МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**ФЕДЕРАЛЬНОЕ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ЛУГАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ФГБОУ ВО «ЛГПУ»)**

Актуальные вопросы математики и методики преподавания математики

*Материалы
Межрегиональной заочной научно-практической конференции
(Луганск, 25 февраля 2026 года)*

Луганск
Издательство ЛГПУ
2026

УДК 51:[37.016:51](06)
ББК 22.1я43+22.1р3я43+74.262.21я43
А43

Р е ц е н з е н т ы :

Кочевский А. А. – декан института компьютерных систем и технологий федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Луганский государственный университет имени Владимира Даля», кандидат технических наук, доцент;

Щелоков В. С. – доцент кафедры прикладной математики федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Луганский государственный университет имени Владимира Даля», кандидат физико-математических наук, доцент;

Корнеева А. Н. – заведующий кафедрой безопасности жизнедеятельности и охраны труда федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Луганский государственный педагогический университет», кандидат педагогических наук, доцент.

А43 **Актуальные вопросы математики и методики преподавания математики :** материалы Межрегиональной заочной научно-практической конференции (Луганск, 25 февраля 2026 года) / под общ. ред. С. В. Темниковой, А. В. Скринниковой ; ФГБОУ ВО «ЛГПУ». – Луганск : Издательство ЛГПУ, 2026. – 124 с.

Опубликованные материалы являются результатами научных изысканий работников высших учебных заведений, академических и отраслевых научных организаций, учителей общеобразовательных учреждений, магистрантов и студентов высших учебных заведений Российской Федерации, посвященных актуальным научным проблемам в сфере математики и методики преподавания математики.

Сборник трудов коллектива авторов предназначен для научно-педагогического сообщества.

УДК 51:[37.016:51](06)
ББК 22.1я43+22.1р3я43+74.262.21я43

Рекомендовано научной комиссией
ФГБОУ ВО «ЛГПУ»
(протокол № 9 от 10.04.2026 г.)

СОДЕРЖАНИЕ

СЕКЦИЯ 1
АКТУАЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ МАТЕМАТИКИ: ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ И ПРИКЛАДНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ

СЕКЦИЯ 2
ЦИФРОВЫЕ ТЕХНОЛОГИИ В ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИЧЕСКИМ ДИСЦИПЛИНАМ

СЕКЦИЯ 3
АКТУАЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ МЕТОДИКИ ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИКИ В ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ УЧРЕЖДЕНИЯХ

СЕКЦИЯ 1
АКТУАЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ МАТЕМАТИКИ: ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ И ПРИКЛАДНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ

УДК 519.21:004.056

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ В КИБЕРБЕЗОПАСНОСТИ: ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗНАЧЕНИЕ ПАРАДОКСА ДНЯ РОЖДЕНИЯ

***Давыскиба Оксана Викторовна*[1]*, Ортынская Ольга Александровна*[2]**
[1,2]*ФГБОУ ВО «ЛГПУ», г. Луганск*
[1]davidovao@list.ru, [2]oortynl@mail.ru

Аннотация. В статье рассматривается применение в кибербезопасности одного из парадоксов теории вероятностей, а именно парадокса дня рождения, его значение в этой сфере. В работе представлена математическая основа парадокса, ее связь с теорией хэширования и практические следствия для безопасности хэш-функций, протоколов и систем.

Ключевые слова: парадокс дня рождения, атака «дней рождения», хэш-функция, коллизия, электронная цифровая подпись, протокол DNS.

Парадокс дня рождения является классическим примером в теории вероятностей, который демонстрирует конфликт между человеческой интуицией и математической реальностью. Изучение парадокса лежит на стыке теории вероятностей, криптографии и анализа алгоритмов. После формализации базового парадокса, ключевой вклад в его прикладное значение внесли исследователи криптоанализа Д. Кан и Б. Шнайер [2], которые доказали его прямую связь со стойкостью хэш-функций. В современный период работы коллектива под руководством М. Стивенса эмпирически подтвердили практическую значимость этих вероятностных моделей, осуществив успешные коллизионные атаки на алгоритм SHA-1 [1]. Таким образом, развитие темы представляет собой последовательный переход от абстрактной математической модели к инженерно-практическому инструменту оценки безопасности.

Целью статьи является анализ практического значения парадокса дня рождения в кибербезопасности.

В статье [7] авторами приведены результаты исследования, согласно которому парадокс дня рождения представляет собой утверждение, «если в классе не менее 23 учеников, более вероятно то, что у какой-то пары одноклассников дни рождения придутся на один день, чем то, что у каждого ученика будет свой неповторимый день рождения. Очевидно, что гарантировать совпадение хотя бы двух дат дней рождения мы можем только для группы из 367 человек. Однако уже для 68 человек вероятность совпадения дней рождения превышает 99,9 %» [7, с. 14].

На рисунке 1 представлен график зависимости вероятности от количества людей, согласно которому вероятность в 99% наступает уже в группе из 55 человек, вероятность равная 100%, как мы знаем, только в группе из 366 человек.

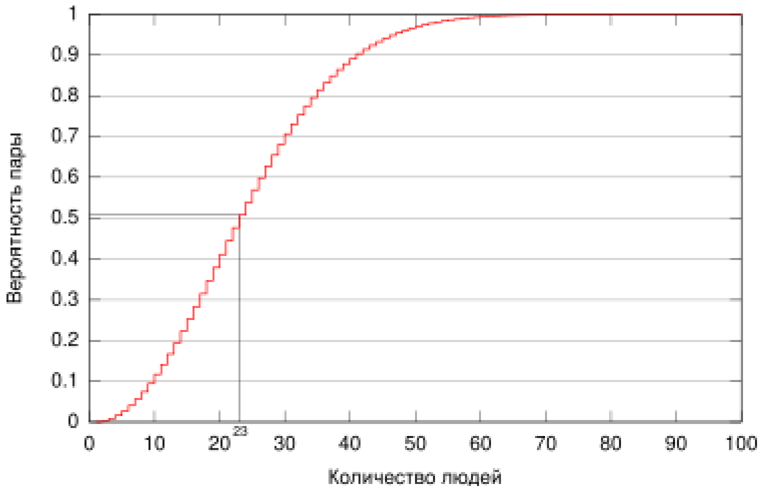


Рис. 1. График зависимости вероятности

Хэш-функция – это алгоритм, который берёт любые данные (например, пароль, файл, сообщение) и превращает их в короткий код фиксированной длины, называемый «хэшем». Надежная хэш-функция должна быть устойчива к коллизиям. Коллизия – это ситуация, когда два разных входных файла, например, два разных пароля, вдруг дают одинаковый хэш [6].

Пусть однонаправленная функция $H(M)$ применяется к сообщению произвольной длины M; функция возвращает значение фиксированной длины h: $h = H(M)$, где h имеет длину m.

Свойства однонаправленных хэш-функций:

1) знная M, легко вычислить h;
2) зная H, трудно определить M, для которого $H(M) = h$;
3) зная M, трудно определить другое сообщение, M', для которого $H(M) = H(M')$.

Такая хэш-функция защищает от коллизий, если злоумышленник будет пытаться искать другое сообщение M'. Но есть и другой вариант обхода устойчивости хэш-функции. Он основан на поиске двух случайных сообщений M и M', для которых $H(M) = H(M')$ [2, с 319].

Успешный поиск коллизий в однонаправленных хэш-функциях возможен благодаря методу в криптоанализе, известному, как атака «дней рождения». Найти любые два разных сообщения, дающих один хэш, экспоненциально проще, чем подобрать сообщение под один конкретный хэш. Это очевидно из определения парадокса дня рождения.

Сравним сколько времени понадобится для вскрытия однонаправленной хэш-функции с использованием атаки «дней рождения» и без ее использования: «Предположим, что однонаправленная хэш-функция безопасна. Результатом функции является N-битовое число. Поиск сообщения, хэш-значение которого совпадает с заданным, в среднем потребует хэширования 2^N случайных сообщений. А для обнаружения двух сообщений с одинаковым хэш-значением потребуется только около $2^{\frac{N}{2}}$ случайных сообщений. Компьютеру, который хэширует миллион сообщений в секунду, потребовалось бы 600000 лет, чтобы найти второе сообщение с тем же 64-битовым хэш-значением. Тот же компьютер сможет найти пару сообщений с общим хэш-значением примерно за час» [2, с 131].

В табл. 1 наглядно показано, как с увеличением длины хэша, увеличивается и сложность поиска коллизий.

Табл. 1. Зависимость сложности взлома от длины хэша

Длина хэша (n бит)	Сложность поиска коллизии ($\approx 2^{\frac{n}{2}}$)	Примерное время взлома при 1 млн хэшей/сек	Риски
64 бита (устар.)	$2^{32} \approx 4,3 \cdot 10^{9}$	1 час	взломан за считанные минуты/часы
128 бит (MD5)	$2^{64} \approx 1,8 \cdot 10^{19}$	600000 лет	теоретически уязвим, атаки есть
160 бит (SHA-1)	$2^{80} \approx 1,2 \cdot 10^{24}$	10^{11} лет	Коллизии найдены на практике
256 бит (SHA-256)	$2^{128} \approx 3,4 \cdot 10^{38}$ б.	10^{22} лет	На сегодняшний день безопасен

Так как атака «дней рождения» колоссально снижает сложность подбора генерируемого пароля или другой зашифрованной информации, то для защиты от взлома криптографические системы должны обладать экспоненциальным запасом прочности.

В первую очередь, как отмечает Б. Шнайер, «должны выбирать длину хэш-значения в два раза длиннее, чем вам потребовалось бы в противном случае. Например, если вы хотите уменьшить вероятность взлома вашей системы до 1 шанса из 2 80, используйте 160-битовую однонаправленную хэш-функцию» [2, с. 331].

Электронная цифровая подпись представляет собой один из способов подтверждения подлинности документа и также является уязвимой к атаке «дня рождения». Это связано с тем, что для удобства шифрования над электронным документом вычисляется хэш-функция, так как длина хэша обычно короче самого документа. Возникает проблема, связанная с атакой «дней рождения». Злоумышленник может найти два документа M, M', где M – настоящий договор, а M' – мошеннический договор, такой, что $H(M) = H(M')$. Перед подписанием к документу применятся криптографическая хэш-функция h. Злоумышленник просит клиента подписать документ M. Так как хэш-функции двух документов совпадают $H(M) = H(M')$, то получается, что клиент подписывает мошеннический договор M'. При этом в такой ситуации исключается какая-либо возможность доказать, что клиент не подписывал договор M'.

Такая проблема возникает из-за того, что h оказалась нестойкой к коллизиям функцией. Проанализируем как можно избежать такой проблемы.

Задача атаки «дней рождения» заключается в нахождении наименьшего количества элементов n, которое можно хэшировать при помощи h, чтобы мы могли найти два элемента $x, y \in U$, при которых $H(x) = H(y)$.

При атаке злоумышленник будет случайным образом подбирать $x \in U$ и сохранять пары $\left(x, H(x)\right)$, пока не найдет два значения x, y, дающие $H(x) = H(y)$. Необходимо определить, сколько раз атакующему нужно повторить данную операцию, пока не будет найдена коллизия.

Пусть m – количество дней в году; U – количеству людей в группе, которое хэшируются в их дни рождения и принимают одно из значений m; A_n – исход, при котором среди n вариантов две функции не совпадают; $P(A_n)$ – вероятность того, что среди n вариантов все хэш-функции разные.

Известно, что

$$P(A_n) \approx e^{\frac{-n^2}{2m}} \quad (1).$$

Допустим, нужно найти коллизию с вероятностью 99%. Поэтому задаем, что $P(A_n) \approx e^{\frac{-n^2}{2m}} = \frac{1}{100}$. Из предыдущего равенства имеем: $n = \sqrt{2m \cdot \ln 100}$ вариантов необходимо хэшировать [8].

Рассмотрим конкретный пример. Система использует электронную цифровую подпись для подписания договоров. Необходимо оценить риски и предложить меры защиты, так как есть подозрения, что злоумышленники, используя атаку «дня рождения» могут попытаться воспользоваться изъянами системы.

Нам известно, что на данный момент в системе используется 64-битная хеш-функция. Если использовать полный перебор, т. е. не используя атаку «дня рождения», то злоумышленнику придется перебрать $2^{64} \approx 1{,}8 \cdot 10^{19}$ вариантов. Но если применяется атака «дня рождения», то что бы найти хотя бы одну коллизию с вероятностью 50% злоумышленнику потребуется перебрать намного меньше вариантов. Используя формулу (1) и зная вероятность, можем записать следующее: $P(A_n) \approx e^{\frac{-n^2}{2m}} = \frac{1}{2}$.

Преобразовав равенство $e^{\frac{-n^2}{2m}} = \frac{1}{2}$ аналогично тому, как преобразовывали выше, получим $n = \sqrt{2m \cdot \ln 2}$, где n – сколько нужно хэшировать вариантов злоумышленнику; $m = 2^{64}$ – общее количество возможных значений.

Подставим недостающие значения в формулу: $n = \sqrt{2 \cdot 2^{64} \cdot \ln 2}$. И после вычислений получим следующий ответ: $n \approx 5{,}06 \cdot 10^{9}$.

Если же мы рассчитаем нахождение коллизии с 99% вероятностью, то получим следующее решение:

$$P(A_n) \approx e^{\frac{-n^2}{2m}} = \frac{1}{100};$$

$$e^{\frac{-n^2}{2m}} = \frac{1}{100};$$

$$n = \sqrt{2m \cdot \ln 100};$$

$$n = \sqrt{2 \cdot 2^{64} \cdot \ln 100};$$

$$n \approx 13{,}03 \cdot 10^9.$$

Даже с увеличением вероятности (до почти полной гарантии безопасности) в сравнении с первым вариантом – полным перебором, равным $n = 1{,}8 \cdot 10^{19}$ – риски увеличиваются в разы. Также, исходя из данных в таблице 1 можно отметить, что при использовании атаки «дня рождения» примерное время взлома снижается с 600000 лет до пары часов.

Именно поэтому такая система, использующая 64-битную хеш-функцию, действительно является очень ненадежной и может быть подвержена атаке. Поэтому нужно модернизировать систему для минимизации рисков.

На сегодняшний день для обеспечения безопасности необходимо, чтобы злоумышленнику требовалось выполнить не менее $2^{128} \approx 3{,}4 \cdot 10^{38}$ операций (таблица 1). Для этого длина хэша должна быть равна 256 бит. Этому соответствует семейство криптографических алгоритмов однонаправленных хэш-функций SHA-2. Данный алгоритм с имеющимися технологиями абсолютно невозможно взломать. Так как даже при высокой мощности компьютера (способного вычислять более 1 миллиарда хэшей в секунду), подбор хешей займет достаточно много времени $\approx 2^{73}$ лет. Кроме этого, для поиска коллизий необходимо сохранять обработанные хэши, а это также огромные объёмы данных.

В меньшей степени данному критерию соответствует алгоритм SHA-1. Этот алгоритм будет менее надежным, т. к. если раньше возможность его взлома была только теоретическая, то «23 февраля 2017 года специалисты Google, при поддержке ученых из нидерландского Centrum Wiskunde & Informatica (Центр математики и информатики), предоставили отчет о первой реально осуществленной коллизионной атаке на SHA-1, получившей название SHAttered» [3].

Однако, следует отметить, что исследователи приводят интересную статистику, которая хорошо помогает понять масштаб их работы, и описывают атаку как «один из наиболее массивных вычислительных процессов на все времена». Другими словами, повторить проделанную инженерами работу в скором времени вряд ли кому-то удастся. Итак, для реализации атаки потребовалось осуществить 9223372036854775808 операций [1].

Подводя итоги, необходимо подчеркнуть, что при использовании системы с 64-битной хэш-функцией риски действительно существуют, чтобы решить данную проблему целесообразно внедрять в систему алгоритм SHA-2, который обойти практически невозможно. Таким образом, парадокс теории вероятностей помог выявить проблему в кибербезопасности и способы ее устранения. Это подчеркивает практическую значимость данного парадокса, который стал фундаментальным принципом, лежащим в основе оценки стойкости криптографических систем.

Литература

1. Pramstaller, N. Exploiting Coding Theory for Collision Attacks on SHA-1 / N. Pramstaller, C. Rechberger, V. Rijmen // Austria : Graz University of Technology, 2005. – 18 p.
2. Schneier, B. Applied cryptography : protocols, algorithms, and source code in C / B. Schneier // New York : Wiley, 1996. – 610 p.
3. Инженеры Google реализовали первую в мире коллизионную атаку на алгоритм SHA-1. URL: https://xakep.ru/2017/02/25/shattered/ (дата обращения: 15.02.2026).
4. Как хакеры подменяют DNS-запросы с помощью «отравления» кэша. URL: https://habr.com/ru/companies/varonis/articles/555330/ (дата обращения: 10.01.2026).
5. Миронкин, В. О. Об одном обобщении парадокса «дней рождения» / В. О. Миронкин, А. Б. Чухно // М.: Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», 2018. – 8 с.
6. Пчелинцева, Н. В. Парадокс дней рождения в криптографии / Н. В. Пчелинцева, К. О. Самохин, О. С. Картечина // Наука и образование. 2022. №2. URL: https://cyberleninka.ru/article/n/paradoks-dney-rozhdeniya-v-kriptografii (дата обращения: 30.10.2025).
7. Богомолов, Е. В. К вопросу о нахождении вероятности совпадения дней рождения / Е.В. Богомолов, Е.А. Вендин, К.А. Киричек // Педагогические чтения : ежегодник. Том 1 Выпуск 2. – Волгоград : Научный издательский центр «Абсолют», 2020. – С. 11–15. URL: https://www.elibrary.ru/download/elibrary_43002805_34893319.pdf (дата обращения: 30.10.2025).
8. Что связывает парадокс дней рождения и уязвимости электронных подписей? URL: https://habr.com/ru/articles/461163/ (дата обращения: 08.01.2026).

THE SIGNIFICANCE OF THE BIRTHDAY PARADOX IN CYBERSECURITY

Davyskiba Oksana Viktorovna[1], Ortynskaya Olga Alexandrovna[2]

[1,2]Lugansk State Pedagogical University, Lugansk

[1]davidovao@list.ru, [2]oortynl@mail.ru

Abstract. *This article explores the application of the probability theory paradox, specifically the birthday paradox, in cybersecurity and its significance in this field. This paradox has helped identify challenges in cybersecurity and has also contributed to their resolution or minimization of risks.*

Keywords*: birthday paradox, birthday attack, hash function, collision, digital signature, DNS protocol.*

УДК 517.925.4

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ АСИМПТОТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ДУФФИНГА

***Иваненко Вера Александровна*[1]*, Темникова Светлана Владимировна*[2]**

[1,2]*Луганский государственный педагогический университет*

[2]*temnikovasvetlana@rambler.ru*

Аннотация. В статье представлено комплексное исследование решений уравнения Дуффинга с помощью различных асимптотических методов. Рассмотрено построение асимптотических разложений различных порядков, анализ возникающих секулярных членов и их устранение, а также сравнение полученных приближенных решений с точным решением уравнения.

Ключевые слова: осциллятор Дуффинга, нелинейные колебания, асимптотические методы, кубическая нелинейность, дифференциальные уравнения.

Актуальность и постановка проблемы. Дифференциальные уравнения – важнейший инструмент, имеющий широкое применение в различных областях и сферах деятельности. В зависимости от целей исследования, сложности математической модели и требуемой точности формируются критерии выбора метода решения дифференциального уравнения. Целевые критерии применения асимптотических методов заключаются в анализе устойчивости и поведении решения, построении приближений высокого порядка и выявлении предельных случаев. К областям эффективного применения относят физические задачи, описывающие колебательные и волновые процессы, а также технические приложения, изучающие динамику машин и механизмов, прочность конструкций при малых нагрузках. К простейшим математическим моделям, описывающим поведение механической системы с одной степенью свободы относят осциллятор Дуффинга [6] или осциллятор с кубической нелинейностью вида:

$$y'' + y + \varepsilon y^3 = 0. \qquad (1)$$

Основная проблема исследования заключается в систематизации критериев выбора эффективных методов решения уравнения (1), учитывающих нелинейный характер колебаний, влияние кубической нелинейности и возникающие в процессе решения секулярные члены.

Таким образом, *целью исследования* является сравнительный анализ эффективности методов разложения решения по степеням малого параметра, Линдштедта-Пуанкаре и метода Крылова-Боголюбова для решения нелинейного дифференциального уравнения осциллятора Дуффинга.

В соответствие с целью необходимо решить следующие задачи:

– построить решение уравнения (1) с помощью перечисленных асимптотических методов;

– выполнить сравнительный анализ поведения полученных решений.

Изложение основного материала. Вначале рассмотрим алгоритм метода простого разложения по степеням параметра ε: воспользуемся разложением $y(x,\varepsilon)=y_0(x)+\varepsilon y_1(x)+\varepsilon^2 y_2(x)+...$. Подставив данное разложение в уравнение Дуффинга (1), составим систему уравнений:

при $\varepsilon^0: y''_0+y_0=0$;

при $\varepsilon^1: y''_1+y_1+y_0^3=0$.

Уравнение $y_0=a\cos(x+\varphi)$, являющееся уравнением гармонического осциллятора, в этом случае будет решением нулевого приближения уравнения (1). Решение уравнения первого приближения $y_1=y_1^{(1)}+y_1^{(3)}$ содержит следующие гармоники: $y_1^{(1)}=-\dfrac{3a^3x}{8}\sin(x+\varphi)$, $y_1^{(3)}=\dfrac{a^3}{32}\cos 3(x+\varphi)$ [1]. Гармоника $y_1^{(1)}$ образует секулярный (вековой) член, являющийся причиной возникновения резонанса, выражающегося в неограниченном росте амплитуды колебаний по линейному закону.

Окончательное решение уравнения (1) имеет вид:

$$y=a\cos(x+\varphi)+\varepsilon\left[-\frac{3a^3x}{8}\sin(x+\varphi)+\frac{a^3}{32}\cos 3(x+\varphi)\right]+O(\varepsilon^2). \qquad (2)$$

Однако известно, что решение уравнения Дуффинга (1) имеет вид периодических нелинейных колебаний, а в нашем случае, второй член решения (2), в независимости от ε , неограниченно возрастает и становится больше первого, что свидетельствует об отсутствии периодичности.

В силу того, что рассмотренный метод не учитывает возможности появления в спектре колебаний собственной частоты линейных колебаний и её гармоники, разложение по x (2) не может быть пригодным.

Модификацией данного метода, учитывающей неизохронность уравнения (1), является метод Линштедта-Пуанкаре. Рассмотрим алгоритм его применения. Для этого введем новую переменную $\tau=\omega x$. Так как $d/dx=\omega d/d\tau$, тогда получим

$$\omega^2\ddot{y}+y+\varepsilon y^3=0, \qquad (3)$$

где $\ddot{y}$ – вторая производная по τ . Далее подставим разложения по переменной $y=y_0+\varepsilon y_1+\varepsilon^2 y_2+...$ и частоте $\omega=1+\varepsilon\omega_0+\varepsilon^2\omega_1+...$ в уравнение (3) и приравниваем к нулю нулевое и первое приближения:

при $\varepsilon^0: \ddot{y}_0+y_0=0 \Rightarrow y_0=a\cos(\tau+\varphi)$;

при $\varepsilon^1: \ddot{y}_1+y_1+2\omega_0\ddot{y}_0+y_0^3=0 \Rightarrow$

$$\ddot{y}_1+y_1=2\omega_0 a\cos(\tau+\varphi)-\frac{a^3}{4}\left[3\cos(\tau+\varphi)+\cos 3(\tau+\varphi)\right].$$

Уравнение первого приближения содержит члены пропорциональные $\cos(\tau+\varphi)$, создающие секулярный рост решения для y_1 . Предположим, что $\omega_0=\dfrac{3a^2}{8}$, тогда получим

$$\ddot{y}_1 + y_1 = -\frac{a^3}{4}\cos 3(\tau+\varphi) \Rightarrow y_1 = \frac{a^3}{32}\cos 3(\tau+\varphi).$$

Запишем полученное решение:

$$y = a\cos(\omega x+\varphi) + \frac{\varepsilon a^3}{32}\cos 3(\omega x+\varphi) + O(\varepsilon^2), \tag{4}$$

где частота $\omega = 1 + \frac{3\varepsilon a^2}{8} + O(\varepsilon^2)$ [3], параметр a определяет амплитуду основной косинусоидальной составляющей и влияет на частоту колебаний через параметр ω; коэффициент нелинейности ε регулирует вклад нелинейной составляющей в общее решение; параметр φ – фазовый сдвиг – влияет на начальное значение функции и двигает график функции вдоль оси x.

Найдем решение уравнения (1), используя метод Крылова-Боголюбова. Согласно алгоритму данного метода, для первого приближения запишем уравнение

$$\omega^2\left(\frac{\partial^2 y_1}{\partial\varphi^2} + y_1\right) = 2\omega B_1 a\cos\varphi + 2\omega A_1 \sin\varphi + a^3\cos^3\varphi.$$

Так как $\cos^3\varphi = \frac{(3\cos\varphi + \cos 3\varphi)}{4}$, то из условия отсутствия гармоник $\cos\varphi$, $\sin\varphi$ в правой части получаем $A_1 = 0$, $B_1 = \frac{3}{8}\frac{a^2}{\omega}$ [4]. Тогда уравнение принимает вид

$$\omega^2\left(\frac{\partial^2 y_1}{\partial\varphi^2} + y_1\right) = -\frac{a^3}{4}\cos 3\varphi \Rightarrow y_1 = \frac{a^3}{32\omega^2}\cos 3\varphi.$$

Аналогично для уравнения для второго приближения:

$$\omega^2\left(\frac{\partial^2 y_2}{\partial\varphi^2} + y_2\right) = \left(2\omega B_2 + B_1^2\right)a\cos\varphi + 2\omega A_2\sin\varphi - 2\omega B_1\frac{\partial^2 y_1}{\partial\varphi^2} +$$

$$+3a^2\cos^2\varphi y_1 \Rightarrow y_2 = -\frac{a^5}{1024\omega^2}\left(33\cos 3\varphi + \frac{1}{3}\cos 5\varphi\right).$$

Окончательно получаем

$$y = a\cos\varphi + \varepsilon\frac{a^3}{32\omega^2}\cos 3\varphi - \varepsilon^2\frac{a^5}{1024\omega^2}\left(33\cos 3\varphi + \frac{1}{3}\cos 5\varphi\right) + O(\varepsilon^3),$$

где $a = a_0 + O(\varepsilon^3)$, $\varphi = x\left(1 + \varepsilon\frac{3a_0^2}{8\omega} + \varepsilon^2\frac{17a_0^4}{256\omega^2}\right) + O(\varepsilon^3)$ [5].

Проведем сравнение полученных решений дифференциального уравнения (1) с его точным решением. Результаты представлены в виде графика (рис. 1), где $\varepsilon = 1$, а параметр $a = 0{,}5$, что говорит о достаточно сильной нелинейности. Решение методом прямого разложения вида (2) демонстрирует возрастание амплитуды из-за секулярного члена, т.е. дает непериодическое решение [2]. Метод Линдштедта-Пуанкаре устраняет секулярные члены через модификацию частоты и дает хорошую точность при умеренных ε. Метод

Крылова-Боголюбова дает наиболее точное решение за счет учета высших порядков малости.

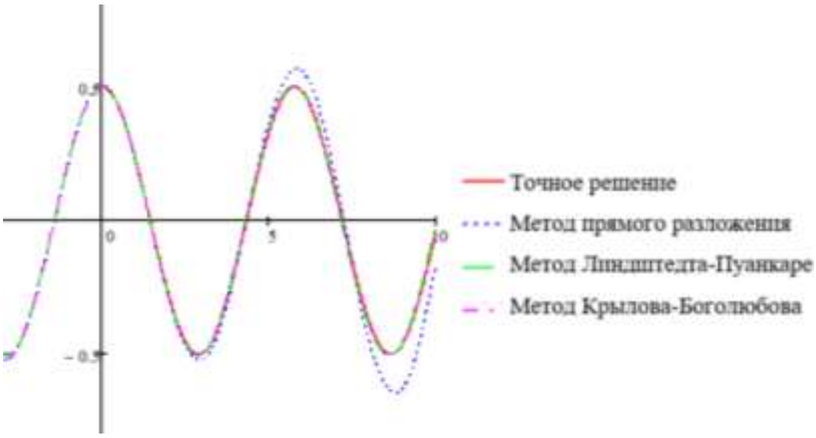


Рис. 1. График сравнения решений уравнения осциллятора Дуффинга

Выводы и перспективы дальнейших исследований. Сравнительный анализ методов показал, что каждый асимптотический подход имеет свои преимущества и недостатки, а графическое представление решений продемонстрировало хорошую сходимость всех методов при малых значениях параметра ε, а также преимущество метода Крылова-Боголюбова при увеличении нелинейности.

Таким образом, критерии выбора метода исследования дифференциального уравнения состоят в следующем: для предварительного анализа лучше всего использовать метод разложения по степеням малого параметра, что позволит оценить порядок нелинейных эффектов и определить необходимость учета высших порядков; метод Линдштедта-Пуанкаре позволяет устранить непериодичности и оценить влияние нелинейности на частоту; метод Крылова-Боголюбова обеспечивает возможность учета высших порядков малости, что является немаловажным условием для качественного анализа поведения системы.

Перспективы дальнейшего исследования будут направлены на обобщение исследуемых асимптотических методов на системы с несколькими степенями свободы, а также определение границ применимости методов.

Литература

1. Алымбаев, А. Т. Асимптотическое разложение решения краевой задачи дифференциального уравнения второго порядка с малым параметром с регулярным возмущением / А. Т. Алымбаев // Евразийское научное объединение. – 2020. – Т. 2, № 60. – С. 6–8.

2. Гордеева, Н. М. Решение дифференциальных уравнений с помощью разложения по параметру / Н. М. Гордеева, Е. С. Попушинова // Актуальные проблемы преподавания математики в технич. вузе. – 2020. – № 8. – С. 88–96.

3. Кушнирук, Н. Н. Асимптотические методы в теории дифференциальных уравнений / Н. Н. Кушнирук, Т. В. Труфанов. – Благовещенск: Амурский гос. ун-т., 2011. – 79 с.

4. Моисеев, Н. Н. Асимптотические методы нелинейной механики: учебное пособие / Н. Н. Моисеев. – М.: Ленанд, 2020. – 408 с.

5. Полянин, А. Д. Лекции по нелинейным уравнениям математической физики / А. Д. Полянин. – М.: ИПМех РАН, 2023. – 256 с.

6. Хомицкий, Д. В. Избранные асимптотические методы для физиков: учебно-методическое пособие / Д. В. Хомицкий. – Нижний Новгород: Изд-во Нижегородского г-та им. Н. И. Лобачевского, 2022. – 62 с.

COMPARATIVE ANALYSIS OF ASYMPTOTIC METHODS FOR SOLVING THE DOUFFING EQUATION

***Ivanenko Vera Aleksandrovna*[1], *Temnikova Svetlana Vladimirovna*[2]**
[1,2]*Lugansk State Pedagogical University, Lugansk*
[2]*temnikovasvetlana@rambler.ru*

Abstract. The article presents a comprehensive study of the solutions of the Duffing equation using various asymptotic methods. It considers the construction of asymptotic expansions of various orders, the analysis of the resulting secular terms and their elimination, as well as the comparison of the obtained approximate solutions with the exact solution of the equation.

Keywords: Duffing oscillator, nonlinear oscillations, asymptotic methods, cubic nonlinearity, differential equations.

УДК 519.615

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К ОБОБЩЕНИЮ МЕТОДА НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ НА НЕЛИНЕЙНЫЙ СЛУЧАЙ

***Малый Вячеслав Вадимович*[1], *Зубовский Руслан Петрович*[2]**
[1,2]*Луганский государственный университет им. В. Даля, г. Луганск*
[1]*v.v.malyy@ya.ru*

Аннотация. Рассматривается актуальная в задачах аппроксимации проблема поиска экстремума, к которой, в частности, сводится метод наименьших квадратов для линейного случая. В общем случае задача сводится к многомерному поиску экстремума.

Ключевые слова: метода наименьших квадратов, аппроксимация, математическое моделирование.

Как известно [1], в задачах аппроксимации в одномерном случае задача формулируется так: задан массив $\{x_i, y_i\}$, требуется подобрать функцию $\tilde{y} = \phi(x, \vec{a})$, такую, что для $\forall x_i \to \tilde{y}_i$ $\Delta y_i = y_i - \tilde{y}_i$. Целевая функция $f(\vec{a})$ – это наиболее подходящая функция расстояния (метрика) в пространстве значений функции. Во многих случаях целевой функцией может быть $f(\vec{a}) = \sum \Delta y_i^2$.

Например, в рамках анализа процессов флотации угля, было установлено, что кривые выходов граничных зольностей всплывших фракций демонстрируют антимодальные характеристики, аналогичные кривым фракционного состава. В отношении последних было проведено исследование, в ходе которого было идентифицировано и верифицировано с доверительной вероятностью 95% соответствующее распределение, основанное на экспериментальных данных [3].

В контексте корреляции между плотностью и зольностью угля, представляется целесообразным применить методологию описания кривых фракционного состава для анализа кривых выходов граничной зольности. Следует отметить, что при исследовании кривых фракционного состава, граничные плотности могут быть определены с высокой степенью точности на основе физических принципов, и их значения демонстрируют незначительную вариабельность, фактически оставаясь константными величинами.

При анализе граничных значений зольности необходим более глубокий и всесторонний подход. С точки зрения физических принципов, возможно лишь установление доверительных интервалов для начальной λ_0 и конечной λ_k зольности. Ввиду того, что основной задачей является определение таких граничных значений зольности, при которых теоретическое описание максимально коррелирует с экспериментальной кривой, целесообразно разработать функцию рассогласования между экспериментальными и теоретическими данными, зависящую от параметров λ_0 , λ_k , и найти её экстремум.

Кривая зольности описывается в виде:

$$F(\lambda)=\left[1+(a_0+a_1t)\sqrt{\frac{1}{t}-1}\right]^{-1},\ \ t=\left(\frac{\lambda-\lambda_0}{\lambda_k-\lambda_0}\right)^2,$$

где λ_0,λ_k – соответственно минимальное и максимальное значения плотности; a_0,a_1 – коэффициенты линейной регрессии, зависящие от λ_0,λ_k.

Рассмотрим функцию

$$\sigma^2=\sum_{y_k}\left[F_{эксп}\left(y_k\right)-F\left(y_k,\lambda_0,\lambda_k\right)\right]^2,$$

которая является суммой квадратов невязок. Необходимо решить задачу оптимизации, т.е. минимизировать функцию $\sigma^2\left(\lambda_0,\lambda_k\right)$.

В контексте минимизации функции σ^2 , очевидно, что достижение глобального минимума приводит к параметрам λ_0,λ_k, при которых наблюдается максимальная корреляция между теоретической и экспериментальной кривыми. Данная проблема может быть эффективно решена посредством применения специализированного программного обеспечения, предназначенного для задач минимизации данного класса [1].

Интеграция существующих методов стохастического и детерминированного поиска, реализованная в алгоритме «оптимизатора», обеспечивает эффективное достижение минимума целевой функции. Это обусловлено адаптивным характером алгоритма, который корректирует свою стратегию в зависимости от динамики поведения функции при приближении к оптимуму. Важно подчеркнуть, что точность промежуточных вычислений, задаваемая в «оптимизаторе», не идентична точности финальных результатов. На практике для достижения точности данных в 0,01% необходимо инициализировать алгоритм с точностью промежуточных вычислений порядка 0,00000001.

В контексте моделирования случайных процессов в технологических аппаратах, математическая модель всегда включает вектор неизвестных параметров $\vec{a}$. В силу технологических ограничений, можно установить приближенные значения координат данного вектора. Последующее варьирование этих параметров с целью определения оптимального решения представляет собой традиционный подход в технологических расчетах. Однако следует отметить, что выбранное решение не обязательно является глобально оптимальным и может не учитывать все возможные варианты.

Поэтому в данной ситуации может быть единственный выход. Рассматриваются некоторый набор экспериментальных данных $x_1, x_2, ..., x_n$ и соответствующий набор теоретически предсказанных с помощью математической модели результатов $t_1, t_2, ..., t_n$. Каждое из найденных с помощью теории результатов t_i зависит от параметров модели $\vec{a}$. Следовательно, и оценка степени рассогласования теории и эксперимента $\sum\left(x_i - t_i\right)^2 = f\left(\vec{a}\right)$. Минимизируя $f\left(\vec{a}\right)$, находим те параметры модели, при которых она наилучшим образом согласуется с экспериментальными данными.

Аналогично находятся параметры математического моделирования в задачах экономики и социологии [1].

Рассмотрим пример применения диффузионного оператора в контексте моделирования случайных процессов. Традиционная постановка задачи опирается на две концептуальные схемы. Первая из них представляет собой модель случайного блуждания, используемую для описания одномерных диффузионных процессов и броуновского движения. В данной модели материальная частица подвергается воздействию множества соударений с молекулами, что вызывает случайное изменение её траектории. Вторая схема возникает при анализе классической задачи о разорении, где исследуется динамика изменения курса ценных бумаг. В обоих случаях математическая модель, описывающая данные процессы, оказывается идентичной [3].

В силу того, что численные значения, полученные в результате измерений, неизбежно содержат случайные погрешности, следует признать, что интерполирующая функция не способна обеспечить оптимальное решение задачи. Напротив, целесообразно осуществить аппроксимацию измеренных данных таким образом, чтобы минимизировать заданную меру отклонений. Данная задача представляет собой фундаментальную проблему сглаживания экспериментальных данных и разработки эмпирических моделей [4].

Пусть задано множество $F(a_1, a_2, ..., a_n)$ функций $f(a_1, a_2, ..., a_n)$ и множество пар действительных чисел $(x_i, x_j)_{i=1}^{N}$, $N > n$. Ищется такая функция

$\tilde{f}(x, a_1, a_2, ..., a_n) \in F$, для которой

$$\rho(\tilde{f}(x_i) - y_i) \le \rho(f(x_i) - y_i)$$

для всех $f \in F$. Здесь ρ является некоторой известной мерой отклонений $e_i = f(x_i) - y_i$ и тем самым описывает принцип (критерий) выравнивания.

Одним из таких принципов выравнивания является метод наименьших квадратов. Он был разработан Гауссом и применялся с большим успехом в обыденных и астрономических измерениях. Критерий выравнивания имеет вид:

$$\rho_{\min}(f(x_i) - y_i) = \sum_{i=1}^{N} (f(x_i) - y_i)^2 .$$

Если погрешности e_i подчиняются нормальному распределению, то этот критерий может рассматривать как статистический (принцип максимального правдоподобия).

Для простоты будем считать, что параметры a_i $(i = 1,\ 2\ ,\ ...,\ \text{n})$ входят в f линейно, т. е.:

$$f(x; a_1, a_2,\ ...\ a_n) = a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x) + ... + a_n f_n(x).$$

Тогда

$$\frac{\partial \rho}{\partial a_j} = 2\sum_{i=1}^{N}\left(\sum_{k=1}^{n} a_k f_k(x_i) - y_i\right) f_j(x_i);$$

необходимыми условиями экстремума ρ являются равенства:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \sum_{i=1}^{N} f_k(x_i) f_j(x_i) = \sum_{i=1}^{N} y_i\, f_j(x_i) \quad (j = 1, ..., n).$$

При использовании способа Гаусса записи суммирования $\sum_{i=1}^{N} f(x_i) = \left[f(x) \right]$ эти нормальные уравнения принимают вид:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \left[f_k(x) f_j(x) \right] = y f_j(x_i) \;\; (j = 1, 2, ...n).$$

Частный случай $f_k(x) = x^{k-1}$, $(k = 1, 2, ..., n)$ приводит к сглаживающему многочлену, и нормальные уравнения принимают вид:

$$\sum_{k=1}^{n} a_n \left[x^{k+j-2} \right] = \left[y x^{j-1} \right],\ (j = 1, 2, ...n).$$

На практике используют минимальное, насколько возможно, число параметров.

Для этого сначала визуально проверяют, лежат ли точки измерения, например, вблизи функции-константы, прямой $y = ax + b$, параболы и т. д., и в соответствии с этим используют то или иное предположение.

Необходимым и достаточным условием того, чтобы точки измерения $M_i(x_i, y_i)$ лежали на прямой, является пропорциональность первых разностей x и y, т. е. $\Delta y_i / \Delta x_i = const$.

Если это соотношение приближенно выполняется, то прямую $y = ax + b$

можно рассматривать как кривую выравнивания.

Коэффициенты прямой удовлетворяют двум нормальным уравнениям:

$$aN + b[x] = [y], \quad a[x] + b[x^2] = [xy],$$

откуда:

$$a = \frac{[y][x^2] = [xy][x]}{N[x^2] - ([x]^2)}, \quad b = \frac{N[xy] - [y][x]}{N[x^2] - ([x]^2)}.$$

Если данные измерения приблизительно удовлетворяют уравнению вида $a_1 f(x) + b_1 g(y) = 0$, то может быть построена линейная связь путем преобразования $X = f(x)$, $Y = g(y)$ и, следовательно, может иметь место выравнивание. Например, функция $y = Ax^n$ может быть линеаризована таким образом. Логарифмируя обе части равенства, получим: $\ln y = \ln A + n \ln x$, где $X = \ln x$, $Y = \ln y$.

В прикладных задачах математической статистики осуществляется аппроксимация эмпирической функции распределения, что является важным этапом в процессе статистического анализа данных. Хотя эмпирические формулы сами по себе не являются фундаментальными законами, их получение может служить значимой предварительной ступенью для формулирования и верификации теоретически обоснованных функциональных зависимостей между физическими величинами. В качестве практически классического примера можно привести открытие закона излучения Планка, которое стало возможным благодаря построению и анализу трех эмпирических формул, предшествовавших его теоретическому обоснованию.

Предложенный подход рекомендуется применять в задачах поиска экстремума с использованием аппроксимирующих методов.

Литература

1. Курбыко, И. Ф. Методы прикладной статистики : учеб. пособие / И. Ф. Курбыко, А. С. Левизов, С. В. Левизов ; Владим. гос. ун-т им. А. Г. и Н. Г. Столетовых. – Владимир : Изд-во ВлГУ, 2018. – 184 с.

2. Лаптева, Е. В. Статистические методы исследований в экономике : учебное пособие (второе издание, доработанное и дополненное) / Е. В. Лаптева, Л. В. Портнова. – Волгоград : Изд-во «Сфера», 2022. – 234 с.

3. Баженова, С. Г. Математико-статистические методы в горной промышленности : учеб. пос. – 2-е изд., исправл. – М. : Изд-во Московского государственного горного университета, 2011. – 99 с.

4. Катаев, А. В. Прикладной статистический анализ в горном деле (Многомерная математическая статистика) : учеб. пособие / А. В. Катаев, С. Н. Кутовой. – Пермь : Изд. Перм. нац. исслед. политехн. ун-та, 2022. – 319 с.

ON AN APPROACH TO GENERALIZING THE METHOD OF LEAST SQUARES TO A NONLINEAR CASE

Maly Vyacheslav Vladimovich[1], Zubovsky Ruslan Petrovich[2]
[1,2]Luhansk State University named after V. Dahl, Lugansk
[1]v.v.malyy@ya.ru

Abstract. The problem of finding the extremum, which is relevant in the problems of approximation, is considered, to which, in particular, the method of least squares for the linear case is reduced. In general, the problem comes down to a multidimensional search for an extremum.

Keywords: least squares method, approximation, mathematical modeling.

УДК 519.8:647.057

ОПРЕДЕЛЕНИЕ УРОВНЯ НАДЕЖНОСТИ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ СЛОЖНЫХ СИСТЕМ

***Малый Дмитрий Вячеславович*[1], *Селезнев Григорий Петрович*[1]**
[1,2]*Луганский государственный университет им. В. Даля, г. Луганск*
[1]*dvmaliy@ya.ru*

Аннотация. В статье исследуется надежность функционирования сложных технических систем на примере работы ленточных конвейеров. Предложен подход к мониторингу состояния роликов конвейера, основанный на анализе центра тяжести акустического сигнала. Данный метод обеспечивает объективную оценку работоспособности системы.

Ключевые слова: уровень надежности, работоспособность системы, вероятностные характеристики безотказной работы систем.

Как известно [1], надежность функционирования технической системы существенно зависит от внешних факторов, которые включают в себя замену отказавших элементов, ремонт, проверки и т. п. В дальнейшем будем использовать следующие понятия:

– понятие надежности как вероятность того, что система выполняет свои функции в соответствии с предъявляемыми требованиями в течение заданного интервала времени,

– понятие интервальной надежности как вероятность того, что в требуемый момент времени система находится в работоспособном состоянии и еще проработает безотказно в течение некоторого интервала времени. В этот период допускаются технические обслуживания и замены компонентов, однако, они не влияют на работоспособность системы в рамках рассматриваемого интервала,

– предельная интервальная надежность представляет собой предел $R(x,T)$ при $T \to \infty$, т.е. $\lim\limits_{T \to \infty} R(x,T)$.

Определение конкретного типа распределения времени безотказной работы, исходя из анализа физических процессов, часто основывается на интуиции исследователя. Однако в ряде случаев существуют четко выраженные связи между механизмом отказов и функцией интенсивности отказов, что позволяет сделать обоснованный выбор распределения.

Чтобы выбрать подходящую функцию распределения из множества возможных, нужно учитывать физические особенности реальных процессов.

Предположим, что распределение отказов F имеет плотность f. Тогда функция интенсивности отказов $r(t)$ определяется для тех значений t, для которых $F(t)<1$, как $r(t)=f(t)\cdot\left[\bar{F}(t)\right]^{-1}$, где $\bar{F}(t)=1-F(t)$. Эта функция имеет следующий вероятностный смысл: $r(t)dt$ есть вероятность того, что устройство с наработкой t откажет в интервале времени $[t,t+dt]$.

Математические методы для анализа экспоненциального распределения времени безотказной работы оборудования хорошо разработаны [2]. Для обоснования экспоненциального распределения достаточно общих предположений. При мягких условиях на распределение времени работы элементов и при большом их количестве поток отказов оборудования в целом после длительного времени хорошо аппроксимируется пуассоновским потоком. Этот вывод справедлив, если средние значения времени безотказной работы элементов ограничены, а распределения отказов для всех элементов имеют возрастающую интенсивность отказов. Так как интервалы времени между событиями в пуассоновском процессе независимы и распределены экспоненциально, этот результат часто применяется для подтверждения экспоненциального закона распределения отказов.

Наиболее продуктивным методологическим подходом к анализу надежности систем является исследование специфических характеристик, основанное на детальном изучении физических параметров. Интуитивно можно предположить, что условное математическое ожидание остаточного времени безотказной работы для элемента, который уже функционировал в течение определенного периода времени, будет ниже, чем для нового элемента. Однако при более строгих условиях распределение $F(x)$ обладает убывающим математическим ожиданием остаточного времени безотказной работы, если и только если для элемента, проработавшего некоторое время t, функция

$$\varphi(t)=\bar{F}(t)\cdot\int_{t}^{\infty}\bar{F}(x)dx \tag{1}$$

убывает с ростом t.

Для описания распределений времени безотказной работы обычно используются [3] несколько функций, а именно: плотность вероятности $f(t)$, когда она существует, функция распределения $F(t)$ и интенсивность отказов $r(t)$. Эти функции связаны между собой следующим образом:

$$F(t)=\int_{0}^{t}f(x)dx,\quad \bar{F}(t)=\exp\left[-\int_{0}^{t}r(x)dx\right], \tag{2}$$

где $\bar{F}(t)=1-F(t)$. Естественно предположить, что $F(0)=0, F(+\infty)=1$ и что F непрерывна справа.

Обсудим наиболее распространённые распределения, применяемые для анализа усталостных повреждений различных материалов, а также при исследовании отказов электронных и механических систем. Интенсивности отказов упоминаются только в тех случаях, когда они имеют простую структуру.

1. Экспоненциальное распределение

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t},\ r(t) = \lambda, \lambda > 0, t \geq 0.$$

Экспоненциальное распределение – одно из самых популярных и широко применяемых в статистике. Оно обладает множеством полезных математических характеристик, но его использование ограничено из-за специфического свойства: если время до отказа устройства подчиняется экспоненциальному закону, то предыдущий опыт эксплуатации не влияет на остаточное время его безотказной работы. Если устройство до сих пор не отказало к определённому моменту времени, то вероятность его безотказной работы в будущем такая же, как если бы оно только что было введено в эксплуатацию. Это утверждение, безусловно, противоречит нашим интуитивным представлениям о надёжности.

2. Гамма-распределение

$$\frac{f(t) = \lambda(\lambda t)^{\alpha-1} e^{-\lambda t}}{\Gamma(\alpha)}, \quad \lambda, \alpha > 0, t \geq 0.$$

Гамма-распределение является несимметричным. Это распределение при $\alpha. > 1$ имеет возрастающую интенсивность отказов, ограниченную сверху величиной λ. При $\alpha. < 1$ интенсивность отказов гамма-распределения убывает. Предположим, что некоторый объект при данных условиях отказывает не ранее чем после появления $k \geq 1$ пиковых выбросов. Если поток этих выбросов является пуассоновским с параметром λ, то плотность вероятности отказа равна $f(t) = \dfrac{\lambda^k t^{k-1} e^{-\lambda t}}{\Gamma(k)}$, $t \geq 0$, что является k-кратной сверткой плотности экспоненциального распределения.

3. Распределение Вейбулла

$$f(t) = \lambda \alpha t^{\alpha-1} e^{-\lambda t^{\alpha}}, r(t) = \lambda \alpha t^{\alpha-1},\ \lambda, \alpha > 0, t \geq 0.$$

Распределение Вейбулла отличается тем, что с увеличением времени интенсивность отказов при $\alpha > 1$ возрастает, и этот рост не имеет ограничений. Это распределение также известно как асимптотическое распределение третьего типа для экстремальных величин.

4. Логарифмически-нормальное распределение

$$f(t) = \frac{1}{t\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[\frac{-1}{2\sigma^2}\left(\lg t - \mu\ \right)^2\right], -\infty < \mu < \infty, \sigma > 0, t \geq 0.$$

Логарифмически-нормальное распределение характеризуется уменьшением интенсивности отказов в широком интервале, что вызывает сомнения в его применимости для описания физических явлений, таких как усталостные процессы в материалах.

Экспериментальные исследования показали, что, когда ролик перестает вращаться, это вызывает изменение спектральной характеристики акустического сигнала, исходящего от конвейера. В связи с этим необходимо было определить параметр спектральной характеристики акустического сигнала, который бы реагировал на наличие неподвижных роликов (критерии идентификации).

Признак для идентификации состояния роликов был выбран с учетом их расположения вдоль конвейерной линии и необходимости одновременного контроля работы группы роликов. Важно было различать только две ситуации: нормальное вращение всех роликов (режим нормальной работы) и отсутствие вращения хотя бы одного ролика (режим аварии). В связи с этим было решено искать признак опознания среди интегральных характеристик спектра акустического сигнала конвейера. На основе анализа спектральных данных экспериментальных акустических сигналов става конвейера был предложен новый признак, который включает информацию о состоянии поддерживающих роликов. Этот признак определяется положением центра тяжести плоской фигуры, сформированной огибающей амплитудно-частотного спектра акустического сигнала конвейера.

Алгоритм работы устройства контроля роликов основан на критерии определения их состояния по выбранному признаку. В качестве такого признака используются координаты центров тяжести спектрограмм акустических сигналов конвейера. Эти координаты интерпретируются как двумерные случайные величины x и y. Экспериментальные исследования показали, что они группируются в две области: одна соответствует нормальной работе, а другая – аварийной ситуации.

Поскольку случайная величина полностью определяется своей функцией распределения, необходимо рассмотреть отдельно распределение каждой координаты, а затем описать двумерное распределение. Зная закон распределения этих величин, можно разработать критерий для определения принадлежности точки к одной из областей.

Предположим, что известен центр распределения для нормальной работы. Для любой точки можно вычислить расстояние до этого центра. По величине расстояния можно определить, к какой области принадлежит точка.

Исследованием было подтверждено [2] наличие у спектрограмм центров тяжести, которые в нормальных и аварийных условиях концентрируются вокруг определённых значений. Эти координаты подчиняются нормальному распределению. В данном случае можно доказать, что координаты центров тяжести спектрограмм независимы друг от друга, что позволяет рассматривать функцию распределения как произведение двух независимых функций, упрощая тем самым статистический анализ.

Для оценки расстояния от любой точки до центра распределения центров тяжести в нормальном режиме работы предпочтительно использовать безразмерные координаты.

$$\xi = \frac{x-\overline{x}}{\sigma_x} \text{ и } \eta = \frac{y-\overline{y}}{\sigma_y} \text{ как } \rho^2 = \xi^2 + \eta^2 .$$

Это позволяет устранить неоднозначность изменения координат центров тяжести спектрограмм в координатах x и y.

Как следует из экспериментальных данных, режим аварии характеризуется тем, что соответствующие ему координаты центров тяжести спектрограмм лежат за пределами некоторого критического расстояния a от центра распределения координат центров тяжести спектрограмм режима нормальной работы.

Для точки, имеющей круговое нормальное распределение с центром в начале координат, плотность распределения расстояния $\rho = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$ от начала координат подчинена закону Рэлея, что позволяет найти вероятность попадания в круг радиусом a:

$$P\left(\rho \le a\right) = 1 - \exp\left(-0,5a^2\right) \tag{3}$$

Для любой заданной величины вероятности P можно найти значение $a = \rho_{\max}$, при котором вероятность того, что $0 < \rho \le a$, равна P:

$$\left|a\right| = \sqrt{2\ln\frac{1}{1-P}} . \tag{4}$$

Выражение (4) является математической формулировкой критерия распознавания состояния роликов по координатам центра тяжести плоской фигуры, образованной огибающей спектра виброакустического сигнала, излучаемого конвейером.

Проверка точности разработанного критерия распознавания проводилась путём оценки значимости различий между центрами распределения координат центров тяжести спектрограмм виброакустических сигналов, генерируемых конвейером в штатном режиме и в аварийных условиях. В результате было установлено, что эти центры распределения можно достоверно различить с вероятностью 0,95 как по оси Ox, так и по оси Oy.

В результате проведенного исследования установлено, что ключевым критерием для оценки состояния роликов является критическое отклонение между центральными координатами распределения масс спектральной характеристики виброакустического сигнала при штатном функционировании роликов и координатами центра масс спектральной характеристики исследуемого сигнала.

Литература

1. Киндеев, Е. А. Надежность технических систем и техногенный риск: учеб. пособие / Е. А. Киндеев ; Владим. гос. ун-т им. А.Г. и Н.Г. Столетовых. – Владимир : Изд-во ВлГУ, 2016 – 154 с.

2. Катаев, А. В. Прикладной статистический анализ в горном деле (Многомерная математическая статистика): уч. пос. / А. В. Катаев, С.Н. Кутовой. – Пермь. Изд-во Перм. нац. исслед. политехн. ун-та, 2022. – 319 с.

DETERMINATION OF THE LEVEL OF RELIABILITY OF COMPLEX SYSTEMS

Maly Dmitrii Vyacheslavovich[1], Seleznev Grigoriy Petrovich[2]
[1,2]Luhansk State University named after V. Dahl, Lugansk
[1]dvmaliy@ya.ru

Abstract. The article examines the reliability of the functioning of complex technical systems on the example of the operation of belt conveyors. An approach to monitoring the condition of conveyor rollers based on the analysis of the center of gravity of the acoustic signal is proposed.

Keywords: level of reliability, system operability, probabilistic characteristics of system failure-free operation.

УДК 519.6, 658.8

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ РЕКОМЕНДАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ

Мурина Диана Андреевна[1], Панишева Ольга Викторовна[2]
[1]Краснодонский факультет инженерии и менеджмента (филиал) Луганского государственного университета им. В. Даля, г. Краснодон,
[2] Луганский государственный педагогический университет, г. Луганск
[1]Diana.murina13@yandex.ru

Аннотация. В статье рассматриваются математические основы современных рекомендательных систем. Описываются ключевые методы, такие как матричная факторизация, косинусное сходство и байесовские модели, лежащие в основе алгоритмов персонализации. На примере маркетплейса Ozon показано практическое применение операций косинусного сходства и умножения матриц для составления рекомендаций.

Ключевые слова: матрицы, векторы, формула Байеса, рекомендательные системы.

Стремительное развитие цифровых технологий и взрывной рост объёмов данных привели к формированию совершенно нового направления в прикладной математике – анализа больших данных (Big Data) и построения интеллектуальных рекомендательных систем. Современный пользователь ежедневно сталкивается с огромным количеством информации: товаров, новостей, фильмов, образовательных материалов, сервисных приложений. В этих условиях математические модели персонализации становятся необходимым инструментом, позволяющим прогнозировать интересы человека и формировать индивидуальные рекомендации.

Сегодня рекомендательные системы являются неотъемлемой частью цифровой инфраструктуры. Например, маркетплейсы используют их для повышения продаж, банки – для оценки потребностей клиентов, образовательные платформы – для подбора индивидуальных траекторий обучения, медиа-сервисы – для персонализации контента и т.д.

В маркетплейсах, таких как Ozon, Wildberries, Alibaba, Amazon, рекомендации напрямую влияют на прибыль компании. По данным современных зарубежных исследований, гибридные рекомендательные модели маркетплейсов способны увеличить конверсию более чем на треть. Так, в работе [4] приводятся впечатляющие данные состоянием на 2022 год, которые демонстрируют, что благодаря рекомендательным системам осуществляется 35% покупок на Amazon, Alibaba добилась увеличения коэффициента конверсии до 20% за счет использования персонализированных целевых страниц, на рекомендации приходится 70% времени, которое люди тратят на просмотр видео на YouTube, 75% того, что люди смотрят на Netflix, поступает из рекомендаций [4, с.4]. Такие показатели обуславливают интерес к вопросу рекомендательных систем, функционирование которых обеспечивается математическими моделями и алгоритмами**.**

Хотя первые прототипы систем рекомендаций появились в 1990-х, их математическая база формировалась значительно раньше, благодаря работам выдающихся учёных-математиков: А. Маркова, разработавшего теорию цепей Маркова, на которых позднее построены многие вероятностные модели поведения пользователей, Т. Байеса, чья формула легла в основу байесовских рекомендательных алгоритмов, А. Колмогорова, создателя современной теории вероятностей, без которой невозможны модели предсказания пользовательских предпочтений, Джона фон Неймана, одного из разработчиков теории оптимизации, используемую при обучении моделей рекомендаций.

Современные исследования рекомендательных систем проводятся чаще не отдельными учеными, а командами крупных технологических компаний и научных лабораторий. Благодаря этим и многим другим исследователям, математические методы, ранее применявшиеся преимущественно в теории информации или физике, нашли применение в задачах прогнозирования поведения пользователей. Начиная с 2006 года, когда на конкурсе Netflix Prize впервые были применены масштабируемые модели факторизации матриц, математическая основа рекомендательных систем получила новый импульс развития. Модели матричной факторизации стали доминирующим подходом в рекомендательных системах благодаря их точности и масштабируемости [4, с.5].

Описанию математических основ рекомендательных систем посвящены работы Н. Андриянова, А. Заграновской, Д. Матюра, Л. Кене, Р. Кузмич и других исследователей.

Целью данной работы является описание математических основ современных рекомендательных моделей и демонстрация практического применения алгоритмов персонализации на примере маркетплейса Ozon. В рамках исследования рассматриваются фундаментальные математические методы построения рекомендаций (матричная факторизация, косинусное сходство, байесовские модели); приводится практический пример формирования персонального списка рекомендаций.

Рекомендательная система – это информационная система, предназначенная для предсказания и предоставления персонализированных рекомендаций пользователям на основе их предпочтений, поведения и интересов [2, с. 391].

Исследователи выделяют несколько типов рекомендательных систем:

1. Контентно-ориентированные рекомендации, основанные на анализе свойств товара и профиля пользователя. Онлайн-платформы используют этот тип систем, чтобы не потерять новых пользователей [3].
2. Коллаборативная фильтрация, где используются данные об оценках и поведении большого числа пользователей для выявления похожих паттернов. Коллаборативная фильтрация использует сходство между пользователями или товарами для формирования прогнозов, что делает её одной из наиболее эффективных технологий при больших массивах данных точности.
3. Гибридные модели. Комбинируют оба предыдущих метода для повышения конверсий.
4. Знаниевая фильтрация. Фильтрация, основанная на знаниях, в которой рекомендации строятся на основе экспертного мнения и знаний в предметной области [2].

Современные рекомендательные системы представляют собой не просто набор алгоритмов, а целостную архитектуру прогнозирования, основанную на матричных, вероятностных и поведенческих моделях.

Так, в коллаборативной фильтрации используется матрица взаимодействий $R = \left(r_{ij}\right)$, где i – пользователь, j – товар, r_{ij}– оценка, просмотр, покупка, добавление в корзину. Основная задача – заполнить пропущенные значения матрицы и предсказать вероятность взаимодействия пользователя i с товаром j.

Метод факторизации матриц – это широко применяемая модель, называемая SVD-факторизация [2, с.393]. Ее суть можно выразить формулой $R \approx PQ^T$, где P – матрица характеристик пользователей, Q – матрица характеристик товаров. Таким образом, каждый пользователь и каждый товар представлены в виде вектора в пространстве скрытых признаков. Факторизационные модели позволяют эффективно работать с разреженными матрицами и извлекать скрытые зависимости, недоступные традиционным статистическим методам [там же].

Еще одно широко используемое в рекомендательных системах представление данных о товарах и пользователях в виде векторов. С помощью косинуса угла между векторами проводится расчет сходства между товарами или пользователями. Коэффициент сходства может быть определён метрикой косинусного расстояния $cos(\widehat{\overline{a},\overline{b}}) = \frac{\overline{a}\cdot\overline{b}}{|\overline{a}|\cdot|\overline{b}|}$, где $\overline{a}$ – вектор пользователя, $\overline{b}$ – вектор товара.

Заметим, что косинусное расстояние – это не единственный способ определить близость объектов в рекомендательных системах. С этой целью используются еще такие метрики, как евклидово расстояние, расстояние Минковского, корреляция Пирсона, коэффициент Жаккара и пр. [1, с.114].

В рекомендательных системах нашли применение и элементы теории вероятностей. Так, для прогнозирования вероятности интереса к товару можно использовать формулу Байеса:

$$P(i|u) = \frac{P(u|i)P(i)}{P(u)}.$$

Формула Байеса в рекомендательных системах применяется, прежде всего, в рамках наивных байесовских классификаторов, которые оценивают вероятность того, что пользователь проявит интерес к определённому товару или контенту (классу), на основе известных признаков его профиля и предыдущих действий (например, просмотров или покупок). Например, система может рассчитать вероятность $P(\text{товар} = \text{кроссовки}|\text{пользователь})$, опираясь на априорную вероятность покупки кроссовок другими похожими пользователями и на признаки самого пользователя (его демографию, историю). Этот подход особенно полезен для контентной фильтрации и в гибридных моделях при работе с ограниченными данными о взаимодействиях.

Рекомендательные системы в маркетплейсе Ozon, как и многие другие крупные сервисы и интерне-магазины, используют гибридные модели [3], включающие: анализ поведения пользователей (клики, просмотры, покупки), контентные признаки товаров (категории, характеристики, бренд), факторизационные модели, алгоритмы ранжирования на основе градиентного бустинга.

Приведем пример пошагового составления рекомендаций на Ozon одним из методов матричной факторизации с использованием модели скрытых факторов в рамках коллаборативной фильтрации. Задача маркетплейса: рекомендовать пользователю товары на основе его поведения. Пусть имеются такие исходные данные: пользователь Диана просматривала спортивные костюмы, кроссовки; добавила в корзину бутылку для воды; купила ранее резинки для фитнеса.

Шаг 1. Формирование вектора пользователя Каждое действие кодируется числом: просмотр = 1, добавление в корзину = 2, покупка = 3. Получаем вектор активности пользователя Диана: u = (3, 1, 1, 2, ...). На практике этот вектор огромен, потому что на маркетплейсе представлены миллионы товаров, и в основном состоит из нулей. Аналогичным образом составляются векторы остальных пользователей магазина.

Шаг 2. Матричная факторизация. Алгоритм вычисляет скрытые признаки.

Пользователь → вектор P_u.

Товар → вектор Q_i.

Прогноз предпочтения считается, как произведение матриц:

$$(r_{ui}) = P_u Q_i^T.$$

Предположим, у нас есть два скрытых признака: степень увлеченности активным образом жизни и потребность в спортивных аксессуарах. Для Дианы первый признак будет высоким (так как просматривался спортивный костюм и покупались резинки, второй – средним (бутылочка была добавлена в корзину). Вектор пользователя Диана по этим признакам, может иметь вид (0,9; 0,6).

Все имеющиеся на маркейтплейсе товары также будут оценены по эти скрытым признакам. Например, спортивный костюм будет представлен в виде:

Q_костюм = (0,9; 0,1) – сильно связан со спортом (активным образом жизни), слабо – с аксессуарами), термобутылка: Q_термо = (0,4; 0,8) (похожа на бутылку), спортивный рюкзак: Q_рюкзак = (0,6; 0,8), фитнес-трекер: Q_трекер = (0,7; 0,8) и т.д.

Шаг 3. Ранжирование. Выбираются товары, набравшие наибольшее r_{ui}. Вычисляется скалярное произведение по каждому товару кандидату для Дианы. Вектор пользователя умножается скалярно на вектор товара.

Для описанных выше товаров это произведение будет равно:

термобутылка – $0{,}9 \cdot 0{,}4 + 0{,}6 \cdot 0{,}8 = 0{,}36 + 0{,}48 = 0{,}84$,

спортивный рюкзак – 0,9·0,6 + 0,6·0,8 = 0,54 + 0,48 = 1,02,

фитнес-трекер – 0,9·0,7 + 0,6·0,8 = 0,63 + 0,48 = 1,11.

Шаг 4. Итоговая рекомендация. Система в первую очередь предлагает фитнес-трекер, затем спортивный рюкзак, термобутылку. Эти товары соответствуют скрытым паттернам поведения пользователя и выборкам похожих покупателей.

Проведенное исследование математических основ рекомендательных систем позволяет сделать следующие выводы. Рекомендательные системы представляют собой комплексный математический аппарат, в основе которого лежат методы линейной алгебры (матричная факторизация), теории вероятностей (байесовский вывод) и метрического анализа (косинусное сходство, методы ближайших соседей). По мнению исследователей, эффективными в условиях больших и разреженных данных являются гибридные модели, объединяющие коллаборативную и контентную фильтрацию [2]. Использование гибридных рекомендательных систем позволяет значительно улучшать качество персонализации и увеличивает коммерческую эффективность платформы любого маркетплэйса.

Таким образом, рекомендательные системы являются динамичной областью, где строгие математические методы служат основой для создания интеллектуальных экономически значимых решений.

Литература

1. Заграновская, А. В. Математические основы рекомендательных систем / А. В. Заграновская, Д. Ю. Митюра // Теория и практика трансдисциплинарных исследований в современном мире: сб. Международной научно-практической конференции, Санкт-Петербург, 2019. – С. 112–117.

2. Кене, Л. Н. Сравнительный анализ математических алгоритмов для построения рекомендательных систем / Л.Н. Кене, Р.И. Кузьмич // Торговля, сервис, индустрия питания. – 2024. – № 4(4). – С. 390–401.

3. Рекомендательные системы: как помочь пользователю найти то, что ему нужно? [Электронный ресурс]. – URL: https://geekr.vercel.app/company/productstar/blog/523686 (дата обращения 13.12.2025).

4. Recommender Systems: Algorithms and their Applications / Pushpendu Kar, Monideepa Roy, Sujoy Datta – Springer, 2024. – 174 p.

MATHEMATICAL FOUNDATIONS OF RECOMMENDER SYSTEMS

***Murina Diana Andreevna*[1], *Panisheva Olga Viktorovna*[2]**
[1]*Krasnodon Faculty of Engineering and Management (branch) of V. Dahl Lugansk State University, Krasnodon,* [2]*Lugansk State Pedagogical University, Lugansk*
[1]*Diana.murina13@yandex.ru*

Abstract. The article examines the mathematical foundations of modern recommender systems. Key methods such as matrix factorization, cosine similarity, and Bayesian models underlying personalization algorithms are analyzed. Using the example of the Ozon marketplace, the practical application of cosine similarity operations and matrix multiplication for generating recommendations is demonstrated.

Keywords: matrices, vectors, Bayes' formula, recommender systems.

УДК 378.147

О НЕКОТОРОМ ПРОСТОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Савельев Валерий Михайлович
Луганский государственный университет им. В. Даля, г. Луганск
svm59@mail.ru

Аннотация. В работе доказано, что нормальная система линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами при некоторых условиях эквивалентна некоторой диагональной системе. Показан простой метод нахождения всех решений такой системы.

Ключевые слова: нормальная система линейных дифференциальных уравнений, операторный метод решения систем.

В статье [1] излагается операторный метод решения систем линейных дифференциальных уравнений, который для систем с постоянными коэффициентами является некоторым аналогом методов Крамера и Гаусса решения систем линейных алгебраических уравнений, сводящийся к решению нескольких дифференциальных уравнений высших порядков. В нашей работе показано, что нормальная система линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами при некоторых условиях эквивалентна некоторой диагональной системе. В отличие от подхода в [1] мы используем гауссово исключение без деления для приведения матрицы к верхней (нижней) треугольной форме.

Система обыкновенных дифференциальных уравнений называется *линейной,* если все неизвестные функции и их производные входят в систему в первой степени. Особенно важное значение в различных приложениях анализа к технике, механике, физике и к другим наукам имеют системы линейных уравнений с постоянными коэффициентами.

Нормальная система линейных уравнений с постоянными коэффициентами имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} + a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \cdots + a_{1n}y_n = f_1(x), \\ \dfrac{dy_2}{dx} + a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{2n}y_n = f_2(x), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{dy_n}{dx} + a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \cdots + a_{nn}y_n = f_n(x). \end{cases} \qquad (1)$$

В дальнейшем мы рассмотрим произвольную систему линейных уравнений любого порядка с постоянными коэффициентами и укажем простой метод нахождения всех решений такой системы.

Пользуясь символическими многочленами от $\dfrac{d}{dx} \equiv D$ любую систему линейных уравнений произвольного порядка с постоянными коэффициентами можно представить в виде

$$\begin{cases} f_{11}(D)y_1 + f_{12}(D)y_2 + \cdots + f_{1n}(D)y_n = f_1(x), \\ f_{21}(D)y_1 + f_{22}(D)y_2 + \cdots + f_{2n}(D)y_n = f_2(x), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f_{n1}(D)y_1 + f_{n2}(D)y_2 + \cdots + f_{nn}(D)y_n = f_n(x), \end{cases} \qquad (2)$$

где $f_{ik}(D)$ ($i,k = 1,\dots,n$) – некоторые многочлены с постоянными коэффициентами, при помощи которых записаны линейные операции, действующие над искомыми функциями y_k $(k = 1,2,\dots,n)$.

Теорема. *Если определитель*

$$F(D) = \begin{vmatrix} f_{11}(D) & f_{12}(D) & \cdots & f_{1n}(D) \\ f_{21}(D) & f_{22}(D) & \cdots & f_{2n}(D) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{n1}(D) & f_{n2}(D) & \cdots & f_{nn}(D) \end{vmatrix} \not\equiv 0,$$

(рассматриваемый, как многочлен вещественной переменной), то система (4) эквивалентна некоторой диагональной системе вида

$$\begin{aligned} \varphi_{11}(D)y_1 + \varphi_{12}(D)y_2 + \cdots + \varphi_{1n}(D)y_n &= \varphi_1(x), \\ \varphi_{22}(D)y_2 + \cdots + \varphi_{2n}(D)y_n &= \varphi_2(x), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots &= \dots\dots\dots \\ \varphi_{nn}(D)y_n &= \varphi_n(x), \end{aligned} \qquad (3)$$

где все диагональные многочлены $\varphi_{11}(D), \varphi_{22}(D), \dots, \varphi_{nn}(D)$ *не равны тождественно нулю.*

Заметим, что решение системы (3) сводится к последовательному решению линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Решив последнее уравнение

$$\varphi_{nn}(D)y = \varphi_n(x),$$

содержащее только y_n, переходят к предпоследнему уравнению, куда подставляется известная уже функция y_n и т.д. Наконец, для нахождения y_1 решается уравнение

$$\varphi_{11}(D)y_1 = \varphi_1(x) - \varphi_{12}(D)y_2 - \cdots - \varphi_{1n}(D)y_n,$$

где все функции, стоящие в правой части, уже найдены.

Доказательство теоремы проведем для случая $n = 3$, в общем случае оно проводится аналогично.

Рассмотрим систему трех уравнений

$$\begin{cases} f_{11}(D)y_1 + f_{12}(D)y_2 + f_{13}(D)y_3 = f_1(x), \\ f_{21}(D)y_1 + f_{22}(D)y_2 + f_{23}(D)y_3 = f_2(x), \\ f_{31}(D)y_1 + f_{32}(D)y_2 + f_{33}(D)y_3 = f_3(x). \end{cases} \tag{4}$$

Обозначим через p степень многочлена $f_{21}(D)$, а через q – степень многочлена $f_{31}(D)$. Допустим, что $q \geq p$. Тогда, разделив $f_{31}(D)$ на $f_{21}(D)$ (как многочлен на многочлен), получим

$$\frac{f_{31}(D)}{f_{21}(D)} = P_1(D) + \frac{Q_1(D)}{f_{21}(D)},$$

где остаток $Q_1(D)$ имеет, очевидно, степень $q < p.$ Отсюда

$$f_{31}(D) = P_1(D)\, f_{21}(D) + Q_1(D). \tag{5}$$

Умножим теперь обе части уравнения второго уравнения системы (4) на $P_1(D)$ и полученный результат вычтем почленно из третьего уравнения системы (4). В силу (5) получим

$$\begin{gathered} Q_1(D)y_1 + [\, f_{32}(D) - P_1(D)\, f_{22}(D)]y_2 + \\ +[\, f_{33}(D) - P_1(D)\, f_{23}(D)]y_3 = f_3(x) - P_1(D)\, f_2(x). \end{gathered} \tag{6}$$

Обозначая теперь

$$f_{32}(D) - P_1(D)\, f_{22}(D) = f_{32}^*(D),$$

$$f_{33}(D) - P_1(D)\, f_{23}(D) = f_{33}^*(D),$$

$$f_3(x) - P_1(D)\, f_2(x) = f_3^*(x),$$

заменим в системе (4) третье уравнение этой системы полученным уравнением (6) и вместо системы (4) рассмотрим систему

$$\begin{cases} f_{11}(D)y_1 + f_{12}(D)y_2 + f_{13}(D)y_3 = f_1(x), \\ f_{21}(D)y_1 + f_{22}(D)y_2 + f_{23}(D)y_3 = f_2(x), \\ Q_1(D)y_1 + f_{32}^*(D)y_2 + f_{33}^*(D)y_3 = f_3^*(x). \end{cases} \tag{7}$$

Системы (4) и (7) эквивалентны, ибо одна из другой получаются при помощи дифференцирования (умножения на многочлен $P_1(D)$) и вычитания или сложения, а такие операции, как известно, сохраняют тождества. Определитель системы (7) получается из определителя $F(D)$ следующим образом: третья строка в $F(D)$ заменяется результатом вычитания из каждого ее элемента соответствующих элементов второй строки, помноженных на один и тот же множитель $P_1(D)$. Следовательно, определитель системы (7) совпадает с $F(D)$.

Так как степень $Q_1(D)$ равна числу q_1, причем $q_1 < p$ (где p – степень $f_{21}(D)$), то к последним двум уравнениям системы (7) применим вышеуказанный прием. Поступая аналогично, через конечное число шагов добьемся того, что в одном из двух последних уравнений системы (4) исчезнет член с y_1 и система (4) заменится эквивалентной системой, в одном из уравнений которой будет отсутствовать y_1.

После этого аналогичным приемом добьемся того, что в одном из двух оставшихся уравнений тоже исчезнет y_1 и система (4) заменится некоторой эквивалентной ей системой вида

$$\begin{cases} f_{11}^{**}(D)y_1 + f_{12}^{**}(D)y_2 + f_{13}^{**}(D)y_3 = f_1^{**}(x), \\ \qquad\qquad f_{22}^{**}(D)y_2 + f_{23}^{**}(D)y_3 = f_2^{**}(x), \\ \qquad\qquad f_{32}^{**}(D)y_2 + f_{33}^{**}(D)y_3 = f_3^{**}(x). \end{cases} \tag{8}$$

Определитель системы (8) может отличаться от $F(D)$ разве лишь знаком (последнее будет иметь место, если произойдут замены строк, вызванные перегруппировкой уравнений). Применяя вышеуказанный прием к последним двум уравнениям системы (8), добьемся того, что в одном из этих уравнений исчезнет член с одной из функций, например y_2. В результате этого мы и придем к некоторой диагональной системе вида

$$\begin{aligned} \varphi_{11}(D)y_1 + \varphi_{12}(D)y_2 + \varphi_{13}(D)y_3 &= \varphi_1(x), \\ \varphi_{22}(D)y_2 + \varphi_{23}(D)y_3 &= \varphi_2(x), \\ \varphi_{33}(D)y_3 &= \varphi_3(x) \end{aligned} \tag{9}$$

эквивалентной системе (4), и с определителем, отличающимся от $F(D)$ разве лишь знаком.

Но определитель системы (9) равен произведению диагональных коэффициентов $\varphi_{11}(D), \varphi_{22}(D), \varphi_{33}(D)$, а потому

$$\varphi_{11}(D) \cdot \varphi_{22}(D) \cdot \varphi_{33}(D) = \pm F(D).$$

Так как $F(D) \not\equiv 0$, то ни один из многочленов $\varphi_{11}(D), \varphi_{22}(D), \varphi_{33}(D)$ не равен нулю тождественно. Теорема полностью доказана.

Покажем теперь, что наша теорема справедлива для любой нормальной системы с постоянными коэффициентами вида (1). Для этого достаточно убедиться в том, что определитель системы (1), записанной при помощи символа D, не равен тождественно нулю. Убедимся в этом на примере $n = 3$. Система (1) при $n = 3$ имеет вид

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} + a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + a_{13}y_3 = f_1(x), \\ \dfrac{dy_2}{dx} + a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + a_{23}y_3 = f_2(x), \\ \dfrac{dy_3}{dx} + a_{31}y_1 + a_{32}y_2 + a_{33}y_3 = f_3(x). \end{cases}$$

Записывая эту систему при помощи символа D, получим

$$\begin{cases} (D + a_{11})y_1 + a_{12}y_2 + a_{13}y_3 = f_1(x), \\ a_{21}y_1 + (D + a_{22})y_2 + a_{23}y_3 = f_2(x), \\ a_{31}y_1 + a_{32}y_2 + (D + a_{33})y_3 = f_3(x). \end{cases}$$

Определитель этой системы, как нетрудно заметить, имеет вид

$$F(D) = \begin{vmatrix} (D + a_{11}) & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & (D + a_{22}) & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & (D + a_{33}) \end{vmatrix}$$

и представляет собой относительно многочлен третьей степени с коэффициентом при старшем члене, равном 1. Следовательно, $D^3 + \cdots \not\equiv 0,$ что и требовалось доказать. Для произвольного n доказательство проводится аналогично. Итак, любую нормальную систему дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами можно привести к эквивалентной системе диагонального вида.

Замечание 1. Указанный метод интегрирования линейных систем (3) применим, очевидно, в тех случаях, когда функции $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_k(x)$ достаточное число раз дифференцируемы. Как правило, во всех практически важных случаях его условие выполняется.

Замечание 2. Указанный прием не применим если полином $F(D) \equiv 0.$ Но в этом случае, как известно, из алгебры, левые части некоторых $k < n$ уравнений системы (4) являются линейными комбинациями остальных. Поэтому и правые их части должны удовлетворять аналогичным соотношениям. В этом случае k $(k < n)$ функций остаются произвольными, а остальные $n - k$ выражаются определенным образом черев них. Для нахождения этих $n - k$ функций получается $n - k$ уравнений, определитель которых $F_1(D)$ отличен от тождественного нуля.

Пример 1 [2]. Рассмотрим нормальную линейную систему

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + x - y \ = 0, \\ \dfrac{dy}{dt} + y - 4z = 0, \\ \dfrac{dz}{dt} + 4z - x = 0. \end{cases} \tag{10}$$

Решение. Запишем ее при помощи символа D в виде

$$\begin{cases} (D+1)x - y = 0 \\ (D+1)y - 4z = 0 \\ -x + (D+4)z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} D+1 & -1 & 0 \\ 0 & D+1 & -4 \\ -1 & 0 & D+4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \qquad (11)$$

Производя соответствующие элементарные преобразования получаем

$$\begin{bmatrix} D+1 & -1 & 0 \\ 0 & D+1 & -4 \\ -1 & 0 & D+4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 & D+4 \\ 0 & -1 & D^2+5D+4 \\ 0 & D+1 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 & D+4 \\ 0 & -1 & D^2+5D+4 \\ 0 & 0 & D^3+6D^2+9D \end{bmatrix}.$$

Следовательно, система (10) эквивалентна диагональной системе вида:

$$\begin{cases} -x + \dfrac{dz}{dt} + 4z = 0, & (12_1) \\ -y + \dfrac{d^2z}{dt^2} + 5\dfrac{dz}{dt} + 4z = 0, & (12_2) \\ \dfrac{d^3z}{dt^3} + 6\dfrac{d^2z}{dt^2} + 9\dfrac{dz}{dt} = 0. & (12_3) \end{cases}$$

Характеристическое уравнение для уравнения (12_3) имеет вид,

$$k^3 + 6k^2 + 9k = 0,$$

и его корни суть $k_1 = 0, k_2 = -3, k_3 = -3$. Поэтому общее решение уравнения (12_3) имеет вид

$$z = C_1 + C_2e^{-3t} + C_3te^{-3t} = C_1 + (C_2 + C_3t)e^{-3t}. \qquad (13)$$

В силу (12_1) и (13),

$$x = \frac{dz}{dt} + 4z = C_3e^{-3t} - 3(C_2 + C_3t)e^{-3t} + 4C_1$$
$$+4(C_2 + C_3t)e^{-3t} = 4C_1 + (C_2 + C_3 + C_3t)e^{-3t}.$$

В силу (12_2) и (13),

$$y = \frac{dx}{dt} + x = C_3e^{-3t} - 3(C_2 + C_3 + C_3t)e^{-3t} +$$
$$+4C_1 + 4(C_2 + C_3 + C_3t)e^{-3t} = 4C_1 - (2C_2 + C_3 + 2C_3t)e^{-3t}.$$

Итак, решение системы (10) имеет вид

$$\begin{cases} x = 4C_1 + (C_2 + C_3 + C_3 t)e^{-3t} \\ y = 4C_1 - (2C_2 + C_3 + 2C_3 t)e^{-3t} \\ z = C_1 + (C_2 + C_3 t)e^{-3t}. \end{cases}$$

Замечание. Приведение системы (10) к диагональному виду можно произвести также путем, отличным от указанного нами. В результате получатся уравнения, решения которых будут записываться с другим распределением постоянных. Но после замены одной группы постоянных другой всегда можно из одной формы решения получить другую.

Пример 2 [1]. Найти общее решение системы

$$\begin{cases} x' = -2x + 3y + 4z - 3t, \\ y' = -6x + 7y + 6z + 1 - 7t, \\ z' = x - y + z + t. \end{cases}$$

Решение. В операторной форме имеем матрицу

$$\left[\begin{array}{ccc|c} D+2 & -3 & -4 & -3t \\ 6 & D-7 & -6 & 1-7t \\ -1 & 1 & D-1 & t \end{array}\right].$$

Используя гауссово исключение без деления, приводим эту матрицу к виду

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & D-1 & t \\ 0 & D-1 & 6D-12 & 1-t \\ 0 & 0 & D^2-5D+6 & 0 \end{array}\right].$$

Решая однородное уравнение $\frac{d^2z}{dt^2} - 5\frac{dz}{dt} + 6z = 0$, получаем

$$z(t) = C_1 e^{3t} + C_2 e^{2t}.$$

Из уравнения $y'(t) - y(t) + 6z'(t) - 12z(t) = 1 - t$ с учетом уже найденного $z(t)$ получаем решение

$$y(t) = t - 3C_1 e^{3t} + C_3 e^{2t}.$$

Из уравнения $-x(t) + y(t) + z'(t) - z(t) = t$ окончательно получаем

$$x(t) = C_1 e^{3t} + C_2 e^{t} + C_3 e^{2t}.$$

Отметим, что в решении примера из [1] используются формулы Крамера, а это, как известно, требует большое количество вычислений.

Литература

1. Малышев, Ю. В. О решении системы линейных дифференциальных уравнений операторным методом / Ю.В. Малышев, П.С. Атаманов // Вестник Чувашского университета. – 2011. № 3. – С. 155–159.

2. Степанов, В. В. Курс дифференциальных уравнений. – Изд. Стер (11-е, испр.) – 2024. – 512 с.

ABOUT SOME SIMPLE METHOD OF SOLVING THE SYSTEM LINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS

Saveliev Valery Mikhailovich
Luhansk State University named after V. Dahl, Lugansk
svm59@mail.ru

Abstract. It is proved that a normal system of linear differential equations with constant coefficients is equivalent to a diagonal system under certain conditions. A simple method for finding all solutions of such a system is considered.

Keywords: a normal system of linear differential equations, an operator method for solving systems.

УДК 517.928:519.723

К ВОПРОСУ ПРИМЕНЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ АСИМПТОТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ

Сенченко Елизавета Михайловна[1], Темникова Светлана Владимировна[2]
[1,2]Луганский государственный педагогический университет
[1]elizaveta.senchenko@mail.ru, [2]temnikovasvetlana@rambler.ru

Аннотация. В статье рассмотрены теоретические основы асимптотического анализа. Особое внимание уделено практическим методам: эквивалентным преобразованиям, выделению доминирующего члена, разложению по малому параметру и усечению рядов. На примерах показано получение аналитических приближений с контролируемой точностью, которые эффективно применяются в прикладных задачах математики, физики и инженерии.

Ключевые слова: асимптотический анализ, приближённые методы, доминирующий член, малый параметр, асимптотическое разложение.

Введение. Асимптотический анализ занимает важное место в современной математике и её приложениях, поскольку позволяет исследовать поведение функций и выражений в предельных режимах [5, с. 15–18; 7, с. 3–6]. Во многих задачах прикладного характера получение точного аналитического решения оказывается либо невозможным, либо чрезмерно сложным с вычислительной точки зрения. В таких случаях особую ценность приобретают приближённые методы, позволяющие выявлять ведущие закономерности поведения математических объектов без выполнения громоздких вычислений.

Элементарные асимптотические методы представляют собой совокупность приёмов, основанных на выделении главных членов выражений и оценке вклада малых поправок. Несмотря на относительную простоту, данные методы обладают высокой универсальностью и широко применяются при анализе пределов, исследовании интегралов, решении уравнений с малыми и большими параметрами, а также при построении приближённых математических моделей [3, с. 7–12; 7, с. 10–14].

В данной работе мы рассмотрим элементарные асимптотические методы и продемонстрируем их практические значимости на примерах задач приближённого анализа.

Изложение основного материала. Под асимптотическим поведением функции понимается характер изменения её значений при стремлении аргумента к предельной точке, например к нулю или бесконечности. Одним из базовых понятий является асимптотический эквивалент. Функции $f(x)$ и $g(x)$ называются асимптотически эквивалентными при $x \to a$, если выполняется соотношение $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=1$ [2, с. 121–123; 8, с. 88–90].

Использование эквивалентов позволяет заменять сложные выражения более простыми без искажения их предельного поведения.

Наряду с эквивалентами в асимптотическом анализе применяются асимптотические разложения, представляющие функцию в виде суммы упорядоченных по степени малости членов. Для формального описания точности приближений используются обозначения «большое O» и «малое o», которые позволяют строго оценивать вклад отброшенных слагаемых [7, с. 20–25].

Указанные понятия образуют теоретическую основу элементарных асимптотических методов и обеспечивают строгий аппарат для анализа приближённых выражений.

Метод эквивалентных преобразований основан на замене функции её асимптотическим эквивалентом вблизи предельной точки. Такой подход широко используется при вычислении пределов и упрощении сложных выражений, что позволяет существенно упростить вычисления без потери точности результата [2, с. 121–123; 8, с. 89–92].

Суть *метода доминирующего члена* заключается в выделении слагаемого, определяющего основной вклад в поведение функции. При больших значениях аргумента именно доминирующий член определяет порядок роста или убывания выражения, тогда как остальные слагаемые дают малый вклад и могут быть отброшены. Этот метод особенно эффективен при анализе многочленов и рациональных функций [7, с. 45–50; 8, с. 90–92].

Метод разложения по малому параметру применяется в задачах, содержащих величину $\varepsilon \ll 1$. Решение представляется в виде ряда по степеням малого параметра, что позволяет получать последовательные приближения и контролировать точность результата. На практике этот метод удобно применять в физике, механике и теории возмущений [3, с. 15–22; 7, с. 110–116].

При практических вычислениях асимптотические ряды, как правило, используются не полностью, а усечённо. *Метод усечения рядов* позволяет выбрать необходимое число членов разложения таким образом, чтобы обеспечить заданную точность приближения. Погрешность при этом оценивается порядком следующего отброшенного члена ряда [8, с. 125–128].

Для иллюстрации возможностей элементарных асимптотических методов рассмотрим несколько типовых задач, показывающих их применение при приближённом анализе математических выражений. Выбранные примеры относятся к различным классам задач и отражают наиболее часто используемые приёмы асимптотического анализа.

Пример 1. Вычисление предела $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x - x\cos x}{x^3}$. с использованием метода эквивалентных преобразований.

Непосредственная подстановка значения аргумента в выражение приводит к неопределённости вида $\frac{0}{0}$,что затрудняет прямое вычисление предела. В этом случае целесообразно воспользоваться методом эквивалентных преобразований.

Известно, что для малых значений x справедливы такие эквиваленты как: $\sin x \sim x-\frac{x^3}{6}, \cos x \sim 1-\frac{x^2}{2}$. Эти эквиваленты берутся из асимптотических разложений функции Тейлора, но метод эквивалентных преобразований позволяет использовать их без полного разложения в ряд, что существенно упрощает вычисления [8, с. 125–128].

Подставим эквиваленты в выражение: $\sin x - x\cos x \sim \left(x-\frac{x^3}{6}\right)-x\left(1-\frac{x^2}{2}\right)$. Упростив выражение, получим: $\left(x-\frac{x^3}{6}\right)-\left(x-\frac{x^3}{2}\right)=\frac{x^3}{3}$. Вычисляя предел, подставим упрощённое выражение в исходную дробь: $\frac{\sin x - x\cos x}{x^3} \sim \frac{\frac{x^3}{3}}{x^3}=\frac{1}{3}$.

Следовательно, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x - x\cos x}{x^3}=\frac{1}{3}$.

Данный пример наглядно демонстрирует эффективность метода эквивалентных преобразований: вместо громоздких алгебраических преобразований достаточно использовать известные асимптотические разложения, что позволяет быстро и строго получить точный результат.

Пример 2. Асимптотический анализ функции $f(x)=\sqrt{x^4+5x^2+1}-x^2, x\to\infty$. при больших значениях аргумента (метод доминирующего члена).

Выделим доминирующий член под корнем. Подкоренное выражение: x^4+5x^2+1 содержит доминирующий член x^4, так как $x^4 \gg x^2$ при больших x [10, с. 90]. Вынесем x^4 за скобки: $\sqrt{x^4+5x^2+1}=x^2\sqrt{1+\frac{5}{x^2}+\frac{1}{x^4}}$. Применим разложение для корня. Для малых t используется известное приближение: $\sqrt{1+t}\approx 1+\frac{t}{2}-\frac{t^2}{8}, t\to 0$ [2, с. 122]. Подставим $t=\frac{5}{x^2}+\frac{1}{x^4}$. Тогда: $\sqrt{1+\frac{5}{x^2}+\frac{1}{x^4}}-1\approx\frac{1}{2}\left(\frac{5}{x^2}+\frac{1}{x^4}\right)-\frac{1}{8}\left(\frac{5}{x^2}\right)^2$. Выполнив вычисления, получим: $\frac{1}{2}\left(\frac{5}{x^2}+\frac{1}{x^4}\right)-\frac{25}{8x^4}=\frac{5}{2x^2}+\frac{1}{2x^4}-\frac{25}{8x^4}=\frac{5}{2x^2}-\frac{23}{8x^4}$. Возвращаемся к исходной функции.

Умножим на x^2, вынесенное за скобки: $f(x)=x^2\left(\frac{5}{2x^2}-\frac{23}{8x^4}\right)=\frac{5}{2}-\frac{23}{8x^2}$. Таким образом, асимптотическое приближение функции имеет вид: $f(x)\sim\frac{5}{2}-\frac{23}{8x^2}, x\to\infty.$

Этот пример показывает, что метод доминирующего члена позволяет не только определить порядок роста функции, но и получить уточнённое асимптотическое приближение с учётом поправочных членов.

Пример 3. Приближённое решение нелинейного уравнения $x=e^{-\varepsilon x}$, $0<\varepsilon<<1$, где ε – малый параметр, методом разложения по малому параметру.

Предположим, что решение допускает разложение: $x=x_0+\varepsilon x_1+\varepsilon^2x_2+\ldots$.

Подставим ряд в уравнение: $x_0+\varepsilon x_1+\varepsilon^2x_2+\cdots=e^{-\varepsilon(x_0+\varepsilon x_1+\ldots)}$.

Разложим экспоненту в ряд Тейлора. Так как $\varepsilon<<1$, используем разложение [8, с. 125–128; 7, с. 110–116]: $e^{-\varepsilon(x_0+\varepsilon x_1+\ldots)}\approx1-\varepsilon x_0+\frac{\varepsilon^2x_0^2}{2}-\varepsilon^2x_1+\ldots$.

Оставим только члены до второго порядка по ε, что достаточно для приближённого решения с хорошей точностью при малых ε. Сравним коэффициенты при одинаковых степенях ε:

при ε^0: $x_0=1$;

при ε^1: $x_1=-x_0=-1$;

при ε^2: $x_2=\frac{x_0^2}{2}=\frac{1}{2}$.

Следовательно, приближённое решение имеет вид:

$$x\approx x_0+\varepsilon x_1+\varepsilon^2x_2=1-\varepsilon+\frac{\varepsilon^2}{2}.$$

Данный пример показывает, что метод разложения по малому параметру позволяет получать аналитические приближения решений нелинейных уравнений без использования численных алгоритмов.

Пример 4. Усечение ряда для экспоненты.

Рассмотрим функцию e^x при $x\to0$ и её разложение в ряд Тейлора: $e^x=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o\left(x^3\right)$. Определим требуемую точность. Пусть нас интересует приближение с точностью до $0{,}005$ для значений $|x|<0{,}1$ [8, с. 125 -128]. Выбираем число членов ряда. Если ограничиться двумя первыми членами: $e^x\approx1+x$, то погрешность усечения оценивается порядком следующего члена:

$$R_2(x)=\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o\left(x^3\right)\sim O\left(x^2\right).$$

Оценка ошибки. Для $|x|<0{,}1$ получаем: $|R_2(x)|\leq\frac{(0{,}1)^2}{2}=0{,}005.$

Таким образом, усечение ряда до второго члена обеспечивает достаточную точность с минимальными вычислениями. Метод усечения тесно связан с рассмотренными выше методами: эквивалентными преобразованиями, выделением доминирующего члена и разложением по малому параметру [1, с. 85 -88]. В отличие от них, метод усечения не создаёт новое приближение, а управляет уже полученным рядом, определяя, до какого члена его можно оставить с допустимой ошибкой.

Пример 5. Асимптотическая оценка интеграла $I(a)=\int_0^1 \frac{dx}{1+ax^2}, a\to\infty.$

Для больших a подынтегральная функция: $\frac{1}{1+ax^2}$ быстро убывает при увеличении x. Основная часть интеграла сосредоточена при малых x, так как при $x\sim 1$ имеем $ax^2 \gg 1$, и интеграл там пренебрежимо мал [6, с. 132].

Применим приближение подынтегральной функции для $x \ll 1$:

$$1+ax^2 \approx ax^2, \frac{1}{1+ax^2} \approx \frac{1}{ax^2}.$$

Сделаем замену переменной $t=\sqrt{a}x$. Тогда: $dx=\frac{dt}{\sqrt{a}}, x\in\left[0,1/\sqrt{a}\right] \Rightarrow t\in[0,1].$

Интеграл принимает вид: $I(a)\approx\int_0^{1/\sqrt{a}} \frac{dx}{1+ax^2} \approx \frac{1}{\sqrt{a}}\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2}.$ Известно, что: $\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \operatorname{arctg}(1)-\operatorname{arctg}(0)=\frac{\pi}{4}.$ Следовательно: $I(a)\sim\frac{\pi}{4\sqrt{a}}, a\to\infty.$

Освоение данного метода дополняет набор инструментов элементарного асимптотического анализа, позволяет эффективно работать с интегралами и суммами в предельных случаях, получать аналитические приближения и управлять точностью расчетов.

Асимптотическая оценка интегралов особенно полезна в прикладной математике, физике, инженерии, статистике и др., когда прямое вычисление интеграла затруднительно или невозможно [7, с. 92 -96].

Пример 6. Асимптотическая оценка затухающих колебаний.

Рассмотрим задачу из механики о свободных колебаниях системы с малым вязким сопротивлением. Движение описывается дифференциальным уравнением $m\ddot{x}+\varepsilon\dot{x}+kx=0, \quad 0<\varepsilon\ll 1,$ где m – масса системы, k – коэффициент жёсткости, ε – коэффициент вязкого сопротивления.

Точное решение содержит громоздкие выражения через корни характеристического уравнения. Однако при малом параметре ε удобно применить разложение по малому параметру.

Представим решение в виде колебательной функции с медленно меняющейся амплитудой: $x(t)=A(t)\cos(\omega t)+B(t)\sin(\omega t), \quad \omega=\sqrt{\frac{k}{m}}.$

Функции $A(t), B(t)$ изменяются существенно медленнее, чем тригонометрические множители. Подстановка данного представления в исходное уравнение и отбрасывание членов высших порядков малости по ε

приводит к системе уравнений для амплитуд, из которой следует их экспоненциальное убывание: $A(t), B(t) \sim e^{-\frac{\varepsilon}{2m}t}$.

В результате получается асимптотическое приближение решения в виде $x(t) \approx Ce^{-\frac{\varepsilon}{2m}t}\cos(\omega t+\varphi).$, где константы C и φ определяются начальными условиями.

Таким образом, асимптотический метод позволяет сразу установить физически значимый результат: амплитуда убывает по экспоненциальному закону, а частота практически совпадает с собственной частотой системы. Подобный подход соответствует методам разложения по малому параметру и теории сингулярных возмущений, широко применяемым при анализе дифференциальных уравнений механики и физики [3, с. 35–48; 7, с. 110–118].

Пример 7. Асимптотическая оценка хвоста нормального распределения.

В статистике часто требуется оценить вероятность больших отклонений:

$$P(X>a)=\int_a^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx,\quad a\to\infty.$$

Точное вычисление интеграла невозможно в элементарных функциях. Выделим основной вклад. При больших a подынтегральная функция быстро убывает, поэтому используем замену $x=a+t$: $P(X>a)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{a^2}{2}}\int_0^{\infty}e^{-\frac{at-t^2}{2}}dt.$

Поскольку основной вклад дают малые t , пренебрежём $\frac{t^2}{2}$. Тогда $P(X>a)\approx\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{a^2}{2}}\int_0^{\infty}e^{-at}dt$. Вычисляя элементарный интеграл, получим асимптотическое приближение $P(X>a)\sim\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{e^{-\frac{a^2}{2}}}{a}.$

Простое асимптотическое приближение $P(X>a)\sim\frac{1}{a}e^{-\frac{a^2}{2}}$, широко используется при оценке вероятностей редких событий и анализе статистических критериев [7, с. 92–96; 8, с. 476–482].

Данный пример демонстрирует, что элементарные асимптотические приёмы эффективны не только в анализе функций, но и в задачах вероятности и обработки данных.

Рассмотренные в работе примеры наглядно показывают характерные особенности и возможности элементарных асимптотических методов. Использование метода эквивалентных преобразований позволило заменить сложные выражения более простыми асимптотическими эквивалентами и тем самым существенно упростить вычисление пределов. Применение метода доминирующего члена дало возможность быстро выделить главный вклад в поведение функций при больших значениях аргумента и получить удобные приближённые формулы, пригодные для практических расчётов.

Метод разложения по малому параметру показал свою эффективность при анализе уравнений и выражений, содержащих малую величину: представление решения в виде ряда позволило получить последовательные приближения и проследить влияние параметра на структуру решения. Прочие методы, такие как усечение рядов и асимптотическая оценка интегралов, дополняют данный инструментарий, обеспечивая контроль погрешности и возможность получения простых аналитических приближений в задачах, где точное вычисление затруднено. Важно отметить, что все рассмотренные методы объединяет возможность аналитического контроля точности приближений за счёт оценки порядка малости отброшенных членов. Это делает элементарные асимптотические методы надёжным и наглядным инструментом исследования, особенно в задачах, где численные методы оказываются избыточными либо не позволяют получить качественного понимания структуры решения и поведения рассматриваемых математических моделей.

Выводы и перспективы дальнейших исследований. В статье рассмотрены элементарные асимптотические методы как эффективный инструмент приближённого анализа математических выражений и моделей. Проведённый анализ и рассмотренные примеры показывают, что использование эквивалентных преобразований, выделение доминирующего члена, разложение по малому параметру и усечение рядов позволяют получать аналитически интерпретируемые приближения и выявлять структуру решений в предельных режимах. Элементарные асимптотические методы обладают универсальным характером и применимы в широком круге прикладных задач математики, физики, инженерии и др. Их использование обеспечивает аналитическую интерпретацию результатов и формирует базу для применения более сложных асимптотических и численных методов [3, с. 310- 320; 7, с. 1-6].

Перспективы дальнейших исследований будут направлены на расширение круга рассматриваемых асимптотических методов и их применение к более сложным прикладным задачам. В частности, планируется изучение методов Лапласа и стационарной фазы, ВКБ-подхода, а также элементов теории сингулярных возмущений, что позволит анализировать интегралы, дифференциальные уравнения и колебательные процессы повышенной сложности. Развитие данных направлений создаёт основу для построения более точных аналитических приближений и углублённого исследования моделей, возникающих в физике, инженерии, статистике и др.

Литература

1. Бахвалов, Н. С. Численные методы : учебное пособие / Н. С. Бахвалов, Н. П. Жидков, Г. М. Кобельков. – 8-е изд., испр. – Москва : Бином, 2020. – 632 с.

2. Бронштейн, И. Н. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов : учебное пособие / И. Н. Бронштейн, К. А. Семендяев. – 13-е изд., перераб. и доп. – Москва : Наука, 2021. – 1120 с.

3. Васильева, А. Б. Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений : учебное пособие / А. Б. Васильева, В. Ф. Бутузов. – Москва : Физматлит, 2018. – 432 с.

4. Корн, Г. Справочник по математике (для научных работников и инженеров) / Г. Корн, Т. Корн. – 4-е изд. – Москва : Либроком, 2020. – 832 с.

5. Кузнецов, А. П. Основы прикладного математического анализа : учебное пособие / А. П. Кузнецов, В. А. Садовничий. – Москва : Изд-во МГУ, 2021. – 496 с.

6. Мищенко, Е. Ф. Курс аналитической геометрии и математического анализа : учебное пособие / Е. Ф. Мищенко, А. Т. Фоменко. – Москва : Наука, 2019. – 704 с.

7. Ольвер, Ф. У. Дж. Введение в асимптотический анализ и специальные функции / Ф. У. Дж. Ольвер ; пер. с англ. – Москва ; Ижевск : НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2022. – 584 с.

8. Фихтенгольц, Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления : в 3 т. / Г. М. Фихтенгольц. – 9-е изд., перераб. – Москва : Наука, 2020. – Т. 1. – 528 с.

ON THE APPLICATION OF SOME ELEMENTARY ASYMPTOTIC METHODS

***Senchenko Elizaveta Mikhaylovna*[1]*, Temnikova Svetlana Vladimirovna*[2]**

[1,2]*Lugansk State Pedagogical University*

[1]*elizaveta.senchenko@mail.ru*, [2]*temnikovasvetlana@rambler.ru*

Abstract. The paper examines the theoretical foundations of asymptotic analysis. Particular attention is paid to practical techniques, including equivalent transformations, identification of the dominant term, expansion with respect to a small parameter, and truncation of series. The presented examples demonstrate the derivation of analytical approximations with controlled accuracy, which are effectively applied to problems in applied mathematics, physics, and engineering.

Keywords: asymptotic analysis, approximation methods, dominant term, small parameter, asymptotic expansion.

УДК 621.833

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ СИНТЕЗА ГЕОМЕТРИИ ИСХОДНОГО КОНТУРА ЗУБЧАТЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ПЕРЕДАЧ ПО ЛИНИИ ЗАЦЕПЛЕНИЯ И ЛИНИИ МГНОВЕННОГО КОНТАКТА

***Чалая Елена Юрьевна*[1]*, Байдалинов Данил Дмитриевич*[2]**

[1,2]*Луганский государственный университет имени В. Даля, г. Луганск*

[1]*elena_chalaya@mail.ru*

Аннотация. Статья посвящена теоретическому исследованию элементов математической модели зубчатой цилиндрической передачи смешанного зацепления с арочным зубом, в рамках которого построены дифференциальные уравнения для синтеза геометрии по заданной линии зацепления и по заданной мгновенной контактной линии.

Ключевые слова: математическая модель, арочная зубчатая передача, смешанное зацепление, дифференциальное уравнение, уравнения зацепления, исходный контур, линия зацепления, мгновенная контактная линия.

Проектирование современных технических систем, особенно зубчатых передач с разными типами зацепления, требует обязательного этапа математического моделирования [1]. Это дает возможность анализировать поведение зубчатого механизма на начальных этапах проектирования, а также количественно прогнозировать работоспособность целого устройства.

Обобщенная математическая модель в контексте конкретной задачи должна устанавливать взаимосвязи геометрических параметров в общем виде со следующими структурными элементами:

– кинематическими параметрами (скоростные характеристики);

– физическими характеристиками (нагрузка, деформации);

– технологическими ограничениями (требования к режимам резания, материалам, инструментам, оборудованию).

Для зубчатых передач смешанного зацепления с арочными зубьями обобщённая математическая модель включает [2,3]:

1) уравнения поверхностей зубьев;

2) аналитические зависимости для расчёта критериев работоспособности;

3) систему дифференциальных уравнений зацепления с граничными условиями.

Традиционный синтез [3] предполагает решение (нахождение функций, определяющих исходный контур) дифференциального уравнения, полученного в соответствии с выбранным критерием синтеза.

В данной статье будут рассмотрены некоторые элементы обобщенной математической модели зубчатой цилиндрической передачи с арочной линией зуба, описываемой известными функциями $y_0(\mu)$, $z_0(\mu)$, и несимметричным исходным контуром (ИК), определяющимся функциями f_1, f_2, Φ_1, Φ_2. При этом будем считать, что для головки зуба $f_2 = f_2(f_1)$, а также для его ножки $\Phi_2 = \Phi_2(\Phi_1)$, тогда, очевидно, получаем:

$$f_1' = 1,\ f_1'' = 0,\ \Phi_1' = 1,\ \Phi_1'' = 0. \tag{1}$$

Уравнения поверхностей зацепления арочных зубчатых колес в неподвижной системе координат XYZ принимают вид [1, 3]:

$$\begin{cases} x = f_1 \\ y = \mp\Omega_{1f}\cos\beta \\ z = z_0 \mp f_2\sin\beta \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \Phi_1 \\ y = \mp\Omega_{1\Phi}\cos\beta \\ z = z_0 \mp \Phi_2\sin\beta \end{cases} \tag{2}$$

В равенствах (2) и ниже будут использованы обозначения: $\Omega_{1f} = f_1 f_1' \big/ f_2'$, $\Omega_{1\Phi} = \Phi_1\Phi_1' \big/ \Phi_2'$, β – угол наклона инструмента.

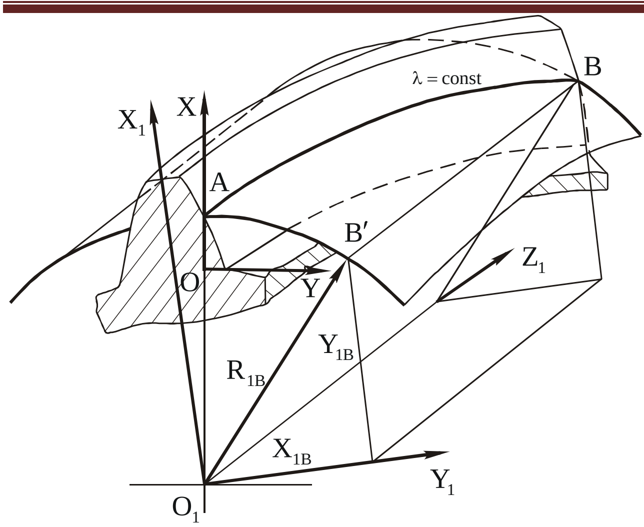


Рис. 1 – Определение граничных точек поля зацепления

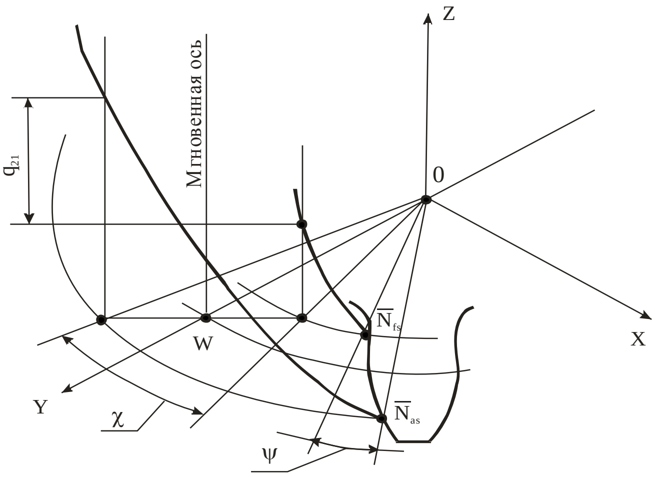


Рис. 2 – Взаимное расположение контактных линий

1. Получим дифференциальные уравнения для синтеза геометрии ИК по заданной линии зацепления (рис. 1, рис. 2).

Линия зацепления представляет собой линию пересечения поверхности зацепления с характерными плоскостями (рис. 1). Рассмотрев линии зацепления, полученные в сечениях $z = const$, $\lambda = const$, $\mu = const$, и используя уравнения поверхности зацепления арочных зубьев (2), получим дифференциальные уравнения для синтеза передач по проекции линии зацепления на торцовую плоскость зацепляющихся колес (плоскость XOY неподвижной системы координат на рис. 1). Для этого зададим значение $z = const$, тогда при известном значении z_0 из последнего равенства (2) можно определить значение $\mu_T = \mu(z, f_2)$. Из второго равенства (2) получаем дифференциальные уравнения (для головки и ножки соответственно):

$$f_2{}' = \mp \frac{f_1 f_1'}{y} \cos\beta, \qquad \Phi_2{}' = \mp \frac{\Phi_1 \Phi_1'}{y} \cos\beta. \tag{3}$$

Учитывая условия (1), имеем:

$$f_2{}' = \mp \frac{f_1}{y} \cos\beta, \qquad \Phi_2{}' = \mp \frac{\Phi_1}{y} \cos\beta. \tag{4}$$

Решая уравнения (4), можно определить значения неизвестных функций $f_2 = f_2(f_1)$ для головки и $\Phi_2 = \Phi_2(\Phi_1)$ – для ножки, которые обеспечивают при нарезании зубьев линию зацепления в торцовом сечении в виде (2).

В равенствах (4) угол β зависит от значений параметра μ. Параметр μ определяется из последнего равенства уравнения (2). В нормальном сечении, т.е. $\mu = const$, дифференциальные уравнения для синтеза будут иметь вид (4), но в этом случае β – постоянная величина.

При рассмотрении пересечения поверхности зацепления плоскостью $\lambda = const$ можно задать функции, определяющие геометрию исходного контура. Тогда из уравнений (2) будет получено значение y_n, которое задает продольную форму зубьев в плоскости $\lambda = const$.

2. Получим дифференциальные уравнения для синтеза геометрии ИК по заданной мгновенной контактной линии (рис. 2).

Наиболее рационально синтезировать исходный контур арочных зубьев по проекции мгновенной контактной линии на плоскость XOZ неподвижной системы координат (рис. 2). Для их получения используем уравнения поверхности зацепления (2) и уравнения зацепления [2,3]:

$$
\begin{gathered}
F_i = f_2'/n_f\left(\pm\Omega_{2f}\cos\beta \pm y_0 \mp R_i\varphi_i\right) = 0,\\
F_i = \Phi_2'/n_\Phi\left(\pm\Omega_{2\Phi}\cos\beta \pm y_0 \mp R_i\varphi_i\right) = 0,\\
F_i = f_2'/n_f\left(\pm y_0 \mp \Omega_{2f}\cos\beta \pm \frac{\pi}{2} \mp R_i\varphi_i\right) = 0,\\
F_i = \Phi_2'/n_\Phi\left(\pm y_0 \mp \Omega_{2\Phi}\cos\beta \pm \frac{\pi}{2} \mp R_i\varphi_i\right) = 0.
\end{gathered}
\tag{5}
$$

Если выполняются требования $f_2', \Phi_2' \neq 0$ и $\varphi_i = const$, равенства (5) справедливы.

При выпукло-вогнутом зацеплении берутся уравнения (2) и первые равенства (для индекса f и Φ соответственно) в уравнениях зацепления (5).

Рассматривая эти уравнения совместно, получим дифференциальные уравнения по заданной контактной линии:

$$
f_2' = \frac{f_1\cos\beta}{R_i\varphi_i - f_2\cos\beta - y_0},\quad \Phi_2' = \frac{\Phi_1\cos\beta}{R_i\varphi_i - \Phi_2\cos\beta - y_0}. \tag{6}
$$

При вогнуто-выпуклом зацеплении берутся уравнения (2) и вторые равенства в уравнениях зацепления (5). Таким образом, искомые дифференциальные уравнения получены и имеют вид:

$$
f_2' = \frac{f_1\cos\beta}{y_0 - f_2\cos\beta + \frac{\pi}{2} - R_i\varphi_i},\quad \Phi_2' = \frac{\Phi_1\cos\beta}{y_0 - \Phi_2\cos\beta + \frac{\pi}{2} - R_i\varphi_i}. \tag{7}
$$

Геометрические параметры y_0 и β можно найти из уравнений (2), задавая значение:

$$
z = z_0 \mp f_2\sin\beta = \psi(f_1),
$$

где $\psi(f_1)$ –функция, определяющая проекцию мгновенной контактной линии на плоскость XOZ (рис. 2).

Кроме того, равенства (2) позволяют найти параметр μ, тогда правые части уравнений (6) и (7) зависят от функций f_1, f_2, а сами дифференциальные уравнения (6) и (7) решаются известными приближенными методами [2,3]. Очевидно, что решения этих уравнений зависят от значения угла поворота φ_i.

Полученные уравнения могут альтернативно использоваться при синтезе новой геометрии арочной передачи, поскольку при традиционном подходе [4] приходится иметь дело с громоздкими дифференциальными уравнениями, решение которых известными средствами по объективным причинам затруднительно.

Литература

1. Чалая, Е. Ю. Особенности математического моделирования сложных технических систем / А. В. Краснянская, Е. Ю. Чалая // Ма. IX междунар. научно-практич. интернет-конф. «Современные тенденции развития математики и ее прикладные аспекты – 2020», 29 мая 2020 г. – Донецк, 2020. – С. 45–48.

2. Чалая, Е. Ю. Моделирование процесса нарезания цилиндрических зубчатых передач с круговой продольной линией зуба / Е. Ю. Чалая // Международный сборник научных трудов Дон. НТУ. Серия: Прогрессивные технологии и системы машиностроения. – Донецк, 2017. – Вып. № 2(57). – С. 65–74.

3. Чалая, Е. Ю. Дифференциальные уравнения для синтеза геометрии арочных зубчатых передач смешанного зацепления/ Е. Ю. Чалая, В. П. Шишов, П. Н. Ткач, Т. Е. Журавлева // Вестник НТУ «ХПИ». Серия: Машиноведение и САПР. – Харьков, 2013. – №41. – С. 181–189.

4. Чалая, Е. Ю. Решение нелинейных дифференциальных уравнений специального вида разложением в степенной ряд / Е. Ю. Чалая // Вестник ЛНУ им. В. Даля. – Луганск, 2020. – №1(31). – С. 147–152.

DIFFERENTIAL EQUATIONS FOR SYNTHESIS OF GEOMETRY OF THE SOURCE CONTOUR OF TOOTHED CYLINDRICAL GEARINGS ON THE LINE OF COUPLING AND THE LINE OF INSTANT CONTACT

Chalaya Elena Yurievna[1], Baydalinov Danil Dmitrievich[2]
[1,2]Lugansk Vladimir Dahl State University, Lugansk
[1]elena_chalaya@mail.ru

Annotation. The article obtained differential equations, which allow to carry out the synthesis of the geometry of the initial contour of the arched teeth of mixed gearing according to the given engagement line and according to the given instant contact line.

Key words: mathematical model, arched gearing, mixed gearing, differential equation, equations of engagement, initial contour, engagement line, instant contact line.

СЕКЦИЯ 2
ЦИФРОВЫЕ ТЕХНОЛОГИИ В ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИЧЕСКИМ ДИСЦИПЛИНАМ

УДК [373.5.091.33:514.113-029.44:004.4]:373.5.015.31:159.955

РАЗВИТИЕ ПРОСТРАНСТВЕННОГО МЫШЛЕНИЯ УЧАЩИХСЯ ПРИ ИЗУЧЕНИИ СТЕРЕОМЕТРИИ С ПРИМЕНЕНИЕМ «1С: МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КОНСТРУКТОР»

***Давыскиба Оксана Викторовна*[1], *Потапова Алина Александровна*[2]**

[1,2] *ФГБОУ ВО «ЛГПУ», Луганск*

[1] *davidovao@list.ru*, [2] *alina.potapova169@gmail.com*

Аннотация. В статье рассматриваются теоретические и методические аспекты развития пространственного мышления учащихся при изучении стереометрии. Обосновывается необходимость использования цифровых образовательных средств в школьном курсе геометрии. Раскрываются возможности применения программного продукта «1С: Математический конструктор» для визуализации и моделирования пространственных объектов. Показано, что использование интерактивных моделей способствует более осознанному усвоению стереометрического материала и повышению учебной мотивации учащихся.

Ключевые слова: пространственное мышление, стереометрия, цифровые образовательные технологии, визуализация, 1С: Математический конструктор, обучение геометрии.

Современная система образования развивается в условиях активного внедрения цифровых технологий, что определяется требованиями федеральных государственных образовательных стандартов, а также социальным запросом на формирование у обучающихся универсальных учебных действий и ключевых компетенций. В данной ситуации особую значимость приобретает развитие различных видов мышления школьников, в том числе пространственного, выступающего необходимой предпосылкой успешного освоения дисциплин естественнонаучного и технического профилей [2].

Изучение школьного курса геометрии, раздела «Стереометрия», в частности, традиционно сопровождается существенными трудностями для обучающихся. Это обусловлено необходимостью оперирования трёхмерными образами, установления пространственных связей между объектами, а также выполнения мысленных преобразований геометрических фигур. Ограничение обучения плоскими изображениями и статичными чертежами зачастую не обеспечивает полноценного формирования пространственных представлений, что приводит к поверхностному усвоению содержания учебного материала и снижению познавательной мотивации учащихся.

В условиях цифровизации образовательного процесса возрастает потребность в поиске эффективных средств обучения, обеспечивающих наглядность, интерактивность и активное включение обучающихся в учебную деятельность [4]. Одним из таких средств является программный продукт «1С: Математический конструктор», предоставляющий возможности для моделирования геометрических объектов, изменения их параметров и исследования свойств в динамическом режиме [1]. Использование данного инструмента позволяет расширить дидактические возможности обучения стереометрии и создать условия для целенаправленного развития пространственного мышления учащихся [5].

Целью статьи является теоретическое и методическое обоснование применения «1С: Математический конструктор» в процессе обучения стереометрии как средства развития пространственного мышления школьников.

Пространственное мышление относится к числу ключевых форм образного мышления и характеризуется способностью человека воспринимать пространственные отношения, анализировать и преобразовывать пространственные образы, а также использовать их при решении учебных и практических задач. В психолого-педагогических исследованиях оно рассматривается как сложное многоуровневое образование, включающее восприятие пространственных связей, формирование образов, их мысленное преобразование и осознанное применение в деятельности.

Термин «пространственное мышление» определяется психологами и методистами по-разному, но все они сводят пространственное мышление к мышлению образами.

В своем труде «О структуре пространственного мышления при решении математических задач» И. Я. Каплунович считает пространственное мышление важной частью интеллекта, так как оно служит средством познания самых разнообразных предметов и явлений действительности, а также необходимым условием успешного осуществления трудовой деятельности, развития трудовых умений и навыков. И. Я. Каплунович определяет пространственное мышление как процесс оперирования пространственными образами при решении задач на основе имеющихся представлений [3, с. 75].

В работе [6, с. 41] В. С. Столетнев определяет пространственное мышление через его функции, основными из которых являются мыслительные операции над образами по преобразованию формы, величины и пространственных соотношений между элементами объектов геометрического пространства.

М. Н. Шардаков дает следующее определение мышлению: «…мышление – это опосредованное и обобщенное познание предметов и явлений реальной действительности в их общих и существенных признаках и свойствах, в их связях и отношениях, а также на основе полученных обобщенных знаний – познание и творческое построение новых единичных предметов и явлений действительности» [7, с. 12].

В работе [8, с. 11] И. С. Якиманская пространственное мышление рассматривает как особый вид образного мышления, имеющий самостоятельное значение в структуре интеллектуального развития личности. Автор подчёркивает, что «Пространственное мышление как разновидность образного мышления играет важную роль не только в овладении знаниями основ наук, но и во многих областях трудовой деятельности». Отмечая дискуссионность данного понятия в психологии, она указывает: «Термин «пространственное мышление» не является в психологии общепринятым» [8, с. 14]. В то же время обосновывает правомерность его выделения в самостоятельную категорию: «В конкретно-психологическом плане, с нашей точки зрения, правомерно выделять пространственное мышление в особый вид и обозначать его соответствующим термином» [8, с. 18].

Определяя сущность данного феномена, И. С. Якиманская пишет: «Пространственное мышление в своей наиболее развитой форме оперирует образами, содержанием которых является воспроизведение и преобразование пространственных свойств и отношений объектов: их формы, величины, взаимного положения частей» [8, с. 19]. Для более широкого теоретического контекста автор также отмечает: «Будучи обобщенным и опосредствованным отражением действительности, мышление направлено на анализ качественно различных сторон этой действительности» [8, с. 16].

Таким образом, пространственное мышление следует рассматривать как важнейшую составляющую интеллектуального развития личности, требующую целенаправленного формирования в образовательном процессе, особенно при изучении школьного курса геометрии.

Следует также учитывать, что формирование пространственных представлений у школьников характеризуется выраженной возрастной обусловленностью. В подростковом и раннем юношеском возрасте активно развиваются абстрактное, логическое и теоретическое мышление, что создаёт предпосылки для усвоения сложных геометрических понятий. Однако наличие возрастных возможностей само по себе не гарантирует полноценного развития пространственного мышления.

Педагогическая практика свидетельствует о том, что значительная часть учащихся испытывает затруднения при переходе от плоских изображений к объёмным моделям, при определении взаимного расположения прямых и плоскостей, а также при построении сечений многогранников. Данные трудности во многом определяются недостаточным опытом работы с пространственными объектами и преобладанием репродуктивных методов обучения.

Эффективное формирование пространственных представлений предполагает систематическую и целенаправленную работу, включающую использование моделей, чертежей, схем и интерактивных средств обучения [2]. Существенным условием является организация учебной деятельности, ориентированной на активное преобразование пространственных образов, а не только на их пассивное восприятие. В этом контексте цифровые образовательные технологии обладают значительным дидактическим потенциалом.

Одним из примеров современной цифровой образовательной среды, которая ориентирована на создание, исследование и визуализацию математических объектов, является программный продукт «1С: Математический конструктор» [1]. Его функциональные возможности позволяют эффективно применять данный инструмент в обучении стереометрии, где ключевое значение имеет работа с трёхмерными моделями и пространственными представлениями.

Ключевые возможности программной среды для развития пространственного мышления:

– построение пространственных фигур с заданными метрическими характеристиками и их динамическое изменение;

– визуализация сечений многогранников различными плоскостями в режиме реального времени;

– вращение трехмерных объектов для рассмотрения с различных точек зрения;

– пошаговое конструирование сложных геометрических конфигураций;

– автоматическое вычисление геометрических величин с сохранением связей при деформациях;

– создание анимаций, демонстрирующих геометрические преобразования;

– возможность самостоятельного экспериментирования с математическими моделями.

Среди преимуществ конструктора следует отметить возможность построения различных пространственных объектов: многогранников, тел вращения, их элементов и сочетаний. Учащиеся получают возможность не только наблюдать готовые модели, но и самостоятельно конструировать их, задавая параметры, изменяя форму, размеры и взаимное расположение элементов. Это способствует формированию целостных пространственных образов и осмысленному усвоению геометрических понятий.

Существенной дидактической особенностью конструктора является динамическая визуализация. Любое изменение параметров объекта мгновенно отражается на его модели, что позволяет учащимся выявлять зависимости между элементами фигуры и формулировать собственные выводы. Особенно эффективно это проявляется при изучении сечений многогранников, взаимного расположения прямых и плоскостей, а также при анализе свойств пространственных тел.

Кроме того, «1С: Математический конструктор» создаёт условия для организации исследовательской деятельности учащихся. Работа с программой позволяет формулировать и выдвигать гипотезы, экспериментально их проверить и проанализировать полученные результаты. Такой подход способствует развитию не только пространственного мышления, но и познавательной самостоятельности, логического мышления и учебной мотивации [4]. Использование в учебном процессе «1С: Математический конструктор» ориентировано на поэтапное развитие пространственного мышления учащихся и органичную интеграцию цифрового инструмента в структуру урока стереометрии [2]. При этом важно подчеркнуть, что конструктор не заменяет традиционные методы обучения, а дополняет и усиливает их методический потенциал.

Например, на этапе изучения нового материала конструктор применяется как средство демонстрации. Учитель использует динамические модели пространственных объектов, сопровождая их пояснениями относительно свойств фигур и взаимного расположения элементов. Особое внимание уделяется тем аспектам, которые сложно представить с помощью статических чертежей: вращению фигур, положению плоскостей в пространстве, пересечению тел. Это способствует формированию первичных пространственных представлений и повышению осознанности восприятия учебного материала.

На этапе закрепления знаний эффективными являются задания, предполагающие самостоятельное или частично самостоятельное построение моделей. Учащимся предлагается воспроизвести изучаемый объект, дополнить модель недостающими элементами, изменить параметры и проанализировать полученные результаты. Подобные задания способствуют активному оперированию пространственными образами и переходу от наглядного восприятия к осмысленному анализу.

Особое место в методике использования конструктора занимают задания на построение сечений многогранников. Программная среда позволяет пошагово проследить процесс построения сечения, установить зависимость его формы от положения секущей плоскости и выявить общие закономерности. Это значительно снижает уровень трудностей, связанных с данным типом задач, и повышает качество их понимания.

Кроме того, конструктор целесообразно применять в проектной и внеурочной деятельности. Например, выполнение мини-проектов, связанных с моделированием пространственных объектов и созданием собственных задач, способствует развитию творческих способностей учащихся, формированию навыков самостоятельной работы и устойчивого интереса к изучению стереометрии.

Таким образом, применение «1С: Математический конструктор» в обучении стереометрии расширяет традиционные средства наглядности, обеспечивает активное взаимодействие учащихся с учебным материалом и способствует более глубокому пониманию пространственных закономерностей.

Учитывая вышесказанное, следует отметить, что развитие пространственного мышления является одной из ключевых задач обучения стереометрии в общеобразовательной школе. Анализ психолого-педагогических исследований свидетельствует о том, что без целенаправленного использования наглядных и интерактивных средств данный процесс осуществляется недостаточно эффективно. В свою очередь использование «1С: Математический конструктор» в обучении стереометрии позволяет создать условия для активного формирования пространственных представлений, способствует осмысленному усвоению геометрических понятий и повышает учебную мотивацию учащихся. Возможность использования цифровых моделей позволяет преодолеть разрыв между плоскими изображениями и трёхмерными объектами, обеспечивая более глубокое понимание учебного материала.

Литература

1. 1С: Математический конструктор: официальный сайт образовательного продукта [сайт]. – URL: https://obr.1c.ru/mathkit/?utm_source=chatgpt.com_(дата обращения: 25.12.2025).

2. Гаджимурадов, М. А. Формирование и развитие пространственного мышления на уроках геометрии с помощью информационных технологий / М. А. Гаджимурадов, Б. М. Гаджимурадов, З. Д. Гаджиева // Известия ДГПУ. Психолого-педагогические науки. – 2019. – Т. 13. – № 3. – С. 14–17.

3. Каплунович, И. Я. О структуре пространственного мышления при решении математических задач / И. Я. Каплунович // Вопросы психологии: издается с 1955 года / Ред. А. А. Смирнов, О. А. Конопкин. – 1978. – №3 май-июнь 1978. – С. 75–84.

4. Маслова, О. А. Развитие пространственного мышления учащихся 10–го класса с использованием интерактивных технологий / О. А. Маслов, Е. В. Морозова // Научно-методический электронный журнал «Концепт». – 2017. – Т. 39. – С. 1266–1270.

5. Пинигина, С. В. Педагогические эффекты применения среды «1С: Математический конструктор» на уроках математики / С. В. Пинигина // Информатика и образование. – 2016. – № 7. – С. 64–67.

6. Столетнев, В. С. Оперирование пространственными образами при решении задач / В. С. Столетнев // Новые исследования психологии. – 1979. – № 1. – С. 41–45.

7. Шардаков, М. Н. Очерки психологии школьника / М. Н. Шардаков. – М.: Учпедгиз, 1963. – 257 с.

8. Якиманская, И. С. Развитие пространственного мышления школьников. – Науч.-исслед. ин-т общей и пед. психологии Акад. пед. наук СССР / И. С. Якиманская. – М.: Педагогика, 1980. – 240 с.

DEVELOPMENT OF STUDENTS' SPATIAL THINKING WHEN STUDYING STEREOMETRY USING 1C: MATHEMATICAL CONSTRUCTOR

***Davyskiba Oksana Viktorovna*[1]*, Potapova Alina Alexandrovn* [2]**

[1,2] *Lugansk State Pedagogical University, Lugansk*

[1] *davidovao@list.ru,* [2]*alina.potapova169@gmail.com*

Abstract. The article discusses the theoretical and methodological aspects of developing students' spatial thinking in the study of stereometry. The necessity of using digital educational tools in the school geometry course is substantiated. The possibilities of using the software product «1C: Mathematical Designer» for visualization and modeling of spatial objects are revealed. It is shown that the use of interactive models contributes to a more conscious assimilation of stereometric material and increases students' academic motivation.

Keywords: spatial thinking, stereometry, digital educational technologies, visualization, 1C: Mathematical Designer, geometry education.

УДК 378.091.64:519.876.5-028.27

РАЗРАБОТКА ЭЛЕКТРОННОГО УЧЕБНОГО ПОСОБИЯ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ МОДЕЛИРОВАНИЮ

***Долженко Елизавета Сергеевна*[1]*, Темникова Светлана Владимировна*[2]**
[1,2]*Луганский государственный педагогический университет*
[1]*eliza.dolzhenko@mail.ru*, [2]*temnikovasvetlana@rambler.ru*

Аннотация. Статья посвящена теоретическим и дидактическим основам разработки электронного учебного пособия (ЭУП) по дисциплине «Математическое моделирование» для студентов бакалавриата направления подготовки 01.03.01 Математика. Описана структура ЭУП. Проанализированы требования к представлению мультимедийного и интерактивного контента, обеспечивающего визуализацию математических зависимостей, организацию самостоятельной познавательной деятельности студентов и формирование профессиональных компетенций.

Ключевые слова: электронное учебное пособие, математическое моделирование, электронная образовательная среда, интерактивное обучение.

В условиях цифровизации современного мира в сфере высшего образования все более актуальной становится задача внедрения цифровых технологий и электронных образовательных ресурсов. В связи с этим разработка электронных учебных пособий приобретает ключевое значение, поскольку способствует повышению качества образовательного процесса и формированию профессиональных умений студентов. Данная проблема особенно заметна в математических дисциплинах, где усвоение информации требует абстрактного мышления, в то время как развитие практических навыков предполагает систематического и поэтапного применения знаний.

Одной из дисциплин в системе подготовки студентов бакалавриата направления 01.03.01 Математика является «Математическое моделирование». Изучение данной дисциплины требует от студентов не только понимания абстрактных математических конструкций, но и умение применять их на практике, интерпретировать результаты и определять корректность созданных моделей. В традиционном обучении не редко такие моменты трудны в понимании из-за низкой наглядности и ограничениях в возможностях самостоятельного обучения. Использование ЭУП позволяет преодолеть указанные трудности за счет реализации принципов интерактивности, индивидуальности обучения и визуализации. Цифровой формат обеспечивает динамическое представление математических зависимостей, возможность изменения параметров моделей, выполнение вычислительных экспериментов и получение быстрой обратной связи, что придает обучению более осмысленный и практико-ориентированный характер.

Дидактические основы разработки ЭУП опираются на идеи программированного обучения, получившие свое развитие еще в середине 20 века. Идея применения компьютера в учебном процессе нашла свое выражение в 40 - х годах в рамках концепции, направленной на организацию самостоятельного обучения. Теоретическую основу программированного обучения составили исследования Б. Ф. Скиннера, разработавшего линейную модель усвоения знаний на основе последовательного подкрепления, и С. Пресси, разработавшего разветвленную модель обучения, ориентированную на учет индивидуальных особенностей и образовательных потребностей обучающихся. Эти идеи стали фундаментом для создания первых автоматизированных систем, ориентированных на управление учебной деятельностью и обеспечение обратной связи. Не смотря на отсутствие в тот период персональных компьютеров в современном понимании, уже тогда разрабатывались специализированные программные комплексы, ориентированные на создание и сопровождение прикладных обучающих программ – автоматизированных учебных курсов.

Современное электронное учебное пособие является логическим продолжением развития этих идей, однако, это реализовано с применением новых технологий, что значительно повышает его эффективность. Оно выступает не только носителем информации, а и средством организации активной учебно-исследовательской деятельности студентов [1; 3; 4].

Таким образом, разработка электронного учебного пособия по дисциплине «Математическое моделирование» опирается на следующие дидактические нормы: необходимость в повышении степени визуализации и интерактивности в процессе изложения учебного материала, обеспечении развития навыков поэтапного создания и анализа математических моделей, организации самостоятельной познавательной деятельности студентов, а также акцентирование на применении математических знаний в практических задачах.

ЭУП в данном контексте является эффективным инструментом формирования профессиональных компетенций будущих математиков, развития аналитического мышления, а также адаптации образовательного процесса к условиям цифровой образовательной среды.

При разработке ЭУП по математическим дисциплинам важно учитывать, как педагогические, так и педагогико-эргономические требования к его структуре. Электронные образовательные инструменты по математическому моделированию должны обеспечивать наглядность, способствовать активизации самостоятельной учебной деятельности обучающихся, сознательность и творческую активность, а также опираться на принципы последовательности, взаимосвязи и психологической комфортности.

ЭУП состоит из нескольких основных компонентов, каждый из которых выполняет определенную функцию в образовательном процессе (рис. 1).

Информационный блок (основной) – содержит систематизированное и сжатое изложение учебного материала. Каждый его раздел завершается контрольными вопросами, позволяющими обучающемуся оценить степень усвоения изученной информации. Таким образом обеспечивается постоянная обратная связь между пользователем и программной средой, что способствует повышению эффективности освоения знаний.

Блок практических заданий организован в форме интерактивного взаимодействия обучающегося с компьютерной средой. Такой формат работы помогает закрепить полученные знания из информационного блока. тот блок оснащен системой навигации, предоставляющей доступ к любому сегменту учебного материала. При разработке заданий для этого блока необходимо применять разнообразные методики формирования ответов.

Блок контроля знаний осуществляется посредством тестового режима, в рамках которого оценивается корректность ответов обучающегося на предложенные вопросы. По завершении тестирования обучающемуся необходимо предоставить сведения о его показателях. Для предотвращения механического заучивания верных ответов применяется обширная база тестовых материалов. Из этой базы случайным образом формируются наборы вопросов с измененным порядком вариантов ответов, что исключает возможность их механического запоминания.

Дополнительно ЭУП может содержать глоссарии, справочные материалы, ссылки на дополнительные источники и литературу, кроме того, может включает в себя блоки для общения с преподавателем. Подобная структура позволяет обучающимся легко ориентироваться в материалах, делает обучение более наглядным и эффективным, а усвоение дисциплины – системным и целостным.

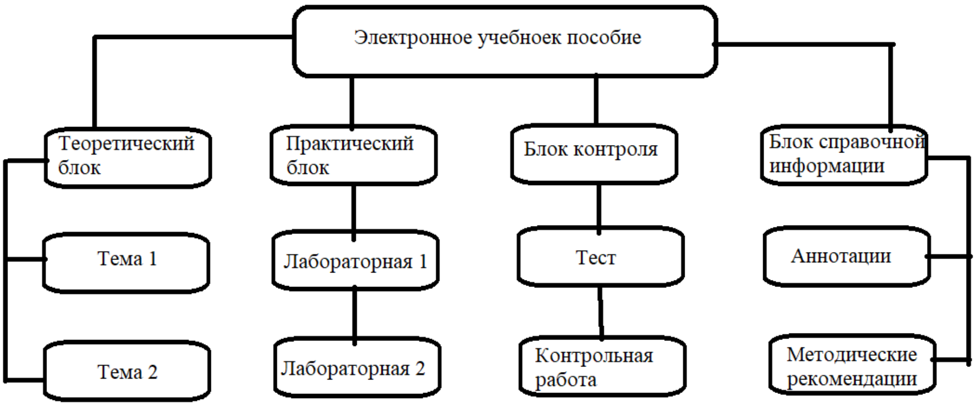


Рис. 1. Структура электронного учебного пособия

При разработке электронных учебных пособий требуется строго следовать установленным правилам оформления информации. В частности, разработка ЭУП предусматривает обязательное представление учебного материала в мультимедийном и интерактивных форматах, что способствует повышению эффективности обучения. ЭУП могут включать в себя разнообразные мультимедийные компоненты. Это текстовая информация (обычный текст, гиперссылки, формулы), а также изображения – как реальные (фотографии, панорамы, снимки под микроскопом или макросъемка), так и созданные искусственно (схемы, диаграммы, графики, учебные иллюстрации). Кроме того, используются динамические визуальные материалы, будь то реальные видеозаписи (опыты, экскурсии) или анимированные и интерактивные элементы (3D-панорамы с зумом, 2D-анимация, морфинг, анимация 3D-объектов, виртуальные модели). Неотъемлемой частью является и звуковое сопровождение [7].

Для эффективной демонстрации объектов и процессов, чьи определяющие черты проявляются в движении, рекомендуется использовать динамический видеоряд. Для облегчения восприятия и демонстрации объектов, имеющих сложную структуру, рекомендуется прибегать к помощи трехмерных моделей и средств виртуальной реальности.

При изучении сложных взаимосвязей между явлениями и процессами, особенно в области естественных наук, эффективно использовать интерактивные параметрические модели. Изменения параметров в таких моделях отражается на результатах их работы, что обеспечивает наглядную визуализацию исследуемого явления или процесса.

Звуковое сопровождение может включаться в ЭУП для представления различных звуковых объектов (природные звуки, работа технических устройств, музыка, речь и т.д.); а также для дублирования текстовой информации и подачи специальных сигналов, сопровождающих действия пользователя.

Структура ЭУП может включать как все перечисленные компоненты, так и их часть. Подбор средств представления учебного материала должен осуществляться с учётом уровня подготовки обучающихся и специфики дисциплины, и быть методически обоснованным. Каждый элемент должен повышать качество усвоения материала, иначе его использование нецелесообразно. Важно избегать перегрузки рабочего пространства избыточной информацией или отвлекающими деталями. Уровень интерактивности компонентов ЭУП должен соответствовать возрастным особенностями обучающихся и содержательным характеристикам предметной области [2].

Разработка ЭУП по дисциплине «Математическое моделирование» для студентов представляет собой поэтапный процесс, включающий педагогическое проектирование, технологическую реализацию и апробацию образовательного ресурса [6].

Первый этап – аналитико-подготовительный. На данном этапе осуществляется анализ рабочих программ учебной дисциплины, требований федерального государственного образовательного стандарта высшего образования и перечня формируемых компетенций. Определяются цели и задачи ЭУП, формулируются планируемые результаты обучения. Кроме того, учитываются особенности контингента обучающихся, уровень их математической подготовки и цифровой грамотности, что позволяет определить степень детализации теоретического материала и уровень интерактивности ресурса.

Второй этап – проектировочный. Он предполагает разработку структуры ЭУП и логики представления учебного материала. Формируется модульная организация содержания, устанавливается последовательность изучения тем, проектируется система практических заданий и контроля знаний. Особое внимание уделяется реализации принципов системности, последовательности, наглядности и интерактивности, обеспечивающих постепенное усложнение учебного материала и формирование устойчивых профессиональных умений.

Третий этап – содержательно-методический. На данном этапе осуществляется разработка теоретических материалов, примеров построения математических моделей, практико-ориентированных задач и тестовых заданий различного уровня сложности. Учебный материал выстраивается по принципу поэтапного формирования умений: от анализа исходной задачи и формализации условий – к построению модели, проведению вычислительного эксперимента и интерпретации результатов. Это обеспечивает практическую направленность обучения и способствует развитию аналитического мышления студентов.

Четвертый этап – технологический. Он включает выбор программной среды разработки, создание интерактивных элементов, интеграцию мультимедийного контента и настройку системы автоматизированного контроля знаний. Особое значение имеет реализация динамической визуализации математических зависимостей и параметрических моделей, позволяющих обучающимся изменять входные данные и анализировать влияние параметров на результаты моделирования. На данном этапе проводится тестирование корректности функционирования всех компонентов ЭУП.

Заключительный этап – апробационно-коррекционный. Он предполагает внедрение разработанного ресурса в образовательный процесс и оценку его педагогической эффективности. Анализируются результаты освоения дисциплины, уровень сформированности навыков построения и анализа математических моделей, а также степень самостоятельности обучающихся. На основании полученных данных вносятся необходимые изменения в содержание, структуру и интерфейс электронного учебного пособия [5].

Таким образом, разработка ЭУП представляет собой системный процесс, объединяющий педагогическое проектирование, методическое обеспечение и современные цифровые технологии, что обеспечивает его эффективность как средства формирования профессиональных компетенций будущих математиков.

В результате проведённого исследования определены теоретико-методические основания разработки ЭУП по дисциплине «Математическое моделирование» для студентов направления подготовки 01.03.01 Математика. Показано, что внедрение электронных образовательных ресурсов является объективной необходимостью в условиях цифровизации высшего образования и ориентировано на повышение качества профессиональной подготовки будущих математиков.

Разработанное ЭУП рассматривается как интегративное средство обучения, объединяющее информационный, практический и контрольно-оценочный компоненты. Его структура и содержательное наполнение направлены на обеспечение поэтапного формирования умений формализации прикладных задач, построения и исследования математических моделей, а также интерпретации полученных результатов.

Использование интерактивных и мультимедийных средств позволяет усилить наглядность учебного материала, активизировать познавательную деятельность обучающихся и создать условия для индивидуализации образовательного процесса. Использование электронных образовательных технологий создает условия для продуктивной самостоятельной работы обучающихся и развития прочных профессиональных навыков.

Таким образом, создание ЭУП по дисциплине «Математическое моделирование» отвечает современным требованиям к организации образовательного процесса и может рассматриваться как эффективный инструмент повышения результативности обучения в условиях цифровой образовательной среды.

Литература

1. Абдуразаков, М. М. Математическое моделирование как средство обучения / М. М. Абдуразаков // Балтийский гуманитарный журнал: электронный журнал. – URL: https://cyberleninka.ru/article/n/matematicheskoe-modelirovanie-kak-sredstvo-obucheniya (дата обращения: 03.02.2026).

2. Апробация электронных учебников в общеобразовательных учреждениях Российской Федерации / Федеральный институт развития образования. – М. : Федеральный институт развития образования, 2012 – 56 с.

3. Босова, Л. В. Электронный учебник: вчера, сегодня, завтра / Л. В. Босова, Н. Е. Зубченко // Образовательные технологии и общество : электронный журнал. – URL: https://cyberleninka.ru/article/n/elektronnyy-uchebnik-vchera-segodnya-zavtra (дата обращения: 05.02.2026).

4. Ганичева, Е. М. Рекомендации по подготовке электронных учебно-методических комплексов / Е. М. Ганичева, О. И. Лихачева; Министерство науки и высшего образования Российской Федерации, Вологодский государственный университет. – Вологда : ВоГУ, 2024 – 19 с. – URL: https://docs.yandex.ru/docs/view?tm=1766585156&tld=ru&lang=ru&name=RECOMMENDATION_FORMATION_EMC_27_01_2024.pdf&text=разработка%20электронного%20учебного%20пособия%20пособие&url (дата обращения: 03.02.2026).

5. Забело, А. Н. Основные подходы к разработке электронного учебника и особенности учебной работы с ним / А. Н. Забело, Е. В. Чеканова, В. Т. Андреев // Международный журнал гуманитарных и естественных наук. – URL: https://cyberleninka.ru/article/n/osnovnye-podhody-k-razrabotke-elektronnogo-uchebnika-i-osobennosti-uchebnoy-raboty-s-nim (дата обращения: 10.02.2026).

6. Линок, В. А. Электронное учебное пособие «Математическое моделирование» / В. А. Линок // Гаудеамус. – электронный журнал. – URL: https://cyberleninka.ru/article/n/elektronnoe-uchebnoe-posobie-matematicheskoe-modelirovanie (дата обращения: 06.02.2026).

7. Сидорова, У. Н. Электронное учебное пособие по математике: создание и применение в ПОО / У. Н. Сидорова //Инновационное развитие профессионального образования. – URL: https://cyberleninka.ru/article/n/elektronnoe- uchebnoe-posobie-po-matematike-sozdanie-i-primenenie-v-poo?ysclid=mjj4o4v98g313275520 (дата обращения: 03.02.2026).

DEVELOPMENT OF AN ELECTRONIC TEXTBOOK ON MATHEMATICAL MODELING

***Dolzhenko Elizaveta Sergeevna*[1]*, Temnikova Svetlana Vladimirovna*[2]**

[1,2]*Lugansk State Pedagogical University, Lugansk*

[1] *eliza.dolzhenko@mail.ru*, [2]*temnikovasvetlana@rambler.ru*

Abstract. *The article is devoted to the theoretical and didactic foundations of developing an electronic educational resource (EER) for the discipline "Mathematical Modeling" for undergraduate students of the field of study 01.03.01 Mathematics. The structure of the EER is described. The requirements for presenting multimedia and interactive content that provides visualization of mathematical dependencies, organization of independent cognitive activity of students, and formation of professional competencies are analyzed.*

Keywords: *electronic textbook, mathematical modeling, electronic educational environment, interactive learning.*

УДК 378.091.64:519.876.5

РАЗРАБОТКА ЭЛЕКТРОННОГО УЧЕБНОГО ПОСОБИЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ «ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ»

Дымарский Яков Михайлович[1], Махмудова Юлия Дмитриевна[2]
[1] Московский физико-технический институт, Москва,
[2] Луганский государственный педагогический университет, Луганск
[1]makhmudovaY@list.ru

Аннотация. В статье рассматривается проблема преподавания учебной дисциплины «Вариационное исчисление» в условиях цифровизации образования. Рассмотрены основные аспекты разработки электронного учебного пособия, раскрыты цели, задачи, структура и технологические решения. Также, разработана эффективная структура электронного учебного пособия по дисциплине, что позволит повысить качество усвоения учебного материала.

Ключевые слова: электронное учебное пособие, вариационное исчисление, профессиональная подготовка.

В условиях развития информационных технологий и увеличения роли электронных обучающих средств в образовательном процессе, создание электронных учебных пособий по различным дисциплинам становится не только актуальным, но и необходимым. Благодаря своей доступности и интерактивности электронные учебные пособия, способны значительно повысить качество обучения: получение знаний в удобной и доступной форме для студента; возможность индивидуального подхода к каждому студенту, в условиях разнообразия образовательных потребностей [5]. Особенно это актуально для таких сложных учебных дисциплин, как вариационное исчисление, которая является одной из фундаментальных дисциплин в профессиональной подготовке специалистов в области прикладной математики, изучает экстремумы функционалов и находит широкое применение в различных областях науки и техники.

Целью данной статьи является изучение основных аспектов разработки электронного учебного пособия по учебной дисциплине «Вариационное исчисление», включая цели, задачи, структуру и технологические решения.

Согласно Национальному стандарту Российской Федерации. «Информационно-коммуникационные технологии в образовании. Учебник электронный. Общие положения» [2] электронное учебное пособие по характеру информации является основным видом электронного учебника, которое определяется как «структурированный цифровой документ, в основном состоящий из текста с возможностями контекстного поиска, который можно рассматривать как метафору печатной книги или брошюры».

В настоящее время существует достаточно много различных классификаций электронных учебников, так с одной стороны он выступает как педагогическое средство, а с другой, является программным продуктом. Согласно мнению исследователей [1, с. 81], «одна из предлагаемых классификаций основывается на целях и задачах обучающих программ или режимах использования автоматизированных обучающих систем с выделением следующих типов: иллюстрирующие, консультирующие, операционная среда, тренажеры, обучающий контроль». Таким образом, в одном электронном учебнике могут быть реализованы несколько типов из указанных выше режимов его использования.

В.С. Тоискин и В.В. Красильников в работе «Теоретические основы разработки электронных образовательных изданий (антропологический подход)» [3] обобщили теоретические концепции построения электронных образовательных изданий, а также представили психолого-педагогические, технологические, эргономические рекомендации по созданию электронного учебника. Согласно мнению исследователей: «современный учебник представляет единство научно-аналитического, дидактического и методического начал.» [4, с. 47].

Действительно, при проектировании структуры электронного учебного пособия необходимо опираться на основные дидактические принципы: активности (участие студента в образовательной деятельности), доступности (доступность заданий для выполнения студентом), наглядности (визуализация семейств экстремалей, поля направлений и поведения функционала в зависимости от выбора кривой), систематичности (логическая структура учебного контента, разбивка материала на модули), прочности знаний, научности (соответствие учебного контента современному состоянию изучаемой науки), связи теории и практики (возможность применения студентом полученных теоретических знаний).

В контексте системно-деятельностного подхода, «учебная деятельность студента обозначает пошаговое выполнение учебных операций, ведущих к достижению конкретной учебной цели. Следовательно, построение учебного занятия любой формы (лекция, практическое, семинарское, лабораторное занятие) и на каждом этапе обучения студента (получение знаний, формирование первичных умений, доведение их до уровня навыка, контроля полученных знаний, умений и навыков) подразумевает использование четкой структуры, построенной на основе психологической теории деятельности» [3, с. 49].

Электронное учебное пособие должно быть структурировано таким образом, чтобы облегчить восприятие информации и предоставить возможность студенту последовательно-логическое изучение учебного материала, соблюдая разумный баланс между теоретическим и практическим материалом;

возможность демонстрации использования полученных знаний на практике (примеры решения вариационных задач, отработка умений и навыков при самостоятельном выполнении заданий).

Таким образом, предлагаемая структура электронного учебного пособия базируется на иерархической модели с гипертекстовыми связями, основным элементом которого является модуль:

– содержательный модуль, который условно можно разделить на теоретический и практический разделы. Данный модуль проектируется в соответствии с утвержденной рабочей программой учебной дисциплины «Вариационное исчисление» для направления подготовки 01.03.01 Математика.

Теоретический раздел. В данном разделе рассматриваются основные понятия и определения вариационного исчисления. Студенты должны познакомиться с понятием функционала, вариации и экстремума. Также важно рассмотреть применение вариационного исчисления в различных областях, таких как физика, экономика и инженерия. Основные методы вариационного исчисления (описание метода, его применение и примеры). Подробное объяснение уравнений Эйлера-Лагранжа, их вывод и примеры использования.

Практический раздел. Важной составляющей электронного учебного пособия являются практические примеры и задачи. Данный раздел должен включать: решение типовых задач с пошаговыми объяснениями; интерактивные задачи, которые студенты смогут решать самостоятельно, получая обратную связь.

– модуль контроля, является диагностической составляющей электронного учебного пособия и включает компьютерные тесты для осуществления текущего контроля качества усвоения студентами теоретических и практических знаний, умений по разделам учебной дисциплины. При использовании электронного учебного пособия «Вариационное исчисление» для организации самостоятельной работы студентов данный модуль позволит им осуществлять самоконтроль качества усвоения учебного материала по дисциплине.

– библиотечно-справочный модуль электронного учебного пособия включает глоссарий, а также актуальные ссылки электронных источников как основной, так и дополнительной литературы по учебной дисциплине.

Разработка электронного учебного пособия «Вариационное исчисление» предполагается в двух вариантах: в виде локальной версии и дистанционного курса с использованием специализированной учебной среды Moodle.

Таким образом, на основе анализа реальной практики и результатов научных исследований разработана структура электронного учебного пособия по дисциплине «Вариационное исчисление», которая включает содержательный модуль (теоретическая и практическая подготовка), модуль контроля и библиотечно-справочный модуль. Использование электронного учебного пособия в качестве дополнительного материала для организации самостоятельной работы студентов позволит, прежде всего, повысить качество усвоения учебного материала по дисциплине.

Литература

1. Волошина, М.С. Современный электронный учебник: требования к форме и содержанию / М.С. Волошина, Л. В. Ишкова // Вестник МИЭП. 2012. №2 (7). – URL: https://cyberleninka.ru/article/n/sovremennyy-elektronnyy-uchebnik-trebovaniya-k-forme-i-soderzhaniyu (дата обращения: 04.01.2026).
2. Национальный стандарт Российской Федерации. «Информационно-коммуникационные технологии в образовании. Учебник электронный. Общие положения». – URL: gost_r_57724-2017.pdf (дата обращения: 14.12.2025).
3. Студеникина, В.П. Формирование общекультурных и общепрофессиональных компетенций студентов в процессе изучения профильных дисциплин / В.П. Студеникина, О.В. Давыскиба // Вестник ЛГПУ : сб. науч. тр. / гл. ред. Т.Т. Ротерс; вып. ред. О.И. Волошенко; ред. сер. Е.В. Чепурченко. – Луганск : Книта, 2020. – № 1(55) : Серия 1. Пед. науки. Образование. – С. 48-53.
4. Тоискин, В. С. Теоретические основы разработки электронных образовательных изданий (антропологический подход): Уч. пос. / В.С. Тоискин, В.В. Красильников. – Ставрополь: Изд. СГПИ, 2010. – 108 с.
5. Федеральный закон «Об образовании в Российской Федерации» [Электронный ресурс]. – URL: http://www.consultant.ru/document/cons_doc_LAW_140174/ (дата обращения: 10.03.2025).

DEVELOPMENT OF AN ELECTRONIC TEXTBOOK ON THE DISCIPLINE «CALCULUS OF VARIATIONS»

***Dymarskiy Yakov Michaylovich*[1]*, Makhmudova Yulia Dmitrievna* [2]**
[1] *Moscow Institute of Physics and Technology, Moscow,*
[2] *Lugansk State Pedagogical University, Lugansk*
[1]*makhmudovaY@list.ru*

Abstract. The article discusses the problem of teaching the discipline «Variational Calculus» in the context of digitalization of education. The main aspects of developing an electronic textbook are considered, and the goals, objectives, structure, and technological solutions are revealed. Additionally, an effective structure for an electronic textbook on the discipline is developed, which will improve the quality of learning.

Keywords: electronic textbook, variational calculus, professional training.

УДК 336 : 004

ЭЛЕКТРОННОЕ УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ ПО ФАКУЛЬТАТИВНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ «ФИНАНСОВАЯ МАТЕМАТИКА» ДЛЯ СТУДЕНТОВ НАПРАВЛЕНИЯ ПОДГОТОВКИ 01.03.01 МАТЕМАТИКА

***Лила Вероника Юрьевна*[1]*, Скринникова Анна Владимировна*[2]**
[1]*Средняя специализированная школа № 9 им. А. Стаханова, г. Стаханов*
[2]*Луганский государственный педагогический университет, г. Луганск*
[1]*nikanikol2704@mail.ru*

Аннотация. Недостаточная финансовая грамотность является причиной многих экономических проблем не только на уровне домохозяйств и на уровне государства, но и на уровне выпускников вузов. Эффективная организация и

методическое обеспечение курса финансовой математики является ключом к повышению уровня финансовой грамотности и подготовке компетентных специалистов, способных успешно ориентироваться в мире финансов, какими и должны являться выпускники направления подготовки 01.03.01 Математика. Разрабатываемое электронное учебное пособие по дисциплине, кроме указанного, позволит усилить связи университетского образования с практической деятельностью.

Ключевые слова: финансовая математика, высшее образование, образовательные технологии, электронное пособие.

Современный мир характеризуется нарастающей сложностью экономических процессов, стремительным развитием финансовых рынков и постоянно меняющимися условиями инвестирования. В этих реалиях финансовая грамотность и умение применять математический аппарат для анализа и прогнозирования финансовых явлений становятся не просто желательными, а жизненно необходимыми навыками для каждого человека. От способности принимать обоснованные финансовые решения зависит личное благосостояние каждого выпускника вуза, успешное функционирование предприятий и стабильность национальной экономики.

Основные профессиональные образовательные программы высшего образования, как правило, дают глубокие знания в области фундаментальной математики, но зачастую не уделяют достаточного внимания практическому применению этих знаний в финансовой или какой-либо другой прикладной сфере. В результате некоторые студенты вузов, в том числе направления подготовки 01.03.01 Математика, нередко испытывают сложности с пониманием основ кредитования, инвестирования, страхования или с формированием личного финансового плана. Возникает очевидный разрыв между академической подготовкой и требованиями реальной жизни.

В данном контексте особую значимость приобретают факультативные курсы, которые позволяют углубить знания учащихся в прикладных областях, выходящих за рамки обязательной программы. Факультатив «Финансовая математика» может представлять собой именно такой инструмент, способный восполнить указанный пробел, формируя у обучающихся не только теоретические представления о финансовых процессах, но и практические навыки работы с ними.

Учебной литературы по финансовой математике вполне достаточно [1-3; 5; 6; 8], однако, как показала практика, по разным причинам приходиться прибегать к дистанционному обучению, а оцифрованный учебник и электронное учебное пособие (ЭУП) – совершенно разные вещи. Тем более, что ЭУП по финансовой математике практически отсутствуют. Тем не менее, в работах Барановой Ю.Ю., Башмакова А.И., Башмакова И.А., Болдырева В.Б., Бурдинского И.А., Герасимова А.Н., Громова Е.И., Груднинской Т.В., Еськина Д.Л., Ивановой Е. Д., Королькова Е.С., Скрипниченко Ю.С., Филимонюка Л.А. и др. можно почерпнуть информацию об особенностях и принципах разработки ЭУП по другим математическим дисциплинам [4; 7].

Изучив ряд литературных источников [4; 7; 9], находим, что ЭУП – это продукт, который фрагментарно или полностью может быть использован вместо учебника. Ряд ученых выделили следующие пять критериев качественного и конкурентоспособного ЭУП:

1) информативность;
2) прозрачность интерфейса;
3) интерактивность;
4) регулярность обновления информации;
5) наличие удобного поискового механизма с целью обеспечения быстрого доступа к необходимой информации.

Нами также выявлены основные содержательные элементы ЭУП:

- титульный экран;
- заголовок ЭУП на каждой странице;
- удобное оглавление (меню);
- доступный для понимания текстовый материал, содержащий мультимедиа-контент (фото-, аудио-, видео-, анимационные материалы, приложения);
- практические задания или наличие системы анкетирования и тестирования;
- список основной и дополнительной литературы;
- сведения об авторе и контактная информация;
- поиск по ЭУП.

Отметим, что важной особенностью электронного издания является включение его в каталог «Российские электронные издания» Информрегистра. Иначе говоря, печатные издания отправляют в Российскую книжную палату для рассылки по библиотекам, а электронные в Информрегистр для включения в каталог. По информации издательского центра «Логос» (https://центр-логос.рф/) для размещения в eLIBRARY.RU с индексацией в РИНЦ и регистрацией в Информрегистре оригинальность ЭУП должна быть не менее 65% (включая самоцитирование).

ЭУП по факультативной дисциплине «Финансовая математика» для студентов направления подготовки 01.03.01 Математика находится на начальной стадии разработки. Ведется подбор актуальных задач с использованием интерактивности для развития практических навыков студентов, разрабатывается краткий лекционный материал согласно рабочей программе курса. ЭУП интегрирует традиционные и дистанционные образовательные технологии, обеспечивая доступность высококачественного образования, позволяя студентам самостоятельно осваивать предмет, развивать профессиональные компетенции и формировать готовность к успешной профессиональной деятельности. Ведь в условиях динамичного развития рыночной экономики и цифровизации финансовых услуг (онлайн-банкинг, криптовалюты, фондовые рынки с удаленным доступом) необходимо обладать базовыми знаниями и навыками в области финансовой математики для эффективного управления личными финансами, принятия взвешенных решений о сбережениях, инвестициях, кредитовании и пенсионном обеспечении.

Литература

1. Брусов, П. Н. Задачи по финансовой математике: учебное пособие / П. Н. Брусов – М.: КноРус, 2022. – 316 с.

2. Бухвалов, А. В. Самоучитель по финансовым расчетам: учебное пос. / А. В. Бухалов – М.: Мир, Пресс-Сервис, 2021. – 176 с.

3. Веретенников, А. Ю. Некоторые главы анализа и приложение к финансовой математике / А. Ю. Веретенников – М. : Прометей, 2016. – 60 с.

4. Иванова, Е. Д. Электронный учебник для обучения высшей математике при помощи прикладного математического пакета Maple / Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ RU 2023668458, 28.08.2023. Заявка № 2023664477 от 10.07.2023.

5. Ковалёв, В. В. Сборник задач по финансовому анализу: учебное пос. / В. В. Ковалёв – М.: Финансы и статистика, 2017. – 128 с.

6. Копнова, Е. Д. Финансовая математика : учебник и практикум для вузов / Е. Д. Копнова. – Москва : Издательство Юрайт, 2026. – 413 с.

7. Королькова, Е. С. Электронный учебник: «за» и «против» (по данным анкетирования и материалов форумов) / Е. С. Королькова // Актуальные вопросы гуманитарных наук: теория, методика, практика. Сб. научных статей. – 2017. – С. 109–118.

8. Люу, Ю-Д. Методы и алгоритмы финансовой математики: моногр. / Ю-Дау Люу – М.: БИНОМ, 2025. – 753 с.

9. Электронный учебник «Эконометрическое прогнозирование» / А.Н. Герасимов и [др.] // Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ RU 2024611396, 19.01.2024. Заявка от 28.12.2023.

ELECTRONIC TEXTBOOK ON THE OPTIONAL DISCIPLINE "FINANCIAL MATHEMATICS" FOR STUDENTS OF THE PROGRAM 01.03.01 MATHEMATICS

Lila Veronika Iurevna[1], Skrinnikova Anna Vladimirovna[2]

[1]The Stakhanov Specialized School № 9, Stakhanove

[2]Lugansk State Pedagogical University, Lugansk

[1] nikanikol2704@mail.ru

Abstract. Insufficient financial literacy is the cause of many economic problems, not only at the household and state levels, but also at the level of university graduates. The effective organization and methodological support of the financial mathematics course is the key to improving financial literacy and training competent specialists who can successfully navigate the world of finance, which is what graduates of the 01.03.01 Mathematics program should be. In addition to this, the developed electronic textbook will strengthen the connection between university education and practical activities.

Keywords: financial mathematics, higher education, educational technologies, electronic textbook.

УДК 004.912

ПЕРВИЧНАЯ ОБРАБОТКА И ВИЗУАЛИЗАЦИЯ ТЕЛЕМЕТРИЧЕСКОЙ ИНФОРМАЦИИ МАЛЫХ ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ СОБСТВЕННОЙ ПРИЕМНОЙ СТАНЦИЕЙ

Малахова Виктория Владимировна[1], Малахова Яна Олеговна[2]
[1]Луганский государственный университет имени В. Даля, г. Луганск,
[2]Заочная физико-техническая школа при Московском физико-техническом институте, г. Москва
[1]malakhova_viktoriya84@mail.ru

Аннотация. В статье описана собственная приемная станции с визуализацией и сохранением данных в реальном времени от состояния разработки до создания и тестирования. Подобные устройства являются объектами изучения учеников старших классов физико-технических кружков.

Ключевые слова: приём телеметрии, приёмная станция, телеметрическая информация.

Введение. В нашей стране наука не стоит на месте, каждый день ученые со всех уголков страны изобретаю новые машины, устройства для улучшения жизни граждан. Особенно важно при разработке и проведении автономных испытаний иметь возможность в реальном времени видеть и анализировать данные, передаваемые устройством. Так можно сразу увидеть ошибки, которые в дальнейшем могут помешать эксплуатации машины. Считывать данные с SD карты не всегда удобно, так как это происходит после испытаний [1]. В таких случаях может помочь приемная станция телеметрической информации. Разработкой подобных устройств занимаются учащиеся физико-технических кружков как специализированных так общеобразовательных школ.

Объектом исследования является система передачи и сохранения телеметрической информации.

Предмет исследования – разработка, создание и тестирование собственной приемной станции с визуализацией и сохранением данных в реальном времени.

Принципиальная схема разрабатываемой приемной станции приведена на рис. 1 [2]. Устройство разработано на базе микроконтроллера Raspberry Pi Pico RP2040. Для радиопередачи был выбран радиомодуль Lora E220. Для визуализации телеметрической информации используется дисплей 1.8”TFT128*RGB*160. Разрабатываемая приемная станция также имеет картридер карты памяти для сохранения телеметрической информации. Связь микроконтроллера Raspberry Pi Pico RP2040 по интерфейсу:

– UART с радиомодулем Lora E220;
– SPI с картридером SD карты;
– 1-wire с адресным RGB светодиодом WS2812B.

Внешний вид собственной приемной станции показан на рис. 2А.

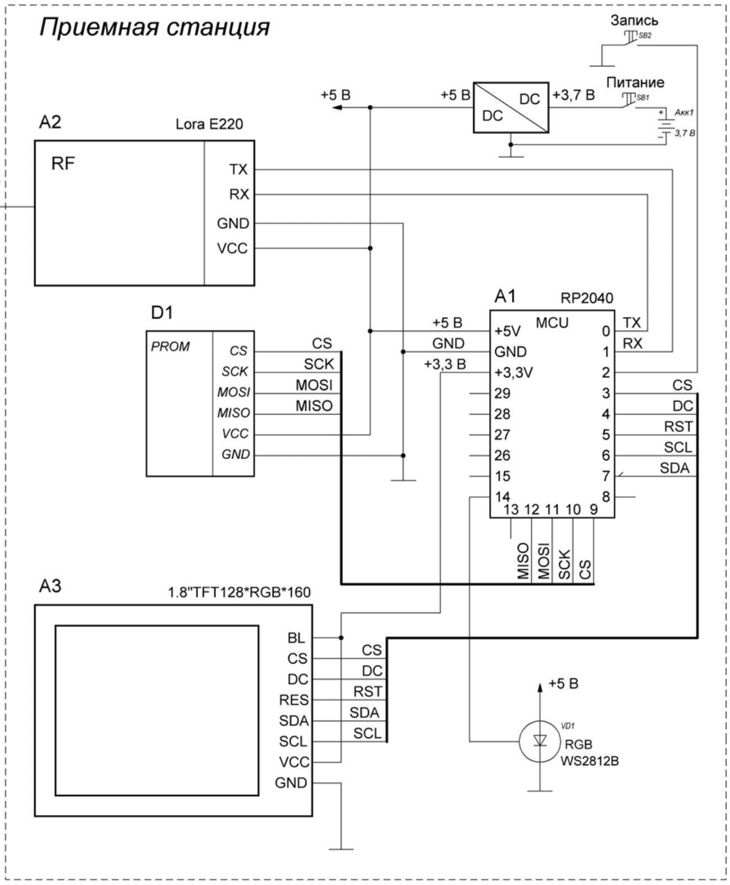


Рис.1. Схема электрическая принципиальная приемной станции

Приемная станция размещена в корпусе, выполненном методом 3D печати. Включение / выключение питания электронной схемы приемной станции производится тумблером 1. Принимаемая по радиоканалу телеметрическая информация визуализируется (переводится в удобную для понимания оператором форму) и отображается на экране графического дисплея 2. Нажатие кнопки 3 с самофиксацией инициирует запись принимаемой информации на SD карту. Многоцветный светодиод 4 отображает режим работы приемной станции:

– однократно при включении белый / зеленый / потухание – SD карта найдена, инициирована, готова к записи;

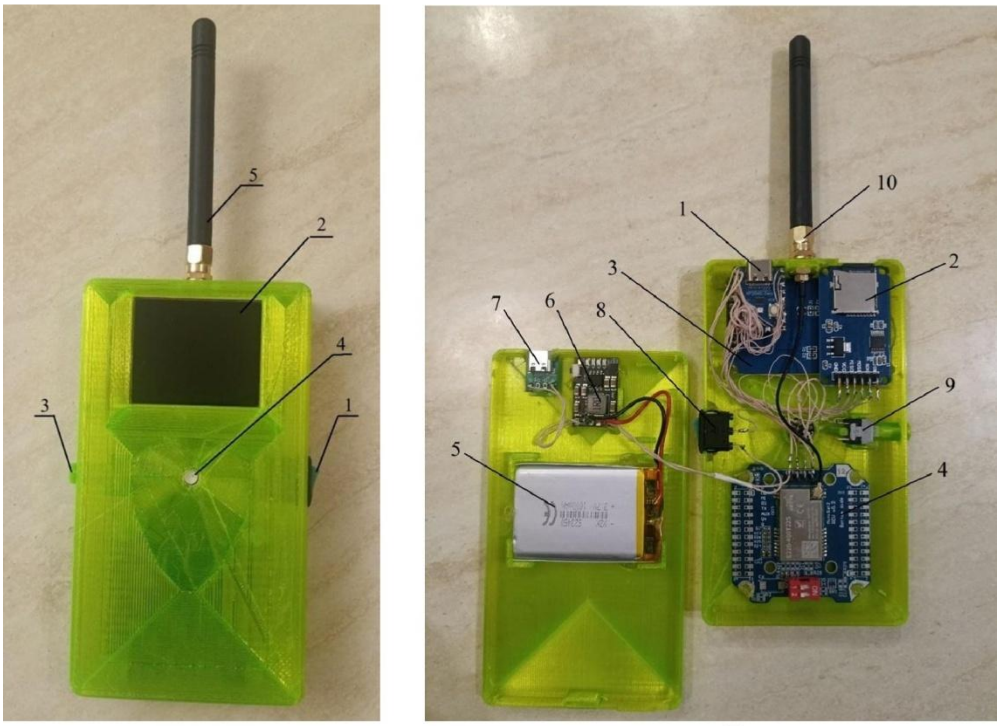
– постоянно красный – SD карта не обнаружена / ошибка форматирования;

– зеленый при нажатой кнопке «Запись» 2 – идет запись телеметрии на SD карту;

– приглушенный голубой после окончания записи – на карте есть свежая информация.

Антенна 5 сменная. Для ближнего приема применяем укороченную всенаправленную антенну (коэффициент усиления 2 dBi) [3]. Для дальнего приема – антенна Яги (пятиэлементный волновой канал, коэффициент усиления 17,22 dBi).

Внутреннее устройство собственной приемной станции показано на рис. 2Б: 1 – Модуль Raspberry Pi Pico RP2040; 2 – картридер; 3 – модуль графического дисплея; 4 – радиомодуль Lora E220; 5 – аккумулятор; 6 – модуль заряда аккумулятора/повышающий преобразователь +5 В; 7 – разъем для зарядки аккумулятора; 8 – выключатель питания; 9 – кнопка включения записи; 10 – антенна.



А Б

Рис. 2. А – Внешний вид собственной приемной станции;
Б – Внутреннее устройство приемной станции

Программа приемной станции производит преобразование принятой телеметрической информации из бинарного представления в текстовый формат CSV, более удобный для восприятия и дальнейшей обработки (рис. 3).

Z001.csv

```
13225;2524;98566;131;208;8364;6;-1;1;23;2324;603;1590;0;98569;0;141;12;22;0;
13825;2523;98560;138;219;8376;3;1;2;170;2280;616;1639;0;98569;0;143;6;39;0;
14425;2523;98560;135;210;8368;4;2;1;255;2314;626;1634;0;98569;0;142;6;39;0;
15025;2523;98560;127;206;8364;4;2;2;30;2290;528;1563;0;98569;0;142;6;39;0;
15625;2525;98569;133;206;8371;5;3;1;180;2327;624;1930;0;98569;0;142;14;0;0;
16225;2525;98558;137;206;8368;4;3;1;38;2320;612;1937;0;98569;0;142;5;43;0;
16825;2525;98558;134;212;8369;4;4;0;144;2301;620;1639;0;98569;0;141;5;43;0;
17425;2525;98558;136;209;8365;4;3;1;46;2300;611;1978;0;98569;0;143;5;43;0;
18025;2525;98563;134;208;8366;4;2;1;167;2303;613;1961;0;98569;0;142;9;32;0;
18625;2525;98563;133;208;8369;4;1;2;31;2331;611;1955;0;98569;0;142;9;32;0;
19225;2525;98563;140;215;8369;4;4;2;195;2333;635;1970;0;98569;0;141;9;32;0;

```

Рис. 3. Формат записываемых на SD карту данных

Файл формата CSV считывается электронными таблицами без необходимости какой-либо переработки (рис. 4).

Управляющая программа микроконтроллера собственной приемной станции написана на языке программирования Circuit Python.

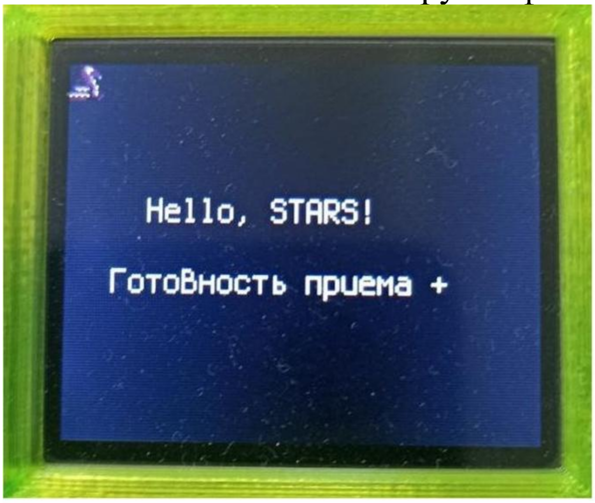
Испытания приемной станции телеметрической информации проводились на примере пикоспутника формата CanSat.

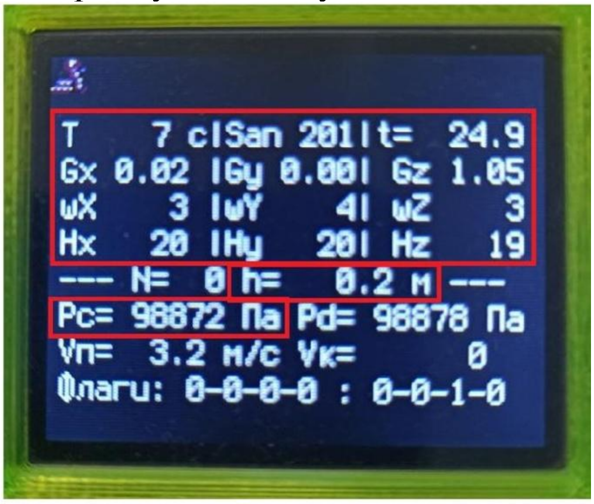
A1 13225

Z001.csv

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T
1	13225	2524	98566	131	208	8364	6	-1	1	23	2324	603	1590	0	98569	0	141	12	22	0
2	13825	2523	98560	138	219	8376	3	1	2	170	2280	616	1639	0	98569	0	143	6	39	0
3	14425	2523	98560	135	210	8368	4	2	1	255	2314	626	1634	0	98569	0	142	6	39	0
4	15025	2523	98560	127	206	8364	4	2	2	30	2290	528	1563	0	98569	0	142	6	39	0
5	15625	2525	98569	133	206	8371	5	3	1	180	2327	624	1930	0	98569	0	142	14	0	0
6	16225	2525	98558	137	206	8368	4	3	1	38	2320	612	1937	0	98569	0	142	5	43	0
7	16825	2525	98558	134	212	8369	4	4	0	144	2301	620	1639	0	98569	0	141	5	43	0
8	17425	2525	98558	136	209	8365	4	3	1	46	2300	611	1978	0	98569	0	143	5	43	0
9	18025	2525	98563	134	208	8366	4	2	1	167	2303	613	1961	0	98569	0	142	9	32	0
10	18625	2525	98563	133	208	8369	4	1	2	31	2331	611	1955	0	98569	0	142	9	32	0
11	19225	2525	98563	140	215	8369	4	4	2	195	2333	635	1970	0	98569	0	141	9	32	0
12																				

Рис. 4. Загрузка файла в электронную таблицу





А Б

Рис. 5. Тестирование приёмной станции: А – стартовая страница; Б – визуализация телеметрической информации

Удаляем чеку в пикоспутнике, включаем приемную станцию, нажимая на кнопку 1 (рис. 2А). При включении станции светодиод 4 (рис. 2А) однократно включает белый, зеленый, после потухает. Это говорит о том, что SD карта инициализировалась, готова к записи. После включения пикоспутника приемная станция начинает принимать и отображать телеметрическую информацию, передаваемую спутником. При необходимости записи данных необходимо нажать на кнопку 3 (рис. 2А), светодиод будет светиться зеленым цветом. После того, как пользователь нажмёт повторно на данную кнопку, файл телеметрической информации закроется, светодиод засветится голубым цветом.

Выводы. В статье описана собственная приемная станции с визуализацией и сохранением данных в реальном времени от состояния разработки до создания и тестирования.

Литература

1. Верстаковская, А. П. Аппаратные средства для построения мобильных станций приема телеметрии и измерения параметров орбиты малых космических аппаратов / А.П. Верстаковская // 77-я научная конференция студентов и аспирантов Белорусского гос. университета : материалы конференции в 3 ч., Минск, 11–22 мая 2020 года. Том Часть 1. – Минск: БГУ, 2020. – С. 157–160.

2. Пиккиев, В. А. Анализ результатов работы наземной станции приема телеметрической информации малых космических аппаратов / В. А. Пиккиев,

С. Н. Самбуров, П. Ю. Борисов // Известия Юго-Западного государственного университета. Серия: Управление, вычислительная техника, информатика. Медицинское приборостроение. – 2012. – № 2-3. – С. 119–125.

3. Лапко, Р. В. Организация приема телеметрии ка формата cubsat sputnix / Р. В. Лапко, Е. Г. Лапухин // Решетневские чтения : Материалы XXV Междунар. НПК, посвященной памяти генерального конструктора ракетно-космических систем академика М.Ф. Решетнева. В 2-х частях, Красноярск, 10–12 ноября 2021 года / Под общей редакцией Ю.Ю. Логинова. Ч. 1. – Красноярск: ФГБОУ ВО «Сибирский государственный университет науки и технологий имени академика М.Ф. Решетнева», 2021. – С. 411–412.

PRIMARY PROCESSING AND VISUALIZATION OF TELEMETRY INFORMATION OF SMALL AIRCRAFT BY ITS OWN RECEIVING STATION

Malakhova Viktoriya Vladimirovna[1], Malakhova Yana Olegovna[2]
[1] Lugansk State University named after Vladimir Dal, Lugansk
[2] Correspondence School of Physics and Technology at the Moscow Institute of Physics and Technology, Moscow
[1]malakhova_viktoriya84@mail.ru

Abstract. The article describes a custom-built receiving station with real-time visualization and data storage from development to creation and testing.

Key words: telemetry reception, receiving station, and telemetry information.

УДК 373.091.33:51-027.44:004

ПРИМЕНЕНИЕ ЦИФРОВЫХ ТЕХНОЛОГИЙ НА УРОКАХ МАТЕМАТИКИ В СРЕДНЕЙ И СТАРШЕЙ ШКОЛЕ

Петренко Елизавета Дмитриенва
ГБОУ ЛНР «ЛСШ №8 имени Н.Ф. Ватутина», Луганск
e.lizapetrenko@yandex.ru

Аннотация. В статье рассматривается актуальная проблема применения цифровых технологий на уроках математики в школе. Рассмотрены такие цифровые платформы, как «Учи.ру», «ЯКласс», «Яндекс учебник» для организации цифрового компонента на уроках. Внимание уделяется и важности учителя как наставника в процессе обучения.

Ключевые слова: цифровые технологии, интерактивные платформы, обучение математике.

Изучение математики в современном образовании занимает одно из ключевых мест, поскольку она формирует не только навыки решения математических задач, но и способности к логическим рассуждениям, а также аналитическое мышление.

Для школьников среднего и старшего звена математика требует понимания более абстрактных понятий (алгебра, геометрия и математический анализ). Для улучшения показателей понимания, мотивации и заинтересованности учеников необходимо адаптировать методы преподавания. С учетом этого очень сложно представить современный урок без использования цифровых технологий.

Действующие изменения во ФГОС (федеральных государственных образовательных стандартах) от 1 сентября 2025 года предъявляют к структуре урока математики новые требования [1]. Теперь использование цифровых инструментов на уроках имеет важное значение, в том числе и для реализации национального проекта «Образование» [2].

Актуальность статьи обусловлена необходимостью модернизации традиционной методики путем использования цифровых технологий в учебном процессе. На сегодняшний день необходима интеграция цифровых технологий в устоявшиеся методы преподавания.

Целью статьи является сравнительный анализ наиболее популярных цифровых платформ для использования на уроках математики средней и старшей школы.

В нынешних реалиях удобство использования цифровых образовательных технологий обрело особую значимость. Применение их в реальной практике стало более частым явлением. В обучении математике цифровые технологии предлагают следующие возможности:

– адаптивность заданий;
– повышение доступности учебных материалов;
– автоматизацию проверки и персонализацию сложности заданий;
– визуализацию сложных абстрактных понятий.

Самыми распространенными цифровыми инструментами в школе являются электронные учебники. В соответствии с требованиями к учебным изданиям, утвержденными Министерством просвещения РФ [1], «электронная форма учебника (ЭФУ) представляет собой электронное издание, соответствующее по структуре, содержанию и художественному оформлению печатной форме учебника, содержащее мультимедийные элементы и интерактивные ссылки, расширяющие и дополняющие содержание учебника».

В современной школе востребовано применение государственной информационной системы ФГИС «Моя школа» [4] учащимися, их родителями и педагогами. Такие платформы, как «GeoGebra» [5], «ЯКласс» [6], «Учи.ру» [7] и другие также достаточно популярны в применении учителями на своих уроках.

Традиционные методы преподавания математики были эффективны в течении многих столетий. Однако развитие цифровой эпохи дает новые возможности в модернизации методов преподавания, позволяет персонализировать и выстраивать более гибкие подходы в обучении. Рассмотрим ограничения и достоинства традиционных методов.

Достоинства:

– активное взаимодействие учителя и ученика в классе;
– систематизированное изложение материала в учебниках и задачниках;
– задействование нескольких форм восприятия и памяти [8].

Выделим недостатки:

– недостаточная индивидуализация и адаптация под уровень подготовки учащегося (в условиях полной наполненности класса учителю сложно уделить каждому ученику достаточно внимания, в следствии чего слабые ученики не успевают за темпом урока, а сильные теряют интерес из-за простоты задач);

– ограничение в качестве и скорости обратной связи (учителя не могут мгновенно выявить ошибки в решении работ).

Среди альтернативных методов обучения с применением цифровых технологий можно выделить следующие:

– мультимедийные ресурсы;

– перевернутое обучение;

– адаптивные цифровые платформы обучения.

Цифровые технологии способны решать ряд задач, в которых традиционные методы обучения не всегда эффективны. В контексте данной статьи выделим основные способы их применения в учебном процессе:

– адаптация и персонализация заданий;

– анализ успеваемости и мгновенная обратная связь;

– наглядность и визуализация;

– игровые элементы и симуляции.

Однако, уже многие исследователи процесса цифровизации образовательного процесса отметили, что полная замена преподавателей может привести к негативным последствиям: социальным, психологическим и антропологическим [9]. Согласно вышеизложенному, цифровые технологии могут быть мощным вспомогательным инструментом для современного учителя.

Рассмотрим примеры использования цифровых технологий на уроках математики в рамках урока алгебры для 7 класса по теме «Линейные уравнения» на платформах «Учи.ру», «Яндекс учебник» и «ЯКласс».

Цифровая платформа «Учи.ру» предлагает бесплатную регистрацию учеников, но есть и платный контент. Предоставляет возможность выдачи заданий по темам школьной программы для 1–11 классов, задания представлены не только практического, но и теоретического содержания с интерактивным закреплением материала (рис.1).

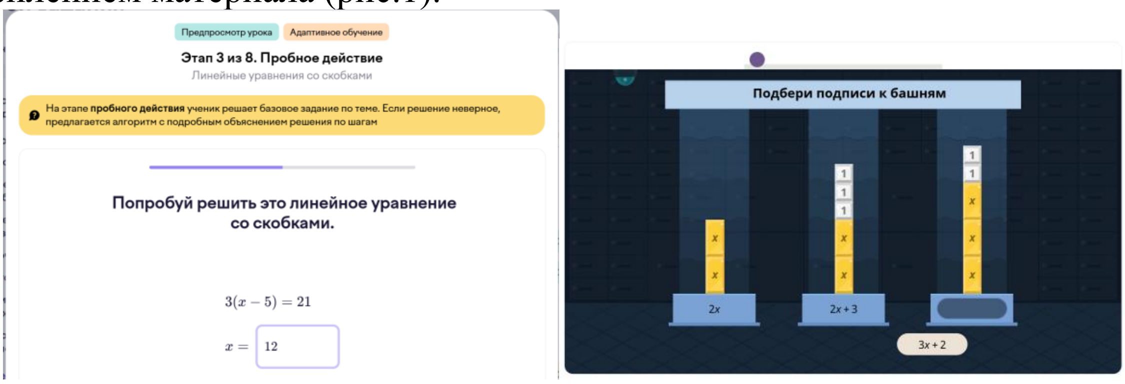


Рис. 1. Пример закрепления материала по теме на платформе «Учи.ру»

Также есть возможность ограничения времени и настройки показа ответов при выполнении заданий. Часть заданий представлены в нескольких вариантах, что поможет учителю исключить списывание учеников.

Результаты выполнения заданий отображаются у учителя, где показаны попытки, ошибки и оценки учеников. Это существенно облегчает работу учителя при анализе уровня усвоения материала учащимися и выставлении оценок за задание.

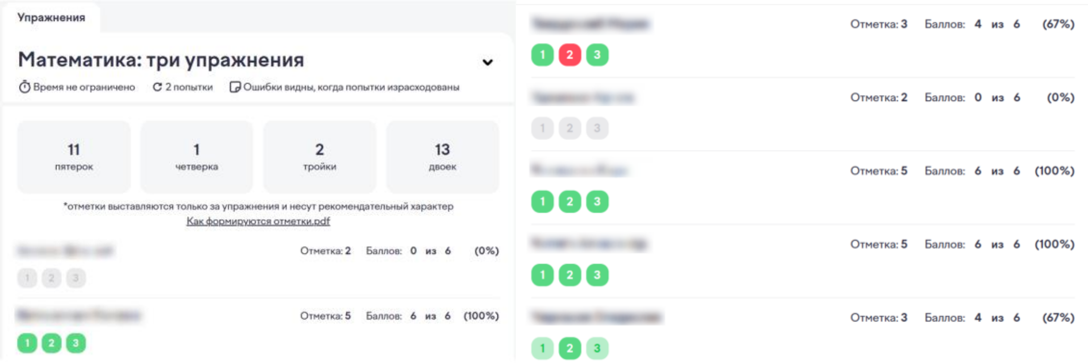


Рис. 2. Аналитика выполненного задания

При выполнении упражнений у учащихся ограничено количество попыток в день. Можно снять это ограничение оформив платную подписку.

На платформе «Яндекс учебник» регистрация учеников полностью бесплатная. Учащимся можно выдавать задания только практической направленности для отработки знаний. Как и на платформе «Учи.ру», есть возможность ограничения по времени и дате выдачи заданий. После выполнения заданий учащимися учитель видит статистику всего класса, где отображаются количество попыток и время выполнения заданий. Кроме того, в ней так же демонстрируются задания, которые вызвали наибольшие затруднения у учеников, присутствует возможность выдать работу над ошибками. Все задания представлены в нескольких вариантах (рис. 3). Однако не выставляет оценки за выполнение задания, только показывает процент правильности. Учитель самостоятельно устанавливает критерии оценивания работы обучающихся.

Для платформы «ЯКласс», которая входит в федеральный перечень электронных образовательных ресурсов, регистрация учащихся бесплатная.

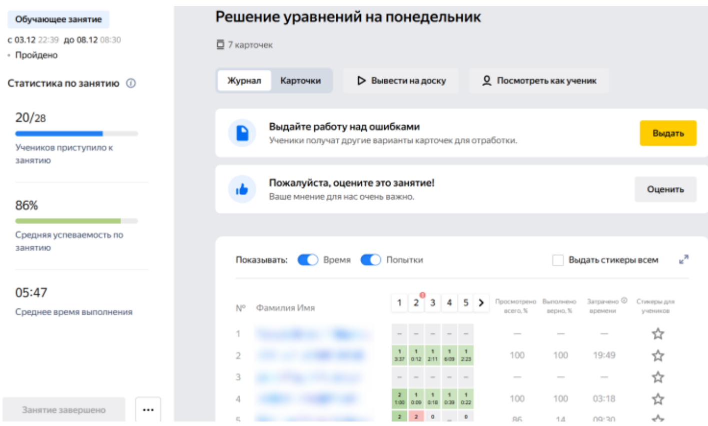


Рис. 3. Результат выполнения заданий учащимися

На данной платформе можно предоставлять учащимся теоретический материал для изучения в виде статей, а также проводить тестирование по заданной теме (рис. 4).

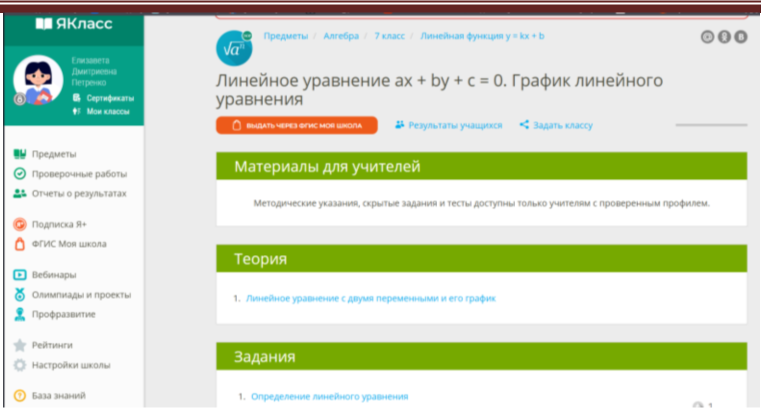


Рис. 4. Пример демонстрации задания на платформе «ЯКласс» по теме «Линейное уравнение»

Статистика результатов отображает правильность выполнения задания, количество попыток и время, затраченное учеником на его выполнение. Также есть возможность отобразить рекомендуемые оценки и перенести их в государственную информационную систему «Моя школа» (рис. 5).

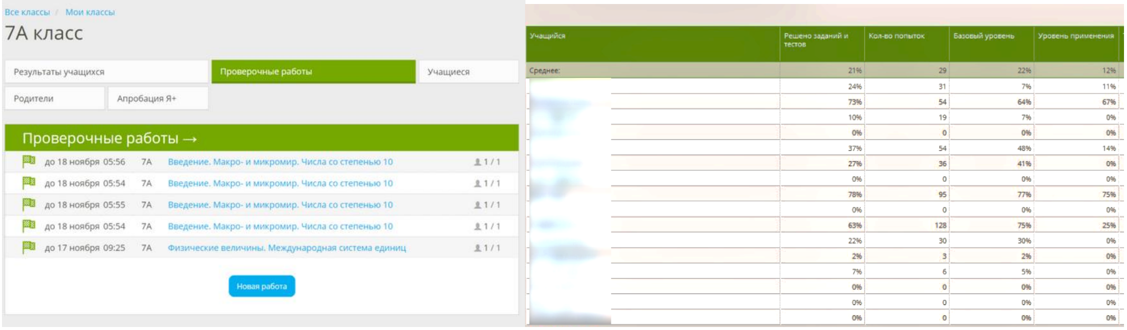


Рис. 5. Пример статистики на платформе «ЯКласс» по теме «Линейное уравнение»

Однако, бесплатные материалы ограничены как для учителя, так и для учащихся. Например, для вывода статистики и подключения учеников к одному классу необходимо оформление платной подписки. На платформе есть возможность оформить одну подписку как для отдельного ученика, так и для всего класса.

На основе проведенного анализа и личного опыта использования рассмотренных цифровых платформ на уроках математики можно выделить основные их преимущества и недостатки (табл.1); не существует универсального инструмента для эффективного решения всех задач обучения математике. У каждой из платформ есть свои особенности использования, на которые необходимо обращать внимание при их применении в учебном процессе. Безусловно, одним из важнейших критериев для любой платформы является доступность в использовании не только учителем, но и детьми. Заметим, что по этому критерию платформа «ЯКласс» показала себя хуже, однако, исходя из анализа остальных критериев, данная платформа более универсальна и содержательна, чем две другие. Платформа «Учи.ру» по содержанию соответствует платформе «ЯКласс» и является более простой при регистрации и удобной в получении статистики выполнения заданий, но у учащихся возникают затруднения при выполнении заданий из-за ограничений доступа для бесплатного контента. Бесспорным достоинством платформы «Яндекс учебник» является полностью бесплатный контент и простота в использовании учащимися, но менее обширное содержание сильно ограничивает ее применение в образовательном процессе.

Табл. 1. Сравнительный анализ цифровых платформ

Критерии сравнения	Учи.ру	Яндекс учебник	ЯКласс
Соответствие программе согласно ФГОС	Соответствует для 1–11 классов	Соответствует для 5–7 класса по математике	Соответствует для 1–11 классов
Тип материала	Теоретический и практический материал	Только практический материал	Теоретический и практический материал
Адаптивность заданий	Ограничена возможность выдачи заданий разного уровня сложности	Есть возможность выдачи заданий разного уровня сложности	Есть возможность выдачи заданий разного уровня сложности
Обратная связь	Отображение только правильности ответа	Отображение правильности ответа и верного ответа	Отображение правильности ответа и верного ответа в конце задания
Наличие готовых занятий	Да	Да	Да
Удобство ввода	Есть ограничение для введения дробных значений	Есть встроенная клавиатура	Все правила ввода отображены на каждом задании
Способы проверки	Автоматический	Автоматический	Автоматический и «ручная» проверка
Статистика для учителя	Отображается правильность, количество попыток и оценка	Отображается правильность, количество попыток и время выполнения	Отображается правильность, количество попыток, время выполнения и оценка
Диагностика слабо-усвоенных тем	Нет	Да	Да
Доступность	Есть платный контент	Бесплатный доступ	Бесплатный ограниченный функционал

Исходя из всего вышеизложенного можно сделать вывод, что актуальность использования цифровых технологий с каждым днем повышается. На примере наиболее популярных среди учителей платформ были рассмотрены способы их применения для выдачи заданий в курсе изучения математики в школе. Важно учитывать, что применение цифровых технологий в образовательном процессе должно происходить под строгим контролем учителя. Ограниченное использование цифровых платформ дает возможность повысить не только интерес учащихся, но и факторы индивидуальности и мобильности обучения [9].

В заключении, можно сказать, что внедрение цифровых технологий является перспективным направлением, которое, на сегодняшний день, активно развивается, однако требует глубокой вовлеченности учителя и непрерывного развития его знаний в этой области. Необходимо помнить, что цифровые технологии при всех их положительных качествах не являются заменой учителю, а представляют собой мощный вспомогательный инструмент.

Литература

1. Приказ Минпросвещения России от 31.05.2021 N 287 (ред. от 22.01.2024) «Об утверждении федерального государственного образовательного стандарта основного общего образования».

2. Национальный проект «Образование». – URL: https://strategy24.ru/rf/education/projects/natsionalnyyproektobrazovanie (дата обращения: 25.12.2025)

3. Федеральный закон «Об образовании в Российской Федерации» от 29.12.2012 N 273–ФЗ (последняя редакция).

4. Моя школа // Госуслуги Моя школа : [сайт]. – URL: https://www.gosuslugi.ru/school (дата обращения: 17.02.2026).

5. Инструменты и ресурсы GeoGebra // GeoGebra : [сайт]. – URL: https://www.geogebra.org (дата обращения: 17.02.2026).

6. ЯКласс цифровой образовательный ресурс для школ // ЯКласс : [сайт]. – URL: https://www.yaklass.ru (дата обращения: 17.02.2026).

7. Uchi.ru. – Текст : электронный // Uchi.ru : [сайт]. – URL: https://uchi.ru (дата обращения: 19.02.2026).

8. Виноградский, В. Г. Искусственный интеллект в образовании: анализ, перспективы и риски в РФ / В.Г. Виноградский, Н.В. Соколов // Проблемы современного педагогического образования. – 2022. – №76. – С. 5–10. – URL: https://cyberleninka.ru/article/n/iskusstvennyy–intellekt–v–obrazovanii–analiz–perspektivy–i–riski–v–rf (дата обращения: 17.02.2026).

9. Исаева, Г. Г. Цифровые платформы как фактор доступности образования: анализ преимуществ и ограничений / Г. Г. Исаева, О. М. Зияудинова, А. М. Чанкаева // Проблемы современного педагогического образования. – 2025. – №86-1. – С. 8. – URL: https://cyberleninka.ru/article/n/tsifrovye-platformy-kak-faktor-dostupnosti-obrazovaniya-analiz-preimuschestv-i-ogranicheniy (дата обращения: 18.02.2026).

APPLICATION OF DIGITAL TECHNOLOGIES IN MATHEMATICS LESSONS IN MIDDLE AND HIGH SCHOOL

Petrenko Elizaveta Dmitrievna
GBOU LNR «LSS №8 named after N.F. Vatutin», Lugansk
e.lizapetrenko@yandex.ru

Abstract. The article discusses the current problem of using digital technologies in mathematics lessons at school. It discusses such digital platforms as "Uchi.ru", "YaKlass", and "Yandex Textbook" for organizing the digital component in lessons. Attention is also paid to the importance of the teacher as a mentor in the learning process.

Keywords: digital technologies, interactive platforms, teaching mathematics.

УДК 372.851

ОБЗОР ОТЕЧЕСТВЕННЫХ ЦИФРОВЫХ РЕСУРСОВ ДЛЯ ПРОВЕДЕНИЯ ЗАНЯТИЙ ПО МАТЕМАТИКЕ В СИСТЕМЕ СРЕДНЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

Титаренко Дарья Андреевна
Московский университет «Синергия», г. Москва
sharovadaria2000a@mail.ru

Аннотация. В статье рассматривается актуальность внедрения цифровых образовательных ресурсов в учебный процесс учреждений среднего профессионального образования (СПО). Проведен сравнительный анализ отечественных онлайн-платформ, адаптированных для преподавания математических дисциплин. Особое внимание уделено соответствию функционала ресурсов требованиям Федеральных государственных образовательных стандартов (ФГОС) СПО. Выявлены преимущества и ограничения популярных российских сервисов в контексте формирования профессиональных компетенций обучающихся

Ключевые слова: среднее профессиональное образование, математика, цифровые ресурсы, образовательные платформы, цифровизация, ФГОС СПО.

Среднее профессиональное образование (СПО) в России переживает этап активной цифровизации. В рамках федерального проекта «Профессионалитет» и обновления ФГОС СПО перед преподавателями общеобразовательных дисциплин, в частности математики, стоит сложная задача. Математика в колледжах и техникумах выступает не только как общеобразовательная дисциплина, но и как фундамент для освоения профессиональных модулей, особенно в технических, экономических и IT-специальностях. Использование отечественных цифровых ресурсов позволяет реализовать индивидуальный подход, автоматизировать контроль знаний и сделать абстрактные математические понятия более наглядными. Преподаватели в СПО сталкиваются с рядом проблем: разнородный уровень математической подготовки абитуриентов, сокращение аудиторных часов на общеобразовательный цикл и необходимость прикладной направленности знаний. Традиционные методы обучения не всегда позволяют эффективно нивелировать пробелы в знаниях и индивидуализировать траекторию обучения. В связи с этим возникает потребность в качественных отечественных цифровых ресурсах, которые были бы доступны, методически грамотны и соответствовали бы нормативным требованиям РФ.

Выбор цифрового ресурса для работы в системе СПО должен базироваться на нескольких критериях: соответствие содержанию программ подготовки квалифицированных рабочих и служащих (ППКРС) или специалистов среднего звена (ППССЗ), наличие аналитики успеваемости, адаптивность интерфейса и серверное расположение данных на территории России.

Многообразие существующих программных продуктов требует систематизации. Для целей преподавания математики в колледже все отечественные цифровые ресурсы можно разделить на четыре основные группы.

1. Комплексные образовательные платформы (LMS и экосистемы). Данные ресурсы позволяют организовать полный цикл обучения: от размещения лекционных материалов до проведения тестирования и отслеживания прогресса.

2. Репозитории образовательного контента – библиотеки готовых учебных материалов, видеоуроков, интерактивных заданий, соответствующих школьной и профессиональной программе.

3. Специализированное математическое программное обеспечение (ПО) – инструменты для визуализации, вычислений, построения графиков и моделирования, разработанные российскими компаниями.

4. Сервисы коммуникации и вебинарного обучения [1].

Комплексные образовательные платформы. Лидером в сегменте коммуникационных и образовательных решений в РФ на данный момент является платформа «Сферум» [5]. Данный сервис, разработанный на базе технологий VK и «Ростелекома», позиционируется как безопасная образовательная среда. Для преподавателя математики «Сферум» предоставляет возможность создания видеоконференций без ограничений по времени (в отличие от бесплатных версий зарубежных аналогов), интеграции с электронным журналом и создания чатов для учебных групп.

Преимуществом «Сферума» для СПО является его доступность для государственных учреждений и соответствие требованиям по защите данных. Однако, как коммуникационный инструмент, он не содержит встроенного специализированного математического функционала.

Отдельное внимание заслуживает платформа «1С: Образование» [4]. Экосистема «1С» широко распространена в профессиональной среде, особенно в экономических и технических колледжах. Использование продуктов «1С» для обучения математике имеет двойную выгоду: студенты осваивают интерфейс, с которым столкнутся на рабочем месте, и получают доступ к качественным учебным материалам. В рамках данной платформы существуют курсы по математике, включающие тестовые задания с автоматической проверкой. Интеграция с системами учета учебного процесса делает «1С» удобным инструментом для администрации, однако гибкость настройки под конкретные методические задачи преподавателя может быть ограничена лицензионными условиями.

Платформа «Stepik» представляет собой российскую систему управления обучением с открытым кодом. Она позволяет преподавателям самостоятельно создавать интерактивные курсы. Для математики это открывает широкие возможности: можно встраивать задачи с программированием (для IT-специальностей), использовать адаптивное тестирование. Уникальность «Stepik» заключается в сильном комьюнити: преподаватель может взять за основу существующий курс по высшей или прикладной математике и адаптировать его под свою программу СПО. Это существенно экономит время на подготовку материалов.

Репозитории образовательного контента. Федеральная платформа «Российская электронная школа» (РЭШ) содержит обширную библиотеку видеоуроков и тренировочных заданий [2]. Несмотря на ориентацию на школьную программу, разделы старшей школы (алгебра, начала анализа, геометрия) полностью перекрывают базовый модуль математики в СПО. Для преподавателей колледжей РЭШ служит источником качественного контента для организации перевернутого класса (Flipped Classroom). Студенты могут просматривать теоретический материал дома, а аудиторное время посвящать решению профессионально-ориентированных задач.

Платформа «ЯКласс» также является российским продуктом, специализирующимся на отработке навыков через тренажеры. Генератор заданий позволяет создавать уникальные варианты контрольных работ, что минимизирует риски списывания. В контексте СПО данный ресурс эффективен на первых курсах для ликвидации академической задолженности и подтягивания базового уровня знаний, так как многие абитуриенты колледжей приходят с пробелами в школьной программе.

Специализированное математическое ПО. Долгое время стандартом в обучении математике являлась система динамической математики GeoGebra. В условиях необходимости импортозамещения внимание переключается на отечественные разработки. На рынке присутствуют российские аналоги и надстройки, такие как «Живая математика» (хотя ее развитие замедлилось) и различные модули на базе российских CAD-систем (например, «Компас-3D»), которые включают математические инструменты для инженерных специальностей.

Для экономических специальностей актуально использование отечественных табличных процессоров в составе офисных пакетов (например, «МойОфис» или «Р7-Офис»). Преподавание раздела «Теория вероятностей и математическая статистика» может быть эффективно реализовано через практические задания в данных средах, что формирует у студентов навыки работы с отечественным софтом, востребованные на предприятиях. Также стоит отметить развитие облачных сервисов для вычислений, таких как «Яндекс.Вычисления» (в составе экосистемы Яндекса), которые начинают внедряться в образовательный процесс для демонстрации сложных зависимостей.

Платформа «Открытое образование» (openedu.ru) объединяет курсы от ведущих вузов страны. Для СПО интерес представляют курсы по высшей математике, теории вероятностей и статистике. Интеграция таких материалов в программу позволяет реализовать принцип преемственности между СПО и ВО, что актуально для студентов, планирующих продолжение обучения в университете. Однако сложность контента требует методической адаптации со стороны преподавателя колледжа.

Главная проблема преподавания математики в СПО – оторванность абстрактных формул от реальной практики. Цифровые ресурсы позволяют сокращать этот разрыв. Например, при изучении темы «Производная и ее применение» для студентов строительных специальностей можно использовать задачи на оптимизацию затрат материалов, смоделированные в отечественных CAD-системах. Для экономических специальностей раздел «Теория вероятностей» должен быть неразрывно связан с анализом финансовых рисков, где в качестве инструмента выступают «МойОфис Таблицы» или «1С».

Важно, чтобы цифровые задания имитировали реальные производственные ситуации. Преподаватель может создавать на платформах сценарии, где ошибка в математическом расчете ведет к виртуальной аварии или финансовым потерям в симуляции. Это повышает ответственность и мотивацию. Интеграция с профессиональными модулями требует от преподавателя математики тесного сотрудничества с мастерами производственного обучения. Совместная разработка цифровых кейсов, где математика выступает инструментом решения профессионально-ориентированных, является лучшим способом реализации требований ФГОС СПО к междисциплинарным связям [3].

Одним из скрытых преимуществ цифровизации является сбор больших данных об учебной деятельности. LMS-платформы и специализированные сервисы накапливают статистику: время, затраченное на решение задачи, количество попыток, типичные ошибки. Анализ этих данных позволяет переходить от констатирующего контроля к предиктивному. Преподаватель может заранее выявить студентов, которые испытывают трудности в процессе обучения, основываясь на динамике их работы в цифровом контуре.

Эффективность использования рассмотренных ресурсов напрямую упирается в цифровую грамотность педагога. В рамках проекта «Профессионалитет» уделяется большое внимание повышению квалификации, однако темпы обновления ПО опережают программы курсов. Преподавателю математики в СПО сегодня недостаточно знать предмет; он должен владеть навыками педагогического дизайна, уметь монтировать видео, настраивать сценарии тестирования и работать с облачными сервисами.

Использование перечисленных ресурсов позволяет реализовать компетентностный подход, заложенный в ФГОС СПО третьего поколения. Цифровые тренажеры способствуют формированию умения применять математические методы для решения профессиональных задач. Аналитические модули платформ дают возможность объективизировать оценку знаний, минимизируя субъективный фактор.

Проведенный анализ позволяет сделать вывод, что в Российской Федерации сформирована достаточная экосистема отечественных цифровых ресурсов для проведения занятий по математике в системе среднего профессионального образования. Платформы «Сферум», «Stepik», «РЭШ», «1С: Образование» и другие предоставляют необходимый функционал для организации лекционной, практической и контрольной работы.

Однако эффективность использования данных инструментов напрямую зависит от методической подготовки преподавателя и технической оснащенности учреждения. Цифровые ресурсы отечественной разработки предлагают широкий спектр инструментов для модернизации преподавания математики в СПО. Комбинация федеральных платформ (для базы), курсовых систем вроде Stepik (для углубления) и LMS (для администрирования) позволяет создать современную образовательную среду.

Главная задача преподавателя сегодня – не просто транслировать знания, а выступать навигатором в цифровом пространстве, помогая студенту выстроить индивидуальную траекторию обучения. Внедрение рассмотренных ресурсов способствует повышению мотивации студентов, объективности оценки и, как следствие, качеству подготовки будущих специалистов.

Литература

1. Клименкова, О. И. Обзор цифровых образовательных ресурсов для помощи учителям математики // Научный Лидер. 2025. – №25 (226). URL: https://scilead.ru/article/9462-obzor-tsifrovikh-obrazovatelnikh-resursov-dly.

2. О проекте : [сайт] // Российская электронная школа : офиц. сайт. URL: https://resh.edu.ru/about (дата обращения: 14.02.2026).

3. Приказ Минпросвещения РФ от 12.09.2023 № 674 «Об утверждении Порядка организации и осуществления образовательной деятельности по образовательным программам среднего профессионального образования». URL: https://normativ.kontur.ru/document?moduleId=1&documentId=458638 (дата обращения: 29.01.2026).

4. Цифровые образовательные продукты : [сайт] // 1С:Образование : офиц. сайт. URL: https://obrazovanie.1c.ru/products/ (дата обращения: 10.02.2026).

5. Что такое Сферум : [сайт] // Сферум : офиц. сайт. URL: https://www.sferum.ru/about (дата обращения: 06.02.2026).

A REVIEW OF DOMESTIC DIGITAL RESOURCES FOR TEACHING MATHEMATICS IN SECONDARY VOCATIONAL EDUCATION

Titarenko Daria Andreevna
Synergy Moscow University, Moscow
sharovadaria2000a@mail.ru

Abstract. This article examines the relevance of integrating digital educational resources into the educational process at secondary vocational education institutions. A comparative analysis of domestic online platforms adapted for teaching mathematics is conducted. Particular attention is paid to the compliance of resource functionality with the requirements of Federal State Educational Standards (FSES) for secondary vocational education. The advantages and limitations of popular Russian services in the context of developing students' professional competencies are identified.

Keywords: secondary vocational education, mathematics, digital resources, educational platforms, digitalization, FSES for secondary vocational education.

УДК 372.8

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ЭЛЕКТРОННЫХ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ РЕСУРСОВ ПРИ ОБУЧЕНИИ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ РЕШЕНИЮ ТЕКСТОВЫХ ЗАДАЧ

Чумак Ольга Александровна[1], Баранова Виктория Вячеславовна[1]
[1,2]ТИ им. А.П. Чехова ФГБОУ ВО «Ростовский государственный экономический университет», г. Таганрог
[1]olacumak10@gmail.com, [2]viktoriabaranova144@gmail.com

Аннотация. В статье обосновывается актуальность применения ЭОР при обучении младших школьников решению текстовых задач. В работе дается краткий обзор образовательных платформ, а также разработан комплект интерактивных упражнений направленных на формирование умений у обучающихся начальной школы решать текстовые задачи.

Ключевые слова: информационная образовательная среда (ИОС), электронные образовательные ресурсы (ЭОР), цифровые образовательные ресурсы (ЦОР), образовательные платформы, текстовая задача, начальная школа.

Одной из приоритетных задач современного российского образования является научить каждого ребёнка за короткий промежуток времени осваивать, преобразовывать и применять на практике приобретенную информацию. Помочь учителю в решении этой непростой задачи может сочетание традиционных методов обучения и современных информационных технологий (ИТ). Разработка и применение ИТ становятся одним из эффективных направлений повышения качества обучения, они позволяют сделать учебный процесс более гибким, интересным и доступным для школьников. В частности, для повышения эффективности обучения на уроках математики активно используют презентации, компьютерные тренажеры, обучающие игры и программы, помогающие закрепить знания, навыки, развить логическое мышление.

Использование электронных образовательных ресурсов (ЭОР) в сочетании с традиционными методами обучения позволяет обучающимся улучшить усвоение материала и открывает широкие возможности для разработки разнообразных задач и заданий по математике в различных форматах [4].

Проблема обучения решению текстовых задач младших школьников всегда была и остается одной из самых актуальных, так как умение решать текстовые задачи – один из важных показателей уровня математического развития в начальной школе. Решение задач в рамках учебного курса математики является очень важным, для многих обучающихся начальной школы материал является сложным. Младшие школьники имеют недостаточно развитые навыки анализа текстовых задач, что приводит к неспособности видеть взаимосвязь между искомым и исходными данными, отсутствию умения организовывать процесс решения, к нежеланию тщательно осмыслить представленные в задаче отношения. В результате обучающиеся овладевают только простыми вычислениями, игнорируя продуманный подход к решению задачи.

Использование ЭОР на уроках математики в начальной школе помогает сделать процесс решения текстовых задач интерактивным и доступным для детей. С помощью компьютерных программ обучающиеся могут видеть анимации, графики и визуальные модели, которые помогают им лучше понять условия задачи. Кроме того, ЭОР позволяет создавать интерактивные упражнения, которые помогают младшим школьникам развивать навыки анализа и решения математических задач.

Важнейшей задачей современного учителя является умение качественно организовывать свою профессиональную деятельность в условиях информационной образовательной среды (ИОС). Согласно ГОСТ Р 53620–2009 «Информационно-образовательная среда; ИОС: Система инструментальных средств и ресурсов, обеспечивающих условия для реализации образовательной деятельности на основе информационно-коммуникационных технологий» [3].

ИОС образовательного учреждения должна обеспечивать возможность осуществлять в цифровой форме следующие виды деятельности (рис. 1).

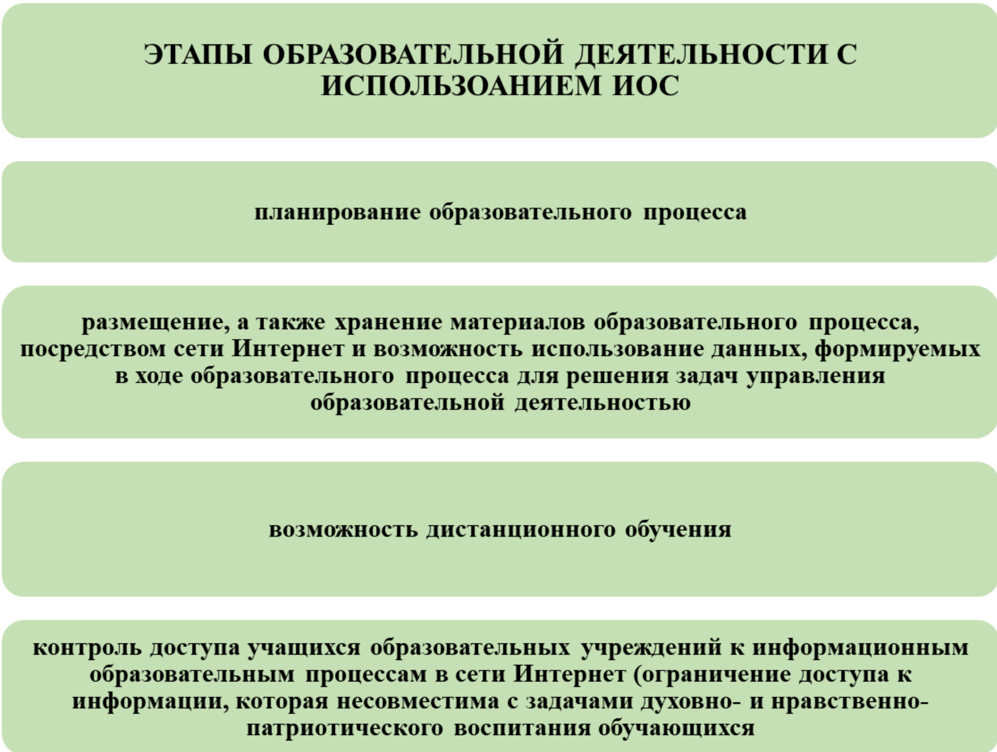


Рис. 1. Этапы образовательной деятельности с использованием ЭОР

Дидактический потенциал ИОС позволяет использовать информационно-образовательную среду, как эффективный инструмент для реализации взаимодействия обучающихся образовательного процесса с окружающим миром, учителя с обучающимися и учеников друг с другом. Средствами такого взаимодействия определяются используемые инструменты, в качестве которых выступает ЭОР. Электронные образовательные ресурсы – это любые информационные ресурсы, предназначенные для организации учебного процесса. К ЭОР относят: учебные видеофильмы и звукозаписи, обучающие материалы, которые можно воспроизвести на компьютере.

Подмножеством ЭОР являются цифровые образовательные ресурсы (ЦОР), так как компьютер использует цифровые способы записи воспроизведения [2]. Как считают Аспицкая А.Ф. и Кирсберг Л. В. под ЦОР обычно понимают любую информацию образовательного характера, сохраненную на цифровых носителях [1]. Цифровые образовательные ресурсы разнообразны: педагогические блоги или сайты, различные методические и дидактические пособия, созданные с помощью инструментальных компьютерных систем, упражнения, игры и т.д. Фундаментом среди ресурсов являются образовательные платформы. Все остальные ресурсы базируются на образовательных платформах, дополняют их и расширяют их возможности [5].

Кратко остановимся на наиболее популярных и эффективных образовательных платформах.

«Российская электронная школа» (РЭШ) – это интерактивные уроки по всему школьному курсу с 1 по 11 класс от лучших учителей страны, созданные для того, чтобы у каждого ребёнка была возможность получить качественное общее образование. Каждый урок включает видеоролик, конспект, систему упражнений и тест для итоговой диагностики. На платформе РЭШ все материалы являются бесплатными.

«InternetUrok.ru» – это библиотека с видеоуроками по основным предметам школьной программы. Видеоуроки снабжены анимацией, различными иллюстрациями, ссылками на тематические ресурсы, конспектами, тестами, интерактивными заданиями. Платформа портала обеспечивает обратную связь с обучающимися – возможность задать вопрос учителю. Материалы постоянно обновляются и пополняются.

«ЯКласс» – платформа электронного образования для школ, обучающая онлайн-площадка для школьников и их родителей. Материалы для платформы разрабатывают педагоги-профессионалы с большим опытом, опираясь на ФГОС. Материалы расположены по темам и соответствуют основной общей программе.

«Wordwall» – многофункциональный онлайн-инструмент для создания как интерактивных, так и печатных материалов. С помощью этого ресурса можно организовать индивидуальное обучение, создавая различные интерактивные упражнения, учитывая возможности ребенка. Программа Wordwall проста в использовании и помогает создавать разные виды упражнений, подходящие, как для интерактивной доски, так и для индивидуальной работы на компьютерах (планшетах, телефонах). Данная платформа не требует особых знаний от педагога для создания интерактивных упражнений.

«Взнания» – российский конструктор, предназначенный для создания интерактивных материалов к урокам. Первоначально сервис был ориентирован на уроки иностранного языка, но сейчас функционал усилен. На платформе можно создавать интерактивные уроки на заучивание или на проверку знаний, а также обучающие игры и интерактивные видео со встроенными заданиями. И одной из особенностей «Взнания» является возможность проводить соревнования между учениками в режиме реального времени.

«LearningApps.org» – это бесплатный онлайн-конструктор, разработанный в Германии. Интерфейс переведён на 21 язык, включая русский. Доступ полностью бесплатный и доступна библиотека упражнений, даже для незарегистрированных пользователей.

Остановимся более подробно на образовательной платформе «LearningApps.org». Инструменты «LearningApps.org» позволяют создавать интерактивные задания разных видов: викторина, сортировка, группировка, классификация, ввод текста, кроссворд, лента времени и многое другое. Выбор инструментов обусловлен программным материалом и целью создания приложения. Широко используется текст, звук, видео, анимация, вовлекая разные каналы восприятия информации обучающихся.

Школьный предмет математика в начальных классах считается одним из сложных для изучения и требует особого внимания. Именно поэтому многие младшие школьники недолюбливают этот предмет. Важно привить обучающимся любовь к предмету. Здесь может прийти на помощь образовательная платформа «LearningApps.org» – сервис позволяющий обеспечить интерактивную и увлекательную форму обучения.

Рассмотрим несколько способов использования платформы в образовательном процессе. Платформа «LearningApps.org» может быть эффективно использована для создания игровых заданий. Педагог может создавать интерактивные задания, которые помогут ученикам закрепить и проверить математические понятия.

Решение текстовых задач всегда было одной из ключевых проблем в начальном курсе математики. Для решения этой проблемы учитель использует различные стратегии. Учебники и дополнительные материалы могут помочь детям узнать ключевые слова и фразы (для более легкого понимания условия текстовой задачи), их соответствие математическим операциям. Цифровые образовательные ресурсы являются эффективным инструментом для обучения младших школьников решению текстовых задач. Они могут помочь обучающимся лучше понять материал, улучшить активность и мотивацию, а также развить навыки решения задач и критического мышления.

На базе образовательной платформы «LearningApps.org» нами создан комплект интерактивных упражнений с целью выработки умений у младших школьников решать текстовые задачи.

В процессе обучения решению задач многие младшие школьники сталкиваются с проблемой неумения отличать условие и вопрос в задаче. Эта проблема может привести к неправильному пониманию задачи и, в результате, к неправильному решению. Именно поэтому нами были созданы увлекательные задания, которые помогут обучающимся начальной школы понять, где в текстовой задаче условие, а где требование.

Задание. Найдите условие, найдите требование.

1. Мама испекла 5 пирожков с малиной и 6 пирожков с вишней.

2. На сколько килограммов яблок папа собрал больше, чем сын?

3. Сколько рублей Маша заплатила за покупку 5 ручек?

4. В буфете стоит 16 блюдец, а кофейных чашек на 7 меньше.

Суть данного задания заключена в том, что необходимо распределить предложенные высказывания по группам: условие/требование.

С помощью, следующего задания младшие школьники смогут с легкость понять, что требуется найти в данной задаче, так как им нужно будет сопоставить условие с вопросом. Школьником предлагается условие задачи и два варианта вопроса к ней, необходимо выбрать нужный вопрос.

Задание. К каждому условию задачи подбери соответствующий вопрос.

1) Буратино нашел 5 золотых ключей и 6 медных ключей. А) Сколько золотых ключей нашел Буратино? Б) Сколько всего ключей нашел Буратино?

2) В вазе стоит 13 роз, а хризантем на 8 больше. А) Сколько всего цветов стоит в вазе? Б) Сколько роз стоит в вазе?

Умение анализировать и понимать текстовые задачи является важным навыком для младших школьников. Одним из ключевых аспектов такого анализа является способность отличать условие и вопрос в задаче. Именно на это были и направлены наши предыдущие два задания.

Задания, представленные ниже, направлены на закрепление умений решать текстовые задачи разных видов.

Задание. Найди правильный ответ к задаче.

Пример задачи. *В кошельке у Светы 50 рублей бумажными купюрами и 23 рубля монетами. Сколько всего денег у Светы? А) 73 руб. Б) 78 руб. В) 69 руб. Г) 27 руб.*

Данное задание напоминает игру «Кто хочет стать миллионером?», обучающимся предлагается решить задачу и выбрать один верный вариант ответа. Если выбор был верен, то ученику начисляются баллы, при выборе неправильного ответа все баллы аннулируются, и игра на этом завершается.

Задание. Реши задачу и выбери правильный ответ среди предложенных вариантов.

Пример задачи. *Купили 3 эскимо по 5 руб. и 4 пломбира. За всю покупку заплатили 43 руб. Сколько стоит пломбир? А) 7 руб. Б) 9 руб. В) 28 руб. Г) 6 руб.*

Данный вид игры называется «Скачки» и носит соревновательный характер. Обучающиеся решают предложенные задачи и выбирают правильный ответ, выигрывает тот, кто придет к финишу первый. На экране видно на каком этапе находится противник, как далеко он продвинулся, и, следовательно, можно понять сколько нужно приложить усилий, чтобы обогнать противника и одержать победу.

Особое место в математике занимают задачи нестандартного вида. Такие задачи не имеют стандартного алгоритма или метода решения, поэтому требуют от ученика гибкого мышления и способности применять разные стратегии.

Задание. Реши задачу. Заполни таблицу, используя условные обозначения: + истина; – ложь.

Пример задачи. *Медведь, лиса и заяц живут в трехэтажном доме. Медведь и заяц не живут на нижнем этаже. Заяц никогда не жил на верхнем этаже. На каком этаже живет каждый из зверей?*

Наше упражнение направлено на то, чтобы развить у детей навыки анализа и обобщения. Ребятам предлагается заполнить таблицу, используя условные обозначения: «+» истина; «–» ложь. Согласно условию задачи, расставить знаки и определить на каком этаже живет каждый зверь. Преимущество данного задания в том, что его можно решать коллективно (по группам или в парах) и нет ограничений по времени, а значит, будет время все обдумать, проанализировать и выстроить план решения.

Обучение этапам решения текстовых задач помогает младшим школьникам преодолеть страх перед задачей, дает алгоритм действий, развивает самостоятельность, стремление к достижению цели. Процесс решения задач требует от обучающихся усидчивости и настойчивости, поскольку решения могут быть достигнуты только при последовательном выполнении всех этапов.

Задания, подобные представленному ниже помогут обучающимся закрепить навыки умения решать задачи согласно единому алгоритму.

Задание. Разложи карточки по порядку, согласно каждому этапу при решении задачи.

Карточка №1. В цветочном магазине продавалось 26 хризантемы, а лилий на 7 больше. Сколько всего цветов продавалось в магазине?

Карточка №2. Ответ: всего 59 цветов продавалось в магазине.

Карточка №3. Проверка:

1)59-26=33 (л.) – продавалось лилий.

2)33-26=7 (л.) – разница.

Карточка №4. Решение:

1)26+7=33 (л.) – продавалось лилий.

2)26+33=59 (ц.) – всего цветов.

Карточка №5. Схема к задаче.

Детям предлагается 5 карточек, на которых расписаны этапы решения задачи в хаотичном порядке. Суть задания в том, что за ограниченное количество времени необходимо разложить карточки по порядку, согласно каждому этапу при решении задачи. Если ребенок неправильно расставил карточки, то система подскажет игроку, где ошибка и даст возможность исправиться.

Разработанный комплекс заданий представляет собой инструмент, обеспечивающий успешное усвоение темы у обучающихся, позволяет учителю предоставить дополнительный материал для младших школьников с целью достижения максимального учебного эффекта. Главная цель интерактивных заданий, созданных нами на образовательной платформе «LearningApps.org», – дать возможность младшим школьникам проверить и закрепить свои знания и умения решать текстовые задачи в игровой форме, выработать обобщенные умения и навыки их решения. Такой подход способствует развитию познавательного интереса к математике и к текстовым задачам в целом. Разработанная система упражнений идеально подходит для обучающихся, которые учатся дома или по индивидуальной программе. Применение интерактивных методов обучения делает образовательный процесс более привлекательным и интересным для младших школьников, развивает их нетрадиционное мышление, учит сотрудничеству и коммуникации.

Таким образом, использование ЦОР в обучении решению текстовых задач содействует созданию интерактивной, доступной и стимулирующей учебной среды, способствуя глубокому усвоению материала и развитию навыков, необходимых для успешного освоения этого важного раздела математики. Использование ЦОР в процессе обучения способствует его совершенствованию, повышению его эффективности в области формирования новых знаний, умений, навыков младших школьников, автоматизации контроля уровня знаний.

Литература

1. Аспицкая, А. Ф. Использование информационно-коммуникационных технологий при обучении химии: методическое пособие / А. Ф. Аспицкая, Л. В. Кирсберг. – Москва: Лаборатория знаний, 2020, – 357 с. – Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. – URL: https://www.iprbookshop.ru/89076.html (дата обращения 25.02.2024).

2. Ахмадеева, Р. М. Цифровые образовательные ресурсы как составляющая инновационной образовательной среды современного профессионального образования / Р. М. Ахмадеева // Педагог цифрового поколения: материалы Все-рос. науч.-практ. конф. 26 окт. 2022 г. / отв. ред.: М. Г. Савельева, Т. С. Ходырева. – Ижевск: Удмуртский ун-т, 2022. – 339 с.

3. ГОСТ Р 53620-2009 Информационно-коммуникационные технологии в образовании. Электронные образовательные ресурсы. Общие положения : национальный стандарт РФ: дата введения 2011-01-01 / разработан ГОУ ВПО Московским государственным технологическим университетом «Станкин» (Специализированный центр новых информационных технологий). – URL: https://internet-law.ru/gosts/gost/50209 (дата обращения 25.02.2024).

4. Гребенникова, Н. Л. Проблемы в обучении младших школьников решению текстовых задач / Н. Л. Гребенникова, А. С. Золотова, Т. П. Севастьянова // COLLOQUIUM-JOURNAL, 2019. – № 13-5 (37). – URL: https://elibrary.ru/item.asp?id=27276845 (дата обращения 25.02.2024).

5. Лебедева, М. Б. Модернизация цифровой образовательной среды образовательной организации / М. Б. Лебедева // Методические рекомендации по формированию цифровой образовательной среды в образовательной организации / Сост.: Смирнова Е. Н. – СПб: ГБУ ДПО «СПбЦОКОиИТ», 2022. – С. 21–24.

THE USE OF ELECTRONIC EDUCATIONAL RESOURCES IN TEACHING PRIMARY SCHOOL STUDENTS HOW TO SOLVE TEXT PROBLEMS

Chumak Olga Alexandrovna[1], Baranova Victoria Vyacheslavovna[2]
[1,2]A.P. Chekhov Taganrog Institute (branch) of the Russian State Economic University (RINH)
[1]olacumak10@gmail.com, [2]viktoriabaranova144@gmail.com

Abstract. The article substantiates the relevance of the use of electronic educational resources in mathematics lessons when teaching younger students to solve text problems. The paper provides a brief overview of educational platforms, as well as a set of interactive exercises aimed at developing the skills of elementary school students to solve text problems.

Keywords: information educational environment, electronic educational resources, digital educational resources, educational platforms, text task, elementary school.

СЕКЦИЯ 3
АКТУАЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ МЕТОДИКИ ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИКИ В ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ УЧРЕЖДЕНИЯХ

УДК 512.6

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ С ПАРАМЕТРАМИ: ОТ ШКОЛЬНОЙ ДОСКИ ДО КОСМИЧЕСКИХ ТЕХНОЛОГИЙ

Будникова Диана Андреевна
dianka.sviridova.95@mail.ru
Научный руководитель: Пашкова Юлия Сергеевна
КФУ имени В.И. Вернадского, г. Симферополь
j_pashkova@mail.ru

Аннотация. В статье анализируются методы решения уравнений и неравенств с параметрами, от базовых до сложнейших инженерных расчетов. Показана актуальность темы в эпоху цифровизации и автоматизации высокотехнологичных отраслей (ракетостроение, судостроение, радиотехника). Примеры формул и задач иллюстрируют применение параметрических моделей для обеспечения надежности, эффективности и точности проектируемых систем.

Ключевые слова: уравнения с параметрами, неравенства с параметрами, ракетостроение, судостроение, радиотехника, инженерные расчеты.

Введение. Уравнения и неравенства с параметрами традиционно считаются одними из самых сложных разделов математики [4]. В отличие от стандартных задач, где нужно найти конкретное число, здесь требуется провести полноценное исследование: проанализировать, как ведет себя система при изменении внешних условий (параметров). Фактически, это переход от статической математики к динамическому моделированию реальных процессов.

В эпоху цифровизации и автоматизации решение задач с параметрами перестало быть просто упражнением для развития логики. Любая современная инженерная задача — это поиск оптимальных параметров. Как изменится устойчивость моста при усилении ветра? Какую массу топлива выбрать для вывода спутника на орбиту при разной плотности атмосферы? Ответы на эти вопросы можно найти в теории параметров.

Существует три основных подхода к решению таких задач. В инженерной практике решение уравнений с параметрами редко ограничивается простым подбором. Рассмотрим ключевые аналитические и графические модели.

Аналитический метод. Решение строится на основе логических случаев. Последовательно рассматривается контрольные значения показателей, при которых структура уравнения меняется (например, коэффициент при высшей степени превращается в ноль или дискриминант меняет знак) [10].

В ракетостроении часто возникают задачи на поиск стабильных состояний, которые описываются уравнением вида:

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

где коэффициенты a, b, c зависят от параметров системы (например, тяги или массы).

Пример: найти значения параметра a, при которых система управления имеет хотя бы одно решение (стабильный режим):

$$(a-1)x^2 + 2(a+1)x + a - 2 = 0$$

Решение. Если $a = 1$, уравнение становится линейным: $4x - 1 = 0 \Rightarrow x = 0{,}25$ (одно решение). Если $a \neq 1$, условие наличия корней – дискриминант $D \geq 0$:

$$D = [2(a+1)]^2 - 4(a-1)(a-2) = 4(a^2 + 2a + 1) - 4(a^2 - 3a + 2) =$$
$$= 20a - 4,$$
$$20a - 4 \geq 0 \Rightarrow a \geq 0{,}2.$$

Получаем, что режим стабилен при $a \in [0{,}2; +\infty)$.

Преимуществом аналитического метода считаем строгость и точность, сложностью – громоздкие выкладки и риск упустить частный случай.

Графический метод (на плоскости *XOY*). Здесь параметр a фиксирован, строим графики функций для левой и правой частей уравнения. Решением будет количество точек пересечения в зависимости от расположения графиков.

Пример: движение прямой или окружности по плоскости, где их положение зависит от параметра.

Метод области (на плоскости *XOA*). Один из самых эффективных современных методов. Строится график в осях «переменная – параметр». В этом случае решение уравнения или неравенства представляет собой некоторую геометрическую область или линию. Проводя горизонтальные линии (соответствующие конкретному значению a), сразу видны все корни уравнения [2]. Этот метод незаменим в судостроении при расчете зон остойчивости. Параметр a рассматривается как вторая координатная ось.

Пример: определить, при каких a уравнение $|x-2| = a$ имеет два корня.

Решение. Построим график функции $f(x) = |x-2|$ в осях x (горизонталь) и a (вертикаль): «галочка» с вершиной в точке $x = 2,\ a = 0$. При $a > 0$ любая горизонтальная прямая $a = const$ пересекает график в двух точках.

Применение: так инженеры находят «безопасные коридоры» значений, при которых параметры судна (угол крена) не приводят к критическим значениям.

Уравнения с параметрами в технике и экономике. Математика параметров – это язык, на котором «разговаривают» современные системы проектирования [5]. Так, в ракетостроении параметры определяют траекторию полета. Переменными являются координаты и скорость, а параметрами – масса полезной нагрузки, тяга двигателя и коэффициент сопротивления воздуха. Уравнение Мещерского, например, с параметром расхода описывает движение ракеты, где параметром выступает скорость истечения газов a и секундный расход массы k :

$$m(t)\cdot\frac{dv}{dt}=a\cdot k\;-\;F_{сопр}(v,H).$$

Масса ракеты $m(t)=m_0-kt$.

Пример: найти время t, за которое ракета достигнет первой космической скорости, если параметр k (расход топлива) ограничен техническими характеристиками двигателя.

Здесь решается уравнение с параметром в знаменателе логарифма:

$$V(t)=a\;\cdot ln\left(\frac{m_0}{m_0-kt}\right)-gt.$$

Инженеры моделируют семейство графиков $v(t)$ для различных k , чтобы найти оптимальный режим работы двигателя для вывода спутника [3; 9].

Пример: необходимо рассчитать время работы двигателя t для достижения нужной скорости V, где параметром выступает удельный импульс топлива a:

$$V(t)=a\;\cdot ln\left(\frac{m_0}{m_0-kt}\right).$$

Здесь a — параметр. Инженеры решают это уравнение относительно t для разных типов топлива (разных значений a), чтобы выбрать наиболее эффективный вариант для конкретной массы полезной нагрузки.

Применение: расчет «окна старта». Уравнения движения ракеты решаются относительно параметров внешней среды. Если параметры (например, скорость ветра) выходят за допустимые границы неравенства, автоматика отменяет пуск.

В судостроении и кораблестроении при проектировании судов важнейшим параметром является метацентрическая высота (показатель устойчивости h). Уравнение момента восстанавливающей силы M выглядит так [8]:

$$M(\theta)=P\cdot\left(h\cdot sin\,\theta+\frac{1}{2}r\cdot tan^2\,\theta\cdot sin\,\theta\right),$$

где θ – угол крена (переменная), h – параметр (зависит от распределения груза), P – вес судна.

Инженерная задача состоит в том, чтобы решить неравенство $M(\theta)>M_{\text{ветра}}$ при условии изменения параметра h. Если при погрузке центра тяжести выше критического (h уменьшается), судно потеряет остойчивость при меньшем угле крена. Инженеры решают неравенство относительно h, чтобы задать нормы погрузки [1]. Инженеры решают неравенства, где параметрами выступают смещение центра тяжести при погрузке и сила бокового воздействия волны. Если при определенных показателях решение системы уравнений показывает крен более критического, проект судна пересматривается.

В автомобилестроении, особенно при создании беспилотных систем, алгоритмы постоянно решают неравенства с параметрами в реальном времени. Так, в адаптивном круиз-контроле система анализирует дистанцию (переменная) при изменяющихся параметрах: коэффициенте сцепления с дорогой (лед/асфальт) и массе автомобиля.

В радиотехнике и связи в схемах приема сигналов используется уравнение колебательного контура:

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}},$$

где C – емкость (переменная настройки), а L — индуктивность (параметр).

Пример: в условиях перепада температур параметр L может изменяться (тепловое расширение). Инженер должен решить неравенство относительно температурного коэффициента, чтобы частота $\boldsymbol{\omega}$ не «уплыла» за пределы полосы пропускания: $\left|\omega_{\text{факт.}} - \omega_{\text{задан.}}\right| < \Delta\omega$. Это классическое неравенство с параметром, определяющее надежность связи в технике.

В авиастроении используется коэффициент подъемной силы (уравнение Жуковского). Подъемная сила крыла вычисляется по формуле [6]:

$$Y = C_y(\alpha) \cdot \frac{\rho v^2}{2} \cdot S,$$

где α – угол атаки (переменная), ρ – плотность воздуха (параметр, зависящий от высоты H).

Инженерная задача состоит в том, чтобы решить уравнение $Y(\alpha, \rho) = G$ (G – вес самолета) и найти допустимые углы атаки на разных высотах [5].

Поскольку на большой высоте ρ (параметр) падает, уравнение требует увеличения α или v. Это позволяет вычислить «динамический потолок» самолета – высоту, выше которой решение уравнения относительно α выходит за критический предел (срыв потока). Некоторые уравнения с параметрами, применяемые в технике и технологиях, сведены в табл. 1.

Табл. 1. Сводная таблица параметров в технологиях

Технология	Основное уравнение / неравенство	Что является параметром	Критический смысл параметра
Баллистика	$y = x\,tg\,\alpha - \frac{gx^2}{2v^2 \cos^2 \alpha}$	Начальная скорость v	Точность попадания в цель
Гидродинамика	$Re = \frac{\rho v D}{\mu}$	Вязкость среды μ	Переход от ламинарного к турбулентному течению
Прочность	$\sigma = E \cdot \in$	Модуль Юнга E	Выбор материала (сталь, титан, композит)
Энергетика	$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$	Температура холодильника T_2	Предел эффективности турбины

В экономике и логистике глобальные логистические цепочки описываются системами линейных неравенств. Параметрами здесь выступают стоимость топлива, таможенные пошлины и сроки доставки. Решение таких систем позволяет находить «критические точки», при которых маршрут перестает быть прибыльным.

Заключение. Методы решения задач с параметрами – это связующее звено между алгеброй и реальной жизнью. Умение работать с ними формирует «инженерное зрение»: способность видеть не просто формулу, а живую систему, реагирующую на изменения внешнего мира. Будь то расчет прочности атомного ледокола или программирование нейросети для управления дроном, в основе всегда будет лежать поиск тех самых значений параметра, при которых система остается стабильной, эффективной и безопасной.

Литература

1. Дорогостайский, Д. В. Теория корабля. Статика и динамика / Д.В. Дорогостайский– М.: Изд- во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2008. – 288 с.
2. Колмогоров, А. Н. Алгебра и начала анализа: уч. для 9-10 классов / А. Н. Колмогоров. – М.: Просвещение, 1979. – 368 с.
3. Левантовский, В. И. Механика космического полета в элементарном изложении / В. И. Левантовский. – М.: Наука, 1980. – 512 с.
4. Моденов, В. П. Уравнения и неравенства с параметрами: уч. пособие / В. П. Моденов. – М.: Изд-во МГУ, 2007. – 128 с.
5. Мхитарян, А. М. Аэродинамика. – М.: Машиностроение, 1976. – 448 с.
6. Прандтль, Л. Гидроаэромеханика /Л. Прандтль. – М.: ИЛ, 1951. – 612 с.
7. Самарский, А. А. Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры / А. А. Самарский, А. П. Михайлов. – М.: Физматлит, 2005. – 320 с.
8. Свечников, В. В. Теория корабля: учебник для вузов / В. В. Свечников – Л.: Судостроение. – 1985. – 432 с.
9. Феодосьев, В. И. Основы техники ракетного полета / В. И. Феодосьев – М.: Наука, 1983. – 240 с.
10. Шарыгин, И. Ф. Факультативный курс по математике: Решение задач / И. Ф. Шарыгин – М.: Просвещение, 1989. – 256 с.

METHODS FOR SOLVING EQUATIONS AND INEQUALITIES WITH PARAMETERS: FROM THE BLACKBOARD TO SPACE TECHNOLOGIES.

Budnikova Diana Andreevna
dianka.sviridova.95@mail.ru
Scientific supervisor Yulia Sergeevna Pashkova
Crimean Federal Universit V. I. Vernadsky y, Simferopol
j_pashkova@mail.ru

Abstract. This article analyzes methods for solving equations and inequalities with parameters, from basic to the most complex engineering calculations. It demonstrates the relevance of this topic in the era of digitalization and automation in high-tech industries (rocket science, shipbuilding, and radio engineering). Examples of formulas and problems illustrate the use of parametric models to ensure the reliability, efficiency, and accuracy of designed systems.

Keywords: equations with parameters, inequalities with parameters, rocket science, shipbuilding, radio engineering, engineering calculations.

УДК [377.3.016:51]:377.3.091.3-051:621.79

ОСОБЕННОСТИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ПОДГОТОВКИ БУДУЩИХ СВАРЩИКОВ

Воронина Елизавета Алексеевна
ГБ ПОО ЛНР «Луганский технологический колледж», Луганск
E-mail: elisavetta.voronina@yandex.ru

Аннотация. В статье рассмотрены основные элементы математической подготовки специалистов в области сварочного производства. Отмечается, что математика выступает не абстрактной наукой, а необходимым инструментом, гарантирующим высокое качество, надёжность и производительность при выполнении сварочных операций.

Ключевые слова: сварка, математический аппарат, математическая подготовка, профессионально-ориентированная подготовка.

Актуальность и постановка проблемы. В условиях внедрения новых материалов и технологий, профессиональная деятельность сварщика не ограничивается лишь практическими навыками, требует осознанного понимания физико-химических процессов и умения производить технологические расчеты. Это обусловлено возрастающими требованиями современного производства к качеству и точности выполнения сварочных работ. Математическое образование выступает в данном контексте не как абстрактная дисциплина, а как фундаментальный инструмент решения прикладных задач (чтение чертежей, расчет режимов сварки, оценка геометрических параметров сварных швов, прогнозирование усадки металла). Профессионально-ориентированный подход в обучении математике позволяет преодолеть разрыв между теоретической подготовкой и профессиональной деятельностью, формируя у студентов способность к техническому мышлению и алгоритмизации производственных операций, что напрямую влияет на конкурентоспособность выпускников и качество их труда.

Целью статьи является теоретическое обоснование особенностей математической подготовки будущих сварщиков.

Изложение основного материала. Современная цивилизация невозможна без металла – именно он лежит в основе возведения небоскрёбов, транспортных средств и судов. Его использование охватывает все сферы жизни: от бытовых нужд до крупной индустрии и строительства. Поэтому квалифицированный сварщик, способный собирать из металлических элементов сложные конструкции с применением электросварки, всегда остается востребованным на рынке труда.

Современные вызовы, обусловленные бурным развитием технологий, ставят перед сварщиками следующие обязательные требования:

– способность разрабатывать планы профилактики дефектов сварочных швов и методики их устранения;

– умение проводить теоретические и лабораторные исследования в рамках профиля и оформлять отчётную документацию;

– навыки проведения расчётов при решении научно-прикладных задач;

– умение конструировать технологическую модель стандартных изделий;

– создание проектной документации – подготовка чертежей готовых конструкций;

– владение математической нотацией для выражения количественных и качественных характеристик объектов;

– проведение анализа свойств будущих конструкций, оценка практической применимости результатов;

– умение применять принципы геометрических построений и измерений;

– умение формулировать цели и ставить задачи, соответствующие профессиональным обязанностям;

– использование методов изученных наук для эффективного решения производственных вопросов [1].

Все эти требования можно выполнить с достаточным количеством знаний и навыков, как и непосредственно в математической направленности, так и в междисциплинарных областях. Таким образом, одной из основных задач, которая поставлена перед системой профессионального образования, является усиление практической направленности преподавания [4]. Практическая направленность обучения математике предусматривает ориентацию содержания и методов на изучение математической теории в процессе решения задач, на формирование у студентов умений самостоятельной деятельности.

Проблеме профессиональной направленности в обучении математике в технических вузах посвящено достаточное количество исследований [3]. Так, «реализация принципа профессиональной направленности рассматривается за счет специального отбора содержания, выбора методов, форм и средств обучения. В контексте профессионально-направленного обучения математике большинство исследователей делают акцент на специфику содержания в решении профессионально-ориентированных задач» [6, с. 23]. По мнению О.Н. Федоровой: «такой подход позволяет реализовать межпредметные связи математики с профильными дисциплинами и соответствует основной цели обучения математике в колледжах технического профиля – усвоение знаний и умений, необходимых для дальнейшего успешного изучения спецдисциплин и профессиональных модулей и профессиональной деятельности» [6, с. 24].

На основе опыта преподавания учебной дисциплины «Математика» в Луганском технологическом колледже можно выделить два основных типа профессионально-ориентированных задач:

– задачи на чтение и построение чертежей, целесообразно рассматривать при изучении раздела геометрии (расстояние между точками, параллельность и перпендикулярность прямых, окружность, радиус и диаметр, сечения, многогранники, тела вращения);

– вычислительно-расчетные задачи, необходимо использовать как при изучении алгебры (проценты, пропорции) так и геометрии (многогранники, тела вращения, площадь, объём).

В табл. 1 приведены примеры соответствия основных компонентов математического аппарата в сварочном деле, обеспечивающие преобразование абстрактных алгоритмов в реальные инженерные решения.

Табл. 1. Соответствие математического аппарата в сварочном деле

Математический раздел	Применение в сварке
Теорема Пифагора	Проверка прямоугольности рамы при сборке под сварку
Длина окружности	Расчет длины кольцевого шва при сварке труб.
Проценты	Расчет содержания легирующих элементов в сплавах
Перпендикулярность прямых и плоскостей	Проверка расположения металла при изготовлении решетчатого настила (увеличение прочности за счет перпендикулярного расположения)
Многогранники	Расчет площадей и объемов изделий, количества материалов для их изготовления

В качестве средства реализации профессиональной направленности обучения математике в Луганском технологическом колледже используется комплекс разнообразных задач. Рассмотрим несколько задач, решаемых на уроках математики [5].

Задача 1. Расчет разделки кромок. Определить площадь поперечного сечения сварного шва F и массу наплавленного металла на один метр длины шва при плотности стали $\rho = 9{,}65\, г/см^3$. Исходные данные по разделке согласно ГОСТ: угол скоса кромок $\alpha = 60^\circ$; зазор между пластинами $b\ =\ 2\, мм$, притупление кромок $c\ =\ 2\, мм$, высота усиления шва (выпуклость) $g\ =\ 2\, мм$, ширина усиления шва $e\ =\ 12\, мм$.

Решение. Сначала найдем площадь зазора и треугольников разделки. Высота этой части равна толщине пластины минус притупление: $h = S - c = 10 - 2 = 8\, мм$.

Площадь зазора вычисляется по формуле: $F_1 = b \cdot S = 2 \cdot 10 = 20\, мм^2$.

Сумма двух треугольников образует один равнобедренный треугольник. Ширина основания этого треугольника рассчитывается через тангенс половины угла: $L = 2\left(h \cdot tg\dfrac{\alpha}{2}\right) = 2\left(8 \cdot tg30^\circ\right) \approx 2 \cdot 8 \cdot 0{,}577 \approx 9{,}23\, мм.$

Тогда площадь скоса кромок будет равна $F_2 = \dfrac{1}{2} \cdot L \cdot h = \dfrac{1}{2} \cdot 9{,}23 \cdot 8 \approx 36{,}92\, мм^2.$

Площадь выпуклости шва (площадь усиления) обычно рассчитывается по упрощенной формуле сегмента (приблизительно 2/3 от произведения ширины на высоту): $F_3 = \dfrac{2}{3} \cdot e \cdot g = \dfrac{2}{3} \cdot 12 \cdot 2 = 16\, мм^2.$

Рассчитаем общую площадь:

$$F_{общ} = F_1 + F_2 + F_3 = 20 + 36{,}92 + 16 = 72{,}92\, мм^2 = 0{,}792\, см^2.$$

Вычислим массу метала на 1 метр. Для удобства вычисления переведем длину в более подходящую систему исчисления: $L = 1\, м = 100\, см.$ Тогда объем наплавленного металла будет равен $V = F \cdot L = 0,729 \cdot 100 = 72,9$ см^3, а масса метала будет составлять $M = V \cdot \rho = 72,9 \cdot 9,65 \approx 703\,г$.

Ответ: площадь сечения шва составляет примерно 73 *мм²*. На каждый метр такого стыка уйдет около $703\,г$ чистого наплавленного металла.

Особое внимание следует уделить учету коэффициента потерь при подборе электродов или прутков – он учитывает затраты на брызги, остатки после сварки и образование шлака. Обычно масса наплавленного металла корректируется с применением поправочного множителя в диапазоне от $1,3$ до $1,5$. Таким образом, количество материала, которое необходимо приобрести на каждый погонный метр шва составляет не менее $900 - 950\,г$.

Задача 2. Компенсация тепловой деформации. Дан вектор силы тепловой усадки $\vec{F} = (300, -250)\,Н$, приложенный к верхней кромке шва. Компонента x направлена вдоль шва, а y – перпендикулярно пластине, вызывая её изгиб. Вычислите величину суммарной силы усадки $|\vec{F}|$ и определите на какой угол α сварщик должен выгнуть пластину перед началом работ, если известно, что для компенсации изгиба на каждый $1\,Н{\cdot}м$ момента деталь нужно предварительно отклонить на $0,5^{\circ}$, а расстояние от шва до точки закрепления $\vec{r} = (0, 0.2)\,м$.

Решение. Вычислим величину суммарной силы усадки используя формулу модуля вектора:

$$|\vec{F}| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{300^2 + (-250)^2} = \sqrt{90000 + 62500} = \sqrt{152500} \approx 391\,Н.$$

Определим момент силы *M,* который «выгибает» деталь. В данном плоском случае он равен произведению перпендикулярной составляющей силы на плечо и вычисляется по формуле: $M = F_x \cdot r_y = 300 \cdot 0,2 = 60\,Н \cdot м$. Тогда угол предварительного выгиба будет равен

$$\alpha = M \cdot 0,5 = 60 \cdot 0,5 = 30^{\circ}.$$

Ответ: угол, на который сварщик должен выгнуть пластину перед началом работ равен 30°, а суммарная сила тепловой усадки – $391\,Н$.

Задача 3. Расчет количества материала для изготовления оборудования. «Необходимо изготовить бункер (рис. 1), имеющий форму правильной четырехугольной призмы (без верхнего основания), длина стороны основания которого равна $2,2\,м$, высота – $3,4\,м$. Сколько метров стали необходимо для выполнения работы, если на сварочные швы следует добавить 4% материала?

Решение. Для решения данной задачи нам понадобятся знания по геометрии: определение и свойства призмы, формула нахождения полной поверхности призмы; по алгебре умения находить проценты от числа и оперировать с десятичными дробями» [2, с. 9]. Вспомним необходимые формулы для вычисления площади изготавливаемого бункера.

Полная площадь правильной четырехугольной призмы находится по формуле $S_{полн} = S_{бок} + 2S_{осн}$.

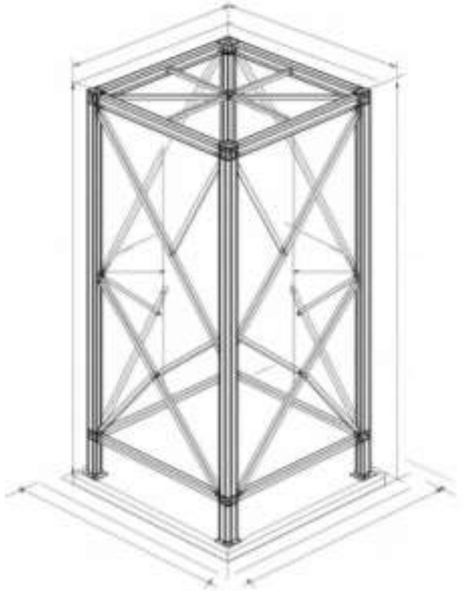


Рис. 1. Бункер, имеющий форму правильной четырехугольной призмы

Основанием призмы является квадрат, поэтому $S_{осн} = a^2$. Площадь боковой поверхности – $S_{бок} = 4ah$. По условию задачи мы должны изготовить бункер без верхнего основания, следовательно, формула полной площади примет вид:

$$S_{полн} = a^2 + 4ah. \quad (1)$$

Подставим значения в формулу (1) и вычислим ее:

$$S_{полн} = 2,2^2 + 4 \cdot 2,2 \cdot 3,4 = 4,84 + 29,92 = 34,76 \ м^2.$$

Рассчитаем полную площадь призмы с учетом добавления 4% материала на сварочные швы:

$$S_{полн} \cdot (100\% + 4\%) = S_{полн} \cdot 104\% = S_{полн} \cdot 1,04 = 34,76 \cdot 1,04 = 36,15 \ м^2.$$

Ответ: $36,15 \ м^2$ стали понадобится для изготовления бункера.

Заключение. В целях подготовки обучающихся «Луганского технологического колледжа» к будущей профессиональной деятельности при изучении учебной дисциплины «Математика» особое внимание уделяется профильной составляющей, а именно решению профессионально-ориентированных задач, которые находят отражение в темах: «Параллельность прямых и плоскостей», «Перпендикулярность прямых и плоскостей», «Многогранники. Объемы многогранников», «Тела вращения. Объемы и поверхности тел вращения», «Применение производной». Это способствует формированию четких мотивационных установок и осознанности студентами теоретической подготовки по математике с точки зрения профессиональной направленности.

Литература

1. Аксенова, А. С. Влияние математики на формирование профессиональных компетенций / А. С. Аксенова // Инфоурок : [сайт]. – URL: https://infourok.ru/vliyanie-matematiki-na-formirovanie-professionalnyh-

kompetencij-6127843.html (дата обращения: 14.02.2026).

2. Ахметова, М. Ф. Методическое пособие по решению прикладных задач по математике / М. Ф. Ахметова. – Тольятти : «ТИПК», 2016. – 13 с.

3. Бочкарева, О. В. Профессиональная направленность обучения: пути реализации и экспериментальные исследования : монография / О. В. Бочкарева, О. В. Снежкина. – Пенза : ПГУАС, 2014. – 120 с.

4. Локхарт, П. Плач математика : как мы учим математике и чему нам стоило бы учиться / П. Локхарт ; перевод с английского Ю. А. Купцова. – Москва : Альпина нон-фикшн, 2022. – 158 с.

5. Прасол, В. Д. Металлические конструкции в задачах и примерах. В 4 ч. Ч. II. Соединения металлических конструкций : учебно-методическое пособие / В. Д. Прасол ; Министерство транспорта и коммуникаций Республики Беларусь, Белорусский государственный университет транспорта. – Гомель : БелГУТ, 2018. – 37 с.

6. Федорова, О. Н. Методическая система профессионально-ориентированного обучения математике в колледжах технического профиля : специальность 13.00.02 «Теория и методика обучения и воспитания (математика)» : дис. на соискание уч. степени кандидата педагогических наук / О. Н. Федорова; [Место защиты: Ярославский государственный педагогический университет им. К. Д. Ушинского]. – Ярославль, 2016. – 268 с.

SPECIFICS OF MATHEMATICAL EDUCATION FOR ASPIRING WELDERS

Voronina Elizaveta Alekseevna

GB POO LNR "Lugansk Technological College", Lugansk

E-mail: elisavetta.voronina@yandex.ru

Abstract. The article examines the fundamental elements of mathematical training for specialists in the field of welding production. It is noted that mathematics serves not as an abstract science, but as a necessary tool, guaranteeing high quality, reliability, and productivity in the execution of welding operations.

Keywords: welding, mathematical apparatus, mathematical training, professionally oriented training.

УДК 372.851

НЕСТАНДАРТНЫЕ ФОРМЫ ПРОВЕДЕНИЯ УРОКОВ МАТЕМАТИКИ КАК СРЕДСТВО ПОВЫШЕНИЯ ПОЗНАВАТЕЛЬНОЙ АКТИВНОСТИ УЧАЩИХСЯ

Дюбо Елена Николаевна

ФГБОУ ВО «ЛГПУ», г. Луганск

dyubo_elena@mail.ru

Аннотация. В статье рассматриваются нестандартные формы проведения уроков математики как средство повышения уровня познавательной активности учащихся. Отмечается, что в результате применения таких форм учащиеся на уроке математики не только осознанно усваивают учебный материал, приобретают умения и совершенствуют математические навыки, но и получают интеллектуальную удовлетворенность и заинтересованность к предмету. В

качестве примера предложены задания для проведения урока на тему «Процентные расчеты».

Ключевые слова: познавательная активность, урок математики, нестандартные уроки.

Введение. Одной из важнейших задач обучения является обеспечение определенного гарантированного уровня математической подготовки учащихся, что обусловлено необходимостью их жизненной адаптации в развивающемся информационном мире.

Уровень вовлеченности школьников в изучение математики в значительной степени определяется качеством применяемых методик преподавания и эффективностью организации учебного процесса. Это обуславливает активное исследование инновационных подходов к обучению и методических инструментов, способных активизировать когнитивные процессы учащихся и мотивировать их к самостоятельному освоению материала.

Методология обучения, как в школьной практике, так и в специализированной литературе, традиционно подразделяется на стандартные и нестандартные подходы. Стандартный подход является наиболее распространённым и характеризуется последовательной структурой: изложение нового материала, его закрепление, контроль усвоения и последующая оценка. Критическим недостатком данного метода является формирование у обучающихся стереотипного мышления, обусловленного выполнением шаблонных заданий, ориентированных на закрепление базовых навыков и предполагающих единственный алгоритм решения. Это существенно ограничивает возможности для проявления самостоятельности, эффективного использования и развития индивидуального интеллектуального потенциала. Более того, преобладание типовых задач нивелирует развитие личностных качеств, поскольку высокая самооценка учащихся и оценка их способностей педагогическим составом преимущественно коррелируют с прилежанием и старательностью, игнорируя проявление таких индивидуальных интеллектуальных атрибутов как изобретательность, когнитивная гибкость, способность к творческому поиску, а также навыки логического анализа и синтеза.

Нетрадиционные подходы к обучению кардинально трансформируют деятельность учителя. Его главная задача – стать организатором совместного исследования, где ученики вместе ищут решения проблем. Учитель выступает как режиссер импровизированного классного спектакля, для чего ему необходимо развивать навыки активного слушания, принимая все предложения без осуждения, вникая в логику каждого ученика и умея ориентироваться в постоянно меняющихся учебных ситуациях. Нестандартные уроки, благодаря своей гибкости, делают процесс обучения более доступным и интересным, стимулируя активное участие всех учеников в освоении необходимых компетенций.

Основная часть. Традиционные уроки математики сосредоточены на теоремах, формулах и задачах, развивая математическую логику. Однако нестандартные подходы делают предмет более понятным и интересным, вовлекая всех учеников в активное обучение и приобретение знаний. Особенно важно учитывать возраст при выборе таких форм. Пятиклассники, переходящие из начальной школы в среднюю, испытывают стресс из-за смены обстановки и учителей, что часто приводит к снижению самооценки и проблемам с дисциплиной. В таких условиях дидактические игры становятся мощным инструментом, поскольку они помогают ученикам концентрироваться, мыслить самостоятельно, развивают внимание и интерес к учебе, делая процесс познания увлекательным и менее напряженным. Для учащихся 5-6 классов хорошо подходят такие форматы как уроки-сказки, уроки-загадки или уроки-путешествия.

Использование оригами как формы проведения урока является нетрадиционным, но высокоэффективным педагогическим приемом. В контексте школьной геометрии, где требуется постоянное обращение к образному мышлению, оригами приобретает особую значимость, поскольку содержит богатый потенциал для развития не только специфических геометрических представлений учащихся, но и для их общего творческого становления. В связи с этим, интеграция оригами в учебный процесс в 5-6 классах представляется крайне важной, поскольку именно на этом этапе происходит зарождение, осмысление и частичная систематизация геометрической информации, которая впоследствии будет изучаться в курсах планиметрии и стереометрии. Кроме того, оригами способствует развитию памяти, пространственного воображения, формированию чертежных навыков (через необходимость фиксации схем), а также стимулирует художественный вкус, творческие способности, активизирует воображение и фантазию детей.

Ученики 7-8 классов находятся в стадии активной личностной трансформации, характерной для подросткового возраста. Этот период ознаменован пересмотром и реорганизацией прежних представлений ребенка о мире и собственной личности. Поскольку подростковый возраст является временем интенсивных вызовов, дискуссий и рефлексии, когнитивные процессы активизируются. Способность к самопознанию и стремление к самоутверждению и самовыражению, присущие подросткам, могут создавать определенные трудности в учебном процессе. В подростковом возрасте дети стараются выделиться, поэтому целесообразно применять формы уроков, связанные с соревнованием: математические турниры, викторины, поединки, математический дартс, уроки типа «КВН» и «Брейн-ринг» и т.д. Также им будут очень интересны уроки-путешествия и уроки-деловые игры.

Что касается старшеклассников, для них также приемлемы такие нестандартные формы проведения уроков, как и для учащихся 7-9 классов, меняются только темы уроков. Однако, в старших классах уже можно использовать такие нестандартные формы как урок-лекция, т.к. учащиеся уже могут на длительный промежуток времени сосредоточиться для восприятия материала; уроки-семинары, т.к. учащиеся уже умеют хорошо работать с литературой; уроки-конференции и т.д.

Рассмотрим на примере нестандартную форму проведения урока на тему «Процентные расчеты». Урок проходит в форме деловой игры, когда учащимся предлагается провести один рабочий день на предприятии «Агро-Аврора». Основной целью урока будет формирование у учащихся умения самостоятельно определять тип задач на проценты и навыков вычислять проценты от числа, число по его процентам и процентные соотношения двух чисел.

Форма проведения урока: воспроизведение игровой ситуации.

Формы работы: парная (бухгалтерия), групповая (экономический отдел ЭО, кадровый отдел ОК, отдел торговых связей ОТС). На уроке предполагается применение дифференцированного подхода к выбору задач: бухгалтерия решает задачи среднего уровня, экономический и кадровый отдел – задачи достаточного уровня, отдел торговых связей – задачи высокого уровня.

Размещение парт в классе показано на рис. 1.

Рис. 1. Размещение учащихся в классе

Ход урока:

1. Актуализация опорных знаний:

1) что называют процентом?

2) за сколько процентов принимают целую величину?

3) как выразить проценты в виде десятичной дроби?

4) как записать дробь в виде процентов?

5) как найти процент от числа?

6) как найти число по его проценту?

7) как вычисляется процентное отношение?

2. Мотивация учебной деятельности. Введение в игру.

Мы с вами решили много задач на проценты. Скажите, а для чего мы этому учились? Где применяются знания и умения, которые вы приобрели во время изучения темы «Проценты»?

Для того, чтобы убедиться, что эта тема действительно важна и мы изучили её не зря, представим себе, что наш класс является соседним агроформированием «Агро-Аврора».

Как и на любом большом предприятии, нам необходимо иметь такие отделы: бухгалтерию, экономический отдел, отдел кадров и отдел торговых связей.

(На парты ставятся таблички.)

Вам необходимо выбрать начальников, которые будут отчитываться о работе вашего отдела.

Значит, у нас сегодня обычный рабочий день. Начинаем его с утренней оперативки. Каждый отдел получает свое задание. Экономический отдел – выполняет экономические расчеты, отдел кадров – решает вопросы работников, отдел торговых связей – выполняет расчеты предприятиями, на которые отправляется наша продукция.

Задачи экономического отдела:

1. Садоводческая бригада ДП «Агро-Аврора» собирает яблоки. Яблоки 1 сорта составляют 72% общего сбора. Сколько яблок должна собрать садоводческая бригада, чтобы получить яблок 1-го сорта 10,8 тонн?
2. Во время откормки крупного рогатого скота овёс разрешается заменять карбамидом, который составляет 4,5% от количества овса. Сколько понадобится карбамида, чтобы заменить 1200 кг овса?
3. Бригада трактористов получила задание вспахать 875 га земли за неделю. Но в связи с погодными условиями вспахали только 595 га. Вычислить, на сколько процентов бригада выполнила план?

Задачи кадрового отдела:

1. В полевой и садоводческой бригадах ДП «Агро-Аврора» работают 70 работников. Из них 40% работает в садоводческой бригаде. Сколько работников работает в полевой бригаде?
2. На СТФ-1 ДП «Агро-Аврора» работает 18 работников, что составляет 15% всех работников. Сколько работников работает на СТФ-1?
3. Число работников в дочернем предприятии «Агро-Аврора» в прошлом году составляло 450 человек, а в этом году уменьшилось до 360. На сколько процентов уменьшилось количество работников?

Задачи отдела торговых связей:

1. Мясокомбинат дал согласие закупать мясо в ДП «Агро-Аврора» по цене 360 руб. за 1 кг. Какая должна быть себестоимость мяса, чтобы ДП «Агро-Аврора» получило 20% прибыли?
2. За перевозку удобрений и комбикорма ДП «Агро-Аврора» заплатило автотранспортному и железнодорожному предприятиям 141868 руб. Из них 35% заплатили автотранспортному предприятию. А остальное – железнодорожному. Сколько денег заплатило ДП «Агро-Аврора» железнодорожному предприятию?
3. В августе стоимость зерна составляла 7620 руб. за тонну, а в октябре увеличилась до 8310 руб. за тонну. На сколько процентов увеличилась стоимость зерна?

Бухгалтерский отдел будет работать следующим образом: на каждую парту я даю две ведомости для начисления заработной платы. В одной из них вам нужно будет подсчитать сумму денег, которая будет высчитана с зарплаты работника, и сумму, которую он получит на руки. В другой ведомости необходимо восстановить записи, случайно удаленные (рис.2). Вы работаете в паре с соседом. После того, как закончится рабочее время, вы отдаете ведомости главному бухгалтеру, предварительно подписав их своей фамилией для проверки качества вашей работы.

Ведомость №1

Ф.И.О. работника____

Начислено всего	Высчитано,%	Высчитано, руб.
6500 руб.	Налог на прибыль – 13	
6500 руб.	Профсоюзные взносы – 1	
		Всего

Выдать на руки____

Бухгалтер____

Ведомость №2

Ф.И.О. работника____

Начислено всего	Высчитано,%	Высчитано, руб.
	Налог на прибыль – 13	
	Профсоюзные взносы – 1	140
		Всего

Выдать на руки____

Бухгалтер____

Рис. 2. Ведомости для начисления заработной платы

О качестве работы остальных отделов мы узнаем из отчета их начальников, которые возле доски запишут и прокомментируют решение одной из предложенных задач, а какой именно, скажу позже. Все решения должны быть записаны в тетрадь. Через 20 минут рабочий день закончится, и мы с вами вновь встретимся на вечернем заседании.

(Во время выполнения заданий учитель помогает ученикам скоординировать их работу. Подходя к ученикам экономического отдела, кадрового отдела и отдела торговых связей, обращает их внимание на то, что после решения задачи каждым необходимо обговорить её решение со всем отделом. Через 15 минут после начала работы учитель просит начальников отделов выйти к доске и записать задачи: экономический отдел - №1, отдел кадров - №3, отдел торговых связей - №2. Через 20 минут после начала работы заслушиваются решения задач возле доски. Необходимо обратить внимание на то, что перед комментированием задачи, учащиеся называют, к какому типу задач на проценты она принадлежит.)

Рабочий день закончился. Необходимо оценить вклад каждого ученика в работу всего предприятия. Поскольку наше предприятие ученическое, то и оплата будет происходить в оценках. Я раздаю каждому отделу по ведомости, где напротив фамилии каждого работника начальник отдела оценивает его вклад в работу во время решения задач (рис.3).

Отдел торговых связей

Фамилия, имя	Оценка	Примечание

Подпись начальника отдела_______________________________

Кадровый отдел

Фамилия, имя	Оценка	Примечание

Подпись начальника отдела_______________________________

Экономический отдел

Фамилия, имя	Оценка	Примечание

Подпись начальника отдела_______________________________

Рис. 3. Ведомости оценки работы отделов

Потом начальники подписывают ведомости и отдают мне. Оценки в ведомости предложенные, они могут быть изменены после проверки ваших работ в тетрадях. Поэтому на перерыве прошу их сдать на поверку.

(Работу начальников и некоторых работников учитель может оценить в конце урока.)

3. Подведение итогов урока

Мне кажется, что на нашем предприятии работают опытные специалисты. Вы показали, что можете распознавать типы задач на проценты, находить процент от числа, число по его процентам, процентное отношение двух чисел. Хорошо усвоили навыки использования действий с десятичными дробями.

(Учитель отмечает работу отдельных учеников.)

Заключение. Организованный таким образом нестандартный урок математики соответствует основным целям обучения заданной теме, при этом положительно сказывается на активизации познавательной активности учащихся, делая процесс обучения более доступным и увлекательным, привлекая учащихся к деятельности, в процессе которой приобретаются необходимые знания, умения и навыки.

Литература

1. Дерменжи, М. Н. Использование нетрадиционных форм уроков математики как средство повышения интереса к предмету // Вестник науки. – 2022. – №10 (55). URL: https://cyberleninka.ru/article/n/ispolzovanie-netraditsionnyh-form-urokov-matematiki-kak-sredstvo-povysheniya-interesa-k-predmetu (дата обращения: 03.02.2026).

2. Клименкова, Т. Н. Нетрадиционные формы обучения на уроках

математики // Научно-методический журнал «УчиЛаб». – 2024. – № 6. URL: https://f.uchilab.ru/publ/journal/2024/6.pdf (дата обращения: 03.02.2026).

NON-STANDARD FORMS OF CONDUCTING MATHEMATICS LESSONS AS A MEANS OF INCREASING THE COGNITIVE ACTIVITY OF STUDENTS

Dyubo Elena Nikolayevna
Lugansk State Pedagogical University

Abstract. This article examines innovative ways to teach mathematics as a means of enhancing students' cognitive engagement. It is noted that by using these methods, students not only consciously learn the material, acquire skills and refine their mathematical abilities, but also experience intellectual satisfaction and a heightened interest in the subject. As an example, assignments for a lesson on "Percentage Calculations" are provided.

Key words: cognitive activity, mathematics lesson, non-standard lessons.

УДК 372.851

ПЕДАГОГИЧЕСКИЕ УСЛОВИЯ МИНИМИЗАЦИИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ТРЕВОЖНОСТИ ЧЕРЕЗ ВНЕДРЕНИЕ ПРОЕКТНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ В ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЙ ПРОЦЕСС

Зыбина Анастасия Станиславовна,
Государственное бюджетное образовательное учреждение Луганской народной республики «Луганская средняя школа №49 имени Ю.А. Гагарина», г. Луганск
a.s.zybina@yandex.ru

Аннотация: В статье рассматривается проблема математической тревожности как фактора, снижающего эффективность усвоения дисциплины в средней школе. Анализируется психоэмоциональное состояние обучающихся при решении стандартных и нестандартных задач. Обосновывается гипотеза о том, что переход от репродуктивной деятельности к проектной позволяет трансформировать страх ошибки в мотивацию исследования.

Ключевые слова: математическая тревожность, проектная деятельность, психоэмоциональное состояние, мотивация обучения, ситуативный успех, педагогическая психология.

Современная образовательная парадигма ставит во главу угла не только предметные результаты, но и метапредметные компетенции, а также сохранение психического здоровья участников образовательного процесса. Однако статистика педагогических наблюдений указывает на устойчивую тенденцию роста уровня стресса на уроках математики. Математическая тревожность, которая нередко может быть определена как математическая фобия, проявляется в виде физиологических реакций (повышение пульса, потливость), когнитивных блоков («пустота в голове») и поведенческого избегания предмета.

Традиционные методы контроля знаний, ориентированные на скорость решения и единственно верный ответ, часто выступают триггерами тревожного состояния. В связи с этим актуализируется поиск педагогических инструментов, способных изменить отношение ученика к ошибке и процессу познания. Одним из таких инструментов выступает проектная деятельность, которая смещает фокус внимания с оценки личности на оценку продукта деятельности [6].

Математическая тревожность рассматривается в психологии как специфическая форма ситуативной тревоги, возникающая в условиях, требующих математических операций. Ключевым механизмом ее возникновения является страх негативной социальной оценки и боязнь несоответствия ожиданиям педагога или родителей.

Математическая тревожность – это многокомпонентный феномен, включающий когнитивный, эмоциональный и поведенческий уровни. Согласно теории когнитивной интерференции, тревожность конкурирует за ресурсы рабочей памяти. Когда ученик испытывает страх, значительная часть оперативной памяти занята обработкой тревожных мыслей и мониторингом угрозы, что снижает ёмкость для обработки математической информации. Это создает порочный круг: тревога ухудшает результаты, что подтверждает некомпетентность в глазах ученика и усиливает тревогу в будущем [1].

Важно также разграничивать дефицит знаний и эмоциональный блок. Исследования показывают, что учащиеся с высокой математической тревожностью часто обладают достаточным уровнем актуальных знаний, но не могут их актуализировать в стрессовой ситуации контроля. Поведенческим следствием становится стратегия избегания: ученик пропускает занятия, не выполняет домашние задания или выбирает гуманитарные профили обучения, ограничивая свои профессиональные перспективы [7]. Таким образом, работа с тревожностью является не просто задачей психологического комфорта, но условием обеспечения равного доступа к качественному образованию.

Проектная технология, в противовес фронтальному опросу, предполагает длительную работу, возможность коррекции ошибок на черновом этапе и коллективную ответственность. В теоретическом поле проект выступает как единица учебной деятельности, где знание не передается в готовом виде, а конструируется самим субъектом [5]. Это фундаментально меняет характер взаимодействия: ученик становится активным творцом, а не пассивным реципиентом информации, что снижает ощущение беспомощности перед лицом сложного предмета.

В рамках деятельностного подхода (А.Н. Леонтьев, Л.С. Выготский) проект выступает как единица учебной деятельности, где мотивация смещается извне, где она проявляется только оценкой, внутрь, демонстрируя высочайший интерес к результату [2]. Это создает предпосылки для когнитивной переоценки стрессовых факторов: ошибка для каждого ученика перестает быть катастрофой и становится рабочим инструментом поиска решения. Традиционный урок часто фрустрирует потребность в автономии (жесткая регламентация) и компетентности (сравнение с другими). Проектная деятельность, напротив, предоставляет выбор темы и способов решения (автономия), позволяет видеть реальный результат своего труда (компетентность) и предполагает работу в команде (связанность) [4].

Для проверки эффективности проектного метода в снижении тревожности было проведено педагогическое исследование на базе средней школы. В эксперименте приняли участие учащиеся 8-х классов (возраст 13–14 лет), разделенные на контрольную (8-А класс) и экспериментальную (8-Б класс) группы. Для диагностической работы были привлечены такие инструменты:

1. Шкала личностной тревожности.
2. Специализированный опросник «Математическая тревожность».
3. Наблюдение за поведенческими реакциями во время контрольных срезов.
4. Экспериментальная оценка тревожности в рамках выполнения проекта на уроках алгебры и геометрии.

В экспериментальной группе в течение учебного года внедрялась система краткосрочных и долгосрочных математических проектов (например, «Математика в архитектуре родного города», «Статистический анализ успеваемости класса», «Геометрия в дизайне»). Контрольная группа обучалась по традиционной программе с преобладанием репродуктивных методов.

Работа в экспериментальной группе строилась по трехэтапной модели, специально модифицированной для коррекции тревожности:

1. Подготовительный этап (Снижение барьера входа). Ученикам предлагалось выбрать тему проекта самостоятельно или адаптировать предложенную. Критически важным элементом являлось право на выбор уровня сложности. Педагог выступал в роли консультанта, помощника, тьютора, а не контролера, что снижало авторитарное давление.
2. Основной этап (Легитимизация ошибки). В процессе исследования акцент делался на черновых набросках и гипотезах. Ошибки фиксировались в «дневнике исследования» не как недостатки, а как точки роста. Групповая форма работы позволяла распределить ответственность: если один ученик испытывал ступор, другой мог подхватить инициативу, предотвращая паническую реакцию.
3. Рефлексивный этап (Ситуация успеха). Презентация проекта оценивалась не только по математической точности, но и по креативности, практической значимости и качеству защиты. Использовалось критериальное оценивание, где ученик заранее знал параметры успеха. Это устраняло неопределенность, которая выступает одним из главных источников тревоги [3].

Сравнительный анализ данных констатирующего и контрольного этапов выявил следующие тенденции:

1. В контрольной группе уровень математической тревожности остался практически неизменным или показал незначительный рост к концу года, что коррелирует с общим накоплением усталости и увеличением сложности программы. 60% учащихся контрольной группы отмечали дискомфорт перед

контрольными работами.

2. В экспериментальной группе зафиксировано статистически значимое снижение показателей тревожности (на 24% по среднему баллу). Наиболее выраженные изменения коснулись шкалы «страх ситуации проверки знаний», то есть работая над проектом лично, учащиеся не боялись контроля знаний. Учащиеся экспериментальной группы демонстрировали большую готовность браться за задачи повышенной сложности.

Качественный анализ анкет показал смену установки: если в начале года доминировали формулировки «боюсь получить двойку», «не понимаю, что от меня хотят», то к концу года преобладали «интересно проверить гипотезу», «нужно доработать модель». Проектная деятельность способствовала интериоризации учебных целей: математика стала восприниматься не как набор правил для запоминания, а как инструмент для решения прикладных задач.

Также стоит отметить, что снизилось количество соматических проявлений стресса во время уроков. Ученики, ранее избегавшие поднятия руки, в рамках защиты проектов проявляли инициативу в выступлениях перед аудиторией, так как чувствовали экспертность в выбранной ими узкой теме.

На основании полученных результатов можно дать и ряд практических рекомендаций. Глубинный анализ полученных данных позволяет выделить ключевые психологические механизмы, обеспечивающие терапевтический эффект проектной деятельности. Прежде всего, речь идет о деконструкции образа «учителя-эксперта» и формировании партнерской позиции. Когда педагог занимает позицию консультанта, помогающего найти ресурс для решения проблемы, а не судьи, выставляющего баллы за каждое действие, уровень защитной агрессии и страха у ученика снижается. Это создает так называемое «безопасное образовательное пространство», где риск не является наказуемым.

Вторым важным аспектом является изменение восприятия времени. Традиционный урок жестко регламентирован, что создает давление дедлайна в режиме реального времени. Проектная деятельность, растянутая во времени, позволяет ученику регулировать темп работы в соответствии со своим психофизиологическим состоянием [9]. Возможность отложить решение сложной задачи на завтра и вернуться к ней со свежими силами предотвращает возникновение состояния аффекта и когнитивного тупика.

Однако внедрение проектных методов требует осторожности. Исследование выявило, что на начальных этапах (первый месяц) у части учащихся наблюдался временный рост тревожности, связанный с нехваткой навыков самоорганизации и тайм-менеджмента. Неопределенность структуры проекта могла пугать детей, привыкших к четким алгоритмам. Следовательно, педагогическое сопровождение должно включать этап обучения планированию. Без формирования навыков декомпозиции задач проект может стать дополнительным стрессором, а не средством релаксации.

В связи с этим на основании полученного опыта рекомендуется использовать гибридные формы контроля, где проектная деятельность не полностью замещает классические формы проверки знаний, а дополняет их [8]. Это позволяет сохранить фундаментальность математической подготовки, используя проект как инструмент снятия эмоционального напряжения и повышения мотивации. Оптимальным соотношением представляется выделение 20–30% учебного времени на проектную активность, что достаточно для формирования устойчивых положительных ассоциаций, но не вредит освоению базовой программы.

Проведенное исследование позволяет констатировать, что проектная деятельность является эффективным психокоррекционным средством в обучении математике, способным существенно нивелировать проявления математической тревожности. Механизм снижения тревожности лежит в плоскости изменения субъектной позиции ученика: от объекта контроля к субъекту исследования. Подтверждение гипотезы исследования базируется на достоверных статистических данных и качественном анализе поведенческих реакций учащихся.

Ключевыми факторами успеха выступают автономия выбора траектории работы, смещение фокуса с итогового балла на процесс создания продукта, коллективное взаимодействие и прозрачные критерии оценивания. Важно подчеркнуть, что положительный эффект достигается только при условии грамотного педагогического сопровождения, включающего обучение навыкам планирования и создание атмосферы психологической безопасности. Ошибки в рамках проекта должны рассматриваться как неизбежная часть исследовательского процесса, а не как повод для санкции.

Внедрение проектных технологий требует от педагога высокой психолого-педагогической компетентности и готовности перераспределить управление учебным процессом. Перспективы дальнейших исследований видятся в изучении отдаленных последствий такого подхода: влиянии сниженной тревожности в средней школе на выбор профильного обучения в старших классах и успешность сдачи итоговых государственных экзаменов. Полученные результаты подтверждают, что инвестиции в организацию проектной работы окупаются не только ростом академической успеваемости, но и сохранением психологического благополучия обучающихся, что соответствует требованиям современных образовательных стандартов и концепции гуманизации образования.

Литература

1. Астапов, В. М. Тревожность у детей / В. М. Астапов. – Москва : Пер Сэ, 2018. – 215 с.

2. Леонтьев, А. Н. Деятельность. Сознание. Личность / А. Н. Леонтьев. – Москва : Смысл, 2019. – 352 с.

3. Прихожан, А. М. Психология тревожности: дошкольный и школьный возраст / А. М. Прихожан. – Санкт-Петербург : Питер, 2020. – 192 с.

4. Савенков, А. И. Методика исследовательского обучения младших и средних школьников / А. И. Савенков. – Самара : Учебная литература, 2021. – 240 с.

5. Федеральный государственный образовательный стандарт основного общего образования: утвержден приказом Министерства просвещения Российской Федерации от 31.05.2021 № 287. – М. : Просвещение, 2021. – 75 с.

6. Хачатурян, А. С. Влияние проектных методов на мотивацию учащихся к изучению точных наук / А. С. Хачатурян // Вестник педагогики и психологии. – 2022. – № 3 (15). – С. 45–52.

7. Ashcraft, M. H. Math anxiety: Personal, educational, and cognitive consequences / M.H. Ashcraft // Current Directions in Psychological Science. – 2019. – Vol. 11, iss. 5. – P. 181–185. – DOI: 10.1111/1467-8721.00196.

8. Deci, E. L. Self-determination theory: A macrotheory of human motivation, development, and health / E. L. Deci, R. M. Ryan // Canadian Psychology. – 2018. – Vol. 49, iss. 3. – P. 182–185. – DOI: 10.1037/a0012801.

9. Polya, G. How to Solve It: A New Aspect of Mathematical Method / G. Polya. – Princeton : Princeton University Press, 2020. – 224 p.

PEDAGOGICAL CONDITIONS FOR MINIMIZING MATHEMATICAL ANXIETY THROUGH THE INTRODUCTION OF PROJECT TECHNOLOGIES INTO THE EDUCATIONAL PROCESS

Zybina Anastasia Stanislavovna,
LUGANSK HIGH SCHOOL NO. 49 NAMED AFTER Y.A. GAGARIN", Lugansk
a.s.zybina@yandex.ru

Abstract. The article discusses the problem of mathematical anxiety as a factor that reduces the effectiveness of learning a discipline in secondary school. The article analyzes the psychoemotional state of students when solving standard and non-standard problems. The hypothesis is substantiated that the transition from reproductive activity to project activity allows transforming the fear of error into the motivation for research.

Keywords: mathematical anxiety, project activity, psychoemotional state, learning motivation, situational success, pedagogical psychology.

УДК 372.851: 51(07)

ТЕОРЕМЫ ГЕОМЕТРИИ И ИХ ОБОБЩЕНИЯ В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ

Панишева Ольга Викторовна[1], Голованова Наталья Александровна[2]
[1,2]Луганский государственный педагогический университет, г. Луганск
[1]***Panisheva-ov@mail.ru***

Аннотация. В статье рассматривается роль обобщений в курсе школьной геометрии, перечисляются ключевые обобщения, которые открывают новые горизонты для исследований в области геометрии и математического анализа. В частности, рассмотрены обобщения теоремы Пифагора, свойства медиан треугольника, теоремы косинусов и другие. Особое внимание уделено теореме Люилье и её доказательству.

Ключевые слова: геометрия, обобщение, теорема Пифагора, теорема косинусов, теорема Птолемея, теорема Люилье.

Изучение теорем занимает особое место в школьном курсе математики.

Работая с теоремами, школьники учатся понимать умозаключения других людей, конструировать собственные умозаключения, и на их основе формулировать суждения [4, с.4], аргументированно рассуждать и логически мыслить.

Одной из важных задач школьного образования декларируется развитие личности обучающихся, которое напрямую связано с развитием мыслительной деятельности. Именно при работе с теоремами, при поиске их доказательств и обобщений, происходит развитие логического мышления, создаются предпосылки к формированию их целостного мировоззрения. Обобщения играют ключевую роль в методике преподавания математики, поскольку они способствуют формированию понятийных связей и углублению понимания учащимися математических концепций. Они позволяют учащимся выделять общие свойства и закономерности, что, в свою очередь, способствует развитию их аналитического мышления и способности переносить знания на новые ситуации.

В работах многих исследователей, таких как Л.В. Занков, О.Б. Епишева, Е.В. Малых, Ю.М. Колягин, Г.И. Саранцев, М.Н. Скворцова, С.Л. Рубинштейн подчеркивается важность обобщений в обучении, особенно на этапе формирования устойчивых понятий.

В научной литературе понятие «обобщение» рассматривается как средство обучения математике, как один из методов мышления, научного познания, как эвристический прием или прием систематизации знаний и умений [7]. В этой статье будем понимать обобщение как переход от рассмотрения частной задачи (утверждения) к некотором классу задач (утверждений), содержащих первую в качестве своего элемента.

Цель статьи – привести примеры геометрических утверждений школьного курса математики, допускающих обобщения, и показать, как расширяется их область применения.

Рассмотрим обобщения некоторых теорем школьного курса геометрии. Их можно получить, если один объект для которого сформулирована теорема, заменить на другой, например, с большим количеством сторон (треугольник на четырехугольник или произвольный многоугольник) или же на его пространственный аналог (прямоугольник на прямоугольный параллелепипед, треугольник на тетраэдр и т.д.) и даже осуществить выход за пределы евклидовой геометрии.

На основе аналогий и обобщений вводятся многие понятия школьной геометрии в учебниках базового уровня. Например, методом аналогий с плоским случаем вводится понятие и свойства векторов в пространстве, параллельных прямых, вписанной и описанной сферы, касательной плоскости к сфере и т.д. [2].

Другие же обобщения завуалированы и представляют хорошую почву для организации научно-исследовательской работы со школьниками, так как являются источником новых математических гипотез, требующих подтверждения либо опровержения.

Одним из самых известных геометрических обобщений можно считать расширение взаимосвязи между сторонами треугольника, выражаемое теоремой Пифагора, на произвольный треугольник. Таким обобщением становится теорема косинусов: $c^2 = a^2 + b^2 - 2abcos\angle C$. Как только угол между сторонами становится прямым, это равенство дает классическое соотношение между сторонами прямоугольного треугольника.

Геометрическая формулировка теоремы Пифагора, в которой говорится о площадях квадратов, построенных на катетах и гипотенузе, обобщается теоремой Евклида, которая это же свойство устанавливает при построении любых подобных треугольников на сторонах прямоугольного треугольника [3, с. 251].

Теорема Пифагора может быть расширена на трехмерное пространство. Обобщая свойство диагонали прямоугольника, вытекающее из теоремы Пифагора, на трехмерный случай (прямоугольный параллелепипед), получаем аналогичное свойство его диагонали: $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$.

Обобщение теоремы Пифагора на случай прямоугольного тетраэдра также приводит к похожему соотношению: «в прямоугольном тетраэдре сумма квадратов катетов площадей граней-катетов равна квадрату площади грани-гипотенузы» [3, с.252].

Поиск обобщений соотношения между отрезками, на которые делятся медианы точкой пересечения, приводят к теореме о соотношении аналогичных отрезков в тетраэдре. Оказывается, что медианы тетраэдра пересекаются в одной точке и делятся этой точкой в отношении 3:1, считая от вершин [4, с.18].

Теорема косинусов так же может быть расширена на тетраэдр, что приводит к любопытному свойству: квадрат площади любой грани тетраэдра равен сумме квадратов площадей трех остальных его граней без удвоенных произведений площадей этих граней, взятых попарно, и косинусов двугранных углов между ними [3, с.253]. Обобщение теоремы косинусов можно получить, рассматривая ее не в треугольнике, а в четырехугольнике. Такое расширение приводит к нескольким истинным фактам, один из которых звучит так: квадрат стороны четырёхугольника равен сумме квадратов трёх других его сторон без удвоенных произведений этих сторон, взятых попарно, и косинусов углов между ними.

Еще одним геометрическим фактом, допускающим обобщение, является теорема Люилье, которая является изящным и мощным результатом в треугольной геометрии и устанавливает связь между площадью треугольника, длинами его сторон и радиусом описанной окружности. Несмотря на то, что её классическая формулировка касается исключительно треугольников, концепции и методы её доказательства вдохновили широкий спектр обобщений, которые расширяют её применение к более сложным геометрическим фигурам, а также выходят за пределы евклидовой геометрии.

Разберём подробно саму теорему, её доказательство и некоторые значимые обобщения.

Теорема Люилье, названная в честь швейцарского математика Симона

Антуана Жана Люилье, утверждает следующее: площадь треугольника равна произведению длин его сторон, делённому на четыре радиуса описанной окружности (окружности, проходящей через все три вершины треугольника). Если обозначить длины сторон треугольника как a, b и c, площадь как S, радиус описанной окружности как R, то формально это записывается как:

$$S = \frac{abc}{4R}.$$

Эта теорема рассматривается в школьном курсе геометрии как одна из формул, по которым вычисляется площадь треугольника [2, с.207].

Существует множество методов доказательства теоремы Люилье, но одним из самых популярных и наглядных является использование формулы площади треугольника и теоремы синусов. Итак, площадь треугольника можно представить, как половину произведения двух его сторон на синус угла между ними:

$$S = \frac{1}{2} bc \sin \angle A. \qquad (1)$$

Из теоремы синусов (отношение длины стороны треугольника к синусу противолежащего угла равно удвоенному радиусу описанной окружности), можно выразить синус угла:

$$\sin \angle A = \frac{a}{2R}.$$

Подставив выражение для $sin\ A$ в формулу площади (1), получим:

$$S = \frac{1}{2} bc \left(\frac{a}{2R}\right).$$

Упрощая полученное выражение, приходим к теореме Люилье:

$$S = \frac{abc}{4R}.$$

Полученная формула показывает, что площадь треугольника зависит не только от длин его сторон, но и от радиуса описанной окружности, позволяет вычислить площадь, не прибегая к высоте, что бывает полезно в разных задачах.

Теорема Люилье породила множество обобщений, которые распространяют её применение на более сложные геометрические фигуры. Обобщение на вписанные многоугольники охватывает многоугольники, у которых все вершины находятся на одной окружности. Для многоугольника со сторонами $a_1, a_2, \dots\ a_n$ и радиусом описанной окружности R справедлива следующая формула:

$$S = \frac{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}{2^{(n-1)} R^{n-2} \cdot \sin((n-2)\frac{\pi}{n})}.$$

При $n = 3$ (треугольник) эта формула возвращается к исходной.

Теорема Люилье может быть адаптирована и на другие геометрии, в частности, для гиперболической и сферической геометрии, где её формулировка претерпевает изменения из-за различий в свойствах расстояний и площадей.

Допускают обобщения и соотношения в четырехугольниках. Так, теорема Птолемея утверждает, что для выпуклого четырехугольника, вписанного в окружность, верно утверждение: произведение диагоналей равно сумме произведений его противоположных сторон.

Рассмотрев вместо четырехугольника вписанный шестиугольник, получаем теорему Фурмана: произведение длин диагоналей вписанного четырехугольника равно сумме произведений длин противоположных сторон [5, с.59].

Обобщение этого свойства на произвольный четырехвершинник, в том числе пространственный, приводит к такому равенству:

$$m^2n^2 = a^2c^2 + b^2 d^2 - 2abcd(\cos\angle A \cos\angle C + \sin\angle A \sin\angle C \cos\hat{n}),$$

где $m, n -$ диагонали, $a, b, c, d -$ стороны, $n -$двугранный угол [1, с.131].

Каждое из рассмотренных нами обобщений, расширяющих применение формул или теорем на более сложные геометрические фигуры и разнообразные геометрии, не только иллюстрируют красоту и глубину математики, но и демонстрируют, как различные концепции могут быть связаны в единое целое.

Существуют и другие способы получения обобщений. К обобщениям математических теорем можно прийти, рассуждая по аналогии, заменяя определения, изменяя доказательства, вводя параметры [6]. Работа по поиску обобщений может выполняться в форме дифференцированных заданий для одаренных школьников, на уроках обобщения и систематизации знаний, на кружковых и факультативных занятиях, при подготовке к олимпиадам, в научно-исследовательской деятельности школьников. Ей стоит уделять внимание и в системе подготовки будущих учителей математики. Поиск аналогий и обобщений развивает теоретическое мышление обучающихся и способствует формированию у них целостной картины математики.

Итак, рассмотренные обобщения демонстрируют внутреннее единство геометрии, показывая, как частные случаи (треугольник) являются элементами более общих структур (многоугольники, многогранники, другие геометрические системы). Работа с обобщениями геометрических теорем (таких как теоремы Пифагора, косинусов, свойств медиан, Люилье, Птолемея) является эффективным инструментом для углубленного изучения математики, выходящим за рамки базовой школьной программы.

Поиск обобщений геометрических теорем углубляет наше понимание фундаментальных принципов геометрии и их практического применения, а дальнейшие исследования могут привести к новым увлекательным открытиям и взаимосвязям, обогащая восприятие окружающего мира. Интеграция темы геометрических обобщений в учебный процесс обогащает его, открывая новые горизонты для познавательной и исследовательской деятельности обучающихся.

Литература

1. Астапов, Н. С. Многообразие обобщений теоремы Птолемея / Н.С. Астапов, И.С. Астапов // Дальневосточный математический журнал. – 2019. – Т.19. №2. – С. 129–137.

2. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Геометрия. 10-11 классы : учеб. для общеобразоват. организаций : базовый и углубл. уровни / [Л. С. Атанасян и др.]. – 7-е изд., перераб. и доп. – М.: Просвещение, 2019. – 287 с.

3. Карташян, М. В. Обобщения и аналогии соотношений между элементами треугольника на занятиях с одаренными детьми // Педагогика одаренности: вызовы, достижения, перспективы: сборник научно-методических статей и материалов по итогам межрегиональной научно-практической конференции (Самара, 26 января 2024 года). – С. 249–254.

4. Корикова, Т. М. Избранные теоремы школьной математики в деталях и нюансах : учебное пособие / Т.М. Корикова, И.В. Суслова, А.В. Ястребов / под ред. А.В. Ястребова. – Ярославль: Изд-во ЯГПУ, 2010. – 111 с.

5. Костин, А.В. Об аналогах теоремы Фурмана на плоскости Лобачевского // Владикавк. матем. журн. – 2023. – Т. 25, вып. 4. – С. 58–67.

6. Кужель, А. В. Методы обобщений в математике: учебное пособие. Симферополь СГУ, 1983. [Электронный ресурс] URL: https://www.mathedu.ru/text/kuzhel_metody_obobshheniy_v_matematike_1983/p3/ (дата обращения 7.03.2025).

7. Малых, Е. В. Обобщения в обучении математике учащихся полной средней школы : автореф… дис. канд. пед. наук:13.00.02 / Елена Владимировна Малых; Вят. гос. гуманитар. ун-т. – Киров, 2005. – 20 с.

GEOMETRY THEOREMS AND THEIR GENERALIZATIONS IN THE SCHOOL COURSE

Panisheva Olga Viktorovna[1], Golovanova Natalia Alexandrovna[2]
[1,2]Lugansk State Pedagogical University, Lugansk
[1]Panisheva-ov@mail.ru

Abstract. The article discusses the role of generalizations in the school geometry course, lists key generalizations that open new horizons for research in the field of geometry and mathematical analysis. In particular, generalizations of the Pythagorean theorem, properties of triangle medians, the theorem of cosines, and others are considered. Special attention is paid to Lhuilier's theorem and its proof.

Keywords: geometry, generalization, Pythagorean theorem, theorem of cosines, Ptolemy's theorem, Lhuilier's theorem.

УДК 372.851

ПОДГОТОВКА ШКОЛЬНИКОВ К ШКОЛЬНЫМ ОЛИМПИАДАМ, ПРОВОДИМЫМ ВУЗАМИ

Терентьев Павел Сергеевич
terentevp14@gmail.com
Научный руководитель: Пашкова Юлия Сергеевна
КФУ имени В.И. Вернадского, г. Симферополь
j_pashkova@mail.ru

Аннотация. В статье рассматриваются методические аспекты подготовки учащихся 8–9 классов к участию в математических олимпиадах школьников, проводимых высшими учебными заведениями. Особое внимание уделяется принципам отбора олимпиадных задач и организации работы с ними. Приведены примеры заданий и методические комментарии, раскрывающие особенности формирования логического и стратегического мышления учащихся.

Ключевые слова: олимпиадные задачи, математические олимпиады, подготовка школьников, методика преподавания математики, логическое мышление.

Введение. Практика работы с учащимися 8–9 классов показывает, что интерес к математическим олимпиадам чаще всего возникает не из-за стремления к результату, а из-за необычного характера предлагаемых задач. В отличие от стандартных школьных упражнений, олимпиадные задания требуют от учащихся самостоятельного анализа условий, выдвижения гипотез и проверки различных вариантов рассуждений [1–4].

На этапе обучения в 8–9 классах школьники уже обладают необходимым базовым аппаратом, однако, испытывают трудности при переходе к более абстрактным рассуждениям. В связи с этим особое значение приобретает постепенное включение задач, по структуре близких к заданиям вузовских олимпиад, но адаптированных по форме обсуждения и уровню сложности. Эффективность такой подготовки определяется не количеством решённых задач, а тем, насколько осмысленно организована работа с ними.

Принципы отбора олимпиадных задач

При подборе олимпиадных задач для работы со школьниками важно учитывать не только уровень сложности, но и характер рассуждений, к которым приводит задача. Наиболее ценными оказываются задания, в которых невозможно сразу применить известный алгоритм, а требуется предварительный анализ и поиск идеи решения.

Задачи, допускающие несколько различных подходов, позволяют организовать обсуждение и сравнение решений, что особенно важно для формирования математической культуры учащихся. Такой формат работы помогает школьникам научиться аргументировать свои выводы и осознавать логику рассуждений, а не запоминать готовые схемы.

Примеры олимпиадных задач и методические комментарии

Задача 1. *Действительные числа x и y удовлетворяют уравнению* $x^2 + y^2 + xy = 1$. *Какие значения может принимать произведение xy?*

Методический комментарий. При обсуждении данной задачи учащиеся достаточно быстро приходят к выводу, что нахождение конкретных значений переменных не является обязательным. Основной интерес представляет анализ того, как связаны между собой величины, входящие в уравнение. Такой подход позволяет сместить акцент с вычислений на рассуждение и подготовить школьников к задачам исследовательского характера.

Задача 2. *Существуют ли такие натуральные числа x и y, что выполняется равенство* $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2026}$ *?*

Методический комментарий. При работе с данной задачей учащиеся сталкиваются с необходимостью рассматривать уравнение в целом, а не пытаться сразу подобрать конкретные значения переменных. В процессе обсуждения становится ясно, что ключевым является преобразование выражения и анализ условий существования решений в натуральных числах. Такой подход помогает школьникам понять, что не каждое уравнение решается перебором, и формирует умение искать общий способ рассуждений, что особенно важно при подготовке к олимпиадным заданиям старших классов.

Задача 3. *Игра начинается с числа 6. За один ход разрешается прибавить к имеющемуся числу любое натуральное число, меньшее его. Выигрывает тот, кто получит число 2026. Каким игроком выгоднее быть — первым или вторым?*

Методический комментарий. Рассмотрение этой задачи позволяет наглядно показать учащимся, как строится рассуждение в задачах игрового характера. Анализ возможных ходов приводит школьников к осознанию того, что результат игры определяется заранее выбранной стратегией. В ходе обсуждения учащиеся учатся выделять выигрышные и проигрышные позиции, а также прогнозировать развитие ситуации, что способствует развитию логического и стратегического мышления, необходимого при решении олимпиадных задач повышенной сложности.

Особенности организации работы с олимпиадными задачами

Эффективность подготовки школьников к участию в математических олимпиадах во многом зависит не только от выбора задач, но и от формы организации работы с ними. Практика показывает, что простое решение большого количества заданий не всегда приводит к ожидаемому результату, если отсутствует осмысленное обсуждение хода рассуждений.

Важным элементом работы является коллективный разбор задач, в ходе которого учащиеся имеют возможность предлагать собственные идеи и сравнивать различные подходы к решению. Такая форма работы способствует развитию умения аргументировать свою точку зрения и анализировать рассуждения других участников. При этом особое внимание следует уделять не только правильности ответа, но и логике рассуждений, приведших к нему.

Полезным приёмом является обсуждение альтернативных способов решения одной и той же задачи. Это позволяет показать учащимся, что в олимпиадной математике часто существует несколько равноправных подходов, а выбор конкретного способа зависит от наблюдательности и гибкости мышления. Кроме того, анализ различных решений помогает школьникам глубже понять используемые идеи и связи между математическими понятиями.

Таким образом, сочетание продуманного отбора задач и грамотной организации работы с ними позволяет сделать процесс подготовки более продуктивным и способствует формированию у школьников устойчивого интереса к олимпиадной деятельности.

Заключение. Опыт работы с учащимися 8–9 классов показывает, что систематическое использование олимпиадных задач способствует не только углублению знаний по математике, но и формированию у школьников навыков самостоятельного рассуждения. Задачи, требующие анализа условий и поиска стратегии решения, помогают учащимся осознать, что успешное решение зависит прежде всего от логики рассуждений, а не от применения заученных алгоритмов.

Рассмотренные в статье примеры задач и методические комментарии демонстрируют возможность адаптации элементов вузовских олимпиад к работе со школьниками. Такой подход позволяет постепенно подготовить учащихся к заданиям повышенного уровня сложности и сформировать устойчивый интерес к олимпиадной деятельности. Продуманное сочетание отбора задач и организации их обсуждения делает процесс подготовки более осмысленным и эффективным.

Литература

1. Агаханов, Н. Х. Всероссийская олимпиада школьников по математике: метод. пособие / Н. Х. Агаханов, О. К. Полипский; науч. ред. Э. М. Никитин. – М.: АПКиППРО, 2015. – 395 с.

2. Берлов, С. Л. Петербургские математические олимпиады / С. Л. Берлов, С. В. Иванов, К. П. Кохась. – СПб.; М.; Краснодар: Лань, 2018. – 608 с.

3. Всероссийские олимпиады школьников по математике. Заключительные этапы. Задачи и решения. – М.: МЦНМО, 2020. – 552 с.

4. Коннова, Е. Г. Математика. 6–11 классы. Подготовка к олимпиадам. Основные идеи, темы, типы задач / под ред. Ф.Ф. Лысенко. – Ростов-на-Дону: Легион-М, 2019. – 256 с.

Работа поддержана Министерством науки и высшего образования Российской Федерации. Соглашение № 075-02-2025-1543.

PREPARING SCHOOL STUDENTS FOR UNIVERSITY MATHEMATICS OLYMPIADS

Terentev Pavel Sergeevich
Crimean Federal Universit V. I. Vernadsky y, Simferopol
terentevp14@gmail.com

Abstract. The article examines methodological aspects of preparing students of grades 8–9 for participation in mathematics olympiads for school students organized by higher education institutions. Special attention is paid to the principles of selecting olympiad problems and organizing work with them in extracurricular activities. Examples of tasks and methodological comments aimed at developing students' logical, analytical, and strategic thinking are presented.

Keywords: olympiad problems, mathematics olympiads, school students' training, methods of teaching mathematics, logical thinking.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

1. **Байдалинов Данил Дмитриевич,** магистрант 1-го курса направления подготовки 01.04.02 Прикладная математика и информатика ФГБОУ ВО «Луганский государственный университет имени Владимира Даля», г. Луганск
2. **Баранова Виктория Вячеславовна,** студентка 5 курса направления подготовки 44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки). Начальное и дошкольное образование ТИ имени А. П. Чехова ФГБОУ ВО «Ростовский государственный экономический университет», г. Таганрог
3. **Будникова Диана Андреевна,** магистрант 2-го курса направления подготовки 01.04.01 Математика ФГАОУ ВО «КФУ имени В.И. Вернадского», г. Симферополь
4. **Воронина Елизавета Алексеевна,** преподаватель математики ГБ ПОО ЛНР «Луганский технологический колледж», г. Луганск
5. **Голованова Наталья Александровна**, студентка 4-го курса направления подготовки 44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки). Математика и информатика ФГБОУ ВО «ЛГПУ», Ровеньковский факультет, г. Луганск
6. **Давыскиба Оксана Викторовна,** кандидат педагогических наук, доцент, доцент кафедры фундаментальной математики ФГБОУ ВО «ЛГПУ», г. Луганск
7. **Долженко Елизавета Сергеевна,** магистрант 1-го курса направления подготовки 01.04.01 Математика ФГБОУ ВО «ЛГПУ», г. Луганск
8. **Дымарский Яков Михайлович,** доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики ФГАОУ ВО «МФТИ (НИУ)», г. Москва
9. **Дюбо Елена Николаевна,** заведующий отделом электронного обучения и дистанционных образовательных технологий ИПР ФГБОУ ВО «ЛГПУ», г. Луганск
10. **Зубовский Руслан Петрович,** магистрант 2-го курса направления подготовки 01.04.02 Прикладная математика и информатика ФГБОУ ВО «ЛГУ имени Владимира Даля», г. Луганск
11. **Зыбина Анастасия Станиславовна**, учитель математики ГБОУ ЛНР «Луганская средняя школа №49 имени Ю.А. Гагарина», г. Луганск
12. **Иваненко Вера Александровна,** магистрант 2-го курса направления подготовки 01.04.01 Математика ФГБОУ ВО «ЛГПУ», г. Луганск
13. **Лила Вероника Юрьевна,** учитель математики ГБОУ ЛНР ССШ № 9 имени А. Стаханова, г. Стаханов
14. **Малахова Виктория Владимировна,** кандидат технических наук, доцент кафедры прикладной математики ФГБОУ ВО «ЛГУ имени Владимира Даля», г. Луганск
15. **Малахова Яна Олеговна,** учащаяся 8-го класса заочной физико-технической школы (ЗФТШ) при Московском физико-техническом институте (МФТИ), г. Москва
16. **Малый Вячеслав Вадимович,** кандидат технических наук, доцент, заведующий кафедрой прикладной математики ФГБОУ ВО «ЛГУ имени Владимира Даля», г. Луганск
17. **Малый Дмитрий Вячеславович,** кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры прикладной математики ФГБОУ ВО «ЛГУ имени Владимира Даля», г. Луганск

18. Махмудова Юлия Дмитриевна, магистрант 2-го курса направления подготовки 01.04.01 Математика ФГБОУ ВО «ЛГПУ», г. Луганск

19. Мурина Диана Андреевна, студентка 1-го курса направления подготовки 38.03.04 Государственное и муниципальное управление ФГБОУ ВО «ЛГУ имени Владимира Даля», Краснодонский факультет инженерии и менеджмента (филиал), г. Краснодон

20. Ортынская Ольга Александровна, студентка 3-го курса направления подготовки 01.03.01 Математика ФГБОУ ВО «ЛГПУ», учитель математики ГБОУ ЛНР «ЛСШ №8 имени Н.Ф. Ватутина», г. Луганск

21. Панишева Ольга Викторовна, кандидат педагогических наук, доцент, доцент кафедры высшей математики и методики преподавания математики ФГБОУ ВО «ЛГПУ», г. Ровеньки

22. Пашкова Юлия Сергеевна, кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры математического анализа ФГАОУ ВО «КФУ имени В.И. Вернадского», г. Симферополь

23. Петренко Елизавета Дмитриевна, учитель математики ГБОУ ЛНР «ЛСШ №8 имени Н.Ф. Ватутина», г. Луганск

24. Потапова Алина Александровна, магистрант 1-го курса направления подготовки 01.04.01 Математика ФГБОУ ВО «ЛГПУ», учитель математики «Многопрофильный педагогический колледж ФГБОУ ВО «ЛГПУ», г. Луганск

25. Савельев Валерий Михайлович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры общеобразовательных дисциплин ФГБОУ ВО «ЛГУ имени Владимира Даля», г. Луганск

26. Селезнев Григорий Петрович, магистрант 2-го курса направления подготовки 01.04.02 Прикладная математика и информатика ФГБОУ ВО «ЛГУ имени Владимира Даля», г. Луганск

27. Сенченко Елизавета Михайловна, студентка 2-го курса направления подготовки 01.03.01 Математика ФГБОУ ВО «ЛГПУ», г. Луганск

28. Скринникова Анна Владимировна, кандидат технических наук, доцент кафедры фундаментальной математики ФГБОУ ВО «ЛГПУ», г. Луганск

29. Темникова Светлана Владимировна, кандидат технических наук, заведующий кафедрой фундаментальной математики ФГБОУ ВО «ЛГПУ», г. Луганск

30. Терентьев Павел Сергеевич, магистрант направления подготовки 01.04.01 Математика ФГАОУ ВО «КФУ имени В.И. Вернадского», г. Симферополь

31. Титаренко Дарья Андреевна, старший преподаватель департамента математики АНО ВО «Московский Университет «Синергия», г. Москва

32. Чалая Елена Юрьевна, кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры прикладной математики ФГБОУ ВО «ЛГУ имени Владимира Даля», г. Луганск

33. Чумак Ольга Александровна, магистрант 2-го курса направления подготовки 44.04.01 Педагогическое образование. Математическое образование ТИ имени А.П. Чехова ФГБОУ ВО «Ростовский государственный экономический университет», г. Таганрог

Научное издание

Актуальные вопросы математики и методики преподавания математики

Сборник материалов Межрегиональной заочной научно-практической конференции
(Луганск, 25 февраля 2026 года)

Редакционная коллегия оставляет за собой право технического и стилистического редактирования статей. Авторы статей несут полную ответственность за содержание статьи.

Под общей редакцией – С. В. Темникова, А. В. Скринникова
Корректор – А. В. Скринникова
Верстка – А. В. Скринникова

Размещено в РИНЦ

Подписано в печать 22.04.2026. Бумага офсетная. Гарнитура Times New Roman.
Печать ризографическая. Формат 60×84/16. Усл. печ. л. 7,21.
Тираж 50 экз. Заказ № 49.

ФГБОУ ВО «ЛГПУ»
Издательство ЛГПУ
ул. Оборонная, 2, г. Луганск, ЛНР, 291011. Т/ф: +7-857-258-03-20
e-mail: knitaizd@mail.ru