МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**ФЕДЕРАЛЬНОЕ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ЛУГАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ФГБОУ ВО «ЛГПУ»)**

**Е. В. Тищенко,
Я. П. Кривко**

МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИКИ

Учебно-методическое пособие
для студентов очной и заочной форм обучения
по направлению подготовки 44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки), профили: «Математика. Информатика», «Математика. Экономика»
Часть 2

Луганск
Издательство ЛГПУ
2025

УДК 373.016:51(076)
ББК 74.262.21р3
Т47

Рекомендовано Ученым советом
ФГБОУ ВО «ЛГПУ» в качестве учебно-методического пособия для студентов очной и заочной форм обучения, обучающихся по направлению подготовки 44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки) профили: «Математика. Информатика», «Математика. Экономика» Часть 2
(протокол № 6 от 18.12.2025 г.)

Р е ц е н з е н т ы :

Капустин Д. А. – заведующий кафедрой информационных образовательных технологий и систем федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Луганский государственный педагогический университет», доктор технических наук, доцент;

Махалова В. В. – доцент кафедры прикладной математики федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Луганский государственный университет имени Владимира Даля», кандидат технических наук, доцент;

Давыскиба О. В. – доцент кафедры фундаментальной математики федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Луганский государственный педагогический университет», кандидат педагогических наук, доцент.

Тищенко Е.В., Кривко Я.П.
Т47 **Методика преподавания математики :** в 2 ч. Ч. 2 : учебно-методическое пособие / сост.: Е. В. Тищенко Я. П. Кривко ; ФГБОУ ВО «ЛГПУ». – Луганск : Издательство ЛГПУ ; ИП Орехов Д.А., 2025. – 96 с.

ISBN 978-5-907971-80-6 (ИП Орехов Д.А.)

Учебно-методическое пособие направлено на приобретение теоретических знаний и практических умений, необходимых для овладения основами профессии учителя математики, процессов работы в общеобразовательных учреждениях.

Учебно-методическое пособие предназначено для студентов, обучающихся по направлению подготовки 44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки), профили: «Математика. Информатика», «Математика. Экономика», а также для научных работников, педагогов, студентов педагогических учебных учреждений.

УДК 373.016:51(076)
ББК 74.262.21р3

ISBN 978-5-907971-80-6 (ИП Орехов Д.А.)

© Тищенко Е. В., Кривко Я. П., 2025
© ФГБОУ ВО «ЛГПУ», 2025
© Оформление ИП Орехов Д.А., 2025

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Учебная дисциплина «Методика преподавания математики» относится к дисциплинам обязательной части учебных планов подготовки бакалавров по направлению подготовки 44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки), профили: «Математика. Информатика», «Математика. Экономика».

Цель дисциплины состоит в формировании профессионально компетентного учителя математики, с творческим педагогическим мышлением, способного работать на конкурсной основе в школах разных типов.

Задачами дисциплины являются изучить основы теории и методики обучения математике с позиций дидактики, теории учебной деятельности и методов математики; обеспечить фундаментальное изучение студентами школьных программ, учебников и учебных пособий по математике, понимание заложенных в них методических идей; вооружить студентов необходимыми теоретическими знаниями для квалифицированного проведения всех видов занятий в школе; создать условия для дифференцированной подготовки будущего учителя математики к работе в средних учебных заведениях разных типов; воспитывать у будущих учителей творческий подход к решению проблем преподавания математики; сформировать умения и навыки самостоятельного анализа процесса обучения, исследования методических проблем; создать благоприятные условия для непрерывного самообразования, научного поиска путей усовершенствования процесса обучения математике, повышения математической подготовки учащихся; сформировать у студентов навыки методической проектировочной деятельности на уровне требований, сформулированных современной Концепцией модернизации школьного математического образования; умения учитывать индивидуальные и возрастные особенности и способности школьников в процессе обучения математике, современные потребности общества и осуществлять на этой основе дифференцированное обучение математике и педагогическую коррекцию; развивать профессиональные компетенции в различных областях педагогической деятельности; развивать исследовательские способности будущего педагога путем активного включения в образовательный процесс в области математики.

Представленная тематика практических занятий по дисциплине «Методика преподавания математики» может быть использована на занятиях при продолжении изучения курса. Пособием предусмотрено изучение дисциплины очной и заочной форм обучения в шестом семестре и десятом триместре. Согласно рабочей программе дисциплина состоит из 12 практических занятий, среди них – 6 занятий по разделу методики обучения алгебре в основной школе и 6 занятий – по методике обучения геометрии в основной школе, учебников и методических материалов по методике преподавания математики.

Для работы с учебно-методическим пособием предполагается, что студенты ознакомлены с такими дисциплинами как педагогика, психология и с основными дисциплинами по специальности математика.

Методика преподавания математики в основной и средней общей школе

Актуальными для современной методики преподавания математики являются следующие проблемы: стандартизация образования; дифференциация содержания образования; методическое обеспечение преподавания математики в связи с постоянным обновлением содержания школьного математического образования; нарушение межпредметных связей; несовершенная система контроля и оценки знаний учащихся при обучении математике; кадровое обеспечение учебного процесса и др. Образование – это организованный процесс постоянной передачи предшествующими поколениями последующим социально значимого опыта. Образование на современном этапе характеризуется усилением внимания к обучающемуся, к его саморазвитию и самопознанию, общечеловеческим знаниям, его обращенностью обучающегося к окружающему миру и себе, к воспитанию умения искать и находить свое место в жизни.

В определении целей образования учитываются потребности общества (социальный аспект) и потребности личности (личностный аспект).

Цели современного образования – предельно полно достижимое развитие тех способностей личности, которые нужны и ей, и обществу, включение ее в социально ценную активность; обеспечение возможностей эффективного самообразования за пределами образовательных систем.

Математическое образование – процесс и результат овладения учащимися системой математических знаний, познавательных умений и навыков, формирование на этой основе мировоззрения, нравственных и других качеств личности, развития ее творческих сил и способностей.

Основной *целью математического образования* является воспитание у школьников умения рассматривать явления реального мира с математической точки зрения, видеть практическую направленность математики и ее приложений.

Содержание современного образования строится с учетом: 1) соответствия логике математики как науки; 2) соответствия принципам обучения (научность, последовательность, системность и т.д.); 3) психологических возможностей и возрастных особенностей школьников разных ступеней обучения (младший школьник 1-4 классы, средний школьник – 5-9 классы, старший школьник – 10-11 классы); 4) адекватности потребности личности в образовании (дифференцированное обучение, коррекционное обучение и т.д.); 5) формирования профессиональной направленности школьников. Для решения своих проблем методика преподавания математики использует следующие методы: – эксперимент; – изучение и использование отечественного и зарубежного опыта обучения обучающихся; – анкетирование, беседы с учителями и учащимися; – анализ; – моделирование.

Термин «диалектика» используется в двух значениях. Первое заключается в том, что исследование основывается на наиболее общих законах развития природы, общества и мышления (основные законы – единство и борьба противоположностей, переход количественных изменений в качественные, отрицание отрицания). Второе значение диалектики предполагает рассмотрение познаваемых объектов и явлений в развитии, обусловленности их изменений различными факторами, взаимосвязи с другими объектами и явлениями.

Суть системного анализа заключается в том, что исследуемый объект рассматривается как система с определенными компонентами, указывается лидирующий компонент и выделяются связи между его составляющими.

Деятельностный подход применяется в разных смыслах: 1) Составляющая методологической основы методике обучения математике. 2) Обучение способам деятельности. 3) Обучение различным действиям, адекватным содержанию обучения математике. 4) Учебная деятельность.

Деятельностью называют процесс активности человека, характеризуемый предметом, потребностью и мотивом, целями и условиями их достижения, действиями и операциями.

Важнейшим видом деятельности является учебная деятельность, то есть деятельность обучающегося, направленная на приобретение теоретических знаний о предмете изучения и общих приемах решения, связанных с ним задач. В учебной деятельности выделяют следующие компоненты: понимание школьником учебной задачи, осуществление учебных действий, выполнение им действий контроля и оценки.

Для оценки эффективности разработанной методики обучения используются различные статистические методы. К общенаучным методам познания относятся аналогия, наблюдение и опыт, анализ и синтез, индукция и дедукция, обобщение, абстрагирование, конкретизация. Методы познания выступают как элементы содержания образования – с одной стороны, и как приемы мышления – с другой. Обладая высокой эвристичностью, методы научного познания широко используются в обучении математике.

Под аналогией понимают сходство предметов в каких-либо свойствах, признаках или отношениях. Умозаключение по аналогии – это такое умозаключение, в результате которого делается вывод о том, что исследуемый предмет, возможно, имеет еще один признак X, поскольку остальные известные нам признаки этого предмета сходны с признаками другого предмета, обладающего, кроме того, и признаком X. В качестве предмета могут выступать объекты, явления, процессы и т. д.

Анализ деятельности применения аналогии в различных конкретных ситуациях позволил выделить следующие действия:

1) составлять аналогии различных заданных объектов и отношений;

2) находить соответственные элементы в заданных аналогичных предложениях;

3) составлять предложение, аналогичное данному;

4) составлять задачу, аналогичную заданной, т. е. задачу, имеющую с данной сходное условие или заключение;

5) проводить рассуждение при решении задачи по аналогии с решением сходной задачи. Обобщение как форма перехода от частного к общему имеет целью выделение общих существенных свойств, принадлежащих только данному классу объектов. Использование обобщения при решении задач основано на: расширении области изменения параметра; переходе от данного множества к более широкому множеству, содержащему данное. Первое преимущественно применяется в алгебре, второе – в геометрии. Например, рассматривая равенства: $3 + 5 = 8$, $1 + 7 = 8$, $15 + 17 = 32$, учащиеся замечают, что в правой части каждого равенства записана сумма двух нечетных чисел, а в левой – четное число. Затем осуществляется переход от множества конкретных нечетных чисел к множеству чисел и от множества конкретных четных чисел к множеству четных чисел, т. е. делаем обобщение.

Анализ – логический прием, состоящий в том, что изучаемый предмет мысленно разделяется на составные элементы, каждый из которых затем исследуется в отдельности.

Синтез – мысленное соединение частей предмета, разделяемого в процессе анализа, установление взаимодействия и связей частей и познание этого предмета как единого целого. Синтез всегда связан с анализом. В нашем мышлении существует аналитико-синтетический метод, в котором анализ и синтез взаимно проникают друг в друга, сочетаясь в диалектическом единстве. В процессе формирования понятия анализ используется при выделении существенных признаков понятия, которые затем объединяются и образуют содержание понятия.

Важным элементом в формировании математических знаний стал образовательный процесс, а именно изучение отдельных тем.

Структура процесса обучения при изучении отдельной темы:

– диагностическая постановка целей изучения данной учебной темы на основе анализа специфики учебной темы, возможностей учащихся, количества учебных часов и т.д.;

– учет особенностей реализации дидактических принципов при изучении данной учебной темы (учет трудности, сложности, абстрактности учебного материала, его межпредметной значимости и т.д.);

– отбор содержания учебной темы, анализ его логико-дидактических особенностей и их учет при построении процесса обучения (тематическое, поурочное планирование);

– выбор и использование методов, средств и форм обучения;

– промежуточный контроль результатов обучения, коррекция обучения с целью достижения планируемых результатов обучения, итоговый контроль, создание условий для изучения следующей учебной темы.

При переходе к новой теме обозначенный цикл повторяется.

Процесс обучения формируется под влиянием ряда условий, в которых он протекает. Наиболее существенными из них являются возрастные особенности учащихся и количество учебного времени, отводимого на изучение математики. Последнее задается учебным планом (с учетом той или иной формы дифференциации обучения).

Все составляющие процесса обучения взаимосвязаны и влияют друг на друга. Ведущую роль в этом взаимодействии играют цели обучения, та или иная их содержательная интерпретация.

Литература

1. **Егупова, М. В.** Методическая подготовка учителя математики в высшем педагогическом образовании: задания для самостоятельной работы: учебно-методическое пособие / М. В. Егупова // Министерство образования и науки РФ. – М. : МПГУ, 2016. – 84 с. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://avidreaders.ru/book/ metodicheskaya-podgotovka-uchitelya-matematiki-v-vysshem.html (дата обращения: 21.02.2025).

2. **Медведева, О. С.** Психолого-педагогические основы обучения математике: теория, методика, практика / О. С. Медведева. – М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2015. – 207 с. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://ru.1lib.eu/book/2909850/b48ce2?regionChanged=&redirect= 149775771 (дата обращения: 20.02.2025).

3. **Рогановский, Н. М.** Методика преподавания математике в средней школе: учеб. пособие. В 2 ч. / Н. М. Рогановский, Е. Н. Рогановская. – Могилев : УО «МГУ им. А. А. Кулешова, 2011. – Ч. 2: Специальные основы методики преподавания математики (частные методики). – 312 с. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://1lib.eu/book/3279809/219c18 (дата обращения: 11.02.2025).

Вопросы и задания к обсуждению:

1. Что понимается под диалектикой?
2. Что такое деятельностный подход в образовании?
3. Раскрыть структуру изучения математического понятия.
4. Выписать основные результаты, планируемые при изучении курса алгебры и геометрии за 7–9 классы согласно ФГОС основного общего образования.
5. Рассмотреть систему оценивания за второй семестр изучения дисциплины «Методика преподавания математики» в Приложении А.
6. Какие бывают виды деятельности в методике преподавания математики?
7. Какие существуют методы для решения проблем в математическом образовании?

Практическое занятие № 1. Методика обучения алгебре в основной школе

Школьный курс алгебры. Основные содержательные линии, их краткая характеристика

Содержание линии «Алгебра» способствует формированию у обучающихся математического аппарата для решения задач из разделов математики, смежных предметов и окружающей реальности. Язык алгебры подчеркивает значение математики как языка для построения математических моделей процессов и явлений реального мира.

Развитие алгоритмического мышления, необходимого, в частности, для освоения курса информатики, и овладение навыками дедуктивных рассуждений также являются задачами изучения алгебры. Преобразование символьных форм вносит специфический вклад в развитие воображения учащихся, их способностей к математическому творчеству. В основной школе материал группируется вокруг рациональных выражений.

Признаки понятия «ведущая содержательная линия школьной программы по математике»:

– содержание представляет собой некоторый целостный блок учебного материала;

– изучается на протяжении длительного времени;

– содержит одно из фундаментальных понятий математики-науки и ряд связанных с ним понятий;

– включает в себя один или несколько специальных математических методов, базирующихся на данном фундаментальном понятии;

– базовое (фундаментальное) понятие линии по мере «прохождения» по школьному курсу неоднократно расширяет свое содержание;

– увеличивается число примеров понятия, известных учащимся;

– рассматриваемый блок материала характеризуется многочисленными связями внутри школьного курса математики.

Содержательно-методические линии:

– Числа и вычисления.

– Алгебраические выражения.

– Уравнения и неравенства.

– Функции.

– Вероятностно-статистическая линия.

Содержание каждого из этих разделов разворачивается в содержательно-методическую линию, пронизывающую все основные содержательные линии.

Содержательный компонент методической системы обучения математике включает основные содержательно-методические линии школьного курса математики, в числе которых находится линия числа.

Числовая линия строится на основе счета предметов (элементов множества) и измерения величин. В рамках числовой линии учащиеся осваивают принципы записи и сравнения чисел, смысл и свойства арифметических действий, взаимосвязи между ними, приемы устных и письменных вычислений, прикидки, оценки и проверки результатов действий, зависимости между компонентами и результатами, способы нахождения неизвестных компонентов. Вместе с тем они знакомятся с различными величинами (длиной, площадью, объемом, временем, массой, скоростью и др.), общим принципом и единицами их измерения, учатся выполнять действия с именованными числами.

Цели изучения линии числа:

– осмысление числа как основного объекта математики, истории развития числа;

– демонстрация идеи расширения числовых множеств, свойства числовых множеств;

– иллюстрация идеи алгебраических структур, R – бесконечное упорядоченное числовое множество, без начального и конечного элементов, всюду плотно, замкнуто относительно «+», «-», «*», «:», непрерывно;

– знакомство с системами счисления, теорией делимости;

– воспитание вычислительной культуры (алгоритмы вычислений, рациональная техника, приближенные вычисления, использование средств вычислительной техники).

На каждой из ступеней обучения программа курса математики основной школы детализирует эти цели:

– на первой ступени 5–6 классов в содержании «математики» основные цели – систематическое развитие понятия числа, выработка умений выполнять устные и письменные арифметические действия над числами, развитие навыков вычислений с натуральными числами, обыкновенными и десятичными дробями, положительными и отрицательными числами;

– на второй ступени в 7–9 классах цель курса «Алгебра» – развитие вычислительных и формально-оперативных алгебраических умений до уровня, позволяющего уверенно использовать их при решении задач математики. Остановимся на последовательном расширении линии числа в курсе математики 7–9 классов.

В 7 классе учащиеся знакомятся с рациональными числами, числовыми и буквенными выражениями. Под рациональным числом понимается обыкновенная дробь, с целым числом в числителе и натуральным числом в знаменателе.

В 8 классе учащиеся знакомятся с иррациональными числами, квадратным трехчленом, алгебраической дробью. Нет другого раздела школьного курса математики, который усваивался бы с таким трудом, как раздел, посвященный переходу от множества рациональных чисел к множеству действительных чисел, осуществляемый в 8 классе через введение иррациональных чисел. Даже на основной вопрос о том, что такое иррациональное число, окончившие среднюю школу часто дают неправильные ответы, свидетельствующие о непонимании ими сути дела (чаще всего говорят, что иррациональное число – это корень). При введении понятия иррационального числа целесообразно указывать школьникам на несоизмеримость отрезков. Обойтись без иррациональных чисел в курсе элементарной математики нельзя, но ни одна из существующих теорий действительных чисел по своей сложности не может быть полностью изучена в основной (и даже средней) школе. Поэтому, не требуется строить строгую теорию, достаточно создать верные представления о сущности вопроса. В большинстве учебников иррациональное число рассматривается как бесконечная непериодическая десятичная дробь (как и в теории Вейерштрасса). В некоторых учебниках – длина отрезка, несоизмеримого с единицей масштаба, а затем показывается, как находятся приближения этого числа в виде десятичных дробей. Кроме того, следует обратить внимание учащихся, что в результате действий над иррациональными числами могут получиться как рациональные, так и иррациональные. Для этого нужно предложить примеры на сложение непериодических дробей.

В 9 классе учащиеся исследуют действительные числа, знакомятся с измерениями, приближениями и оценкой.

Представляется разумным ограничить изучаемый в основной школе материал о действительных числах следующими пунктами, добиваясь полной ясности их понимания и большей прочности их запоминания. Множества рациональных чисел, содержащего все целые и дробные числа, как положительные, так и отрицательные и нуль, для целей точного измерения отрезков недостаточно. На числовой оси наряду с бесконечным в себе множеством рациональных точек существует еще бесконечное множество точек иррациональных, т.е. таких, расстояния которых от начала выражаются иррациональными числами. Так, точка, находящаяся на оси на расстоянии от начала, равном диагонали квадрата со стороной, равной единице, является точкой иррациональной.

Все рациональные числа представимы в виде конечных и бесконечных периодических десятичных дробей, иррациональные числа выражаются бесконечными непериодическими десятичными дробями, к которым приходят в результате процесса десятичного измерения отрезков. Множество всех рациональных чисел после присоединения к нему множества всех иррациональных чисел дает множество всех действительных чисел. Всякое действительное число, как рациональное, так и иррациональное, может быть приближенно представлено с произвольно высокой точностью посредством двух рациональных чисел, одно из которых дает приближение по недостатку, другое по избытку.

Для множества всех действительных чисел верна такая аксиома: если на числовой оси указаны начальная и единичная точки, т.е. точки с абсциссами 0 и +1, то каждой точке этой оси соответствует одно и только одно действительное число, выражающее ее расстояние от начала (ее абсциссу), и каждому действительному числу соответствует одна и только одна точка, отстоящая от начала на расстоянии, выражаемом этим числом (т.е. точка с такой абсциссой).

Все четыре действия над действительными числами, рациональными и иррациональными, выполнимы в той же мере, как и над одними рациональными: каждые два действительных числа можно складывать, вычитать, умножать и делить (за одним лишь исключением – нельзя делить на нуль), получая в результате каждый раз некоторое действительное число.

Расширение числового множества от натуральных чисел до множества действительных чисел в основной школе можно изобразить с помощью кругов Эйлера. Можно отметить, что изучение нового числового множества чаще всего идет по единой схеме:

- демонстрация необходимости введения новых чисел;
- введение новых чисел;
- введение сравнения (геометрическая интерпретация);
- введение действий над числами;

– законы действий над числами.

Обобщая выше сказанное можно сказать, что числовая линия как одна из самых значительных линий школьного курса математики имеет тесные связи с другими содержательно-методическими линиями.

Именно в числовой линии в значительной степени реализуются главные задачи школьного курса математики:

– овладение системой математических знаний и умений;

– формирование представлений об идеях и методах математики;

– формирование и развитие средствами математики интеллектуальных качеств личности.

Вопросы и задания к обсуждению:

1. Какие содержательно-методические линии можно выделить в алгебре 7–9 классах?
2. Просмотреть конспект урока по предмету геометрии в 7 классе на тему «Пятый постулат Евклида» в Приложении Б.
3. В чем различия между методическими рекомендациями и методическим пособием?
4. Ознакомиться с вопросами для подготовки к экзамену по дисциплине в Приложении Ж.
5. Составить фрагмент календарно-тематического планирования по геометрии за 8 класс (любой раздел).
6. Охарактеризуйте систему развивающего обучения.
7. Каким образом развитие математики влияет на школьный курс алгебры и математики в целом? Приведите соответствующие примеры.

Практическое занятие № 2. Методика обучения алгебре в основной школе

Анализ программ по алгебре для 7–9 классов

Примерный недельный учебный план основного общего образования отводит на изучение алгебры в 7–9 классе основной школы 3 часа в неделю. Общее число часов, рекомендованных для изучения учебного курса «Алгебра», – 306 часов: в 7 классе – 102 часа (3 часа в неделю), в 8 классе – 102 часа (3 часа в неделю), в 9 классе – 102 часа (3 часа в неделю).

С целью реализации программы углубленного изучения в программу добавлены 2 часа из части, формируемой участниками образовательного процесса. Таким образом, недельная нагрузка по алгебре составляет 5 часов в неделю (170 часов в год). Данная рабочая программа составлена с учетом этой нагрузки.

Программа обеспечивает достижение следующих предметных результатов освоения образовательной программы основного общего образования на примере учебного курса «Алгебра» 9 класса:

– *Числа и вычисления.*

Сравнивать и упорядочивать рациональные и иррациональные числа.

Выполнять арифметические действия с рациональными числами, сочетая устные и письменные приемы, выполнять вычисления с иррациональными числами.

Находить значения степеней с целыми показателями и корней, вычислять значения числовых выражений.

Округлять действительные числа, выполнять прикидку результата вычислений, оценку числовых выражений.

– *Уравнения и неравенства.*

Решать линейные и квадратные уравнения, уравнения, сводящиеся к ним, простейшие дробно-рациональные уравнения.

Решать системы двух линейных уравнений с двумя переменными и системы двух уравнений, в которых одно уравнение не является линейным.

Решать текстовые задачи алгебраическим способом с помощью составления уравнения или системы двух уравнений с двумя переменными.

Проводить простейшие исследования уравнений и систем уравнений, в том числе с применением графических представлений (т.е. устанавливать имеет ли уравнение или система уравнений решения, если имеет, то сколько, и прочее).

Решать линейные неравенства, квадратные неравенства, изображать решение неравенств на числовой прямой, записывать решение с помощью символов.

Решать системы линейных неравенств, системы неравенств, включающие квадратное неравенство, изображать решение системы неравенств на числовой прямой, записывать решение с помощью символов.

Использовать неравенства при решении различных задач.

– *Функции.*

Распознавать функции изученных видов. Показывать схематически расположение на координатной плоскости графиков функций вида: $y = kx$, $y = kx + b$, $y = \frac{k}{x}$, $y = ax^2 + bx + c$, $y = x^3$, $y = \sqrt{x}$, $y = |x|$ в зависимости от значений коэффициентов, описывать свойства функций.

Строить и изображать схематически графики квадратичных функций, описывать свойства квадратичных функций по их графикам.

Распознавать квадратичную функцию по формуле, приводить примеры квадратичных функций из реальной жизни, физики, геометрии.

– *Числовые последовательности и прогрессии.*

Распознавать арифметическую и геометрическую прогрессии при разных способах задания.

Выполнять вычисления с использованием формул n-го члена арифметической и геометрической прогрессий, суммы первых n членов.

Изображать члены последовательности точками на координатной плоскости.

Решать задачи, связанные с числовыми последовательностями, в том числе задачи из реальной жизни (с использованием калькулятора, цифровых технологий).

Содержание линии «Числа и вычисления» служит основой для дальнейшего изучения математики, способствует развитию у обучающихся логического мышления, формированию умения пользоваться алгоритмами, а также приобретению практических навыков, необходимых для повседневной жизни. Развитие понятия о числе на уровне основного общего образования связано с рациональными и иррациональными числами, формированием представлений о действительном числе. Завершение освоения числовой линии отнесено к среднему общему образованию.

Все содержательные линии входят в структуру тематического планирования рабочей программы по алгебре в 7–9 классах. Распределение часов среди содержательных линий или разделов программы на каждый учебный год в виде возможного варианта представлено на сайте конструктора рабочих программ (см. рис. 1).

ТЕМАТИЧЕСКОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ

7 КЛАСС

№ п/п	Наименование разделов и тем программы	Количество часов			Электронные (цифровые) образовательные ресурсы
		Всего	Контрольные работы	Практические работы	
1	Числа и вычисления. Рациональные числа	25	1	введите значение	[[Библиотека ЦОК https://m.edsoo.ru/7f415b90]]
2	Алгебраические выражения	27	1	введите значение	[[Библиотека ЦОК https://m.edsoo.ru/7f415b90]]
3	Уравнения и неравенства	20	1	введите значение	[[Библиотека ЦОК https://m.edsoo.ru/7f415b90]]
4	Координаты и графики. Функции	24	1	введите значение	[[Библиотека ЦОК https://m.edsoo.ru/7f415b90]]
5	Повторение и обобщение	6	1	введите значение	[[Библиотека ЦОК https://m.edsoo.ru/7f415b90]]
	+ Добавить строку				
ОБЩЕЕ КОЛИЧЕСТВО ЧАСОВ ПО ПРОГРАММЕ		102	5	0	

Рисунок 1 – Пример тематического планирования по алгебре в 7 классе на сайте конструктора рабочих программ

В целом для составления в рабочей программе календарно-тематического планирования для каждого класса в отдельности основой становится то учебное пособие, которым руководствуется учитель математики и обладает образовательное учреждение для осуществления преподавания предмета.

В структуре программы учебного курса «Вероятность и статистика» основной школы (7–9 класс) выделены следующие содержательно методические линии:

- Представление данных и описательная статистика.
- Вероятность.
- Элементы комбинаторики.
- Введение в теорию графов.

На изучение данного курса согласно учебному плану отводится 1 учебный час в неделю в течение каждого года обучения, т. е. не менее 34 учебных часов в учебном году. Всего за три года обучения не менее 102 часов.

Таким образом, учебный предмет «Математика» в 7–9 классах разделен на три учебных курса: «Алгебра», «Геометрия» и «Вероятность и статистика».

Вопросы и задания к обсуждению:

1. Проанализировать содержание нормативных документов: Образовательный стандарт общего образования, Концепция учебного предмета «Математика», учебные программы по учебному предмету «Математика».

2. Проанализировать содержание учебного предмета «Алгебра» в основном общем образовании.

3. Сколько часов всего выделяется на предмет «Алгебра» с 7 по 9 класс?

4. Определить последовательность действий в работе учителя над составлением календарно-тематического плана.

5. Составить фрагмент календарно-тематического планирования по алгебре за 7 класс (любой раздел).

6. Выполнить и предоставить Домашнюю контрольную работу № 3 в Приложении Д.

7. Какой материал из изучаемого по разделам в 7-9 классах по алгебре можно вынести на факультативные занятия и внеклассную работу?

Практическое занятие № 3. Методика обучения алгебре в основной школе

Методические подходы к изучению тождественных преобразований алгебраических и трансцендентных выражений

Тождественные преобразования представляют собой одну из главных линий школьного курса математики. На их основе формируются представления об аналитических методах математики. Как правило, решение каждой математической задачи аналитическим методом предполагает выполнение некоторых тождественных преобразований.

Тождественные преобразования не являются какой-либо отдельной темой школьного курса математики, они изучаются на протяжении всего курса арифметики, алгебры и начал математического анализа. Без них не обходятся и на уроках геометрии.

Изучение темы имеет как самостоятельное, так и прикладное значение. Материал линии связан:

- с обобщением операций над числами;
- проведением вычислений в общем виде;

– обучением использования буквенной символики в математике и ее приложениях.

Существует два подхода к изучению линии тождеств: алгебраический и функциональный.

Алгебраический подход. Больше внимания уделяется букве и операциям над буквенными выражениями. На выражение смотрят формально, не задумываясь над тем, что скрывается под буквами. Все преобразования опираются на правила действий и свойства действий.

Функциональный подход. Входящие в выражения буквы понимаются как переменные, а тождественные преобразования опираются на условие равенства функций (равенство значений функций при всех допустимых значениях переменной).

Первое определение тождества дается в 7-м классе.

Определение. Равенство, верное *при любых* значениях переменной, называется тождеством.

Данное определение компактно и хорошо, когда учащиеся работают с целыми рациональными выражениями. Так, равенства вида $a^2:a = a$ или $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$ не подходят под это определение, поэтому его необходимо уточнить, и в 8-м классе в теме «Рациональные дроби» дается уже другое *определение*: Равенство, верное *при всех допустимых* значениях, входящих в него переменных.

Наиболее общим является следующее *определение:* Равенство, верное *при любых значениях переменных, принадлежащих некоторому множеству*, называется **тождеством на этом множестве.**

Данное определение раскрывает суть тождества с теоретико-функциональной точки зрения.

Например, $(a+в)^2 = a^2+2aв+в^2$ – тождество на R;

$\sqrt{x^2} = x$ – тождество на R^+;

$\sqrt{x(x+3)} = \sqrt{x}\sqrt{x+3}$ – тождество при $x > 0$.

Некоторые тождества выбираются как основные, с их помощью доказываются остальные тождества и рассматриваются свойства операций, истинность которых принимается в качестве аксиом (коммутативность, ассоциативность, дистрибутивность, существование противоположного элемента и др.).

Различают понятия:

Тождества-равенства (формулы сокращенного умножения, свойства степени с натуральным показателем и др.).

Тождества-действия (вынесение общего множителя за скобку, приведение подобных слагаемых и др.) или тождественные преобразования.

Замена одного выражения другим, тождественно равным ему, называется *тождественным преобразованием.*

К тождественным преобразованиям можно отнести, например, приведение подобных слагаемых, разложение на множители, сокращение дробей и так далее.

В курсе основной школы алгебры рассматриваются алгебраические выражения, то есть выражения, которые не содержат над переменными никаких действий, кроме арифметических операций, операций извлечения корня и возведения в степень с рациональным показателем.

Отметим, что формирование навыков тождественных преобразований более быстро происходит, если учитель добивается от обучающегося устного выполнения некоторых преобразований не только при устном счете, а также и в процессе решения задач. Полезно также иметь в виду, что всякий раз, когда возникает необходимость в тождественном преобразовании, мы имеем дело с выражением, область определения которого задана. При выполнении преобразования она может расширяться или сужаться.

Вопросы и задания к обсуждению:

1. Проанализировать учебные пособия по предмету «Алгебра» на содержание тождественных преобразований алгебраических и трансцендентных выражений.
2. Проанализировать учебники 7–9 классов и составить таблицу тождественных равенств с указанием множества, на котором оно выполняется.
3. Составить алгоритмы и приемы тождественных преобразований выражений в основной школе.
4. Какой из методов доказательства тождества является наиболее эффективным?
5. Какие подходы существуют к изучению тождеств?
6. На какие типы делятся доказательства тождеств?
7. Привести примеры, применяемые к использованию различных типов доказательства тождеств.

Практическое занятие № 4. Методика обучения алгебре в основной школе

Методика изучения линейных, квадратных, дробно-рациональных уравнений, неравенств и их систем

При изучении линии уравнений с учащимися рассматриваются следующие вопросы:

- формирование понятий;
- взаимосвязь изучаемых понятий с другими линиями курса;
- общие и частные методы решения уравнений.

В процессе обучения раскрываются:

– *прикладная направленность линии уравнений (при* решении текстовых задач; в геометрии – при использовании метода координат; при построении моделей различных процессов и т. д.);

– *теоретическая направленность* (при изучении наиболее важных классов уравнений, изучении обобщенных понятий и методов и т. д.);

– *направленность на установление связей* с основными темами курса.

Линия уравнений тесно связана с числовой и функциональной линиями. Они дополняют и обогащают друг друга. Так, например, потребность в решении нового класса уравнений способствовала введению нового числового множества и наоборот.

Способы решения уравнений

Процесс решения уравнения чаще всего состоит в замене данного уравнения равносильным ему уравнением или равносильной ему конъюнкцией или дизъюнкцией предложений до тех пор, пока не придут к уравнению вида x = a (1) или дизъюнкции таких уравнений: $x = a_1 \vee$, $x = a_2 \vee$, ..., $\vee x = a_n$ (2). Тогда множеством решений уравнения будет $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$. При этом уравнение (1) называется *равносильным* уравнению (2), если они заданы на общей области их определения и множества их решений совпадают.

Традиционный способ решения уравнений, опирающийся на понятие равносильных уравнений логически строен и не требует проверки решения уравнения.

Однако не всегда целесообразно стремиться к получению уравнения, равносильного данному: можно идти по пути получения следствия данного уравнения $f(x) = \Psi(x)$ (1). Уравнение $f_1(x) = \Psi_1(x)$ (2) называется следствием уравнения (1), если каждое решение уравнения (1) является решением уравнения (2). В этом случае уравнение (2) может иметь решения, не удовлетворяющее уравнению (1), что может привести к появлению посторонних решений. Поэтому необходима проверка полученных корней.

Нередко в практике работы учителей логическое следование применяется как прием, упрощающий процесс решения, если сохранение равносильности может быть достигнуто сравнительно дорогой ценой.

Выделим три основных типа преобразования уравнений:

1) Преобразование одной из частей уравнения. Основой таких преобразований являются тождественные преобразования. Например, раскрытие скобок, приведение подобных членов и т. д.

2) Согласованные преобразования обеих частей уравнения. Это прибавление к обеим частям уравнения одного и того же выражения, умножение (деление) обеих частей уравнения на одно и то же выражение, переход от уравнения $a = в$ к уравнению $f(a) = f(в)$, где f – некоторая функция, или обратный переход.

3) Преобразование логической структуры уравнения. Наиболее важными для школьного курса преобразованиями логической структуры являются следующие:

– переход от уравнения $а^2 + в^2 = 0$ к *системе* $а^2 = 0$ и $в^2 = 0$;

– переход от уравнения а*в = 0 к *совокупности* а = 0 или в = 0;

– переход от уравнения а/в = 0 к *системе* а = 0 и в = 0;

– переход от системы уравнений к одному уравнению посредством почленного сложения, вычитания, умножения или деления уравнений, входящих в систему.

К преобразованиям 3 типа относится и замена переменных. В простейшем случае она состоит в переходе от уравнения

F(f(x)) = 0 к *системе* F (y) = 0 и y = f(x). Так решаются биквадратные уравнения, многие типы иррациональных уравнений и др.

Если в процессе этих преобразований не следить за областями определения получаемых уравнений, то может произойти как потеря корней, так и приобретение посторонних корней.

Так, к *приобретению посторонних корней* могут привести такие преобразования, как приведение подобных членов, освобождение уравнения от знаменателя, возведение обеих его частей в степень и др.

К *потере корней* могут привести следующие преобразования: извлечение корня четной степени из обеих частей уравнения, логарифмирование обеих частей уравнения и др. Умножение или деление его обеих частей на функцию может привести как к потере корней, так и к приобретению посторонних корней.

Пример. Разделив обе части уравнения $(x^2 + 2x)\sqrt{x} = 3\sqrt{x}$ на $\sqrt{x}$, получим уравнение $x^2 + 2x - 3 = 0$, имеющее корни $x = -3$ или $x = 1$. При таком «решении» приобретен посторонний корень $x = -3$ и потерян корень $x = 0$ исходного уравнения. Поэтому уравнения вида $\Psi(x)f(x) = \Psi(x)g(x)$ необходимо решать следующим образом:

1. Перепишем его в виде: $\Psi(x)(f(x)-g(x)) = 0$;

2. Данное уравнение равносильно совокупности уравнений $\Psi(x)= 0$ или $f(x)-g(x) = 0$.

Способы решения неравенств

7 класс. Теория неравенств находит применение при проведении исследования функций: определения области определения и области значений функций; построения графиков не на естественных, а на ограниченных областях; влияния знаков параметра на расположение графиков в координатной плоскости ($y = кx$), выяснения свойств функций.

Учащиеся должны усвоить, что неравенства являются средством перебора логических возможностей решения задач и построения функций.

Изучение неравенств является подготовительным этапом к решению систем неравенств и задач линейного программирования.

8 класс. Главный упор делается на тему «Числовые неравенства и их свойства», которые являются базой для

– решения неравенств с одной переменной;

– обоснования двух методов приближенных вычислений: метода границ и практических методов;

– выявления видов функционирования неравенств и др.

В учебнике С. А. Теляковского данная тема изложена в трех пунктах (П. 27. Числовые неравенства. П. 28. Свойства числовых неравенств. П. 29. Сложение и умножение числовых неравенств), а операция сравнения введена следующим образом:

Мы будем считать, что положительное направление задано слева направо. Перемещению по координатной прямой вправо от точки b соответствует прибавление к числу b положительного числа.

Для любых двух действительных чисел *a* и b определена операция сравнения, результатом которой является одно из трех утверждений: число *a* больше числа b; число *a* равно числу b; число *a* меньше числа b.

Мы можем сравнить любые числа a и b и результат сравнения записать в виде равенства или неравенства, используя знаки =, <, >. Для произвольных чисел a и b выполняется одно и только одно из соотношений: **a = в, a<b, a>b.**

Определение. Из двух чисел *a* и b меньшим является то, которому соответствует на координатной прямой точка, лежащая левее. Число a равно числу b, если им соответствует одна точка.

На координатной прямой большее число изображается точкой, лежащей правее, а меньшее – точкой, лежащей левее.

Пример 1. Сравним десятичные дроби 3,6748 и 3,675. Цифры в разрядах единиц, десятых и сотых совпадают, а в разряде тысячных в первой дроби записана цифра 4, а во второй – цифра 5.

Так как $4<5$, то $3{,}6748 < 3{,}675$.

Пример 2. Сравним отрицательные числа –15 и –23. Модуль первого числа меньше модуля второго. Значит, первое число больше второго, т.е. $-15 > -23$.

В зависимости от конкретного вида чисел мы использовали тот или иной способ сравнения. Однако удобно иметь такой способ сравнения чисел, который охватывает все случаи. Он заключается в том, что составляют разность чисел и выясняют, является ли она положительным числом, отрицательным числом или нулем. Этот способ сравнения чисел основан на следующем определении.

Определение. Число a больше числа b, если разность $a - b$ – положительное число; число a меньше числа b, если разность $a - b$ – отрицательное число.

Заметим, что если разность ***a – b*** равна нулю, то числа ***a*** и ***b*** равны.

Доказательство. Пусть ***a*** и ***b*** некоторые числа, причем ***a > b,*** то есть число ***a*** находится правее числа ***b.*** Перемещению по координатной прямой вправо от точки ***b*** соответствует прибавление к числу ***b*** положительного числа. Значит, ***c –*** положительное число. Следовательно, ***a – b = c,*** т.е. ***a – b>0.***

В учебнике А. Г. Мордковича вводятся следующие свойства числовых неравенств:

1) $a>b,\ b>c \Rightarrow a>c;$
2) $a>b \Rightarrow a+c>b+c;$
3) $a>b,\ m>0 \Rightarrow am>bm,\ a>b,\ m<0 \Rightarrow am<bm;$
4) $a>b,\ c>d \Rightarrow a+d>b+d;$
5) $a, b, c, d>0,\ a>b;\ c>d \Rightarrow ac>bd;$
6) $a, b\geq 0,\ a>b \Rightarrow a^n>b^n,\ \forall n\in\mathrm{N}.$

и рассматриваются теоремы, выражающие свойства числовых неравенств.

Свойство 1. Если a>b и b>c, то a>c.

По условию, **a > b,** т.е. **a – b –** положительное число. Так как **b > c,** то **b-c –** положительное число. Сложив положительные числа **a – b и b – c** получим положительное число. Имеем **(a – b) + (b – c) = a – c.** Значит **a – c –** положительное число, т.е. **a > c.**

Свойство 1 можно обосновать, используя геометрическую модель множества действительных чисел, т.е. числовую прямую. Неравенство **a>b** означает, что на числовой прямой точка a расположена правее точки b, а неравенство **b>c –** что точка **b** расположена правее точки c. Но тогда точка a расположена на прямой правее точки c, т.е. **a>c.**

Свойство 1 называют **свойством транзитивности.**

Свойство 2. Если **a > b**, то **a + c > b+c.**

Преобразуем разность (**a + c) - (b+c):**

(a + c) - (b+c) = a-b.

По условию **a > b,** поэтому **a - b – положительное число.** Значит, и разность (**a + c) - (b + c) положительна.** Следовательно, **a + c> b + c.** Итак, если к обеим частям верного неравенства прибавить одно и то же число, то получится верное неравенство.

Свойство 3. Если **a>b** и **m>0**, то **am> bm**. Если **a>b** и**m<0**, то **am < bm.**

Смысл свойства 3 заключается в следующем:

– *Если обе части неравенства умножить на одно и то же положительное число, то знак неравенства следует сохранить;*

– *Если обе части неравенства умножить на одно и то же отрицательное число, то знак неравенства следует изменить (< на>, > на <).*

То же относится к делению обеих частей неравенства на одно и то же положительное или отрицательное число **m**, поскольку деление на **m** всегда можно заменить умножением на **1/m.**

Из свойства 3, в частности, следует, что, умножив обе части неравенства **a>b на -1,** получим **– a< –b.**

Это значит, что *если изменить знаки у обеих частей неравенства, то надо изменить и знак неравенства:* **если a>b, то – a< -b.**

Следствие. Если a и b – положительные числа и **a>b, то 1/a<1/b.**

Разделим обе части неравенства **a>b** на положительное число **ab: a/ab>b/ab.** Сократив дроби, получим, что**1/b>1/a, 1/a<1/b.**

Знание свойств числовых неравенств помогает работать при исследовании функций. С неравенствами связаны такие известные свойства функций, как наибольшее и наименьшее значения функции на некотором промежутке: ограниченность функции снизу и сверху; свойство возрастания и убывания функции. Числовые неравенства используются при решении текстовых задач, при решении квадратных неравенств.

Важно выработать у учащихся прочный навык почленного вычитания, деления и умножения числовых неравенств.

Дано: **15<x<16, 2<y<3.** Оценить сумму**x+y,** разность **x – y,** произведение **xy,** частное **x/y.**

Сумма x + y

$$15<x<16$$
$$2<y<3$$
$$\underline{\mathbf{17<x + y<19,}}$$

разность x-y, представим разность в виде суммы x +(-y), -2>-y>-3, то, есть -3<-y<-2

$$15<x<16$$
$$-3<-y<-2$$
$$\underline{\mathbf{12<x-y<14,}}$$

произведение xy 15<x<16

$$\underline{2<y<3}$$
$$\underline{\mathbf{30<xy<48,}}$$

частное x/y, представим частное в виде произведения**x*1/y.**

Так как 2<y<3, то ½>1/y>1/3 , то есть 1/3<1/y<1/2.

$$15<x<16$$
$$1/3<1/y<1/2$$
$$\underline{\mathbf{5<x/y<8.}}$$

У учащихся следует выработать навыки решения следующих видов задач: сравнить два числа; задачи на оценку (оценить произведение двух чисел, сумму двух чисел, их разность, возведение в степень числа, оценить обратное ему число); задачи на доказательство (1. Пусть **a** и **b** – положительные числа и **a>b.** Доказать, что **1/a < 1/в.** 2. Пусть **a** – положительное число. Доказать, что **a+1/a** ≥ **2.**).

В 8 классе изучаются темы «Линейные неравенства с одной переменной», «Системы неравенств с одним неизвестным». При решении линейных неравенств с одной переменной полезно ознакомить учащихся с алгоритмом его решения.

Материал этих тем находит применение при решении нелинейных неравенств типа: (ax +b)(cx +d)<0; $\frac{ax+b}{cx+d} > 0$.

Решение неравенств вида |x – a|< 0, |x – a|> 0 готовит учащихся к изучению курса анализа.

В учебнике Г. В. Дорофеева учащиеся знакомятся с методом *доказательства неравенств* по определению. По другим учебникам знакомство учащихся с приемами доказательства неравенств не предусмотрено.

Все приобретенные учащимися навыки находят применение при изучении тем «Решение квадратных неравенств» и «Действительные числа».

Обучающиеся, по крайней мере, должны знать 3 способа решения квадратных неравенств:

1. Опираясь на разложение квадратного трехчлена на множители, построить эскиз графика квадратного трехчлена и записать ответ.

2. Опираясь на разложение квадратного трехчлена на множители, использовать метод интервалов.

3. Графический метод решения неравенства: ax^2 + вx +c>0 $\Leftrightarrow$ ax^2 > > – вx – c.

9 класс. Формируется навык проведения равносильных преобразований неравенств.

В учебнике А. Г. Мордковича в теме «Рациональные неравенства» вводится определение рационального неравенства.

Определение. Рациональным неравенством с одной переменной *x* называется неравенство вида *h(x)>q(x)*, где *h(x)* и *q(x)* рациональные выражения, т.е. алгебраические выражения, составленные из чисел и переменной x с помощью операции сложение, вычитание, умножение, деление.

В главе «Рациональные неравенства и их системы, линейные и квадратные неравенства» предполагается знакомство учащихся с методом интервалов и использование этого метода при решении неравенств вида: $|x-2|<3$, $(x-1)(x+1)(x-2)>0$.

При изучении темы «Системы неравенств» учащимся можно предложить решить задачу: *«Найти область определения выражения* $f(x)=\sqrt{2x-4}+\sqrt{8-x}$ *» методом составления системы неравенств.*

Дополнительный материал:

1. «Сводная карта изучения неравенств в школе» (газета «Математика», №32, 1998 г.).

2. Задача, на примере которой можно продемонстрировать учащимся роль неравенств в жизни.

Две реки имеют одинаковую длину l км. Скорости рек различны: v_1 , v_2, причем $v_1>v_2$. Докажите, что вторая река выгоднее по эксплуатации пароходами (товарные перевозки на реках примерно одинаковы, а скорость движения пароходов равна v км/ч).

Решение. $t_1=\frac{l}{v+v_1}+\frac{l}{v-v_1}$; $t_2=\frac{l}{v+v_2}+\frac{l}{v-v_2}$; $\frac{2lv}{v^2-v_1^2}>\frac{2lv}{v^2-v_2^2}$

При решении этой задачи у учащихся могут возникнуть трудности трех видов:

– математические: умение актуализировать знания по решению неравенств; умение обнаружить структуру задачи;

– психологические: переход от реальной ситуации к модели; отбор наибольших и наименьших значений;

– методические: умение критически осмыслить результат задачи.

Пример 3. Задача, на примере которой можно продемонстрировать методику использования метода оценки.

Задача. Сумма в 95 копеек составлена из пятикопеечных и десятикопеечных монет общим числом не более 14. Если все десятикопеечные монеты заменить пятачками, все пятачки десятикопеечными монетами, общая сумма уменьшится более чем в 1,5 раза. Сколько пятачков и десятикопеечных монет было первоначально.

Решение. Пусть n и m – количества пятикопеечных и десятикопеечных монет. Условие задачи приводит к системе:

$$\begin{cases} 5n + 10m = 95, \\ m + n \le 14, \\ 1{,}5(10n + 5m) \le 95. \end{cases} \quad \begin{cases} n + 2m = 19, \\ m + n \le 14, \\ 6n + 3m \le 38. \end{cases} \quad \begin{array}{l} m + 19 - 2m \le 14, \\ 6(19 - 2m) + 3m \le 38, \end{array} \quad \begin{array}{l} m \ge 5, \\ 9m \ge 76, \\ m \le 9. \end{array}$$

Единственное натуральное число, удовлетворяющее системе, – это $m = 9$.

Ответ: 1 пятикопеечная и 9 десятикопеечных монет.

Таким образом, основная цель изучения материала линии неравенств является овладение учащимися на том или ином уровне приемами решения (алгебраического и графического) неравенств как математического аппарата решения разнообразных задач из математики, смежных областей знаний и практики. Содержание этого материала позволяет продолжить развитие различных познавательных процессов, речи, умения учиться, алгоритмического и обобщенного мышления, элементов творческой деятельности при решении всех основных типов задач алгебраическим методом, развитие пространственного воображения при решении графическим методом.

Вопросы и задания к обсуждению:

1. Изучите вопросы равносильности уравнений, неравенств и их систем в школьном курсе математики.

2. Назовите общие методы решения уравнений и неравенств разных видов. Приведите примеры решения конкретных уравнений.

3. Назовите общие методы решения неравенств разных видов. Приведите примеры решения конкретных неравенств.

4. Назовите методы решения уравнений и неравенств, специфические для разных видов. Приведите примеры решения конкретных уравнений и неравенств.

5. Обучение решению систем неравенств и систем уравнений.

6. Методика изучения линейных уравнений с двумя переменными.

7. Методика обучения доказательству неравенств, приемы доказательства.

Практическое занятие № 5. Методика обучения алгебре в основной школе

Пропедевтика алгебраического метода решения текстовых задач

С целью пропедевтики решения текстовых задач алгебраическим методом в основной школе надо выбрать небольшое число задач, которые могут раскрыть все факты и идеи наиболее ярко и наглядно. Такие задачи называют ключевыми. Повторение решений таких опорных задач, вместе с теоретическим материалом, создает обучающимся хорошие условия для решения задач по дальнейшим темам.

Для 7–9 классов характерен алгебраический способ решения задач, так как обучающиеся седьмых классов только начинают изучать курс геометрии и некоторые свойства геометрических фигур еще не знают (например, свойства подобных треугольников), поэтому применять сразу геометрический метод при решении алгебраических задач они еще не могут. В то же время, в седьмом классе изучается линейная функция и ее график, графическое решение систем двух линейных уравнений с двумя переменными.

Чтобы решить задачу алгебраическим методом, необходимо соотношения в условии задачи между величинами перевести на математический язык. Приводим примерную таблицу 1решения задачи алгебраическим методом.

Краткая запись всех задач оформляется в таблице. Два столбика заполняем по условию задачи, а третий по первым двум. Этот столбик дает уравнение. Далее определяем, к какому типу относится задача: на сравнение или на сложение величин, если это необходимо.

Таблица 1 – Алгоритм решения задач с помощью алгебраического метода

Порядок действий	**Содержание алгоритма действия**
1	Выбрать одну из неизвестных величин, по условию задачи, и обозначить ее буквой х. Обычно через х обозначают ту величину, которую надо найти (искомая величина). Случается, что удобнее обозначить через х другую неизвестную величину, связанную с искомой).
2	Остальные неизвестные величины, содержащиеся в условие задачи, выражают через х. При этом необходимо строго следить за тем, чтобы все однородные величины были приведены (или привести к одной единице измерения) в единицах одного наименования.
3	Составить уравнение на основании данных условия задачи в зависимости между величинами.
4	Решить составленное уравнение
5	Проверить, удовлетворяет ли найденный корень условию задачи.
6	Записать ответ

1. Задачи на движение в одном направлении из одного пункта

Задача №1. Из Твери до Норильска вылетели одновременно по одному и тому же маршруту два самолета. Один со скоростью 1000 км/ч, а другой 720 км/ч. На сколько километров первый самолет обгонит второй за 5 ч.?

Условие к задаче представлено на рис. 2.

Решение

1 способ

1) 1000 − 720 =280· (км/ч) – скорость первого больше скорости второго.

2) 280 * 5 = 1400 (км) – первый обгонит второго.

Ответ: на 1400 км.

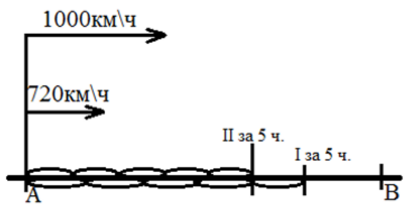


Рисунок 2 – Графическое условие к задаче № 1

Задача № 2. Из города в деревню в одно время выехали велосипед и мотоцикл. Велосипед за 2 ч. проезжает 20 км, а мотоцикл за 4 ч. проезжает 180 км. Сколько времени должно пройти до того момента, когда расстояние между ними будет 120 км?

Решение

Пусть:

	S	t	v
Велосипедист	20 км	2 ч	10 км/ч
Мотоциклист	180 км	4 ч	45 км/ч

1) 45 – 10 = 35 (км/ч) – скорость удаления мотоцикла.

2) $120 : 35 = 3\frac{3}{7}$ (ч) – когда первый опередит второго на 120 км.

Ответ: $3\frac{3}{7}$ ч.

2. Задачи на движение в противоположных направлениях.

Задача. Из двух пунктов V и X выехали навстречу друг другу одновременно два автобуса. Один приехал в X пункт через 1 часа 15 минут после встречи, а другой – в V пункт через 48 минут после встречи. Расстояние между пунктами равно 90 км. Найдите с какой скоростью двигались автобусы.

Решение

Пусть x (км/ч) и y (км/ч) – скорости первого и второго автобусов соответственно, а z (ч) – время до встречи автобусов.

Автобус	v	S	t
I	x км/ч	$1\frac{1}{4}\cdot x$	$1\frac{1}{4}$ ч.
II	y км/ч	$\frac{4}{5}\cdot y$	$\frac{4}{5}$ ч.

$$\begin{cases} 1\frac{1}{4}x+\frac{4}{5}y=90, \\ x=\dfrac{90}{1\frac{1}{4}+z}, \\ y=\dfrac{90}{\frac{4}{5}+z}. \end{cases}$$

$$\frac{5}{4}\cdot\frac{90}{\frac{5}{4}+z}+\frac{4}{5}\cdot\frac{90}{\frac{4}{5}+z}=90;$$

$$\frac{450}{5+4z}+\frac{360}{4+5z}=90;$$

$450\ (4 + 5z) + 360\ (5 + 4z) = 90\ (4 + 5z)(5 + 4z);$

$1800 + 2250z + 1800 + 1440z = 90\ (20 + 16z + 25z + 20z^2);$

$3600 + 3690z = 1800 + 3690z + 1800z^2;$

$1800z^2 = 1800;$

$z^2 = 1;$

$z = -1$ – не удовлетворяет условию задачи;

$z = 1$ (ч.) – время до встречи автобусов;

$$x=\frac{90}{\frac{5}{4}+1}=40$$

$x = 40$ (км/ч) – скорость первого автобуса;

$$y=\frac{90}{\frac{4}{5}+1}$$

$y = 50$ (км/ч) – скорость второго автобуса.

Ответ: 40 км/ч и 50 км/ ч.

Таким образом, рассматривая решения текстовых задач различного типа обучающиеся повторяют способы поиска и решения данных задач, что способствует систематизации, обобщению умений и навыков в 7 классе. Повторение осуществляется включением в содержание уроков задач на этапах повторения ранее изученного, закрепления изученного материала и др. Особое внимание стоит обратить на решения текстовых задач разными способами с последующим отбором наиболее рациональных.

Вопросы и задания к обсуждению:

1. Раскрыть понятие «текстовой задачи» и указать их место в обучении математике.

2. Проанализировать содержание учебников по предмету «Алгебра» на предмет содержания опорных текстовых задач в классе по выбору студента.

3. Вспомнить виды текстовых задач на движение.

4. Пропедевтика арифметического метода решения текстовых задач в основной школе.

5. Составить самостоятельную работу по решению текстовых задач с последующей их самопроверкой.

6. Подготовить задания для проведения деловых игр.

7. Подготовиться к срезу знаний по курсу алгебры 7–9 классов в Приложении В.

Практическое занятие № 6. Методика обучения алгебре в основной школе

Развитие понятия функции. Методика формирования общефункциональных понятий. Этапы изучения функциональной линии.

Функция – одно из фундаментальных математических понятий, непосредственно связанных с реальной действительностью.

Существует несколько определений понятия «функция»:

– неопределяемое (первичное) понятие математического анализа;

– отображение одного числового множества Х на другое числовое множество У (понятие отображения первично);

– любое отношение, установленное между элементами множеств Х и У;

– некоторое соответствие между элементами множеств Х и У;

Обозначается f: Х → У , где f – функция или закон соответствия, множество Х – область определения D(f), множество У – множество значений функций E(f).

Если функция f ставит в соответствие элементу x элемент y, а функция g – элементу y элемент z, то говорят, что z = g(f(x)) есть сложная функция (функция от функции).

Функция может быть задана одним или несколькими аналитическими выражениями, словесным (вербальным) определением, таблицей, графиком и т. д.

Основные типы математических задач

1. Исследовать функцию (более простые задачи – на исследование отдельных свойств функций).

2. Построить график функции на основе исследования.

Основные приемы и методы обучения

1. Схема изучения функций:

– Анализ конкретных задач или примеров из реальной жизни, науки, техники, приводящих к данной функции (мотивация).

– Определение рассматриваемой функции, ее запись с помощью формулы, исследование параметров, входящих в эту формулу.

– Построение графика функции, установление влияния параметров на характер графического изображения функции.

– Обучение учащихся истолкованию свойств функций на трех языках: графическом, словесном, символическом.

– Исследование основных свойств функции, исходя из ее графика (обучение чтению графиков).

– Использование полученных знаний и умений при решении задач (уравнений и неравенств).

2. Возможности ИКТ при изучении данной содержательно-методической линии (см. рис. 3, 4).

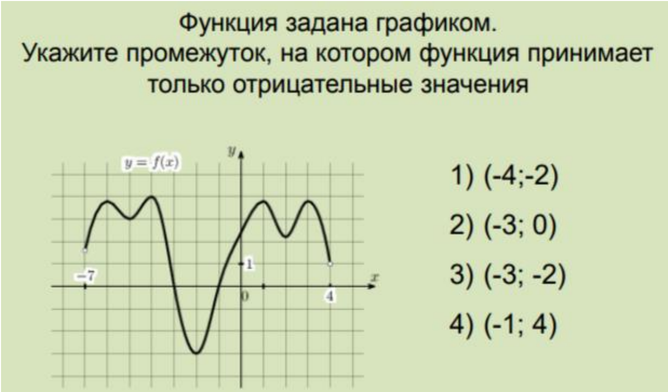


Рисунок 3 – Исследование функции с помощью ИКТ

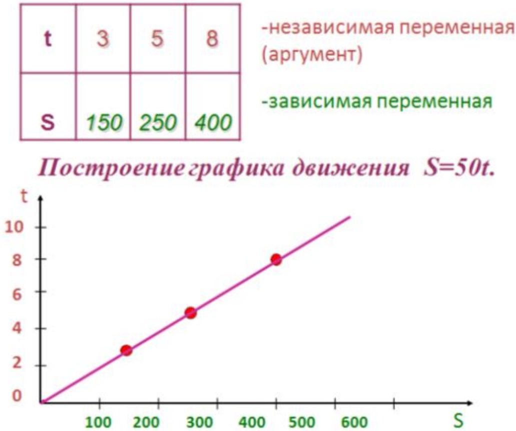


Рисунок 4 – Построение графика движения поезда с помощью ИКТ

Этапы изучения функциональной линии

1 этап. Пропедевтический

1–4 классы: примеры зависимости величин.

5 класс: изображение натуральных чисел на числовом луче, вычисление по формулам.

6 класс: понятие о прямой и обратной пропорциональности величин; положительные и отрицательные числа; прямоугольная система координат; координаты точки; примеры графиков.

2 этап. Основной (изучение функций элементарными средствами)

7 класс: понятие функции; способы задания функции; график функции; функция $y = kx + b$ и ее график; функции $y = x^2$ и $y = x^3$.

8 класс: функция $y = k/x$ и ее график; функция $y = \sqrt{x}$, ее свойства и график.

9 класс: квадратичная функция $y = ax^2 + bx + c$, ее свойства и график; возрастание и убывание функции; четность и нечетность функции; простейшие преобразования графиков.

3 этап. Завершающий (исследование функций с помощью производной)

10 класс: тригонометрические функции, их свойства и графики; периодичность функции; систематизация сведений о функциях и графиках; применение производной к исследованию функций.

11 класс: показательная, логарифмическая и степенная функции.

Таким образом, функции и их свойства и графики составляют стержень школьного курса математики. В процессе изучения понятия функции обучающийся развивает математическое мышление, так как функция приучает мыслить его моделями из реальной действительности: линейная функция – модель равномерных процессов; квадратичная функция – модель равноускоренных процессов; тригонометрическая функция – модель периодических процессов; показательная функция – модель органического роста и убывания. Значительная часть материала функциональной линии относится к изучению класса функций, получивших название элементарных.

Вопросы и задания к обсуждению:

1. Составьте классификацию элементарных функций.

2. Проанализируйте демоверсии ОГЭ и ЕГЭ на наличие заданий, проверяющих знание функций и их свойств. Приведите примеры заданий.

3. Сформулируйте планируемые результаты обучающихся (предметные, метапредметные, личностные) по данной теме.

4. Приведите примеры заданий каждого типа данной содержательно-методической линии (используя школьные учебники математики).

5. Методика изучения линейной функции в средней школе.

6. Методика изучения функции $y = \frac{k}{x}$ в средней школе.

7. Методика изучения квадратичной функции в средней школе.

8. Методика изучения функции $y = \sqrt{x}$ в средней школе.

9. а) Исследуйте поведение графика и свойств квадратичной функции в зависимости от коэффициентов (коэффициенты положительные, отрицательные, равны нулю). б) Проведите аналогичное исследование для линейной функции.

Практическое занятие № 7. Методика обучения геометрии в основной школе

Методика проведения первых уроков геометрии. Ознакомление с аксиомами и теоремами.

Первые уроки геометрии в 7 классе во многом определяют успех в изучении этой дисциплины. Они знакомят обучающихся с понятиями и их свойствами, которые являются базой для построения геометрии. Цель первых уроков заключается в том, чтобы добиться полного усвоения каждым обучающимся основных терминов, формулировок; свойств простейших геометрических фигур; понимания необходимости и сути логического обоснования утверждений. Несмотря на общность цели, содержание первых уроков геометрии по учебнику А. В. Погорелова отличается от соответствующего содержания по учебнику Л. С. Атанасяна и др.

Содержание первых уроков здесь составляют неопределяемые понятия (точка, прямая, принадлежность, «лежать на», длина отрезка, градусная мера угла); десять аксиом, которые описывают основные свойства неопределяемых понятий и связи между ними. Кроме неопределяемых, рассматриваются понятия: пересекаться, лежать по разные стороны, лежать по одну сторону, отрезок, полуплоскость, полупрямая, дополнительные полупрямые, расстояние, равные отрезки, угол, равные углы, откладывание отрезка и угла, равные треугольники и т.д.; вводятся также понятия: доказательство, теорема, условие и заключение теоремы, аксиома.

Следует заметить, что многие геометрические фигуры и их свойства, а также термины уже знакомы учащимся. Поэтому изучение геометрии на первых уроках в седьмом классе должно носить характер систематизации и обобщения знаний и умений, приобретенных учащимися в предыдущие годы обучения, и опираться на их опыт восприятия реального пространственного окружения.

Методика преподавания первых разделов курса планиметрии предполагает постепенный, плавный переход от конкретного к общему, постоянное обращение к окружающей действительности и другим видам наглядности с целью реализации функциональной грамотности. Большое внимание следует уделять обучению учащихся умению логически рассуждать, обосновывать, доказывать высказываемые предложения. С самых первых этапов изучения геометрии необходимо в единую систему увязывать содержание учебника, соответствующие записи на доске и в тетради с рисунками, являющимися опорой для учащихся при самостоятельной работе. На *первом уроке* геометрии необходимо *познакомить* учащихся с *историей возникновения* геометрии.

Геометрические объекты, с которых начинается изучение систематического курса планиметрии, уже знакомы обучающимся, однако они предстают перед ними в новом виде. Точка и прямая рассматриваются как основные понятия, свойства которых раскрываются в аксиомах. Это находит отражение в записях, которые носят характер опорных схем: в них дается изображение точек и прямых, их обозначение на плоскости.

Методологическая концепция формирования геометрических понятий заключается в восхождении от чувственно-конкретного к абстрактному и в переходе от абстрактных представлений к их конкретизации.

Например, вначале *понятия точки и прямой* ассоциируются с их изображениями на листе бумаги, затем в мышлении школьников осуществляется переход к идеальным образам точки и прямой, не имеющим никаких физических свойств. *Отрезок* воспринимается как часть данной прямой, а затем это восприятие трансформируется в образ отрезка, обладающего основным свойством – *иметь длину.* Восприятие графической модели *угла* служит основой для формирования представления об угле как геометрической фигуре, обладающей основным свойством – *иметь меру.*

С самых первых шагов изучения геометрии учителю необходимо иллюстрировать свой рассказ, текст учебника, записи на доске и в тетрадях рисунками. Итак, логика и наглядность. Что мы имеем в виду, говоря о первых уроках геометрии? Это введение в геометрию, первые понятия, аксиомы (не обязательно сразу называть аксиомой), первые теоремы, первые задачи.

В свою очередь, необходимо понимать, когда и как обучающихся знакомить с тем, что такое определение понятия, аксиома, теорема? Ниже представлен сравнительный анализ двух учебников по введению определения, аксиомы и теоремы (см. табл. 2).

Таблица 2 – Сравнительный анализ учебников по введению определения, аксиом и теорем

А.В. Погорелов «Геометрия, 7-9 класс»	*Л.С. Атанасян «Геометрия, 7-9 класс»*
С. 15. Конец первого параграфа «основные свойства простейших геометрических фигур». Дать определение чему-либо – значит объяснить, что это такое.	С.43.Четвертый параграф «Задачи на построение». Предложение, в котором разъясняется смысл того или иного выражения или названия, называется определением (определение окружности).
С. 14. Пункт «Аксиомы». Утверждения, содержащиеся в форме основных свойств простейших фигур, не доказываются и называются аксиомами.	С. 59. Об аксиомах геометрии. Некоторые утверждения о свойствах геометрических фигур принимаются в качестве исходных положений, на основе которых доказываются далее теоремы и строится вся геометрия. Такие исходные положения называются аксиомами.
Вводятся аксиомы как основные свойства фигур и отношений.	Некоторые аксиомы были сформулированы в первой главе (хотя не назывались аксиомами).
Рекомендуемая работа над аксиомой: 1) иллюстрация примерами из жизни, на моделях; 2) формулировка аксиомы; 3) иллюстрация аксиомы на рисунках;	

Продолжение таблицы 2 – Сравнительный анализ учебников по введению определения, аксиом и теорем

4) краткая (символическая) запись; 5) использование в рассуждениях.	
Теорема. С. 13. Правильность утверждения о свойстве той или иной геометрической фигуры устанавливается путем рассуждения. Это рассуждение называется доказательством. А само утверждение, которое доказывается, называется теоремой. С.14. Формулировка теоремы обычно состоит из двух частей. В одной части говорится о том, что дано. Эта часть называется условием теоремы. В другой части говорится о том, что должно быть доказано. Эта часть называется заключением теоремы. Дается пример рассуждения.	С. 29. Первый признак равенства треугольников (уже вторая теорема, первая – о вертикальных углах без термина «теорема»). В математике каждое утверждение, справедливость которого устанавливается путем рассуждений, называется теоремой, а сами рассуждения называются доказательством теоремы. С. 63 Во всякой теореме различают две части: условие и заключение. Условие теоремы – это то, что дано, а заключение – то, что требуется доказать.
Метод доказательства от противного, с. 24. (на примере доказательства теоремы «Через каждую точку прямой можно провести перпендикулярную ей прямую, и только одну»).	С. 63 (на примере доказательства теоремы «Если две параллельные прямые пересечены секущей, то накрест лежащие углы равны»).
Обратная теорема, с. 32 (дается разъяснение, что такое обратная теорема). Теорема (свойство углов равнобедренного треугольника). Обратная теорема (признак равнобедренного треугольника).	С. 63. Три признака параллельности двух прямых (доказаны ранее). Теоремы, обратные им – на странице 63.

Таким образом, многие геометрические фигуры и их свойства, изучаемые на первых уроках геометрии 7 класса (по учебнику Л. С. Атанасяна), учащимся известны из курса математики 5–6 классов, поэтому их изучение в 7 классе должно опираться на имеющийся опыт учащихся и основываться на систематизации и обобщении их знаний и умений.

При формировании геометрических понятий большое внимание необходимо уделить этапу, на котором осуществляется непосредственное оперирование графическими моделями фигур. В процессе такого оперирования осуществляется переход к идеальным образам.

Методологическая концепция формирования геометрических понятий, заключающаяся в восхождении от чувственно-конкретного к абстрактному, является основой формирования геометрических понятий в учебнике Л. С. Атанасяна и др.

Вопросы и задания к обсуждению:

1. Составить фрагмент календарно-тематического планирования по геометрии за 7 класс (любой раздел).
2. Подготовить материал для исторической справки (с презентацией) о вкладе Платона, Евклида, Пифагора, Милетского в развитие геометрии.
3. Сравните основные понятия геометрии Д. Гильберта и геометрии А. Н. Колмогорова.
4. Подготовить вводное слово на тему «Введение в геометрию».
5. Рассмотреть этапы изучения тем по геометрии.
6. Методика изучения геометрических фигур в курсе планиметрии.
7. Разработайте методику формирования понятия точки, прямой и угла.

Практическое занятие № 8. Методика обучения геометрии в основной школе

Логическая структура теорем. Структура теоремы

Понятие «доказательство». *Структура доказательства.*

Пример. Рассмотрим доказательство теоремы: *«Диагонали прямоугольника равны».*

Краткая запись теоремы:

Дано: ABCD – прямоугольник, BD и AC – его диагонали (см. рис. 5).

Доказать: BD = AC.

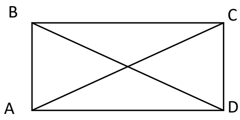


Рисунок 5 – Условие к примеру

Доказательство

1) $\angle A = \angle D$, так как в прямоугольнике все углы равны.

2) AB = CD, так как в прямоугольнике противоположные стороны равны.

3) $$\left.\begin{array}{c} AB = CD, \\ AD - общая \quad сторона, \\ \angle A = \angle B \end{array}\right\} \Rightarrow$$ (Δ ABC = Δ CDA) (по первому признаку равенства треугольников).

4) BD = AC, так как BD и AC лежат в равных треугольниках против равных углов (по следствию из определения равных треугольников). Что и требовалось доказать.

Нетрудно заметить, что каждый пункт доказательства представляет собою дедуктивное рассуждение, но в некоторых из них пропущены частные посылки, в других не названы общие. Отличается и форма записи дедуктивных рассуждений. Представим доказательство в развёрнутом виде, указав частные, общие посылки и вывод в каждом рассуждении (см. табл. 3).

Рассмотренный пример подтверждает следующий вывод: **доказательство теоремы** – это цепочка логически связанных дедуктивных рассуждений, среди частных посылок которых содержатся все условия теоремы, общими посылками являются аксиомы, определения и известные факты, а последний вывод совпадает с заключением теоремы.

Требования к процессу доказательства математических утверждений.

Доказательства теорем в учебниках, как и приведённое доказательство в примере 1, чаще всего являются неполными: отдельные их элементы опускаются. Говорят, что доказательство приведено в свёрнутом виде.

Доказать теорему – это значит ответить на вопросы: а) что доказывается; б) из каких посылок следует каждый вывод; в) как доказываемое утверждение получено из раннее известных фактов.

Таблица 3 – Общая форма записей дедуктивных рассуждений

№	Общие посылки	Частные посылки	Заключение
1	В прямоугольнике все углы прямые (следствие из определения)	∠A и ∠D – углы прямоугольника	∠A=∠D
2	В прямоугольнике противоположные стороны равны (теорема)	AB и CD – стороны прямоугольника	AB = CD
3	Если две стороны и угол между ними одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то такие треугольники равны (теорема)	AD – общая сторона; AB = CD; ∠A = ∠D	ΔABC = =ΔCDA
4	Против равных углов в равных треугольниках лежат равные стороны (следствие из определения равных треугольников)	BD и AC лежат в равных треугольниках против равных углов	BD = AC

Доказательство, отвечающее этим требованиям, называют полным. В математической логике в структуру полного доказательства входят и правила вывода, по которым проводятся рассуждения. В школьном курсе математики правила вывода в процессе доказательства не фиксируются, то есть ответ на третий вопрос остаётся открытым. Доказательство считается полным, если указаны частные посылки, общие посылки и вывод в каждом дедуктивном рассуждении, входящем в состав доказательства. Доказательства школьного курса математики также нельзя отнести к строгим (соответствующим понятию «доказательство» в математической логике), так как некоторые выводы в них делаются на содержательном уровне. Например, когда вместо дедуктивных обоснований говорят: «Это видно по чертежу».

При доказательстве теорем нужно помнить:

– условие теоремы всегда считается истинным;

– условие теоремы используется полностью;

– все выводы обосновываются (указываются частные и общие посылки);

– доказательство должно быть непротиворечивым, то есть оно не может содержать высказываний А и «не А».

Прежде чем разрабатывать проект изучения той или иной теоремы учитель должен провести её анализ.

План анализа теоремы.

Анализ теоремы проводится для того, чтобы правильно спланировать подготовительный этап урока, осуществить мотивацию учащихся, продумать краткую запись теоремы, возможные способы доказательства, а также спрогнозировать возможные ошибки учащихся в формулировке теоремы и наметить пути их исправления.

– Выясняется вид и структура теоремы (разъяснительная часть, условие, заключение).

– Рассматривается возможность различных переформулировок теоремы, которые не только развивают речь учащихся, но и способствуют усвоению теоремы, а также могут помочь в поиске её доказательства.

– Выполняется краткая запись теоремы (если возможно, то чертёж или рисунок).

– Анализируются способы доказательства теоремы в зависимости от её вида.

– Формулируются (если это возможно) обратное, противоположное, контрапозиционное утверждения для данной теоремы. Выясняется, какие из них являются истинными.

– Проводится содержательный анализ теоремы. А именно, даются ответы на вопросы, о каких понятиях идёт речь в теореме, какое новое знание следует из содержания теоремы (свойство, признак понятия, новый метод и пр.), какая проблема решается в процессе изучения данной теоремы.

Ответы на эти вопросы помогут организовать этап мотивации изучения теоремы, грамотно провести её обобщение.

– Прогнозируются возможные ошибки учащихся в формулировке теоремы, продумываются контрпримеры, позволяющие доказать, что в приведённой формулировке допущена ошибка.

План анализа доказательства теоремы.

Цель анализа доказательства – разработка проекта фрагмента урока, обеспечивающего не только успешное усвоение доказательства, но и обучение самостоятельному поиску доказательств математических утверждений.

– Изучается доказательство, выясняется его идея.

– Выясняется структура доказательства (доказательство разбивается на дедуктивные рассуждения, из которых оно состоит; устанавливаются частные и общие посылки).

– Продумываются различные варианты записи доказательства, выбираются наиболее рациональные.

– Выявляются новые приемы (методы), которые использованы в процессе доказательства, с которыми необходимо познакомить учащихся.

– Рассматриваются другие варианты доказательства данной теоремы, их рациональность и дидактическая ценность.

– Анализируется краткая запись теоремы с целью максимальной эффективности ее использования в поиске доказательства теоремы, возможной трансформации ее для осуществления контроля усвоения теоремы.

– Продумываются обобщения, которые можно сделать после доказательства теоремы.

Вопросы и задания к обсуждению:

1. Что понимается под понятиями «доказательство», «доказательство теоремы», «доказать теорему» и «цель анализа доказательства»?

2. В чем заключается план анализа теоремы?

3. Подготовиться к срезу знаний по курсу геометрии 7–9 классов в Приложении Г.

4. С какими трудностями встречаются обучающиеся при изучении теорем в геометрии 7 класса?

5. Методика изучения треугольников в курсе геометрии основной школы.

6. Методика изучения многоугольников в курсе геометрии основной школы.

7. Методика изучения окружности и круга в курсе геометрии основной школы.

Практическое занятие № 9. Методика обучения геометрии в основной школе

Основные методы доказательства в школьном курсе математики.
Основные этапы изучения теоремы.

Под обучением доказательству теорем понимается:

1. Обучение учащихся анализу и воспроизведению готовых доказательств (7–8 класс).

2. Обучение самостоятельному формулированию гипотез, поиску и конструированию доказательств (8–11 класс).

3. Обучение опровержению гипотез, ложных выводов (9–11 класс).

Таким образом, цели обучения доказательству могут быть разными в зависимости от возраста детей и степени важности проблем, которые решаются посредством введения теоремы в рассматриваемую теорию.

Начинающий учитель должен уметь, прежде всего, грамотно организовать работу по анализу и усвоению учащимися готовых доказательств. В этом ему может помочь типовой проект.

Этапы изучения теоремы и ее доказательства:

1. Подготовительный этап.

а) актуализация знаний и умений, необходимых для усвоения теоремы и её доказательства;

б) мотивация изучения теоремы;

в) постановка цели или проблемы.

2. Раскрытие содержания теоремы, ее формулировка.

3. Работа над структурой теоремы, краткая запись теоремы.

4. Поиск доказательства теоремы.

5. Доказательство теоремы.

6. Запись доказательства.

7. Формирование умения применять теорему.

8. Возможные обобщения теоремы, включение нового факта в содержание изучаемого понятия

Основная цель изучения большинства теорем школьного курса – формирование понятия, поскольку результатом работы над теоремой является усвоение свойства или признака понятия (или отношения между понятиями) или же усвоение нового факта о связи изучаемого понятия с другими понятиями. Лишь немногие теоремы служат теоретическим обоснованием некоторых алгоритмов. Так можно считать, что теорема Фалеса обосновывает метод деления отрезка на равные части.

Частные задачи усвоения учащимися конкретной теоремы могут быть следующими: сообщение нового знания о математическом объекте; решение некоторой проблемы; формирование умения анализировать структуру теоремы и выбирать способ доказательства на её основе; приобщение учащихся к исследовательской работе (самостоятельное отыскание свойств и признаков изучаемого объекта); формирование потребности обоснования конкретных фактов путём дедуктивных рассуждений; введение нового способа рассуждений (например, при рассмотрении первых теорем, которые доказываются методом от противного); формирование логического мышления; развитие речи учащихся; обучение правильному использованию математической символики.

Одной из основных задач при изучении учащимися готовых доказательств остается обучение школьников приемам поиска и проведения доказательств, которые они могут использовать в самостоятельной познавательной деятельности. В методической литературе результат решения этой задачи принято называть умением доказывать математические утверждения.

Подготовительный этап

Перед изучением новой теоремы необходимо убедиться, что учащиеся владеют знаниями и умениями, которые нужны для успешного изучения данной теоремы. Для этого предварительно можно задать на дом повторить нужный материал, а в классе организовать проверку, причём таким образом, чтобы в итоге можно было осуществить переход к новой теореме. Полезно подготовить вспомогательные упражнения, решение которых снимет трудности в понимании смысла теоремы или отдельных моментов доказательства.

Мотивация изучения теоремы проводится различными средствами. Перечислим некоторые из них, на наш взгляд, наиболее эффективные.

1. Обращение к жизненному опыту учащихся.

2. Использование элементов историзма: рассказ о математике, который имел отношение к доказательству теоремы; история открытия данного факта; история развития данной теории в математике.

3. Постановка проблемы, которая затем будет решена в процессе рассмотрения новой теоремы.

4. Решение проблемной задачи.

5. Использование наглядных пособий (моделей многогранников, таблиц, электронных презентаций).

6. Выполнение лабораторных и практических работ.

Рассмотрим примеры организации подготовительного этапа работы над теоремой.

Пример 1. Перед доказательством теоремы Пифагора принято рассказывать учащимся о Пифагоре и его заслугах, сообщать о том, что существует около сотни доказательств этой теоремы. Все это, несомненно, вызывает непроизвольный интерес учащихся. Однако более ценным для их развития будет обсуждение проблемы, которая приведёт к доказательству теоремы Пифагора.

Изучение любого многоугольника, в частности треугольника, сводится, прежде всего, к выявлению соотношений между его элементами. При рассмотрении прямоугольного треугольника также математиков интересует, как связаны между собою его углы и стороны. После подобного вступления повторяются уже известные к этому времени соотношения. Выясняется, какие соотношения ещё не выявлены. Таким образом, учащиеся сами могут сформулировать проблему, которая должна быть решена: отыскание связи между сторонами прямоугольного треугольника. После этого можно привести исторические сведения о Пифагоре и теореме. Гипотеза по поводу решения проблемы может быть осуществлена после небольшого исследования. Учащиеся строят прямоугольный треугольник и, измерив стороны, сравнивают квадрат большей стороны с суммой квадратов двух других сторон.

Постановка проблемы даже тогда дает положительный мотивационный эффект, когда ее формулирует сам учитель. Постановка проблемы позволяет расширить представления учащихся о том, как устроена математика.

Пример 2. В методической литературе часто о проблемной задаче пишут как о задаче, при решении которой учащиеся встретились с затруднением. И это затруднение связано с недостатком имеющихся знаний. Наблюдения за работой учащихся на уроках показывают, что сами они, как правило, причину затруднения определить не могут. Потому к отбору проблемных задач нужно подходить с позиции разрешаемой в данной теореме проблемы. Например, в качестве проблемной задачи при изучении теоремы, обратной к теореме Пифагора, можно рассмотреть исторический факт из истории вавилонян: как использовали вавилоняне веревку с узлами для построения прямого угла (рассказ об этом есть на страницах учебника геометрии). Очевидно, решить эту задачу вслед за вавилонянами учащиеся могут, если учитель приготовит соответствующее наглядное «пособие» – веревку с узлами. После «эксперимента» обучающегося, как правило, находит правильное решение. Непроизвольный интерес на этом уроке обеспечен. Но учитель должен позаботиться о том, чтобы после экспериментирования была правильно сформулирована проблема, которую решили учащиеся. Решению задачи помогло отыскание правильного соотношения между сторонами и углами в построенном прямоугольном треугольнике. Учитель может подсказать, какое это соотношение: $3^2 + 4^2 = 5^2$. Такой подход к мотивации теоремы дает еще и возможность рассказать о неполной индукции и дедуктивных методах рассуждений. Для учащихся 8-9-го класса, где изучается теорема Пифагора и теорема, обратная к ней, обсуждение подобных вопросов вполне доступно.

Пример 3. Наглядный образ математического объекта помогает установить его свойства, сформулировать нужные теоремы. Например, изучая модель куба, можно вместе с обучающимися сформулировать свойства параллельных плоскостей: прямые пересечения двух параллельных плоскостей третьей плоскостью являются параллельными; отрезки параллельных прямых, заключенные между параллельными плоскостями, равны.

Рассматривая графики функций можно сформулировать теоремы о связи производной со свойствами функции.

Самостоятельное открытие новых фактов учащимися создаёт ситуацию успеха, а, следовательно, оказывает положительное воздействие на мотивацию деятельности учащихся, направленной на изучение теоремы и ее доказательства.

Пример 4. Изучение теоремы о сумме углов треугольника многие учителя начинают с небольшой лабораторной работы: каждому учащемуся предлагается построить треугольник, измерить транспортиром его углы и сложить их величины. Либо у бумажной модели треугольника оторвать уголки и сложить из них развернутый угол. Затем на основе результатов «эксперимента» выдвигается гипотеза о сумме углов произвольного треугольника.

Таким образом, данные нехитрые рассуждения не только оживляют начало работы над теоремой, но и в некоторой степени служат примером использования метода научного познания. Тем самым они способствуют формированию научного мировоззрения учащихся. После подобного примера эффективно проходит работа над структурой теоремы, в частности несложно доказать обучающимся, что прямые в плоскости должны быть пересекающимися, а слова «прямая, не лежащая в плоскости» можно и опустить, так как не существует в плоскости прямой, которая была бы перпендикулярна двум пересекающимся прямым, лежащим в той же плоскости.

Вопросы и задания к обсуждению:

1. Что входит в основу понятия «проблемная задача на доказательство»?

2. В чем заключаются основные задачи при изучении обучающимися готовых доказательств?

3. Продолжить предложение «Частные задачи усвоения обучающимися конкретной теоремы заключаются в …».

4. Какие действия учителя на уроке позволят мотивировать обучающегося к активности, во время работы над решением задачи на доказательство?

5. Методика изучения построений и преобразований в курсе геометрии основной школы.

6. Методика изучения координат в курсе математики основной школы.

7. Методика изучения векторов в курсе математики основной школы.

Практическое занятие № 10. Методика обучения геометрии в основной школе

Основные методы доказательства в школьном курсе математики. Основные этапы изучения теоремы.

Работа над содержанием теоремы

Целью такой работы является усвоение смысла теоремы учащимися; оформление краткой записи теоремы, выполнение чертежа или рисунка по условию теоремы, если это необходимо.

В методической литературе можно найти немало полезных советов по организации работы над содержанием теоремы. Предложим некоторые из них, которые будут полезны начинающему учителю. Рассмотрим две ситуации.

Первая ситуация – учащиеся самостоятельно сформулировали теорему. Как правило, формулировка в подобных случаях представляет собою простое предложение или имеет импликативную форму. Учитель, начиная работать над краткой записью теоремы, может предложить следующие вопросы:

– О каком объекте говорится в теореме?
– Что известно о данном объекте?
– Что еще дано в теореме?
– Что нужно доказать?
– Какой рисунок (чертеж) можно сделать к теореме?
– Какие данные нужно нанести на чертёж?
– Что означает слово... в формулировке теоремы?
– Что означает фраза ... в формулировке теоремы?

Выполнять краткую запись на доске может и обучающийся, если класс имеет хорошую математическую подготовку, или теорема довольно проста.

Вторая ситуация: учитель сам формулирует теорему.

Желательно, чтобы она была записана на доске.

Работа по изучению теоремы в зависимости от ее вида описана в таблице 4 (см. табл. 4).

Таблица 4 – Работа по изучению содержания теоремы в зависимости от ее вида

Импликативная теорема	**Теорема общего вида**
– Прочитайте формулировку теоремы. – Прочитайте условие теоремы. (Это предложение между словами «если» и «то»). – О каком объекте речь идёт в теореме? – Разбейте условие на более простые условия. (Для этого можно найти простые предложения в данном сложном предложении). – Что нужно доказать в теореме? (Это предложение после слова «то»). – Выполните чертёж (если это возможно). – Нанесите на него данные теоремы. – Перечислите и запишите, что дано, и что нужно доказать. (Выполните краткую запись теоремы).	– Прочитайте формулировку теоремы. – Что требуется доказать в теореме? (Чтобы ответить на этот вопрос, нужно найти подлежащее и сказуемое в данном предложении). – О каком объекте идёт речь в теореме? (Этот объект выражен подлежащим в предложении). – Что известно о данном объекте? (Ответом на этот вопрос служит группа подлежащего в этом предложении). – Разбейте это условие на более простые условия. (Для этого данное сложное предложение нужно разбить на простые предложения). – Какой объект нужно выбрать для доказательства? (Ответом на этот вопрос должно быть – «произвольный объект»). – Выполните чертеж (если это возможно). – Запишите, что дано, и что нужно доказать. (Выполните краткую запись теоремы).

Условие теоремы может быть очень громоздким. Поэтому в дидактических целях некоторые данные, отмеченные на чертеже, в краткой записи можно опустить.

Требования к построению чертежа по условию теоремы

Отметим некоторые требования, которые нужно соблюдать при построении чертежей:

– чертеж должен как можно точнее соответствовать условию теоремы, например, при построении чертежей на плоскости полезно соблюдать пропорции фигуры;

– при построении пространственных чертежей необходимо соблюдать правила параллельного проектирования, в частности, необходимо помнить, что плоскость изображается обычно параллельно плоскости пола, а прямая, перпендикулярная этой плоскости, проводится параллельно краю тетради или доски; при параллельном проектировании сохраняется отношение отрезков на прямой, а также на параллельных прямых;

– числовые данные, нанесённые на чертеж, не должны загромождать его.

Характеристику этапов работы над теоремой, связанных с ее доказательством, рассмотрим дальше.

Поиск доказательства теоремы

На любом уровне наиболее сложным этапом в обучении доказательству является обучение его поиску. Самостоятельное нахождение доказательства теоремы – процесс творческий. Алгоритма поиска доказательства любой теоремы или решения каждой задачи указать нельзя. Многие ученые – математики и методисты пытались найти правила поиска доказательства теорем и решения задач (Жак Адамар, Дьердь Пойя). Эти правила называют эвристиками. С точки зрения обучения деятельности данные правила (эвристики) являются ориентировочной основой деятельности по поиску доказательства теоремы. Перечислим некоторые из них.

– Полезно заменить названия объектов, о которых речь идёт в теореме, их определениями или другими признаками этих объектов.

– Если возможно, то доказываемое предложение разбивается на части, и каждая часть доказывается отдельно.

– В поисках доказательства полезно использовать метод «челнока»: переход от условия к заключению и обратно.

– Иногда можно достичь успеха при поиске доказательства рассмотрением «предельного» случая или рассмотрением частного случая.

– Одним из средств, способствующих формированию умения рассуждать, доказывать, является обучение учащихся анализу и синтезу в процессе поиска доказательства.

Кроме общих эвристик существуют и частные, которые применимы при доказательстве теорем отдельного учебного предмета или темы.

Например, при изучении геометрии в 7-м классе большую помощь обучающимся оказывает правило: *для доказательства равенства отрезков ищи равные треугольники.*

При доказательстве теорем о свойствах и признаках равнобокой трапеции может оказаться полезным одно из трёх построений: проведение двух высот из вершин меньшего основания к большему; проведение диагонали трапеции; построение отрезка, параллельного одной из боковых сторон треугольника, проходящего через вершину меньшего основания.

Несмотря на то, что деятельность по самостоятельному доказательству теорем является творческой, в каждом конкретном случае можно указать предметные действия, которые выполняет обучающийся, доказывая данную теорему. Поэтому, особенно на ранних этапах обучения доказательству, учитель должен продумать систему вспомогательных упражнений к изучаемой теореме, как систему ориентиров, и включить её в подготовительный этап или рассмотреть на предыдущих уроках. В такую систему входят упражнения на выполнение отдельных рассуждений и операций, из которых состоит содержание доказательства теоремы.

Доказательство теоремы

Если поиск доказательства проведён методически грамотно, то доказательство у учащихся не вызывает затруднений. При воспроизведении доказательства учитель должен следить за тем, чтобы выполнялись требования к доказательству. В начале обучения доказательству полезно проводить подробный его анализ, а результаты анализа записывать в следующую таблицу 5.

Таблица 5 – Анализ доказательства теоремы

Вывод	Из каких условий он следует?	На каком основании сделан вывод?
…	…	…

Очевидно, во вторую колонку записываются частные посылки, а в третью – общие. Не смотря на громоздкость такой записи, не нужно жалеть времени на эту работу: как показывает опыт передовых учителей математики, такая запись помогает уяснить структуру доказательства, а также каждого дедуктивного рассуждения, из которых оно состоит.

Предъявление учащимся доказательства может быть осуществлено с использованием различных приемов. Приведем некоторые из них.

1. Доказательство теоремы и его запись выполняет сам учитель в том случае, когда трудно организовать её поиск с участием ребят или в целях экономии времени. В этом случае учитель начинает, как правило, с идеи доказательства, и далее подробно его излагает.
2. После поиска доказательство выполняет один из наиболее подготовленных обучающихся. При этом не следует требовать, чтобы он одновременно вел записи.
3. Поиск доказательства был проведён под руководством учителя. Доказательство изучается учащимися по учебнику самостоятельно. После этого один из учащихся выполняет запись доказательства на откидной доске, а остальные – в тетрадях. Затем делается проверка и обсуждение правильности записи теоремы.

4. Доказательство изучается по учебнику под руководством учителя. После этого выполняется его запись.

В 7–8–х классах, когда ставится цель – формирование умения изучать готовые доказательства, учитель вместе с учащимися осуществляет поиск доказательства, составляет план доказательства, выделяет основную идею. После этого учитель предлагает учащимся найти и прочитать в тексте доказательство каждого пункта плана и, выделив составные части, выполнить запись отдельных рассуждений в тетрадях.

5. Если обучающиеся овладели некоторыми умениями работать с доказательством теоремы, то можно им дать задание самостоятельно изучить доказательство по учебнику без предварительного его поиска. В этом случае в качестве ООД им можно предложить следующие указания:

– Прочитайте теорему. Выполните краткую запись.
– Прочитайте доказательство.
– Разбейте его на отдельные рассуждения.
– Составьте план доказательства.
– В каждом рассуждении выделите условие, вывод и общие посылки.
– Выполните краткую запись каждого пункта плана.
– Подумайте, что помогло доказать теорему (выделите основную идею доказательства).

Как всякая самостоятельная работа, эта работа должна быть проверена.

6. Изучение теоремы задается в виде домашнего задания. В классе два – три обучающихся излагают доказательство и предлагают свои варианты его записи.

Вопросы и задания к обсуждению:

1. В чем заключается сущность дедуктивного рассуждения?
2. Как учителю математики увеличить количество решаемых задач на доказательство во время урока?
3. Какие особенности необходимо учитывать при работе с обучающимися у доски?
4. Когда учащемуся нужно построить чертеж к условию задачи?
5. Рассмотреть содержание курса геометрии в основной школе с точки зрения изучения тем по основным теоремам, которые нужно доказывать.
6. Охарактеризуйте различные методы и приемы введения теорем. Конкретизируйте их на материале различных учебных пособий.

7. Подготовьте деловую игру по изучению доказательства некоторых теорем в классе (теоремы выберите самостоятельно).

8. Охарактеризуйте синтетический метод поиска доказательства теорем. Конкретизируйте его примером.

Практическое занятие № 11. Методика обучения геометрии в основной школе

Основные методы доказательства в школьном курсе математики. Основные этапы изучения теоремы.

Запись доказательства

Она играет важную роль в обучении умению доказывать. Единых требований к записи доказательства нет. Тем не менее, можно указать несколько правил, которые следует соблюдать при выполнении записи доказательства, так как они способствуют усвоению понятия «доказательство» на разных этапах обучения.

1. *Запись доказательства должна соответствовать его структуре.*

Это означает, что в записи доказательства должны быть явно выделены отдельные дедуктивные рассуждения (доказательство должно быть «разложено по полочкам»).

2. *В рамках доказательства одной теоремы полезно придерживаться единой записи дедуктивных рассуждений, из которых состоит доказательство.*

Можно выделить две основные формы записи дедуктивных рассуждений:

1) вывод – частные посылки – общие посылки;

2) частные посылки – вывод – общие посылки.

Пример 1. Выполним запись рассуждения: *Треугольники АВС и КРТ равны, потому что сторона АВ равна стороне КР и углы А и В соответственно равны углам К и Р.*

1-й способ. Запись начинается с вывода. $\Delta ABC = \Delta KPT$, так как $\angle A = \angle K$, $\angle B = \angle P$, $AB = KP$ (по признаку равенства треугольников).

2-й способ. Запись начинается с частных посылок.

В треугольниках АВС и КРТ:

$$\left.\begin{array}{r}\angle A = \angle K,\\ \angle B = \angle P,\\ AB = KP\end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ABC = \Delta KPT \text{ (по признаку равенства треугольников).}$$

Реже встречаются другие формы записи дедуктивных рассуждений, например, общие посылки – частные посылки – вывод.

3. *Запись должна быть краткой, но полной.*

Это означает, что в записи отдельных дедуктивных рассуждений должны быть выделены частные, общие посылки и вывод.

4. *В начале изучения систематического курса геометрии можно не выполнять запись доказательства. Доказательство проводится устно.*

В самом деле, в этот период учащиеся практически не знают символов математического языка, а потому запись доказательства получается очень громоздкой. Скорость письма обучающихся в этих классах также невысока, потому нередко в 7-м классе обучающиеся жалуются, что они не успевают записывать доказательства, а учителя «не укладываются в урок». В этот период полезно специально посвящать время урока обучению записи доказательств. Это делается посредством: а) показа образцов записи на примере отдельных теорем; б) сообщения учащимся знаний о структуре доказательства и дедуктивного рассуждения; в) ознакомления учащихся с требованиями к записи теорем, которые учитель определяет сам.

5. *Необходимо проводить специальное обучение учащихся применению отдельных математических символов в записи доказательств посредством выполнения специальных систем упражнений.*

Нередко даже в старших классах учащиеся допускают ошибки при употреблении символики. Большинство из них связано со знаком логического следования $\Rightarrow$ и знаком равносильности $\Leftrightarrow$. Знак логического следования часто используется как стенографический символ, то есть вместо слова «следует». Неверно применяется и знак пересечения множеств, который используют учащиеся старших классов, выполняя запись геометрического доказательства. Условие «прямые a и b пересекаются» должно быть записано следующим образом: $a \cap b \neq \varnothing$, а условие «прямые a и b не пересекаются» записывается так: $a \cap b = \varnothing$.

Применение теоремы

На этом этапе предполагается формирование умения по применению нового факта в математической деятельности учащихся. Применить теорему на практике – значит, на некотором конкретном материале отыскать условия данной теоремы и сделать соответствующий вывод.

Для решения данного вопроса необходимо на предыдущих этапах изучения теоремы показать обучающимся, какую роль она играет в данной теории, при решении каких проблем ее можно использовать.

Пример 2. Теорема о сумме углов треугольника применяется, когда по двум известным углам нужно найти третий угол.

Теоремы о признаках параллелограмма применяются, если нужно доказать, что четырехугольник является параллелограммом.

Теорема о трех перпендикулярах применяется при доказательстве перпендикулярности двух прямых и т. д.

Как обучение любой деятельности, обучение применению теоремы проводится посредством выполнения соответствующей системы упражнений, в процессе выполнения которой формируется ООД, облегчающая обучающемуся выполнение данного действия. Так применению признаков равенства треугольников способствуют следующие ориентиры: *для доказательства равенства треугольников ищи три пары соответственно равных элементов, среди которых есть хотя бы одна сторона. Для доказательства равенства углов или отрезков ищи равные треугольники.*

Часто учитель после доказательства теоремы начинает решать задачи по порядку из учебника. Надо помнить, что авторы учебников, как правило, соблюдают принцип от простого к сложному при построении системы упражнений к пункту или теме. Но это вовсе не означает, что при этом в полной мере учитываются закономерности процесса усвоения новых знаний. Проанализировав систему упражнений к изучаемой теореме, учитель должен отобрать упражнения, в которых доказательство состоит из одного или двух рассуждений, причём ситуации, рассматриваемые в задачах, должны быть такими, которые наиболее часто встречаются в решениях других задач. Такие задачи называют опорными.

Возможные обобщения теоремы, ее включение в систему знаний

Этот этап не обязательно должен быть последним при изучении теоремы. Включение теоремы в систему уже имеющихся знаний – длительный этап. Начиная с вопроса о том, где можно применить изученный факт, который решается на первых этапах знакомства с теоремой, на протяжении всей дальнейшей работы над теоремой непроизвольно происходит обобщение и систематизация знаний учащихся, в результате которой данный факт занимает свое место в системе знаний. Но этот процесс проходит быстрее, если эту работу вести целенаправленно. Прежде всего, изученный факт должен занять свое место в структуре понятия, о котором идёт речь в теореме. Обучающийся должен представлять, какую роль данный факт играет в содержании понятия: является ли он свойством или признаком понятия. Это поможет ему в применении теоремы. Кроме того, для усвоения теоремы полезно рассмотреть, как влияют изменения в условии теоремы на истинность доказываемого утверждения, изучить предельные случаи и др.

Вопросы и задания к обсуждению:

1. Охарактеризуйте поиск доказательства теорем с помощью анализа Паппа. Конкретизируйте его примером.

2. Охарактеризуйте поиск доказательства теорем с помощью анализа Евклида. Конкретизируйте его примером.

3. Охарактеризуйте методические приемы изучения доказательства некоторых методом от противного. Конкретизируйте его примером.

4. Проанализируйте демоверсии ОГЭ и ЕГЭ на наличие заданий, проверяющих знание по задачам с использованием поэтапного доказательства. Приведите примеры заданий.

5. Воспользуйтесь анализом Евклида при отыскании доказательства векторного равенства: $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right)$, где M – середина отрезка AB; O – произвольная точка плоскости (9 класс).

6. Воспользуйтесь анализом Евклида при отыскании решения задачи на построение: «Постройте трапецию по основаниям и боковым сторонам» (8 класс).

7. Общие схемы решения задач могут быть ориентированы на применение отдельных математических методов. Например, для решения задач на доказательство координатным методом может быть предложена следующая схема: 1) построить чертеж; 2) расположить систему координат удобным образом; 3) записать координаты точек; 4) записать условие и заключение задачи на языке координат; 5) выполнить переход от условия задачи к ее заключению. Приведите примеры применения этой схемы при изучении теоретического материала и решения задач.

Практическое занятие № 12. Учебники и методические материалы по методике преподавания математики

Изучение методических рекомендаций к преподаванию по предмету математики

Одна из задач современной школы развивать познавательные склонности у подрастающего поколения и научить самостоятельно учиться. В следствии чего обучающийся научится пользоваться учебной литературой, умело читать ее, самостоятельно работать с ней. Кроме того, одной из целей математического образования заключается в том, чтобы научить самостоятельно читать доступный математический материал.

Важно понимать, что изложение материала в математических учебниках отличается многими особенностями. Основные из них таковы: своеобразие языка, обусловленное богатством специальных терминов для понятий, операций и отношений; абстрактность математических теорий; сжатость и кратность изложения; широкое применение символики, сгущающей мысль, усиливающей сжатость изложения; преобладание дедуктивного метода в обосновании предложений; тесная связь текста с изображением фигур. Эти особенности являются основополагающими и в школьных математических источниках.

При обучении целесообразно учителю использовать задачники и пособия по математике, которые позволят расширить видовое разнообразие решаемых математических задач.

Еще большее значение в этом отношении имеют учебники. Правильное использование учебника математики на уроке и в домашних занятиях вносит значительный вклад в умения читать математическую книгу. Чтобы научить обучающихся работать с книгой, организуются и проводятся соответственные занятия на уроках. Выбор приема работы с учебником зависит от класса, возрастных особенностей обучающихся, от имеющихся умений работать с книгой. Этот выбор зависит и от книги, материала, особенностей его изложения в учебнике.

Кроме того, организуется самостоятельная домашняя работа обучающихся с книгой. Ее виды также разнообразны и усложняются по мере перехода обучающихся в старшие классы. Результаты самостоятельной работы над книгой, если в задание включалось изучение нового материала, контролируются на очередном уроке.

В методических рекомендациях за прошлый год произведены изменения, в особенности по математике запланировали увеличить количество обучающихся, изучающих математику углубленно в 7–9 классах. Для поддержки углубленного обучения математики через осуществление внеурочной деятельности в образовательной организации, реализующей базовое обучение математике в основной школе, для чего разработана программа внеурочной деятельности «Трудные вопросы математики (7–9 классы)». При этом целесообразным является чередование тем занятий с алгебраическим и геометрическим содержанием. Кроме того, следует обратить внимание на необходимость целенаправленного повышения интереса к изучению математики обучающихся в 5–6 классах.

На сайте «Единое содержание общего образования» (см. рис. 5) представлены различные материалы, предназначенные для оказания методической поддержки учителю математики. К ним относятся:

– методические пособия и рекомендации;

– методические видеоуроки по вопросам требований к проведению урока математики;

– методические семинары, в которых существуют онлайн-семинары по актуальным направлениям реализации обновленных ФГОС ООО и ФГОС СОО (оценка образовательных достижений обучающихся, воспитание на уроках математики и др.), а также по отдельным темам курса математики 5 класса, представленным в программе;

– методические интерактивные кейсы;

– виртуальные лабораторные и практические работы на углубленном уровне основного общего образования, в котором работы предназначены для организации экспериментальной и исследовательской деятельности обучающихся.

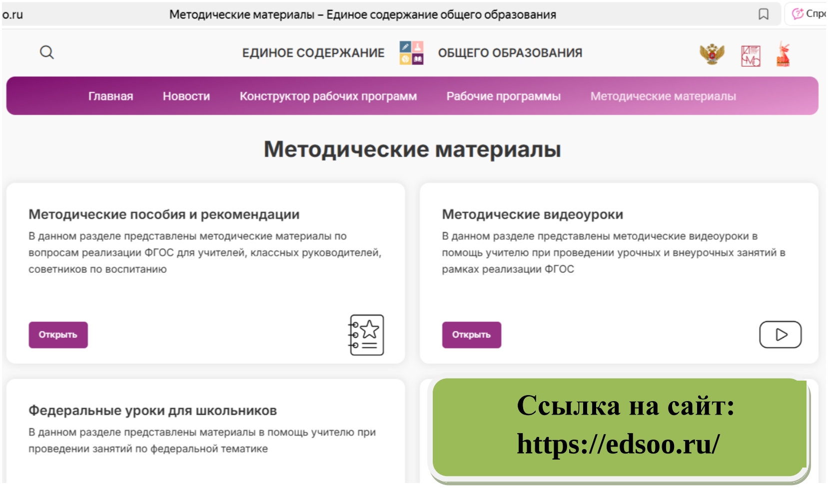


Рисунок 5 – Внешний вид вкладки «Методические материалы» сайта «Единое содержание общего образования»

Среди разнообразия возможных методических пособий для преподавания предмета «Вероятность и статистика» можно выделить «Сценарии комплектов учебных заданий-контекстных задач к учебному курсу «Вероятность и статистика» для обучающихся основного общего образования» в 7 классе. В нем отражены методические рекомендации и сами комплекты задач к ведению курса вероятности и статистики.

Вопросы и задания к обсуждению:

1. Какие методические рекомендации существуют для учителя математики, издаваемые ежегодно по учебному предмету «Математика»?

2. Какой сайт содержит основные учебные пособия для работы учителя математики?

3. Изучить учебно-методическое пособие по системе оценки достижений планируемых результатов освоения учебного предмета «Математика».

4. Какие существуют пособия по методическим кейсам в математике?

5. Какие учебно-методические пособия можно использовать для составления проверочных работ на уроках геометрии в 8 классе?

6. Какие учебно-методические пособия можно использовать для составления контрольных работ по геометрии в 8 классе?

7. Какие учебно-методические пособия можно использовать для составления конспекта урока по геометрии в 9 классе?

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Учебно-методическое пособие включает в себя сжатое содержание лекций, задания и вопросы к практическим занятиям, темы для индивидуальных работ, экзаменационные вопросы, а также перечень рекомендуемой литературы.

В приложениях размещены система оценивания студентов по дисциплине «Методика преподавания математики», перечень вопросов к срезам знаний по курсу алгебры и геометрии в 7–9 классах, пример оформления конспекта урока по геометрии в 7 классе, домашняя контрольная работа, задания для проведения деловых игр.

Содержание дисциплины «Методика преподавания математики» является основой для будущего изучения как математических, так и методических дисциплин, а также для успешного прохождения педагогических практик по математике.

Учебно-методическое пособие по методике преподавания математики было разработано в соответствии с рабочей программой обучения в высшем учебном заведении. Данное пособие предоставляет возможность индивидуального изучения предложенных тем по методике преподавания математики для студентов заочной формы обучения.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. **Атанасян, Л. С.** Математика. Геометрия : 7–9-е классы : базовый уровень : учебник / Л. С. Атанасян, В. Ф. Бузутов, С. Б. Кадомцев [и др.]. – 14-е изд., перераб. – М. : Просвещение, 2023. – 416 с.

2. Большая советская энциклопедия [Текст] : [В 30 т.] / Глав. ред. А. М. Прохоров. – 3-е изд. – М. : Сов. энциклопедия, 1969. – 26 см. [Т.] 24. Кн. 1: Собаки-струна. – 1976. – 607 с.

3. **Высоцкий, И. Р.** Математика. Вероятность и статистика: 7–9-е классы: базовый уровень: учебник: в 2 частях // И. Р. Высоцкий, И. В. Ященко. – Изд-во «Просвещение», 2023.

4. **Казаков, В. В.** Наглядная геометрия. 7 класс. / В. В. Казаков. – 2-е изд. – Минск : Аверсэв, 2013. – 126 с.

5. **Казаков, В. В.** Наглядная геометрия. 8 класс. / В. В. Казаков. – Минск : Аверсэв, 2012. – 126 с.

6. **Казаков, В. В.** Наглядная геометрия. 9 класс : посб. для учащ. учр. общ. сред. образоват. с русск. яз. обучения / В. В. Казаков. – 4-е изд. – Минск : Аверсэв, 2015. – 96 с.

7. Комплекс кейсов по формированию функциональной (математической) грамотности / Е. А. Баранова, Т. Н. Константинова, Е. В. Приходько [и др.]; под ред. Т. Ф. Сергеевой. – М., 2022. – 207 с.

8. Конструктор рабочих программ / Единое содержание общего образования : сайт ФГБНУ «Институт стратегии развития образования» [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://edsoo.ru/konstruktor-rabochih-programm/ (дата обращения: 18.01.2024).

9. **Кривко, Я. П.** О системе конструирования геометрических задач Л. М. Лоповка / Я. П. Кривко // Образование Луганщины: теория и практика. – 2023. – № 5(36). – С. 2–5. – EDN BIWQEG.

10. **Крупская, Н. К.** Педагогические сочинения: В 10 т. / Н. К. Крупская. – Т. 2. – М.: Изд-во АПН РСФСР, 1958. – 735 с.

11. Малая советская энциклопедия [Текст] : [в 10 т.] / ред. совет Д. Л. Вейс, М. Б. Вольфсон, А. И. Догадов [и др.] ; глав. ред. Н. Л. Мещеряков. – Москва : Советская энциклопедия, 1928-1931 (16-я тип. «Мосполиграф»). – 10 т.

12. Математика. Алгебра : 7 класс : базовый уровень : учебник / Ю. Н. Макарычев, Н. Г. Миндюк, К. И. Нешков [и др.]; под ред. А. С. Теляковского. – 15-е изд., перераб. – М. : Просвещение, 2023. – 255 с.

13. Методическая поддержка педагога / сайт «Учитель.club» : группа компаний «Просвещение» [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://uchitel.club/ (дата обращения: 05.02.2024).

14. **Мубараков, А. М.** Практические работы по теории и методике обучения математике: учебное пособие / А. М. Мубараков, О. А. Захарова, А. М. Абдрахманова. – Павлодар : ПГУ им. С. Торайгырова, 2002. – 69 с.

15. **Петрова, Г. А.** Вопросы эстетической подготовки будущего учителя / Г. А. Петрова. – Казань : Изд-во Казан. ун-та, 1976. – 200 с.

16. **Сергиенко, Л. Ю.** Методика изучения комплексных чисел и их приложений в курсе математики средних специальных учебных заведений : дис. ... канд. пед. наук : 13.00.02 / Сергиенко Людмила Юльевна. – Москва, 1981. – 160 с.

17. Стратегические приоритеты в сфере реализации государственной программы Российской Федерации «Развитие образования» до 2030 года (в ред. Постановления Правительства РФ от 07.10.2021 № 1701) [Электронный ресурс]: государственная программа Российской Федерации «Развитие образования», утвержденная постановлением Правительства Российской Федерации от 26.12.2017 № 1642. – 150 с. – Режим доступа: https://docs.edu.gov.ru/document/f9321ccd1102ec99c8b7020bd2e9761f/download/4444/.

18. Теория и методика обучения математике : общая методика : учеб. пособие / Е. А. Суховиенко, З. П. Самигуллина, С. А. Севостьянова, Е. Н. Эрентраут. – Челябинск : Изд-во «Образование», 2010. – 65 с.

19. **Тищенко, Е. В.** Математическое образование Луганщины в лицах: Зверяка Светлана Усманбаевна / Е. В. Тищенко // Образование Луганщины : теория и практика. – 2024. – № 1(38). – С. 28–31.

20. **Тищенко, Е. В.** Методика преподавания математики: в 2 ч. Ч. 1 : учебно-методическое пособие / сост. Е. В. Тищенко, Я. П. Кривко ; ФГБОУ ВО «ЛГПУ». – Луганск : Издательство ЛГПУ, 2024. – 100 с.

21. **Тищенко, Е. В.** Повышение качества обучения школьников при изучении математики после завершения дистанционной формы обучения / Е. В. Тищенко // Теоретико-методологические аспекты преподавания математики в современных условиях : материалы IV Международной заочной научно-практической конференции, 4–5 мая 2021 г., г. Луганск / под общ. ред. С. В. Темниковой, О. В. Давыскибы; ГОУ ВО ЛНР «ЛГПУ». – Луганск : Книта, 2021. – С. 163–167.

22. Формы организации обучения математике [Электронный ресурс] / Учительский портал : [сайт]. – URL: https://www.uchportal.ru/publ/24-1-0-9171 (дата обращения: 11.01.2024).

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение А

Система оценивая студентов очной/заочной формы обучения

Вид учебной работы	Количество баллов
Семестр 6 / Триместр 10	
Срез знаний студентов по курсу алгебры 7–9 классов	10
Срез знаний студентов по курсу геометрии 7–9 классов	10
Подготовка и участие в проведении деловых игр	20
Домашняя контрольная работа № 3 «Методическое планирование темы из курса алгебры (геометрии) 7–9 классов»	20
Экзамен	40
Итого:	**100**

Приложение Б

Пример конспекта урока по геометрии в 7 классе на тему «Пятый постулат Евклида»

Конспект урока по предмету «Геометрия» в 7-А классе учителя

математики Фамилия И.О.

Дата проведения: __.__._____ г.

Урок № ___

Тема урока: Пятый постулат Евклида.

Цель урока: в совместной деятельности с учащимися сформулировать аксиому параллельных прямых, сформулировать и доказать следствия из нее, свойства параллельных прямых.

Планируемые результаты:

– *Предметные:* анализ объектов с целью выделения признаков (существенных, несущественных); выдвижение гипотез и их обоснование; построение логической цепи рассуждений, доказательств; подведение под понятие; выведение следствий; установление причинно-следственных связей.

– *Регулятивные:* целеполагание как постановка учебной задачи на основе соотнесения того, что уже известно и усвоено учащимся, и того, что еще неизвестно, планирование – определение последовательности промежуточных целей с учетом конечного результата, оценка – выделение и осознание обучающимся того, что уже усвоено, а также еще подлежит усвоению, осознание качества и уровня усвоения.

– *Коммуникативные:* планирование учебного сотрудничества с учителем и сверстниками, т. е. определение цели сотрудничества, функций участников, способов взаимодействия, умение с достаточно полнотой и точностью выражать свои мысли в соответствии с задачами и условиями коммуникации, владение монологической и диалогической формами речи в соответствии с грамматическими и синтаксическими нормами родного языка, умение доказывать собственное мнение.

– *Личностные:* умение учащегося устанавливать связи между целью учебной деятельности и ее мотивом, т.е. между результатом учения, и тем, что побуждает деятельность, ради чего она осуществляется; таким образом должна осуществляться осмысленная организация собственной деятельности обучающегося.

Тип урока: изучение нового материала.

Методы работы: репродуктивный, частично-поисковые, эвристическая беседа.

Формы работы: фронтальная.

УМК: Математика. Геометрия ; 7–9-е классы : базовый уровень : учебник / Л. С. Атанасян, В. Ф. Бутузов, С. Д. Кадомцев [и др.].– 14-е изд., перераб. – М.: Просвещение, 2023. – 416 с.: ил.

Средства обучения: традиционные, презентация, чертежные инструменты.

Структура урока (хронометраж):

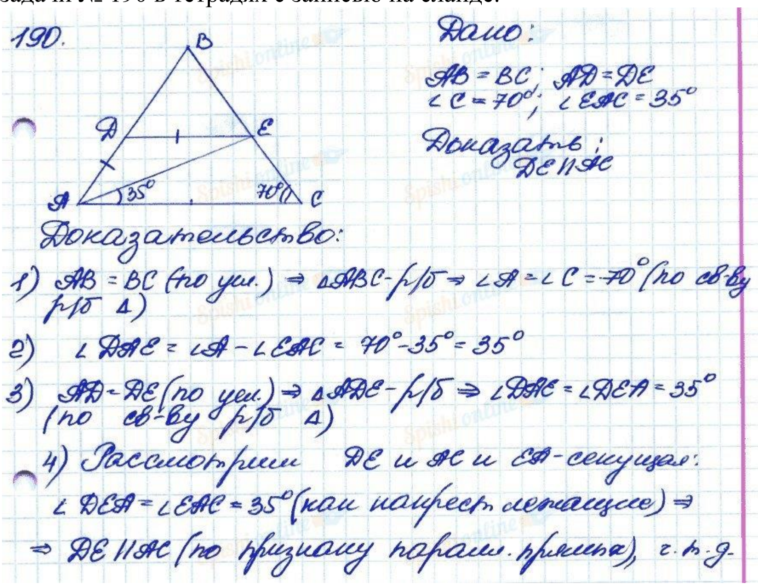
1. Организационный момент (1 мин.).
2. Актуализация опорных знаний (8 мин.).
3. Мотивация урока (5 мин.).
4. Изучение нового материала (10 мин.).
5. Закрепление нового материала (15 мин.).
6. Рефлексия (4 мин).
7. Домашнее задание (2 мин).

Ход урока

1. Организационный момент (1 мин.). Приветствие, организация класса к уроку.

2. Актуализация опорных знаний (8 мин.).

Проверка домашнего задания. Проверка правильности выполнения задачи № 190 в тетрадях с записью на слайде.



190.

Дано:

$AB = BC$; $AD = DE$

$\angle C = 70^\circ$; $\angle EAC = 35^\circ$

Доказать: $DE \parallel AC$

Доказательство:

1) $AB = BC$ (по усл.) $\Rightarrow \triangle ABC$ – р/б $\Rightarrow \angle A = \angle C = 70^\circ$ (по св-ву р/б $\triangle$)

2) $\angle DAE = \angle A - \angle EAC = 70^\circ - 35^\circ = 35^\circ$

3) $AD = DE$ (по усл.) $\Rightarrow \triangle ADE$ – р/б $\Rightarrow \angle DAE = \angle DEA = 35^\circ$ (по св-ву р/б $\triangle$)

4) Рассмотрим DE и AC и EA – секущая:

$\angle DEA = \angle EAC = 35^\circ$ (как накрест лежащие) $\Rightarrow$

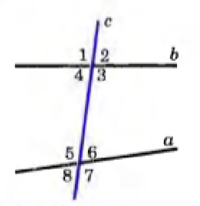
$\Rightarrow DE \parallel AC$ (по признаку паралл. прямых), ч.т.д.

Обучающиеся записывают дату в тетрадь.

– В тетрадях запишите дату, классная работа.

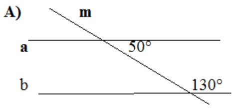
Коллективная работа. Учитель решает задания с классом.

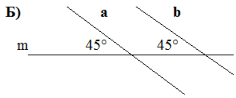
№ 1. Укажите на рисунке:1) накрест лежащие углы; 2) односторонние углы;3) соответственные углы.

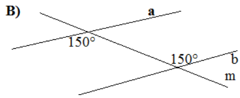


Ответ: 1) ∠5 и ∠3; ∠6 и ∠4. 2) ∠4 и ∠5; ∠3 и ∠6. 3) ∠1 и ∠5; ∠2 и ∠6; ∠3 и ∠7; ∠4 и ∠8.

№ 2. Установите соответствие:







Ответ: А – 3; Б – 2; В – 1.

Фронтальный опрос. Вопросы к классу:

1) **a | | b, так как накрест лежащие углы равны.**

2) **a | | b, так как соответственные углы равны.**

3) **a | | b, так как сумма односторонних углов равна 180°.**

Вопросы к классу учителя:

– Сформулируйте первый признак параллельности двух прямых?

(*Если при пересечении двух прямых секущей накрест лежащие углы равны, то прямые параллельны.)*

– Сформулируйте второй признак параллельности двух прямых?

(*Если при пересечении двух прямых секущей соответственные углы равны, то прямые параллельны.)*

– Сформулируйте третий признак параллельности двух прямых?

(Если при пересечении двух прямых секущей сумма односторонних углов равна 180°, то прямые параллельны.)

3. Мотивация урока (5 мин.). Обучающимся предлагается решить задачу.

Задача № 3: **Через точку *M*, не лежащую на прямой *a*, провести прямую, параллельную прямой *a*.**

Дано: a, M∉a.

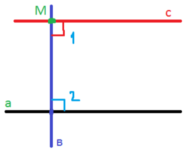
Построить: c⊥a.

План построения:

1) $a \perp b$, $M \in b$.

2)в $\perp c$, $M \in c$.

Ответ:



Доказательство:

1) Т.к. $a \perp в$и $в \perp c$, то $\angle 1 = \angle 2 = 90°$.
2) $\angle 1$ и $\angle 2$ - односторонние углы при прямых *с* и *а* секущей *в*.
3) $\angle 1 + \angle 2 = 180°$.

Значит а ∥ с (по третьему признаку параллельности прямых).

Возникает вопрос: **через точку *М*, не лежащую на прямой *а*, сколько можно провести прямых, параллельных прямой *а*, т.е. сколько решений у данной задачи?**

Этот вопрос имеет большую историю. В книге «Началах» Евклида содержится пятый постулат, из которого следует, что через точку, не лежащую на данной прямой, проходит только одна прямая, параллельная данной. Оказывается, доказать это невозможно, хотя ученые на протяжении многих веков пытались это сделать. И лишь в прошлом веке было окончательно выяснено, что утверждение о единственности прямой, проходящей через данную точку параллельно данной прямой, не может быть доказано на основе остальных положений теории и является аксиомой. Она называется аксиомой параллельных прямых.

4. Изучение нового материала (10 мин.). Постановка учебной задачи урока.

– Сегодня нужно изучить аксиому параллельных прямых.

Тема урока:«Пятый постулат Евклида».

Аксиома параллельных прямых: *Через точку, не лежащую на данной прямой, проходит только одна прямая, параллельная данной.*

Некоторые утверждения о свойствах геометрических фигур принимаются в качестве исходных положений, на основе которых доказываются далее теоремы и, вообще, строится вся геометрия. Такие исходные положения называются аксиомами.

На самом деле с аксиомами мы с вами уже встречались ранее. Например, с*колько прямых можно провести через 2 точки?*

Через любые две точки можно провести прямую, и притом только одну.

Это утверждение тоже является аксиомой.

Сколько отрезков, равных данному, можно отложить на данном луче от его начала?

На любом луче от его начала, можно отложить отрезок равный данному и при том только один. Это утверждение тоже является аксиомой.

Сколько углов, равных данному неразвернутому углу, можно отложить от любого луча в заданную сторону?

От любого луча в заданную сторону можно отложить угол, равный данному неразвернутому углу, и притом только один.

Историческая справка.

Геометрия, изложенная в книге «Начала» Евклида, т.е. содержащая в качестве аксиомы, что через точку, не лежащую на данной прямой, проходит только одна прямая, параллельная данной, называется евклидовой геометрией. Но есть и другие геометрии, например, геометрия Лобачевского, в которых данная аксиома заменена на другое утверждение.

Николай Иванович Лобачевский (1792-1856 гг.) – великий русский математик, один из создателей неевклидовой геометрии. Также был народным просветителем и ярким деятелем университетского образования. Знакомый с биографией Лобачевского У. Клиффорд назвал своего коллегу «Коперником геометрии».

В геометрии Лобачевского, вместо аксиомы параллельных прямых, принимается следующая аксиома: Через точку, не лежащую на данной прямой, проходят по крайней мере две прямые, лежащие с данной прямой в одной плоскости и не пересекающие ее.

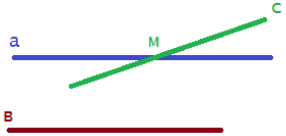
Геометрия Лобачевского имеет обширные применения как в математике, так и в физике. Историческое ее значение состоит в том, что её построением Лобачевский показал возможность геометрии, отличной от евклидовой, что знаменовало новую эпоху в развитии геометрии и математики вообще.

Вернемся к евклидовой геометрии.

У аксиомы параллельных прямых есть два следствия, т.е. утверждения, которые выводятся непосредственно из аксиомы.

Следствия из аксиомы параллельных прямых.

1°. Если прямая пересекает одну из двух параллельных прямых, то она пересекает и другую.



Дано: $a \parallel b$, $c \cap a$

Доказать: $c \cap b$

Поиск доказательства:

- Предположим, что $c \not\cap b$. Тогда как расположена прямая c по отношению к b? ($c \parallel b$)

– Значит, через точку M проходит 2 прямые параллельные прямой b. Чему это противоречит? (Противоречит аксиоме параллельных прямых)

–	Значит наше предположение неверно и с$\cap$ b.

Доказательство

1)	Пусть с не пересекает b, тогда с || b.

2)	a $\parallel$ b и c $\parallel$ b , однако c $\cap$ a = M, тогда M$\in$a и M$\in$c , что противоречит аксиоме параллельных прямых.

3)	Значит наше предположение не верно и с $\cap$ b.

5. Закрепление нового материала (15 мин.).

Сформулируем эту теорему, заполнив пропуски:

Если две _____ ________ пересечены секущей, то _____ ______ углов равна ____.

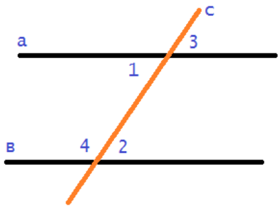
Ответ обучающихся: «при пересечении двух прямых секущей сумма односторонних углов равна 180˚» – заключение.

«прямые параллельны» – условие.

Теорема: Если две параллельные прямые пересечены секущей, то сумма односторонних углов равна 180˚.

Дано: $a \parallel b$, с $-$ секущая, $\angle 1$ и $\angle 4$ – *односторонние.*

Доказать: $\angle 1 + \angle 4 = 180^\circ$.



Поиск доказательства:

1) Сравните углы 1 и 2.

2) Сравните углы 2 и 4.

3) Что из этого следует?

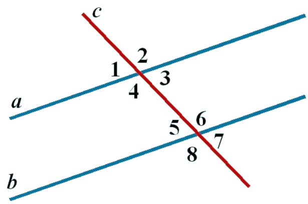
Доказательство

1) *Т.к.* $a \parallel b$, с $-$ секущая, *тогда* $\angle 1 = \angle 2$, *как* накрест лежащие *углы* (по свойству 1 параллельных прямых).

2) *Т. к.* $\angle 2$ и $\angle 4$ – смежные, то $\angle 2 + \angle 4 = 180^\circ$ (по свойству смежных углов).

3) *Следовательно* $\angle 1 + \angle 4 = 180^\circ$.

Задача: Найдите все углы, образованные при пересечении параллельных прямых a и b секущей c, если один из углов равен 150°.



Дано: a ∥ b, ∠1=150°.

Найти:∠2, ∠3, ∠4, ∠5, ∠6, ∠7, ∠8.

Решение: т.к.а ∥ b, то:

1) ∠1 и ∠5 – соответственные , значит∠1 = ∠5 =150° (по 2-му свойству параллельных прямых)

2) ∠5 и ∠3 – накрест лежащие, значит ∠5=∠3=150° (по 1-му свойству параллельных прямых)

3) ∠3 и ∠7 – соответственные, значит ∠3 = ∠7 =150° (по 2-му свойству параллельных прямых)

4) ∠3 и ∠6 – односторонние, значит ∠6 = 180°–150°=30° (по 3-му свойству параллельных прямых)

5) ∠4 и ∠6 – накрест лежащие, значит ∠4=∠6=30° (по 1-му свойству параллельных прямых)

6) ∠4 и ∠8 – соответственные, значит ∠4 =∠8=30° (по 2-му свойству параллельных прямых)

7) ∠2 и ∠6 – соответственные , значит∠2 =∠6 =30° (по 2-му свойству параллельных прямых).

Ответ: ∠1 = ∠3=∠5=∠7 =150°, ∠2 = ∠4=∠6=∠8 =30°.

6. Рефлексия (4 мин). Вопросы учителя к классу:
– Какая была цель урока? (Изучить аксиому параллельных прямых.)
– Достигли мы ее? (Достигли.)
– Как мы ее достигли?

– Сформулируйте аксиому параллельных прямых:

Через точку, не лежащую на данной прямой, проходит только одна прямая, параллельная данной.

– Сформулируйте следствия из аксиомы параллельных прямых;

1) *Если прямая пересекает одну из двух параллельных прямых, то она пересекает и другую.*

2) *Если две прямые параллельны третьей, то они параллельны.*

– Сформулируйте теоремы об углах, образованных двумя параллельными прямыми и секущей.

1) *Если две параллельные прямые пересечены секущей, то накрест лежащие углы равны.*

2) *Если две параллельные прямые пересечены секущей, то соответственные углы равны.*

3) *Если две параллельные прямые пересечены секущей, то сумма односторонних углов равна 180°.*

7. Домашнее задание (2 мин.).

– Ребята, открываем дневники, записываем домашнее задание.

Выучить теорию, читать в §3, п. 27–28 на стр. 59–61 в учебнике.

Выполнить № 197 (Слайд). Обучающиеся слушают комментарии к выполнению домашнего задания.

Задача № 197. Через точку, не лежащую на прямой р, проведены 4 прямые. Сколько этих прямых пересекает прямую р? Рассмотрите все возможные случаи.

Дано: p – прямая;

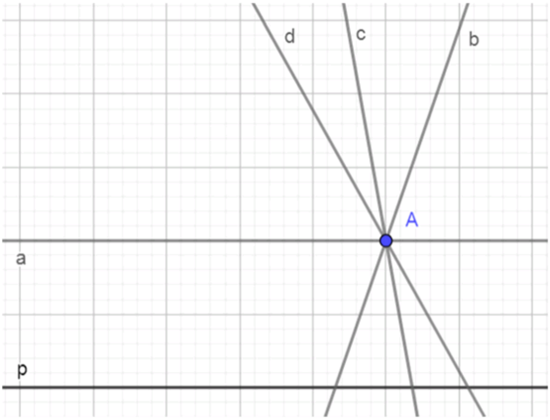
$(\cdot)A$ – не принадлежит p;

$a; b; c; d$ – прямые, проходящие через A.

Найти: какие из прямых $a; b; c; d$ пересекают p.

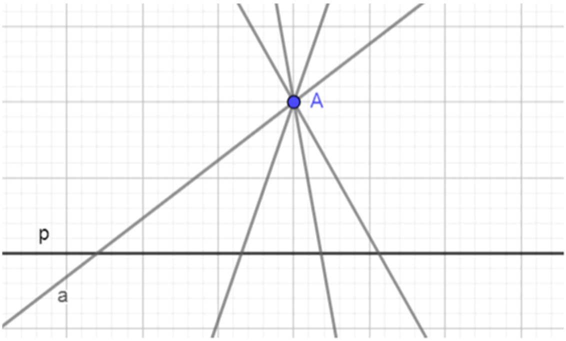
Решение.

1 случай:



Прямую p пересекают 3 прямые: b; c; d; прямая $a \parallel p$.

2 случай:



Прямую p пересекают 4 прямые: a; b; c; d.

Приложение В

Срезы знаний студентов по курсу алгебры 7–9 классов

Алгебра, 7 класс

1. Дроби обыкновенные и десятичные, переход от одной формы записи дробей к другой.
2. Понятие рационального числа, запись, сравнение, упорядочивание рациональных чисел.
3. Арифметические действия с рациональными числами.
4. Решение задач из реальной практики на части.
5. Решение задач на дроби.
6. Степень с натуральным показателем: определение, преобразование выражений на основе определения, запись больших чисел.
7. Проценты, запись процентов в виде дроби и дроби в виде процентов.
8. Три основные задачи на проценты, решение задач из реальной практики.
9. Применение признаков делимости, разложение на множители натуральных чисел.
10. Прямая и обратная пропорциональная зависимости.
11. Алгебраические выражения.
12. Переменные, числовое значение выражения с переменной. Допустимые значения переменных.
13. Представление зависимости между величинами в виде формулы. Вычисления по формулам.
14. Преобразование буквенных выражений, тождественно равные выражения.
15. Правила преобразования сумм и произведений, правила раскрытия скобок и приведения подобных слагаемых.
16. Свойства степени с натуральным показателем.
17. Одночлен и его стандартный вид.
18. Многочлен и его стандартный вид.
19. Степень многочлена.
20. Сложение, вычитание, умножение многочленов.
21. Формулы сокращенного умножения: квадрат суммы и квадрат разности.
22. Формула разности квадратов.
23. Разложение многочленов на множители.
24. Уравнение, корень уравнения, правила преобразования уравнения.
25. Равносильность уравнений.
26. Линейное уравнение с одной переменной.
27. Число корней линейного уравнения.
28. Решение линейных уравнений.
29. Составление уравнений по условию задачи.
30. Решение текстовых задач с помощью уравнений.
31. Линейное уравнение с двумя переменными и его график.
32. Система двух линейных уравнений с двумя переменными.
33. Решение систем уравнений способом подстановки.
34. Решение систем уравнений способом сложения.
35. Координата точки на прямой. Числовые промежутки.
36. Расстояние между двумя точками на координатной прямой.
37. Прямоугольная система координат, оси Ox и Oy.
38. Абсцисса и ордината точки на координатной плоскости.

39. Примеры графиков, заданных формулами. Чтение графиков реальных зависимостей.
40. Перечислить все способы решения систем уравнений.
41. Понятие функции. График функции.
42. Свойства функций.
43. Линейная функция, ее график.
44. График функции $y = |x|$.
45. Графическое решение линейных уравнений.
46. Графическое решение систем линейных уравнений.
47. Статистика.
48. Среднее арифметическое двух чисел.
49. Среднее арифметическое ряда чисел.
50. Упорядоченный ряд чисел.
51. Размах. Мода.
52. Медиана как статистическая характеристика.
53. Граф. Вершина. Ребро.
54. Представление задач с помощью графов.
55. Степень (валентность) вершины.
56. Цепь. Цикл. Путь в графе.
57. Случайный опыт. Случайное событие.
58. Группировка. Гистограмма.
59. Частота события.

Алгебра, 8 класс

1. Квадратный корень из числа.
2. Понятие об иррациональном числе.
3. Десятичные приближения иррациональных чисел.
4. Свойства арифметических квадратных корней и их применение к преобразованию числовых выражений и вычислениям.
5. Действительные числа.
6. Степень с целым показателем и ее свойства.
7. Стандартная запись числа.
8. Квадратный трехчлен, разложение квадратного трёхчлена на множители.
9. Алгебраическая дробь. Основное свойство алгебраической дроби.
10. Сложение, вычитание, умножение, деление алгебраических дробей. Рациональные выражения и их преобразование.
11. Квадратное уравнение, формула корней квадратного уравнения.
12. Теорема Виета.
13. Решение уравнений, сводящихся к линейным и квадратным.
14. Простейшие дробно-рациональные уравнения.
15. Графическая интерпретация уравнений с двумя переменными и систем линейных уравнений с двумя переменными. Примеры решения систем нелинейных уравнений с двумя переменными.
16. Числовые неравенства и их свойства.
17. Неравенство с одной переменной.
18. Равносильность неравенств.
19. Линейные неравенства с одной переменной.
20. Системы линейных неравенств с одной переменной.
21. Понятие функции. Способы задания функций.
22. Область определения и множество значений функции.

23. График функции. Чтение свойств функции по ее графику. Примеры графиков функций, отражающих реальные процессы.

24. Функции, описывающие прямую и обратную пропорциональные зависимости, их графики.

25. Функции $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$.

26. *Функции* $y = x^3$, $y = |x|$.

Алгебра, 9 класс

1. Рациональные числа.
2. Иррациональные числа.
3. Конечные и бесконечные десятичные дроби.
4. Множество действительных чисел.
5. Действительные числа как бесконечные десятичные дроби.
6. Взаимно однозначное соответствие между множеством действительных чисел и координатной прямой.
7. Сравнение действительных чисел, арифметические действия с действительными числами.
8. Размеры объектов окружающего мира, длительность процессов в окружающем мире.
9. Приближённое значение величины, точность приближения.
10. Округление чисел. Прикидка и оценка результатов вычислений.
11. Линейное уравнение.
12. Решение уравнений, сводящихся к линейным.
13. Квадратное уравнение.
14. Решение уравнений, сводящихся к квадратным.
15. Биквадратное уравнение.
16. Примеры решения уравнений третьей и четвёртой степеней разложением на множители.
17. Решение дробно-рациональных уравнений.
18. Решение текстовых задач алгебраическим методом.
19. Уравнение с двумя переменными и его график.
20. Решение систем двух линейных уравнений с двумя переменными.
21. Решение систем двух уравнений, одно из которых линейное, а другое – второй степени.
22. Графическая интерпретация системы уравнений с двумя переменными.
23. Решение текстовых задач алгебраическим способом.
24. Числовые неравенства и их свойства.
25. Решение линейных неравенств с одной переменной.
26. Решение систем линейных неравенств с одной переменной.
27. Квадратные неравенства.
28. Графическая интерпретация неравенств с двумя переменными.
29. Графическая интерпретация систем неравенств с двумя переменными.
30. Квадратичная функция, её график и свойства.
31. Парабола, координаты вершины параболы, ось симметрии параболы.
32. Графики функций: $y = kx$, $y = kx + b$, $y = \frac{k}{x}$, $y = x^3$, $y = \sqrt{x}$, $y = |x|$, и их свойства.
33. Графики функций: $y = kx$, $y = kx + b$, $y = \frac{k}{x}$, $y = x^3$, $y = \sqrt{x}$, $y = |x|$, и их свойства.
34. Графики функций: $y = kx$, $y = kx + b$, $y = \frac{k}{x}$, $y = x^3$, $y = \sqrt{x}$, $y = |x|$, и

их свойства.

35. Понятие числовой последовательности.
36. Задание последовательности рекуррентной формулой и формулой n-го члена.
37. Арифметическая прогрессии.
38. Геометрическая прогрессии
39. Формулы n-го члена арифметической и геометрической прогрессий,
40. Формулы суммы первых n членов арифметической и геометрической прогрессий.
41. Изображение членов арифметической и геометрической прогрессий точками на координатной плоскости.
42. Линейный и экспоненциальный рост.
43. Сложные проценты.

Приложение Г

Срезы знаний студентов по курсу геометрии 7–9 классов

Геометрия, 7 класс

1. Определение многоугольника.
2. Определение ломаной.
3. Периметр и площадь фигур, составленных из прямоугольников.
4. Понятие о равных треугольниках и первичные представления о равных фигурах.
5. Смежные и вертикальные углы.
6. Три признака равенства треугольников.
7. Признаки равенства прямоугольных треугольников.
8. Свойство медианы прямоугольного треугольника, проведённой к гипотенузе.
9. Равнобедренные и равносторонние треугольники.
10. Признаки и свойства равнобедренного треугольника.
11. Неравенства в геометрии.
12. Прямоугольный треугольник с углом в 30°.
13. Параллельные прямые и их свойства
14. Пятый постулат Евклида.
15. Углы, образованные при пересечении параллельных прямых и секущей.
16. Признаки, существования параллельных прямых.
17. Сумма углов треугольника.
18. Внешние углы треугольника.
19. Окружность, хорды и диаметр, их свойства.
20. Касательная к окружности.
21. Окружность, вписанная в угол.
22. Понятие о ГМТ.
23. Биссектриса и серединный перпендикуляр как геометрические места точек.
24. Представление данных в виде таблиц, диаграмм, графиков.
25. Заполнение таблиц, чтение и построение диаграмм (столбиковых (столбчатых) и круговых). Чтение графиков реальных процессов.
26. Извлечение информации из диаграмм и таблиц, использование и интерпретация данных.
27. Среднее арифметическое, медиана, размах.
28. Наибольшее и наименьшее значения набора числовых данных. Примеры случайной изменчивости.
29. Случайный эксперимент (опыт).
30. Случайное событие.
31. Вероятность и частота.
32. Роль маловероятных и практически достоверных событий в природе и в обществе.
33. Монета и игральная кость в теории вероятностей.
34. Граф, вершина, ребро.
35. Степень вершины.
36. Число ребер и суммарная степень вершин.
37. Представление о связности графа.
38. Цепи и циклы.
39. Пути в графах.
40. Обход графа (Эйлеров путь). Представление об ориентированном графе.

Геометрия, 8 класс

1. Четырехугольники.
2. Параллелограмм, его признаки и свойства.
3. Частные случаи параллелограммов (прямоугольник, ромб, квадрат), их признаки и свойства.
4. Трапеция, равнобокая трапеция, её свойства и признаки.
5. Прямоугольная трапеция.
6. Метод удвоения медианы.
7. Центральная симметрия.
8. Теорема Фалеса и теорема о пропорциональных отрезках.
9. Средние линии треугольника и трапеции.
10. Центр масс треугольника.
11. Подобие треугольников, коэффициент подобия.
12. Признаки подобия треугольников. Применение подобия при решении практических задач.
13. Свойства площадей геометрических фигур.
14. Формулы для площади треугольника, параллелограмма.
15. Формулы для площади ромба и трапеции.
16. Отношение площадей подобных фигур.
17. Вычисление площадей треугольников и многоугольников на клетчатой бумаге.
18. Теорема Пифагора.
19. Синус, косинус, тангенс острого угла прямоугольного треугольника.
20. Основное тригонометрическое тождество.
21. Тригонометрические функции углов в 30°, 45° и 60°.
22. Вписанные и центральные углы, угол между касательной и хордой.
23. Углы между хордами и секущими.
24. Вписанные и описанные четырёхугольники.
25. Взаимное расположение двух окружностей.
26. Касание окружностей.
27. Общие касательные к двум окружностям.
28. Множество, элемент множества, подмножество.
29. Операции над множествами: объединение, пересечение, дополнение.
30. Свойства операций над множествами: переместительное, сочетательное, распределительное, включения.
31. Измерение рассеивания данных.
32. Дисперсия и стандартное отклонение числовых наборов.
33. Диаграмма рассеивания.
34. Элементарные события случайного опыта.
35. Случайные события.
36. Вероятности событий.
37. Опыты с равновозможными элементарными событиями.
38. Случайный выбор.
39. Дерево. Свойства деревьев: единственность пути, существование висячей вершины, связь между числом вершин и числом ребер.
40. Правило умножения.
41. Противоположные события.

42. Диаграмма Эйлера.
43. Объединение и пересечение событий.
44. Несовместные события.
45. Формула сложения вероятностей.
46. Условная вероятность.
47. Правило умножения.
48. Независимые события.
49. Представление эксперимента в виде дерева.

Геометрия, 9 класс

1. Синус углов от 0 до 180°.
2. Косинус углов от 0 до 180°.
3. Тангенс углов от 0 до 180°.
4. Котангенс углов от 0 до 180°.
5. Основное тригонометрическое тождество.
6. Формулы приведения.
7. Решение треугольников.
8. Теорема косинусов и теорема синусов.
9. Преобразование подобия.
10. Подобие соответственных элементов.
11. Теорема о произведении отрезков хорд.
12. Теоремы о произведении отрезков секущих.
13. Теорема о квадрате касательной.
14. Вектор, длина (модуль) вектора.
15. Сонаправленные векторы, противоположно направленные векторы,
16. Коллинеарность векторов,
17. Равенство векторов, операции над векторами.
18. Разложение вектора по двум неколлинеарным векторам.
19. Координаты вектора.
20. Скалярное произведение векторов, применение для нахождения длин и углов.
21. Декартовы координаты на плоскости.
22. Уравнения прямой и окружности в координатах.
23. Пересечение окружностей и прямых.
24. Метод координат и его применение.
25. Правильные многоугольники.
26. Длина окружности.
27. Градусная и радианная мера угла.
28. Вычисление длин дуг окружностей.
29. Площадь круга, сектора, сегмента.
30. Движения плоскости и внутренние симметрии фигур (элементарные представления).
31. Параллельный перенос.
32. Поворот.
33. Перестановки и факториал.
34. Сочетания и число сочетаний.

35. Треугольник Паскаля.
36. Геометрическая вероятность.
37. Случайный выбор точки из фигуры на плоскости, из отрезка и из дуги окружности.
38. Испытание. Успех и неудача.
39. Серия испытаний до первого успеха.
40. Серия испытаний Бернулли.
41. Вероятности событий в серии испытаний Бернулли.
42. Математическое ожидание и дисперсия.
43. Примеры математического ожидания как теоретического среднего значения величины.
44. Понятие о законе больших чисел.
45. Измерение вероятностей с помощью частот.
46. Роль и значение закона больших чисел в природе и обществе.

Приложение Д

Домашняя контрольная работа № 3

по теме «Методическое планирование темы из курса алгебры (геометрии)7–9 классов»

Составить логико-дидактический анализ одной из тем из курса алгебры (геометрии), заданных 7–9 классов по следующему плану:

1. Место темы в курсе математики.
2. Пропедевтика изучения темы.
3. Методическое планирование темы.
4. Схема формирования основных понятий.
5. Изложение темы в различных учебниках.
6. Изучение темы в спецклассах (по желанию).
7. Различные формы контроля при изучении данной темы (математический диктант, самостоятельная работа, тест, модульная работа).
8. Конспект одного из уроков темы.

Методическое планирование темы

<table>
<tr><th rowspan="2">№ урока</th><th rowspan="2">Тема урока</th><th rowspan="2">Цель урока</th><th colspan="2">Распределение задач</th><th rowspan="2">Самостоя-тельная работа</th><th rowspan="2">Повто-рение</th><th rowspan="2">Контроль</th><th rowspan="2">Нагляд-ности</th><th rowspan="2">Материал для мотива-ции</th></tr>
<tr><th>в классе</th><th>дома</th></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Обязательно указать учебник, по которому составляется планирование.

Приложение Е

Задания для проведения деловых игр

1. Подготовить и провести урок по математике / алгебре / геометрии заданного типа в выбранном классе по любой теме.

2. Подготовить и провести внеклассное мероприятие по математике в заданном классе.

3. Разработать и защитить проект:

- «Решение сюжетной задачи», реализующей методику работы с заданной задачей;
- «Изучение теоремы», реализующей методику работы с заданной теоремой;
- «Система контроля», реализующая систему контроля знаний, умений и навыков по заданной теме.

4. Для участия в дискуссии подготовить свой вариант методического планирования заданной темы.

5. Представить тот или иной учебник по математике / алгебре / геометрии на смотре-конкурсе учебников для данного класса.

6. Проанализировать и выделить наиболее распространенные ошибки обучающихся при изучении данной темы и предложить пути их устранения.

7. Проанализировать и выделить типичные организационные, коммуникативные и методические проблемы и ошибки начинающих учителей и предложить возможные варианты их решения.

8. Разработать методику формирования заданного математического понятия (среди наиболее сложных для восприятия обучающимися).

9. Подготовить и презентовать собственный программный продукт по заданной теме.

Приложение Ж

Вопросы для подготовки к экзамену

1. Урок математики в школе. Основные требования к проведению уроков различных типов.
2. Методы обучения математике.
3. Определения в школьном курсе математики. Виды определений. Методика формирования математических понятий.
4. Задачи в обучении математике. Методика работы с сюжетной задачей.
5. Теоремы в школьном курсе математики. Методы доказательства в ШКМ.
6. Основные этапы работы с теоремой. Методика обучения учащихся доказательству теорем.
7. Контроль и учет знаний, умений и навыков учащихся по математике.
8. Пропедевтика обучения алгебре и геометрии в 5–6 классах.
9. Развитие понятия числа в курсе математики основной школы.
10. Методика изучения выражений и их преобразований в курсе математики основной школы.
11. Методика изучения уравнений и их систем в курсе алгебры основной школы.
12. Методика изучения неравенств и их систем в курсе алгебры основной школы.
13. Формирование понятия функции в курсе алгебры основной школы.
14. Методика изучения треугольников в курсе геометрии основной школы.
15. Методика изучения многоугольников в курсе геометрии основной школы.
16. Методика изучения окружности и круга в курсе геометрии основной школы.
17. Методика изучения построений и преобразований в курсе геометрии основной школы.
18. Методика изучения координат и векторов в курсе математики основной школы.
19. Методика изучения тригонометрии в курсе математики средней школы.

ДЛЯ ЗАМЕТОК

ДЛЯ ЗАМЕТОК

ДЛЯ ЗАМЕТОК

Учебное издание

ТИЩЕНКО Екатерина Васильевна,
КРИВКО Яна Петровна

МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИКИ

Учебно-методическое пособие

Составители:
ТИЩЕНКО Екатерина Васильевна,
КРИВКО Яна Петровна

В авторской редакции
Дизайн обложки – Тищенко Е. В.

Подписано в печать 28.12.2025. Бумага офсетная. Гарнитура Times New Roman.
Печать лазерная. Формат 60х84/16. Усл. печ. лист 5,58.
Тираж 100 экз. Изд. № 243. Заказ № 88.

ФГБОУ ВО «ЛГПУ»
Издательство ЛГПУ
ул. Оборонная, 2, г. Луганск, ЛНР, 291011. Т/ф: +7-857-258-03-20.
e-mail: knitaizd@mail.ru.

Издатель:
Индивидуальный предприниматель Орехов Дмитрий Александрович
291002, г. Луганск, пер. 1-Балтийский, 31
Контактный телефон: +7(959)138-82-68
E-mail: nickvnu@knowledgepress.ru