Андреевна,** магистрант 2-го курса направления подготовки 01.04.01 Математика ФГБОУ ВО «ЛГПУ», г. Луганск
10. **Дущенков Даниил Александрович,** студент 4-го курса направления подготовки 44.03.05 Педагогическое образование с двумя профилями подготовки Математика и информатика ФГБОУ ВО «ЛГПУ», г. Ровеньки
11. **Дымарский Яков Михайлович,** доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики ФГАОУ ВО «МФТИ (НИУ)», г. Москва
12. **Дюбо Елена Николаевна,** старший преподаватель кафедры высшей математики и методики преподавания математики ФГБОУ ВО «ЛГПУ», г. Луганск
13. **Евсеенко Алина Владимировна,** магистрант 2-го курса направления подготовки 01.04.01 Математика ФГБОУ ВО «ЛГПУ», г. Луганск
14. **Еребакан Ирина Валериевна,** учитель математики ГОУ ЛНР «Шахтерская средняя школа № 1», г. Свердловск
15. **Зыбина Анастасия Станиславовна,** учитель математики ГОУ ЛНР «ЛОУ – СОШ №49 имени Ю.А. Гагарина», г. Луганск
16. **Илюхин Александр Алексеевич,** доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры физико-математических основ инженерного образования**,** ИКТИБ, ФГАОУ ВО «ЮФУ»**,** г. Таганрог
17. **Клово Александр Георгиевич,** кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры физико-математических основ инженерного образования**,** ИКТИБ, ФГАОУ ВО «ЮФУ», г. Таганрог

18. **Кравченко Иванна Сергеевна,** магистрант 2-го курса направления подготовки 01.04.01 Математика ФГБОУ ВО «ЛГПУ», г. Луганск
19. **Кондрашев Владислав Андреевич,** магистрант 2-го курса направления подготовки 01.04.02 «Прикладная математика и информатика» ФГБОУ ВО «ЛГУ им. В. Даля», г. Луганск
20. **Куповых Геннадий Владимирович,** доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой физико-математических основ инженерного образования**,** ИКТИБ, ФГАОУ ВО «ЮФУ», г. Таганрог
21. **Леонов Никита Алексеевич,** магистрант 2-го курса направления подготовки 01.04.02 «Прикладная математика и информатика» ФГБОУ ВО «ЛГУ им. В. Даля», г. Луганск
22. **Лысенко Анастасия Алексеевна,** магистрант 2-го курса направления подготовки 01.04.01 Математика ФГБОУ ВО «ЛГПУ», г. Луганск
23. **Малый Вячеслав Вадимович,** кандидат технических наук, доцент, заведующий кафедрой прикладной математики ФГБОУ ВО «ЛГУ им. В. Даля», г. Луганск
24. **Минченко Дарью Юрьевна,** учитель математики АНО ДО «Образовательный центр «Орион», г. Сочи
25. **Панишева Ольга Викторовна,** кандидат педагогических наук, доцент, доцент кафедры высшей математики и методики преподавания математики ФГБОУ ВО «ЛГПУ», г. Ровеньки
26. **Петухов Тимофей Дмитриевич,** студент 2-го курса направления подготовки 44.04.01 Педагогическое образование. Математика и информатика ФГБОУ ВО «ЛГПУ», г. Ровеньки
27. **Полищук Наталья Алексеевна,** старший преподаватель кафедры фундаментальной математики ФГБОУ ВО «ЛГПУ», г. Луганск
28. **Савельев Валерий Михайлович,** кандидат физико-математических наук, доцент кафедры общеобразовательных дисциплин ФГБОУ ВО «ЛГУ им. В. Даля», г. Луганск
29. **Скринникова Анна Владимировна,** кандидат технических наук, доцент кафедры фундаментальной математики ФГБОУ ВО «ЛГПУ», г. Луганск
30. **Старченко Евгений Алексеевич,** магистрант 2-го курса направления подготовки 01.04.02 «Прикладная математика и информатика» ФГБОУ ВО «ЛГУ им. В. Даля», г. Луганск
31. **Темникова Светлана Владимировна,** кандидат технических наук, заведующий кафедрой фундаментальной математики ФГБОУ ВО «ЛГПУ», г. Луганск
32. **Хоменко-Никишина Ольга Николаевна,** магистрант 1-го курса направления подготовки 01.04.01 Математика ФГБОУ ВО «ЛГПУ», г. Луганск
33. **Цапенко Яна Игоревна,** магистрант 2-го курса направления подготовки 01.04.01 Математика ФГБОУ ВО «ЛГПУ», г. Луганск
34. **Шелехова Марина Сергеевна,** магистрант 2-го курса направления подготовки 01.04.01 Математика ФГБОУ ВО «ЛГПУ», г. Луганск
35. **Щелоков Вадим Сергеевич,** кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры прикладной математики ФГБОУ ВО «ЛГУ им. В. Даля», г. Луганск

Научное издание

Актуальные вопросы математики и методики преподавания математики

Сборник материалов Межрегиональной заочной научно-практической конференции
(28 февраля 2024 г., г. Луганск)

Редакционная коллегия оставляет за собой право технического и стилистического редактирования статей. Авторы статей несут полную ответственность за содержание статьи.

Под общей редакцией – ***С.В. Темникова, А.В. Скринникова***
Дизайн обложки – ***А.Р. Жабинская***
Корректор – ***Н.А. Полищук***
Верстка – ***А.В. Скринникова***

Размещено в РИНЦ

Подписано в печать 15.04.2024. Бумага офсетная.
Гарнитура Times New Roman.
Печать ризографическая. Формат 60×84/16. Усл. печ. л. 8,14.
Тираж 50 экз. Заказ № 27.

Издательство ЛГПУ
ФГБОУ ВО «ЛГПУ»

ул. Оборонная, 2, г. Луганск, ЛНР, 291011. Т/ф: +7-857-258-03-20
e-mail: knitaizd@mail.ru