

НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК УКРАИНЫ

ИНСТИТУТ ГЕОТЕХНИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ  
ИМ. Н.С. ПОЛЯКОВА

ГЕ  ТЕХНИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА  
GE TECHNICAL MECHANICS

МЕЖВЕДОМСТВЕННЫЙ СБОРНИК

НАУЧНЫХ ТРУДОВ

ВЫПУСК 70

Днепропетровск  
2007

УДК 622.002.5-762:678.001.04

Геотехнічна механіка: Міжвід. зб. наук. праць / Ін-т геотехнічної механіки ім. М.С. Полякова НАН України. – Дніпропетровськ, 2007. – Вип. 70. – 224 с.

У збірнику представлені результати наукових досліджень в галузі динаміки та міцності, механіки еластомерів, безпеки складних технічних систем та проблем стійкого розвитку.

Для наукових працівників, аспірантів і студентів старших курсів.

Редакционная коллегия:

д-р техн. наук, профессор, академик НАН Украины А.Ф. Булат (ответственный редактор), д-р техн. наук, профессор, чл.-корр. НАН Украины Э.И. Ефремов (зам. отв. редактора), д-р техн. наук В.В. Виноградов (зам. отв. редактора), д-р техн. наук Б.А. Блюсс, д-р техн. наук, профессор Л.М. Васильев, д-р техн. наук А.И. Волошин, д-р техн. наук, профессор В.И. Дырда, д-р геол.-мин. наук В.В. Лукинов, д-р техн. наук В.П. Надутый, д-р техн. наук В.Г. Перепелица, д-р техн. наук А.С. Пригунов, д-р техн. наук К.К. Софийский, д-р техн. наук, профессор Б.М. Усаченко, д-р техн. наук, профессор М.С. Четверик

Рецензенты: д-р техн. наук, проф. Франчук В.П.  
д-р техн. наук, проф. Виноградов В.В.

Ответственный за выпуск д-р техн. наук, проф. Дырда В.И.

Адрес редколлегии:

49005, ГСП, Днепрпетровск-5, ул. Симферопольская, 2а  
Институт геотехнической механики им. Н.С. Полякова НАН Украины

Утверждено к печати Ученым Советом

Института геотехнической механики им. Н.С. Полякова НАН Украины  
(протокол № 3 от 05 марта 2007 г.)

## СОДЕРЖАНИЕ

Булаг-Корнейчук Е.А., Дырда В.И. Научные открытия в механике разрушения: философские проблемы и постмодерн .....	3
Дырда В.И., Гордиенко Н.А., Кухаренко П.М., Твердохлеб Т.Е. Программно-целевой подход к оценке и обеспечению безопасности сложных динамических систем.....	17
Кобец А.С., Дырда В.И., Науменко М.М. Деформирование резиновой опоры с неизменяемыми контактными гранями вертикальной нагрузкой .....	52
Дырда В.И., Козуб Ю.Г., Кобец А.С., Науменко А.П., Твердохлеб Т.Е., Яценко А.А. Определение реологических параметров эластомерных материалов .....	56
Чижик Е.Ф., Маркелов А.Е. Синергетика взаимодействия резиновой футеровки и внутримельничной загрузки в тяжелых рудоизмельчительных мельницах .....	89
Толок В.А., Козуб Г.А. Определение связанных термомеханических полей в пневматических шинах .....	107
Жигула Т.И., Ладутина Л.П., Максютенко В.Ю. Алгоритмы компьютерной реализации оптимального автоматического управления режимами работы ленточного конвейера.....	114
Дырда В.И., Кобец А.С., Гребенюк С.Н., Решевская Е.С., Тархова В.М., Киричевский Р.В., Лисица Н.И., Тымко Н.В., Гончаренко А.В. Расчет напряженно-деформированного состояния эластомерных конструкций сложной формы.....	121
Джос В.Ф., Шеметов П.А., Мальгин О.Н. К вопросу формирования развала при взрыве скважинных зарядов на карьере Мурунтау .....	131
Джос В.Ф., Шеметов П.А., Мальгин О.Н. Процесс формирования развала и временные параметры движения уступов при массовых взрывах на карьере Мурунтау .....	137
Кобец А.С., Волик Б.А., Пугач А.Н. Исследование износа рабочих органов культиватора.....	141
Кобец А.С., Корабельский В.И., Сокол С.П., Демидов О.И. Використання інтенсивно-подрібнюючих дисків з циклоїдальними спицями для викопування коренеплодів.....	145
Лисица Н.И. Опыт применения эластомерных конструкций для виброизоляции дробилок.....	149
Кобец А.С., Бутенко В.Г., Дирда В.И., Кухаренко П.М., Улексін В.О., Мельниченко В.И., Яцук В.М. Деякі аспекти використання біологічного палива на основі метилового ефіру рослинного походження .....	155
Кобец А.С., Бутенко В.Г., Дирда В.И., Кухаренко П.М., Улексін В.О., Мельниченко В.И., Яцук В.М. Визначення показників роботи дизеля при використанні біопалива .....	160
Кобец А.С., Миронов П.А., Пугачев В.И. Определение вероятности просеивания шарообразной частицы через отверстие виброцентробежного решета за одно колебание его оси вращения .....	165
Лисица Н.И., Заболотная Е.Ю., Агальцов Г.Н. Определение влияния параметров защитных футеровок шахтных вагонеток на качество очистки от налипшего материала.....	179
Лисица Н.И., Заболотная Е.Ю. Способ предупреждения налипания материала на рабочих поверхностях барабанных смесителей и окомкователей.....	184
Гордієнко М.О., Шемавнов В.І., Мельник С.І., Таріка О.Г., Забалуєв В.О., Дирда В.І. Формування стійких агроценозів при біологічній рекультиватії техногенно порушених територій .....	190

Національна Академія Наук України  
Інститут геотехнічної механіки ім. М.С. Полякова

Наукове видання  
**ГЕОТЕХНІЧНА МЕХАНІКА**  
Міжвідомчий збірник наукових праць  
Заснований у 1993 р.  
Випуск 70 (російською мовою)

Відповідальний за випуск *В.І. Дирда*  
Комп'ютерна верстка та підготовка макету ТОВ «Елвіта»  
Підписано до друку 08.06.2007 р.  
Формат 60×84/16. Умовн. друк. арк. 14,6  
Тираж 300 примірників. Віддруковано «Авантаж»  
49000, м. Дніпропетровськ, вул. Комсомольська, 22/6

$$C = C_1 / \beta = 9445,36 / 1,71 = 5523,6 \text{ (кг/см)}.$$

Как видно, расхождение полученного результата с экспериментальным значением вполне приемлемо для инженерной практики.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.

1. Влияние неизменности формы контактных граней резиновой опоры на ее податливость при вертикальном сжатии / Дырда В.И., Кобец А.С., Науменко Н.Н. // Геотехническая механика: Межвед. сб. научн. тр. ИГТМ НАНУ. – Днепропетровск, 2005. – Вып. 60. – С. 112-116.
2. Филоненко-Бородич М.М. Теория упругости. – М.: Физматгиз, 1959. – 364 с.
3. Термомеханика эластомерных конструкций при циклическом нагружении / Потурасв В.Н., Дырда В.И., Карнаухов В.Г., Сенченков И.К., Козлов В.И., Мазнецова А.В. – Киев: Наук. думка, 1987. – 288 с.

УДК 678.074:620.17

Дырда В.И., Козуб Ю.Г., Кобец А.С.,  
Науменко А.П., Твердохлеб Т.Е., Яценко А.А.

### ОПРЕДЕЛЕНИЕ РЕОЛОГИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ ЭЛАСТОМЕРНЫХ МАТЕРИАЛОВ

В роботі наведені результати експериментальних досліджень реологічних параметрів еластомерів; розглянута феноменологічна модель оцінки фізичної нелінійності наповнених еластомерів.

#### DEFINITION OF RHEOLOGICAL PARAMETERS OF ELASTOMERIC MATERIALS

In a paper results of experimental researches of rheological parameters of elastomers are given; the phenomenological model of an estimation of physical nonlinearity of extended elastomers is considered.

**Общие сведения.** Для определения реологических параметров эластомеров обычно используют несколько методов, дополняющих друг друга. К ним относятся: определение реологических параметров непосредственно по кривой релаксации; по релаксационному пику на частотной зависимости коэффициента диссипации  $\psi - \lg \omega$ ; по параметрам петли гистерезиса при произвольной частоте испытания. На проведение таких испытаний имеются стандарты и методики [1-4], устанавливающие требования на заготовку образцов, проведение исследований и обработку полученных результатов.

#### 1 Определение реологических параметров слабонаполненных резин

Такие резины (наполнение техническим углеродом 0-15 масс.ч.) широко используются в инженерной практике для изготовления виброизоляторов, упругих звеньев, демпферов и т.д. Наибольший интерес представляет получение зависимостей основных реологических пара-

метров (модуля сдвига  $G$  и коэффициента диссипации  $\psi$ ) от частоты нагружения. На рис. 1 показаны такие зависимости для резины 51-1562 (наполнение техническим углеродом 15 масс.ч.) в широком диапазоне частот нагружения; результаты получены на установке «Инстрон» модели 1162 при 293 К. Интерес здесь представляют релаксационные пики на зависимости  $\psi - \lg \omega$ , их природа связана с особенностью структуры эластомера. Эксперимент подтверждает исследования авторов [5-8], выполненные для различных полимерных материалов.

$G$ , МПа

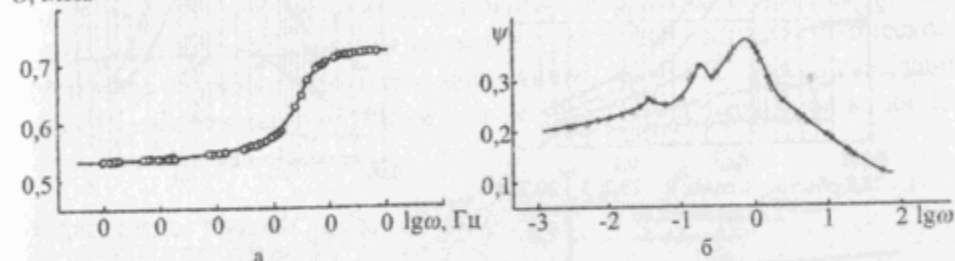


Рис. 1 – Частотные зависимости динамического модуля сдвига (а) и коэффициента диссипации энергии (б) для резины 51-1562

#### Определение реологических параметров наполненных резин

В настоящее время накоплен большой экспериментальный и теоретический материал по определению механических и усталостных свойств резин и влиянию на них различных факторов: рецептуры смеси (наполнения), режима нагружения, температуры и т.д. [1-4, 9-51].

Результаты экспериментальных исследований свидетельствуют о различии статических и динамических характеристик резин, о зависимости свойств от температуры, частоты и амплитуды гармонического нагружения, времени нагружения.

С увеличением наполнения все отчетливее проявляются эффекты физической нелинейности материала в форме зависимости модулей (податливостей) и тангенса угла потерь от амплитуды деформации (напряжения). Они весьма существенны уже для средненаполненных резин на основе НК и СКИ-3. В частности, для этих резин в диапазоне амплитуд деформаций от 0,01 до 10 % механические характеристики изменяются более чем вдвое, что свидетельствует о существенности физической нелинейности.

Обзор экспериментальных исследований такого поведения резиноподобных материалов дан в [14]. На рис. 2 и рис. 3, взятых из работы [9], показана зависимость динамических сдвиговых характеристик от

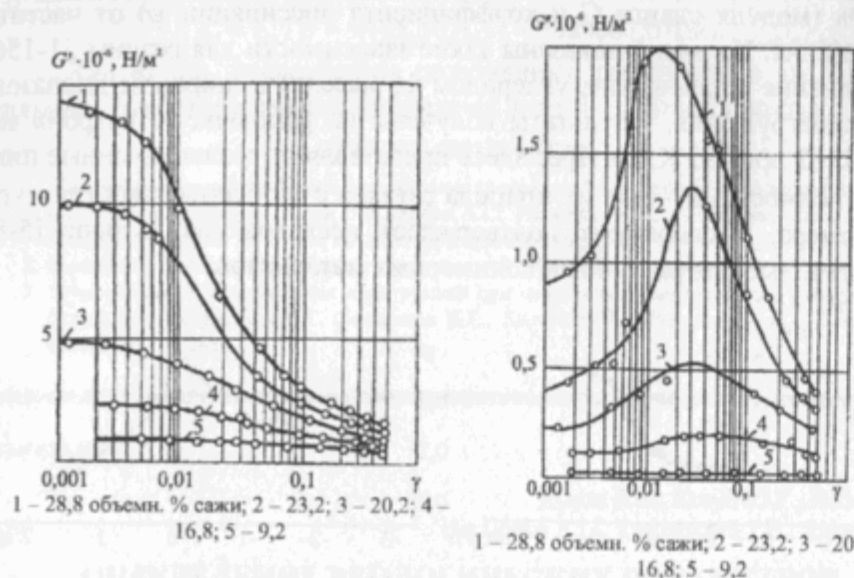


Рис. 2 – Амплитудные зависимости модуля сдвига  $G'$  для резин на основе бутилкаучука с сажей NAF

Рис. 3 – Амплитудные зависимости модуля сдвига  $G''$  для резин на основе бутилкаучука с сажей NAF

амплитуды деформации сдвига при фиксированной частоте и  $T = 20^\circ\text{C}$  для бутил-резины с различным объемным содержанием сажевого наполнителя. Важнейшими особенностями поведения материала являются усиление амплитудной зависимости с ростом содержания сажи, убывание модуля  $G'$  с ростом деформации, наличие максимума для  $G''$  в области деформаций, где  $G'$  изменяется наиболее быстро, и, по-видимому, существование предельных значений, как при низких, так и при высоких деформациях. Вторую и третью из этих особенностей принято называть эффектом Пэйна [9].

Одна из особенностей расчета деталей из саженасыщенных резин состоит в том, что зависимость напряжение – деформации для эластомера существенно отличается от линейного закона Гука, при циклической деформации таких резин нелинейность хорошо определяется по петлям гистерезиса и по сдвигу фаз синусоидальных кривых деформация – нагрузка, регистрируемых известными способами [1].

Линейный участок экспериментальной кривой 2 [24] (см. рис. 4) зависит от степени наполнения эластомера, качества смеси; для ненаполненных и слабополненных резин он сохраняется в некоторых случаях до 50, а для сильнонаполненных до 1...10 % [1]. Этот факт говорит

о том, что использование закона Гука при расчете высокоэластичных конструкций, которые обычно изготавливаются из сильнонаполненных эластомеров, требует определенной осторожности, так как может привести к грубым ошибкам.

Проведенные ранее исследования нелинейных эффектов в резинах с различным наполнением техническим углеродом [12, 30] показывают, что на динамические характеристики резиновых деталей значительное влияние оказывает степень наполнения техническим углеродом исходного материала. Для резин с малым наполнением (5 масс.ч.) (см. табл. 1, рис. 5, рис. 6) коэффициент диссипации энергии и динамический модуль практически не зависят от амплитуды деформации и статического поджатия, сохраняя некоторое постоянное значение. Указанные зависимости становятся заметными для резин со степенью наполнения 15-

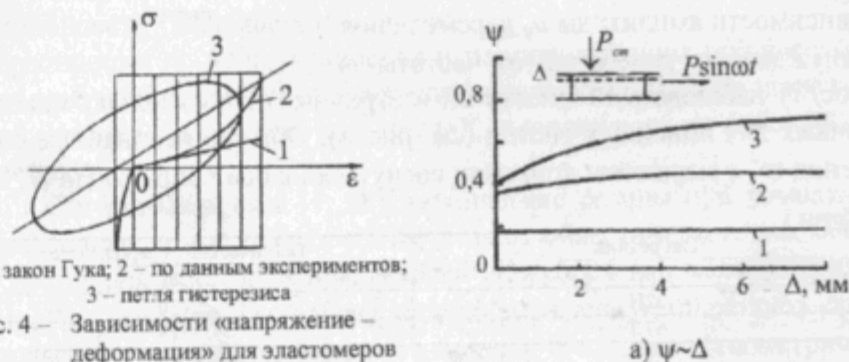


Рис. 4 – Зависимости «напряжение – деформация» для эластомеров

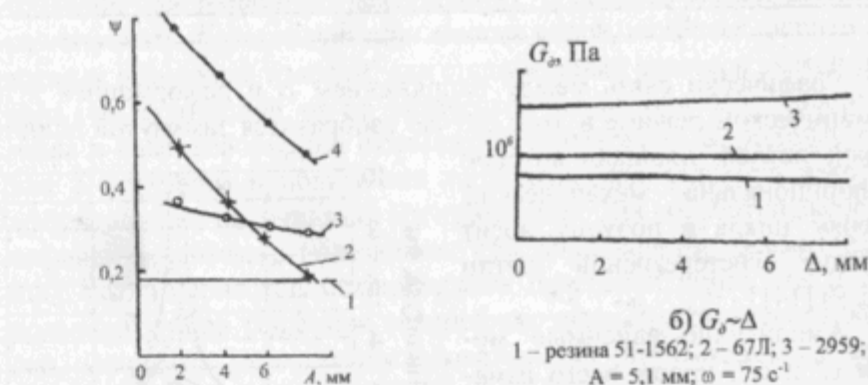


Рис. 5 – Зависимость коэффициента диссипации энергии  $\psi$  от амплитуды деформации  $A$  для различных резин

Рис. 6 – Зависимость динамических характеристик резиновых деталей от степени статического поджатия  $\Delta$

20 масс.ч. (резина типа 67Л). Для исследуемых резин при наполнении 50 масс.ч. и более изменение динамических характеристик может составлять примерно 50% и этот факт нельзя не учитывать при расчетах и проектировании конструкций.

Нелинейность деформационных свойств резин проявляется и в области резонансных частот гармонического нагружения, близких к собственной частоте колебаний системы. Нелинейность выражается в аномальной (со скачком) зависимости амплитуды  $u_0$  перемещения вынужденных колебаний от частоты  $\omega$  (рис. 7) наблюдаемой вместо симметричных относительно максимума кривых для линейных систем (см. рис. 8). Обычно нелинейные соотношения  $\sigma - \varepsilon$  выражены кривыми, вогнутыми к оси напряжений  $\sigma$  [14].

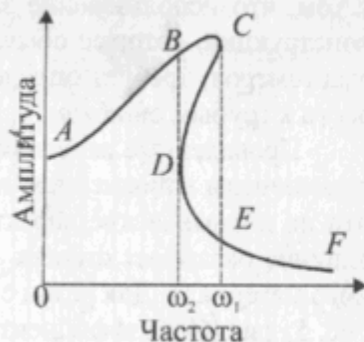


Рис. 7 – Зависимость амплитуды от частоты  $\omega$  при нелинейных свойствах резин в области резонансных частот

Таблица 1

Тип резины	Технический углерод, масс.ч.
13Н	82
22Н	50
67Л	15
2959	45
51-1562	5
18Н	50

Графически связь между напряжением  $\sigma$  и деформацией  $\varepsilon$  при гармоническом режиме в этом случае изобразится замкнутой эллиптической петлей, площадь которой пропорциональна механическим потерям цикла и поэтому носит название гистерезисной петли (рис. 9) [14].

Амплитудно-зависимые модули  $G'$  и  $G''$ , проще всего измерять, если в образце реализовано однородное деформированное состояние.

В настоящее время практически отсутствуют данные об ам-

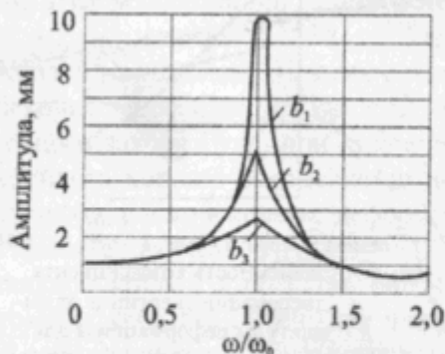


Рис. 8 – Резонансные кривые для линейных систем

плитудной зависимости свойств при сложном напряженном состоянии или полигармоническом нагружении, необходимые для расчета реальных виброизоляторов [31].

Параметры квазистатических петель гистерезиса целесообразно использовать для определения реологических параметров в случае геометрической нелинейности и в «зоне подобия» для нелинейно наследственных материалов.

Четко выраженная физическая нелинейность наполненных резин, возрастающая по мере увеличения наполнения резины техническим углеродом, значительно усложняет математическое описание зависимости «деформация – нагрузка» для деталей, выполненных из саженаполненных резин.

Как указывается в [1, 28], технические резины при комнатных и повышенных температурах соответствуют области высокоэластического состояния, в которой практически пренебрежимо мала зависимость  $E'$  и  $E''$  от температуры, однако хорошо выражена нелинейность свойств как физическая (нелинейные соотношения  $\sigma - \varepsilon$ ), так и геометрическая (большие неоднородные деформации). В области малых деформаций, реализуемых при эксплуатации многих видов, наиболее широко применяемых резиновых изделий, для стационарных режимов можно пренебречь геометрической, но не физической нелинейностью. Влияние величины и вида деформации оказывается существенным, поэтому найденные в линейном приближении характеристики являются некоторыми эффективными величинами. Их применение для обработки экспериментальных результатов полезно как при качественном рассмотрении общих закономерностей механического поведения резин, так и для использования при решении нелинейных задач динамического нагружения, например, методом последовательных приближений (в качестве первого приближения для решения).

Чтобы установить закон ползучести (или релаксации), строят экспериментальные кривые ползучести  $\varepsilon \sim t$  или релаксации  $\sigma \sim t$  при различных уровнях напряжений или деформаций (хотя бы 2-3 уровня). Каждая точка, как правило, средняя арифметическая из 6-8 экспериментов. Полученные экспериментальные кривые ползучести  $\varepsilon \sim t$  (или ре-

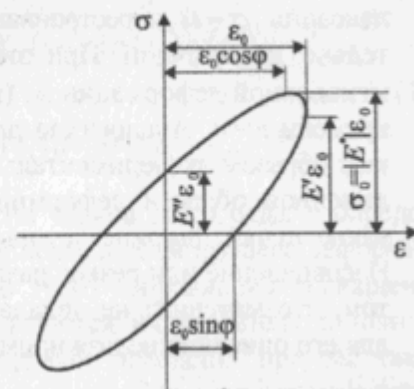
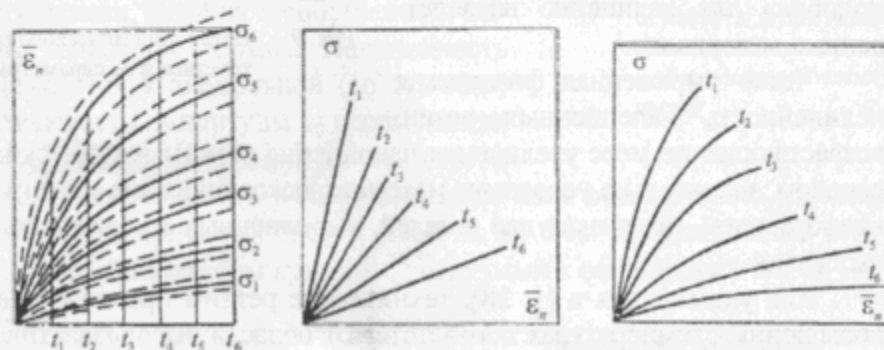


Рис. 9 – Петля динамического гистерезиса и ее параметры

лаксации  $\sigma \sim t$ ) перестраивают в безразмерных координатах относительно деформаций. При этом все деформации относят к начальной мгновенной деформации  $\varepsilon_0$ , (или напряжению  $\sigma_0$ ) измеряемой в момент времени  $t = 0$ . Аналогично для кривых релаксации. Перестроенные таким образом экспериментальные кривые ползучести или релаксации, в линейной области деформирования совпадают (или укладываются в узкие пучки, ширина которых обусловлена разбросом эксперимента). Несовпадение или резкое различие таких кривых (см. рис. 10) говорит о том, что материал не обладает линейными свойствами деформаций и для его описания нельзя применять линейную теорию.



а) исходные кривые ползучести б) изохронные кривые – линейная вязкоупругость в) изохронные кривые – нелинейная вязкоупругость  
Рис. 10 – Иллюстрация построения изохронных кривых

## 2 Модели учета физической нелинейности наполненных резин

В настоящее время все большее применение находят материалы с ярко выраженными вязко-упругими свойствами (наполненные техническим углеродом резины, композиты на основе полимерной матрицы, чистые полимеры и др.). В связи с этим для практики термомеханического анализа элементов конструкций из таких материалов возникает необходимость комплексного описания основных особенностей нелинейного поведения таких материалов при различных режимах нагружения и построения моделей, идентифицируемых при совместном использовании данных доступного для практической реализации эксперимента при квазистатических и динамических испытаниях.

При построении определяющих уравнений  $\sigma - \varepsilon$  для описания деформации твердых тел, наиболее простым и перспективным подходом, является использование принципа наследственности. В общем виде нелинейное уравнение было выписано еще Вольтерра [32, 33] и представляет собой бесконечный ряд кратных интегралов вида

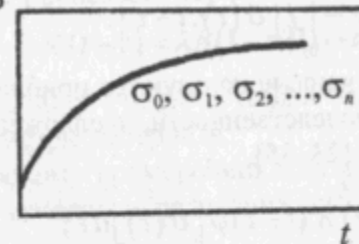
$$E \cdot \varepsilon = \sigma + \int_{-\infty}^t K_1(t-\tau)\sigma(\tau)d\tau + \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^t K_2(t-\tau)\sigma(\tau_1)\sigma(\tau_2)d\tau_1d\tau_2 + \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^t K_3(t-\tau)\sigma(\tau_1)\sigma(\tau_2)\sigma(\tau_3)d\tau_1d\tau_2d\tau_3 + \dots \quad (1)$$

Выбирая достаточно большое число членов этого ряда, и определив каким-либо образом ядра, можно описать любой процесс деформирования с любой точностью. Развитию этого направления посвящено много работ. Основные усилия направляются на введение дополнительных гипотез: несжимаемость, одинаковое поведение при растяжении и сжатии и пр. Это дает возможность упростить ядра и сократить число членов ряда. Однако очевидно, что использование кратных интегралов и определение большого числа ядер наследственности весьма затруднительно, поэтому работы в этом направлении, как правило, являются теоретическими.

В случае линейной вязкоупругости при сравнительно небольших уровнях напряжений временные соотношения  $\varepsilon \sim \sigma \sim t$  линейны, зависимость податливости  $I(t) = \varepsilon(t)/\sigma$  не меняется с ростом  $\sigma$  (кривые совпадают), а изохроны  $\sigma \sim \varepsilon$  линейны (рис. 11).

Другая картина наблюдается при нелинейной вязкоупругости (см. рис. 10, в, рис. 12).

$\varepsilon(t)/\sigma$



а) кривая податливости ( $\sigma_n > \dots > \sigma_2 > \sigma_1 > \sigma_0$ );



б) изохроны  $\sigma - \varepsilon$  ( $t_n > \dots > t_2 > t_1 > t_0$ )

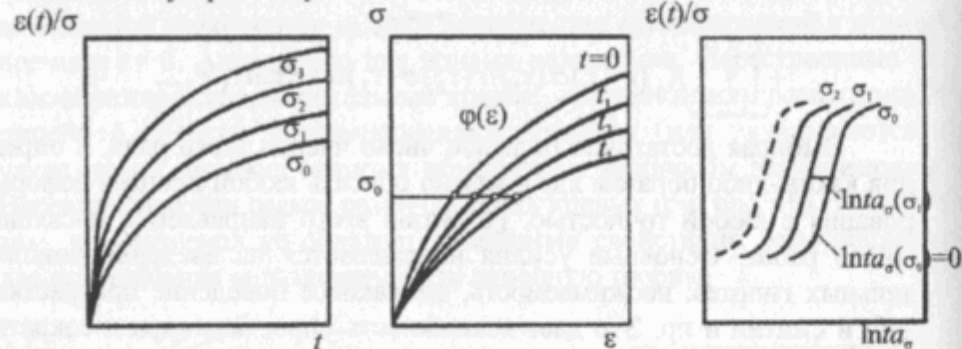
Рис. 11 – Линейная вязкоупругость

Для большинства эластомеров область линейности мала, и рассматривать ее нужно с известным приближением. Дальнейшее развитие теории деформирования идет по пути учета физической нелинейности и сложных путей нагружения материала [4].

Для более упрощенного описания физической нелинейности полимерных материалов используются зависимости, представляющие собой частные случаи уравнения (1) и содержащие лишь один интеграл. Такие попытки основаны на нелинейном принципе суперпозиции,



обобщающем известный принцип Больцмана-Вольтерра [32, 33]. Согласно этому принципу



а – кривые податливости подобны б – изохронные кривые подобны в – реологически простое тело

Рис. 12 – Нелинейная вязкоупругость

$$d\varepsilon(t) = \sigma(\tau) f(t-\tau) d\tau, \quad (2)$$

где  $f(t-\tau)$  – ядро ползучести.

Для физически нелинейного члена

$$d\varepsilon(t) = f[\sigma(\tau), t-\tau] d\tau. \quad (3)$$

Выражение (3) известно как принцип Больцмана-Персо [34], а нелинейное уравнение ему соответствующее, имеет вид

$$\varepsilon(t) = a\sigma + \int_0^t f[\sigma(\tau), t-\tau].$$

В практических расчетах чаще используются приближенные варианты уравнений нелинейной наследственности, предложенные:

Лидерманом и Розовским [23, 35]

$$\varepsilon(t) = \psi(t) + \int_0^t K(t-\tau) \psi[\sigma(\tau)] d\tau; \quad (4)$$

Ю.Н. Работновым [21]

$$\varphi[\varepsilon(t)] = \sigma(t) + \int_0^t K(t-\tau) \sigma(\tau) d\tau \quad (5)$$

М.А. Колтуновым [36, 37]

$$\varphi[\varepsilon(t), \dot{\varepsilon}(t)] = f[\sigma(t), \dot{\sigma}(t)] + \int_0^t K(t-\tau) f[\sigma(\tau), \dot{\sigma}(\tau)] d\tau \quad (6)$$

Существенен вопрос о выборе ядра наследственности. Известно, что наиболее подходящими являются простые ядра со слабой особенностью в нуле, но они, чаще всего, хорошо описывают начальные участки

кривых ползучести (или релаксации), но оказываются непригодными при больших временах. Это происходит потому, что с течением времени все сильнее оказывается нелинейность.

Наиболее широкое применение в механике эластомеров получили:

- ядро Ю.Н. Работнова – дробно-экспоненциальная функция  $\mathfrak{E}_\alpha(-\beta, t-\tau)$  вида [21, 22, 38].

$$\mathfrak{E}_\alpha(-\beta, t-\tau) = \chi(t-\tau)^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^n (t-\tau)^{n(1+\alpha)}}{\Gamma[(n+1)(1+\alpha)]}, \quad (7)$$

$$(-1 < \alpha < 0, \beta > 0);$$

- ядро Абеля

$$R(\tau) = \frac{(t-\tau)^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}; \quad (8)$$

- ядро А.Р. Ржаницына [39]

$$K(t-\tau) = A e^{-\beta(t-\tau)} (t-\tau)^{\alpha-1}; \quad (9)$$

- ядро Колтунова [36, 37]

$$R(t-\tau) = \frac{e^{-\beta(t-\tau)}}{t-\tau} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[A\Gamma(\alpha)]^n}{\Gamma(\alpha n)} (t-\tau)^{\alpha n}; \quad (10)$$

- ядро А.П. Бронского [40]

$$K(t-\tau) = \lambda \beta (1-\alpha) (t-\tau)^{-\alpha} \exp[-\beta(t-\tau)^{1-\alpha}], \quad (11)$$

где  $-1 < \alpha < 0$ ;  $\beta > 0$ ;  $\chi > 0$ ,  $\alpha, \beta, \lambda$  – параметры ядер – реологические параметры материала.

Широкому применению этих ядер способствовали создание практических методов определения их параметров по экспериментальным данным.

Приведенные ядра содержат, как правило, три или четыре параметра, имеют дробную степень времени, так как только в этом случае возможно описание экспериментальных данных по релаксации напряжения и ползучести с хорошим приближением. Выбор соответствующего ядра зависит от свойств материала, при этом большую роль играют следующие факторы: явное выражение ядра релаксации для соответствующего ядра ползучести, количество определяемых по экспериментальным данным параметров ядер – наличие методик определения этих параметров, математическая сложность ядер, гибкость аналитических выражений при описании экспериментов.

Успешному применению дробно-экспоненциальных функций  $\mathcal{E}_\alpha$  – Работнова (7) при исследовании вязкоупругого поведения реальных полимеров, способствовало существование алгебры резольвентных операторов [33, 38], наличие таблиц  $\mathcal{E}_\alpha$  – функций [21, 38], создание методики определения параметров  $\mathcal{E}_\alpha$  – функций  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\lambda$ , являющихся реологическими параметрами материала при циклическом деформировании резиновых деталей [3], таблицы параметров  $\mathcal{E}_\alpha$  – функции широко представлены в [1, 2, 38] для большинства эластомеров (наполненных и ненаполненных), используемых в вибрационной технике.

Ядро (9) и его резольвента (10), а также интегралы от этих функций табулированы в [37] для достаточно широкого диапазона изменения параметров  $\alpha_i$ ,  $\beta_i$ ,  $A_i$  и интервала времени  $t \geq 0,001$ .

Ядро Ржаницына (9) широко применяется в расчетах некоторых видов полимеров и бетона.

Для описания временных эффектов в саженаполненных резинах часто используется трехпараметрическое ядро Бронского – Слонимского, методика оценки параметров ядра и таблицы реологических параметров, используемых резин приведены в [1, 40-44].

Для учета нелинейности на практике идут по пути построения более сложных ядер сохранив линейной форму наследственных уравнений. Упрощение ядра нелинейного интегрального уравнения существенно расширяет его применение в расчетах, а также процедуру определения его параметров в практических расчетах, чаще всего, нелинейность вводят лишь за счет уточнения положения мгновенной кривой деформирования.

Переход от линейного уравнения к нелинейному может быть осуществлен одним из известных способов – уравнения Работнова [21, 22], Лидермана-Розовского-Персо [23, 34, 35], Колтунова, Шепери [36, 37, 45] и др.

Для нахождения необходимых параметров используемых ядер, а также для построения кривой мгновенного нагружения и установления степени нелинейности, исследуемых материалов используются семейство изохронных кривых ползучести (или релаксации) с учетом нелинейности материала.

В осях  $\sigma \sim \epsilon$  (рис. 13) подобные изохронные кривые ползучести представляются семейством конгруэнтных кривых, исходящих из нуля. При  $t=0$  следует  $\sigma = \varphi(\epsilon)$ , поэтому кривую мгновенного нагружения можно условно принять за нулевую изохрону. Процесс ползучести, описываемый (5), в осях  $\sigma \sim \epsilon$  разворачивается вправо от кривой  $\sigma = \varphi(\epsilon)$  и

происходит по прямой, параллельной оси деформаций. Этому соответствует движение вверх по кривой мгновенного нагружения.

Возможны три типа изохронных кривых:

1. Кривые не подобны между собой (рис. 14, а) и каждая из них описывается своей функцией  $\sigma = \varphi(\epsilon)$ ;

2. Кривые подобны между собой и описываются одной функцией  $\sigma = \varphi(\epsilon)$ , за исключением кривой мгновенной деформации  $t=0$ , описываемой функцией  $\sigma = \varphi_0(\epsilon)$  (рис. 14, б)

3. Все кривые для любого момента времени  $t \geq 0$  взаимоподобны; такие кривые описываются одной функцией  $\sigma = \varphi(\epsilon)$  (рис. 14, в).

Если кривые податливости при разных  $\sigma$  не совпадают, а кривые ползучести подобны, то вязкоупругие свойства материала описывают соотношением (4) [23, 35].



Рис. 14 – Кривые зависимости «напряжение – деформация»  $\sigma \sim \epsilon$  в различные моменты времени  $t_i$

В этом случае можно подобрать такие числа  $\psi(\sigma_0)$ , что кривые

$$\epsilon(t) = \frac{1}{\psi(\sigma_0)} \cdot \epsilon_k(t)$$

совпадут в пределах экспериментального доверительного интервала.

Последовательность таких расчетов подробно представлены в [36, 37].

Если кривые податливости не совпадают и кривые ползучести не подобны, а изохронные кривые, т.е. кривые  $\sigma \sim \epsilon$  при разных  $t = t_k = \text{const}$ , построенные по данным кривых ползучести, подобны, то

для описания процесса деформирования такого материала применяют уравнение Работнова (5).

В случае ползучести при  $\sigma(t) = \sigma_k = \text{const}$  уравнение (5) будет

$$\varphi[\varepsilon(t)] = \sigma_k \left[ 1 + \int_0^t K(t-\tau) d\tau \right] = \sigma_k \cdot f(t). \quad (12)$$

Уравнение (12) показывает, что изохронные кривые ползучести подобны, причем функция  $f(t) = \left[ 1 + \int_0^t K(t-\tau) d\tau \right]$  дает коэффициенты подобия при фиксированных  $t$ .

Здесь  $\varphi(\varepsilon)$  – аппроксимации кривой  $\sigma \sim \varepsilon$  мгновенного деформирования или изохронная кривая  $\sigma = \sigma(\varepsilon)$  при  $t = 0$ .

Подход (модель) Работнова, разработанный в [21], заключается в том, что с напряжением связывается линейным интегральным уравнением не сама деформация, а нелинейная функция деформации (см. формулу (5)). Учет нелинейности в рамках такого подхода осуществляется введением кривой мгновенного деформирования, а нагрузки определяют величину «сползания» с нее.

В качестве ядра рекомендуется  $\mathcal{E}_\alpha$  – функции Работнова [38].

Определение характеристик материала в рамках рассматриваемой модели подробно рассмотрено в [21, 22].

Следует отметить, что использование уравнений (5) и (6) для описания нелинейной ползучести предполагает наличие и нелинейной упругости  $\varepsilon = f(\sigma)$  при  $t \rightarrow 0$  [1, 21, 22]

$$\sigma = (1 - K^*) f(\varepsilon); \quad (13)$$

$$\varepsilon = (1 + K) F(\sigma). \quad (14)$$

При гармоническом деформировании по закону  $\varepsilon = \varepsilon_0 \sin \omega t$  уравнения линейной вязкоупругости

$$\sigma(t) = E \left[ \varepsilon(t) - \int_{-\infty}^t K(t-\tau) \varepsilon(\tau) d\tau \right]; \quad (15)$$

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{E} \left[ \sigma(t) - \int_{-\infty}^t R(t-\tau) \sigma(\tau) d\tau \right], \quad (16)$$

где  $E$  – модуль упругости материала;

$\varepsilon(t)$  и  $\sigma(t)$  – деформация и напряжение в момент времени  $t$ ;

$t$  – время наблюдения;

$\tau$  – время, предшествующее моменту наблюдения;

$K(t-\tau)$  и  $R(t-\tau)$  – ядра релаксации и ползучести соответственно преобразуются к виду

$$\begin{aligned} \sigma(t) &= E_0 \varepsilon_0 \left[ \sin \omega t - \int_0^t K(t-\tau) \sin \omega \tau d\tau \right] = \\ &= E_0 \varepsilon_0 \left[ (1 - A(\omega)) \sin \omega t + B(\omega) \cos \omega t \right]; \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon(t) &= \frac{\sigma_0}{E_0} \left[ \sin \omega t + \int_{-\infty}^t R(t-\tau) \sin \omega \tau d\tau \right] = \\ &= \frac{\sigma_0}{E_0} \left[ (1 - A_1(\omega)) \sin \omega t + B_1(\omega) \cos \omega t \right], \end{aligned} \quad (18)$$

где  $A(\omega) = \int_0^{\infty} K(z) \cos \omega z dz$  – косинус преобразование Фурье ядра релаксации;

$B(\omega) = \int_0^{\infty} K(z) \sin \omega z dz$  – синус преобразование Фурье ядра релаксации;

$A_1(\omega) = \int_0^{\infty} R(z) \cos \omega z dz$  – косинус преобразование Фурье резольвенты;

$B_1(\omega) = \int_0^{\infty} R(z) \sin \omega z dz$  – синус преобразование Фурье резольвенты.

Принимая в качестве ядра релаксации дробно-экспоненциальную функцию Работнова

$$\mathcal{E}_\alpha(-\beta, (t-\tau)) = \chi(t-\tau)^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^n (t-\tau)^{n(1+\alpha)}}{\Gamma[(n+1)(1+\alpha)]}, \quad (19)$$

где  $-1 < \alpha < 0$ ;  $\beta = \frac{1}{t_0^{1+\alpha}}$ ;  $\chi = \frac{\lambda}{t_0^{1+\alpha}}$ ;  $\lambda = \frac{E_0 - E_\infty}{E_0}$  или  $\lambda = \frac{G_0 - G_\infty}{G_0}$ ;

$\alpha, \beta, \lambda$  – параметры ядра, являющиеся реологическими параметрами материала и имеющие конкретный физический смысл;

$t_0$  – время релаксации;

$\lambda$  – обычно называют дефектом модуля;

$\chi = \lambda \cdot \beta$  – обобщенное время релаксации;  
 $\alpha$  – параметр дробности, явно выражается через максимальное значение спектра  $\rho_{max}$  и дефект модуля  $\lambda$

$$\alpha = -1 + \frac{4}{3} \pi^{-1} \operatorname{arctg}(2\pi\rho_{max}\lambda^{-1}); \quad (20)$$

$\Gamma(\dots)$  – гамма-функция заданного параметра;  
 $E_0$  и  $G_0$  – мгновенные модули упругости и сдвига материала;  
 $E_\infty$  и  $G_\infty$  – установившиеся значения модуля упругости и модуля сдвига, определяемые как

$$E_\infty = \lim_{\omega \rightarrow 0} E(\omega), \quad G = \lim_{\omega \rightarrow 0} G(\omega),$$

косинус и синус преобразования Фурье вычисляются по следующим аналитическим зависимостям [41]:

$$A(\omega) = \frac{\chi(\omega^{1+\alpha} \cos \delta + \beta)}{\omega^{2(1+\alpha)} + 2\beta\omega^{1+\alpha} \cos \beta + \beta^2}; \quad (21)$$

$$B(\omega) = \frac{\chi(\omega^{1+\alpha} \sin \delta)}{\omega^{2(1+\alpha)} + 2\beta\omega^{1+\alpha} \cos \beta + \beta^2}.$$

Синус и косинус преобразования Фурье ядра Ржаницына [46] имеют выражения

$$A(\omega) = \frac{\Gamma(\alpha)}{(\omega^2 + \beta^2)^{\frac{\alpha}{2}}} \cos\left(\alpha \operatorname{arctg} \frac{\omega}{\beta}\right); \quad (22)$$

$$B(\omega) = \frac{\Gamma(\alpha)}{(\omega^2 + \beta^2)^{\frac{\alpha}{2}}} \sin\left(\alpha \operatorname{arctg} \frac{\omega}{\beta}\right),$$

где  $A$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  – параметры ядра,  $-1 < \alpha < 0$ ,  $\beta > 0$ ;  
 $t$  – время.

Параметр  $\beta$  имеет размерность  $c^{-1}$ ,  $A$  и  $\alpha$  – безразмерные величины.

Аналитическая форма интегральных преобразований ядра (11) отсутствует. При этом синус- и косинус-преобразования  $A(\omega)$  и  $B(\omega)$  ядра (11) можно получить на основе равномерных аппроксимаций, используя формулы [1, с. 205].

При гармоническом нагружении удобно пользоваться комплексным представлением модулей

$$G^* = G' + iG''; \quad E^* = E' + iE'', \quad (23)$$

где  $G'$ ,  $E'$  – динамические модули, характеризующие упругие свойства резины;

$G''$ ,  $E''$  – модули потерь, характеризующие диссипативные свойства резины.

Результаты экспериментальных измерений реакции резины на механическое воздействие могут быть выражены через любые составляющие этих функций и пересчитаны следующим образом [47]

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{G''}{G'}; \quad G' = |G^*| \cos \delta; \quad (24)$$

$$G'' = |G^*| \sin \delta; \quad |G^*| = \sqrt{G'^2 + G''^2}.$$

Определив величины синус и косинус преобразований Фурье  $A(\omega)$  и  $B(\omega)$ , находят все динамические характеристики резины из соотношений [1, 2, 3]

$$G''(\omega) = G_0 B(\omega); \quad G'(\omega) = G_0 [1 - A(\omega)]; \quad (25)$$

$$\operatorname{tg} \delta(\omega) = \frac{G''(\omega)}{G'(\omega)} = \frac{B(\omega)}{1 - A(\omega)}; \quad \psi = 2\pi \operatorname{tg}[B(\omega)].$$

Правомерность описания динамического механического поведения резин в нелинейной области с помощью линейной модели гармонического вибратора показана в [48].

$G'$  и  $\operatorname{tg} \delta$  рассчитывают по данным эксперимента при условии отсутствия искажений формы синусоидальных сигналов силы и смещения или эллипса потерь, наблюдаемых на экране электронного осциллографа, а о нелинейности судят по зависимости динамических функций от амплитуды деформаций.

Как правило, анализ динамических характеристик в случае нелинейной реакции резины показывает основные нелинейные эффекты: отличие петли гистерезиса от эллиптической, зависимость действительной составляющей модуля и тангенса угла потерь от амплитуды деформаций и амплитудная зависимость  $G'$  и  $\operatorname{tg} \delta$  тем сильнее выражена, чем выше твердость резины (чем выше саженая наполнение).

Нелинейное поведение саженая наполненной резины вносит поправку в  $\operatorname{tg} \delta(\omega)$  или  $\psi(\omega)$ , значительно усложняя их определение.

Для их определения можно использовать соотношения (метод), полученные Крушем [1] и развиты в работах [41–44] при обработке экспериментальных данных для саженая наполненных резин.

При этом используют уравнение (5) описываемое нелинейную реакцию резины в виде

$$\begin{aligned}\varepsilon(t) &= G_0^{-1} K(t) f[\sigma(t)]; \\ f[\sigma(t)] &= \sigma(t) + \mu \sigma^3(t),\end{aligned}\quad (26)$$

где  $K(t)$  – временная функция (функция ползучести);  
 $\mu$  – коэффициент нелинейности,  $\mu \ll 1$ .

Применив метод Галеркина при деформации  $\varepsilon = \varepsilon_0 \sin \omega t$ , получают систему уравнений вида [1, 42, 43]

$$\begin{aligned}\sigma_0(1-A) &= \sigma_1 [1 + 0,75\mu(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)]; \\ \sigma_0 B &= \sigma_2 [1 + 0,75\mu(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)],\end{aligned}\quad (27)$$

где  $\sigma_0 = G_0 \cdot \varepsilon_0$ ;

$\sigma_1, \sigma_2$  – амплитуды составляющих приложенного напряжения, при этом  $\sigma_1$  совпадают с направлением деформации,  $\sigma_2$  – перпендикулярны направлению.

Коэффициент диссипации энергии  $\psi(\omega)$ , динамический модуль  $G(\omega)$  и параметр  $\lambda$  [42, 43] определяют из соотношений

$$\begin{aligned}\psi(\omega) &= \frac{\psi_0 \sigma_0}{1 + 0,75\mu \sigma_1^2}; \quad \lambda = \frac{\operatorname{tg} \delta(\omega)}{B(\omega) - \operatorname{tg} \delta(\omega) A(\omega)}; \\ G(\omega) &= \frac{G_0}{\sqrt{(1 + \lambda A(\omega))^2 + \lambda^2 \cdot B^2(\omega)}}.\end{aligned}\quad (28)$$

Надежность таких оценок определяется степенью соответствия полученных расчетных значений механических характеристик экспериментальным.

Если изохронные кривые не оказываются подобными в случае простой релаксации и простой ползучести, необходимо использовать более сложные состояния, учитывающие зависимость реологических параметров от интенсивности напряжения.

Опыт показывает [1, 2, 10, 32, 37, 47], что существенное влияние на реологические свойства всех материалов оказывает температура.

Решение конкретных задач с учетом последнего в общем случае весьма затруднительно. Чтобы обойти эти трудности, необходимо либо вводить в программу расчета вид ядра ползучести или релаксации при различных температурах, либо использовать понятие термореологически простых тел, для которых влияние температуры на реологические свойства учитывается путем введения в обычные упруго-наследственные соотношения типа (15), (16) модифицированного вре-

мени  $t'$  (принцип температурно-временной аналогии ТВА [47]), приемлем второй метод.

Приведенное время или псевдовремя при разных постоянных температурах  $T$  вводится как

$$t' = a_r(T) \cdot t, \quad (29)$$

где  $t'$  – приведенное время;

$a_r(T)$  – функция температуры или коэффициент температурно-временного сдвига, коэффициент редукции;

$t$  – время наблюдения.

Коэффициент температурного сдвига выбирается таким образом, что  $a_r(T_0) = 1$ , где  $T_0$  – некоторая базовая температура приведения. Для нестационарных температурных полей условное время определяется как интеграл от произведения функции температуры на дифференциал истинного времени.

Если для данного материала температурно-временная аналогия имеет место, т.е. известна функция  $a_r(T)$  в некотором интервале температур, то заменив в уравнениях (15), (16) время  $t$  на  $t'$ , они внешне не изменяясь, а на самом деле будут отражать сильное влияние температуры. Основным ограничением применимости принципа ТВА является требование неизменности материала и природы релаксационных процессов в области, где производится приведение. Так, для эластомеров невозможна прямая суперпозиция спектров, полученных до и после старения и кристаллизации [25]. Вид функции  $a_r(T)$  определяется из эксперимента.

Для аппроксимации коэффициента  $a_r(T)$  предложено несколько формул. Наиболее употребляемая зависимость принята в виде уравнения Вильямса-Ланделла-Ферри (ВЛФ) [47]

$$\lg a_r = -\frac{C_1(T - T_s)}{C_2 + (T - T_s)}, \quad (30)$$

где  $C_1$  и  $C_2$  – эмпирические коэффициенты, зависящие от выбора  $T_s$ ;  
 $T_s$  – температура приведения.

Для практических целей за базовую температуру приведения удобно принимать температуру лабораторных испытаний [21]  $T_s = 20^\circ\text{C}$ , где  $a_r = 1$ . В качестве первого приближения для большинства резиноподобных материалов в [47] приняты значения  $C_1 = 8,86$ ;  $C_2 = 101^\circ\text{C}$ , получившие название универсальных коэффициентов приведения. Границы применимости температурно-временной аналогии – ТВА зависят от типа эластомера (резины). В [16, 29] обоснована возможность использования универсальных параметров приведения для

резин, содержащих до 30 масс.ч. техуглерода, при этом температура приведения  $T_s$  в (30) определяется как  $T_s = T_c + 50^\circ = 252 \text{ K}$ , где  $T_c$  – температура стеклования резины. Здесь же показана возможность использования ТВА динамических функций наполненных техническим углеродом резин в нелинейной области, для которой сформулирован дополнительный критерий применимости приведения – симбатности (совместимости) изотерм амплитудных зависимостей динамических функций резин (модуль сдвига  $G'$  и тангенс угла механических потерь  $tg\delta$ ). Максимальная амплитуда деформаций, при которой возможно приведение, зависит от твердости резины и достигает 0,02 для любых резин (до  $H = 80$  ед. по Шору А.); 0,1 для средненаполненных резин ( $H = 50$  масс.ч.) и 0,13 для малонаполненных резин. Показано, что для резин, содержащих до 30 масс.ч. сажи ТВА осуществляется с универсальными параметрами приведения.

Коэффициенты приведения  $C_1, C_2$  для резин с различным наполнением приведены в табл. 2 [16, 29]

Таблица 2 – Параметры ТВА

Содержание основных компонентов, масс.ч.				Параметры приведения			
НК	СКИ-3	СКД	Сера	Техуглерод	$T_s, \text{K}$	$C_1$	$C_2$
100	–	–	2,5	30	297	24,4	101,6
–	100	–	2,5	40	289	8,86	101,6
–	100	–	2,5	50	297	–1743	–14720
100	–	–	3,0	45	298	28,6	256
–	75	25	3,0	80	284	8,86	101,6

С учетом изложенного, если ползучесть или релаксация описываются уравнениями (15), (16) с дробно-экспоненциальным ядром  $\mathcal{E}_\alpha(-\beta, t-\tau)$  Работнова (19), например,

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{E} \left[ \sigma(t) + \chi \int_0^t \mathcal{E}_\alpha(-\beta, t-\tau) \sigma(\tau) d\tau \right], \quad (31)$$

то при постоянной температуре  $T_0 = a_r(T)$ , и известной функции  $a_r(T)t$ , для которой  $a_r(T_0) = 1$  значения реологических параметров  $\chi$  и  $\beta$  при температуре приведения  $T_0$  были равны соответственно  $\chi_0$  и  $\beta_0$ , то из самого определения дробно-экспоненциальной функции (19) непосредственно следует, что при произвольной температуре  $T$  параметры ядра будут пересчитываться по формулам [21]

$$\begin{aligned} \chi &= \chi_0 a_r^{1-\alpha}, \\ \beta &= \beta_0 a_r^{1-\alpha} \quad (-1 < \alpha < 0). \end{aligned} \quad (32)$$

Если  $a_r$  аппроксимируется зависимостью (30), то для параметров ядра Работнова выражения (32) будут иметь следующий вид

$$\begin{aligned} \chi(T) &= \chi_0 10^{\left(\frac{C_1(T-T_0)}{C_2+T-T_0}\right)^{(1+\alpha)}}, \\ \beta(T) &= \beta_0 10^{\left(\frac{C_1(T-T_0)}{C_2+T-T_0}\right)^{(1+\alpha)}}. \end{aligned} \quad (33)$$

Аналогично получают зависимости параметров ядра Ржаницина (9) от температуры [37]

$$\begin{aligned} A &= A_0 a_r^\alpha; \\ \beta &= \beta_0 a_r, \end{aligned} \quad (34)$$

параметр  $\alpha$  – не зависит от температуры.

Таким образом, проводя эксперименты на ползучесть (релаксацию) при различных значениях температуры, постоянных в каждом эксперименте и меняющихся от эксперимента к эксперименту, можно согласно методик [3, 21, 37] определить параметры ядер (7) и (10) в зависимости от температуры.

Адекватно влиянию температуры на вязкоупругие свойства эластомеров соответствует и изменение частоты нагружения. Такая адекватность была предметом многочисленных исследований. Интерес представлял вопрос, почему усиление зависимости от частоты сопровождается усилением зависимости от температуры и наоборот. Это явление получило название температурно-временной (частотной) аналогии и объяснено в рамках теории так называемого терморологически простого поведения материала [47]. Согласно этой теории, изотермические и неизотермические характеристики соотносятся следующим образом [1, 47]

$$G'(\omega, T) = \frac{T\rho}{T_0\rho_0} G'(\omega a_r, T_0); \quad G''(\omega, T) = \frac{T\rho}{T_0\rho_0} G''(\omega a_r, T_0), \quad (35)$$

где  $\rho$  и  $\rho_0$  – плотности полимера при абсолютных температурах  $T$  и  $T_0$  соответственно;

$G'$  и  $G''$  – составляющие комплексного модуля сдвига, определяемого как

$a_r$  – коэффициент температурного приведения, определяемый по формуле (2.39).

В рамках ТВА в настоящее время хорошо исследованы как в линейной, так и нелинейной областях краевые задачи для сред с нестабильными свойствами – воздействие температур, влажности и т.д. В работах [32, 49] приведены методики определения коэффициентов тем-

пературного сдвига  $a_T$  по экспериментальным данным, а также основные требования, предъявляемые к проведению таких экспериментов. Ввиду серьезных экспериментальных трудностей, ТВА часто является единственным средством оценки динамических свойств в широком интервале температур и частот, хотя такая оценка становится все менее надежной по мере выхода за верхнюю и нижнюю границы интервала параметров  $\omega$  и  $T$ . В каждом конкретном случае необходима тщательная экспериментальная проверка такого подхода.

В [13, 15] установлено, что закономерности изменения механических характеристик РД при гармоническом деформировании адекватно описываются математической моделью интегрального типа, учитывающей свойства материала, параметры конструкции и эксплуатационные факторы посредством конечных аналитических соотношений:

$$\begin{aligned} \tilde{N}_n &= \tilde{E}_k \tilde{u}_n \frac{S}{H}; \quad \tilde{N}_r = \tilde{G}_k \tilde{u}_r \frac{S}{H}; \quad E_k^{**} = \beta_n^{**} E_0; \quad G_k^{**} = \beta_r^{**} G_0; \\ \beta_n^{**} &= 2(1+\nu) \beta_{0n} G_L^{**}(\omega, \theta_0, t) F^{**}(\bar{\epsilon}) / G_0; \\ \beta_r^{**} &= \beta_{0r} G_L^{**}(\omega, \theta_0, t) F^{**}(\bar{\epsilon}) / G_0, \end{aligned} \quad (36)$$

где  $\tilde{N}_n$ ,  $\tilde{N}_r$ ,  $\tilde{u}_n$ ,  $\tilde{u}_r$  – амплитуды нормальных и касательных сил и перемещений на торцах РТИ;

$(\tilde{\bullet}) = (\bullet)' + i(\bullet)''$  – комплексное представление величин

$$\tilde{N}_n = N_n' + iN_n'', \quad \tilde{u}_n = u_n' + iu_n'' \quad \text{и т.д.}$$

$\tilde{E}_k$ ,  $\tilde{G}_k$  – кажущиеся или условные модули, характеризующие конструкцию;

$\tilde{E}_L$ ,  $\tilde{G}_L$  – модули материала (резины) в области линейного деформирования;

$\beta_{0n}$ ,  $\beta_{0r}$  – параметры жесткости, соответствующие линейной области деформирования;

$F^{**}$  – функции, описывающие зависимость модуля сдвига материала от амплитуды деформации,  $F^{**}(0) = 1$ ;

$G_0$ ,  $E_0$  – некоторые отсчетные модули, соответствующие частоте  $\omega_0$  и температуре  $\theta$ ;

$\bar{\epsilon}$  – среднеобъемная интенсивность деформаций.

Для параметров среднеобъемной интенсивности деформаций применительно к РД при сжатии, сдвиге, комбинированном нагружении, имеют место следующие выражения [13].

$$\bar{\epsilon} = \epsilon_{0y} [(1+\nu)\beta_{0n}]^{\frac{1}{2}}; \quad \bar{\epsilon} = \epsilon_{0x} \left(\frac{\beta_{0r}}{2}\right)^{\frac{1}{2}}; \quad \bar{\epsilon} = [\epsilon_{0x}^2 \beta_{0r} + 2(1+\nu)\epsilon_{0y}^2 \beta_{0n}]^{\frac{1}{2}}, \quad (37)$$

где  $\epsilon_{0y}$ ,  $\epsilon_{0x}$  – деформация торца РД под действием нормальной и касательной гармонических сил.

Приведенные выше соотношения для определения компонент  $\tilde{\beta}_n$ ,  $\tilde{\beta}_r$  описывают амплитудную зависимость механических характеристик РД с использованием амплитудных зависимостей механических свойств материала (резины). Форма РД учитывается неявно через параметры  $\beta_{0n}$ ,  $\beta_{0r}$ .

Инженерный метод расчета механических, в том числе силовых характеристик РД, состоит в конкретизации модели (36), (37) путем последовательного определения ее параметров:  $\beta_{0n}$ ,  $\beta_{0r}$ ,  $F^{**}$ ,  $\bar{\epsilon}$ ,  $G^{**}$  в соответствии с заданными формой, маркой резины и условиями эксплуатации детали [15]. При этом модуль сдвига материала зависит от амплитуды деформаций, температуры и частоты по соотношениям (36)

Аналитические выражения для определения  $\beta_{0n}$  и  $\beta_{0r}$  имеют вид: призматические РД

$$\beta_{0r} = 1 - 0,234h/\ell; \quad \beta_{0n} = \frac{0,855 \left[ 36 + \pi^2 \left( \alpha^2 + \beta^2 + \frac{\pi^2}{48} \alpha^2 \beta^2 \right) \right]}{6 \left[ 48 + \pi^2 (\alpha^2 + \beta^2) \right]}; \quad (38)$$

цилиндрические РД (сплошные)

$$\beta_{0r} = \left[ 1 + A(\epsilon_0) Z_0^{B(\epsilon_0)} \right]^{-1}; \quad (39)$$

$$A(\epsilon_0) = 0,336, \quad B(\epsilon_0) = 1,16;$$

$$\beta_{0n} = 1 + \frac{\pi^2}{96} \xi_0^{-2}, \quad \xi_0 = \frac{H}{R}, \quad 0 \leq \xi \leq 1,0; \quad (40)$$

$$\beta_{0n} = \frac{1-\nu}{(1+\nu)(1-2\nu) + 15,42\nu(1-\nu)\xi_0^2}. \quad (41)$$

Для остальных значений  $0,1 \leq \xi_0 \leq 0,5$  построены справочные таблицы [50].

Для полых цилиндрических РД справедлива та же формула (39) при  $\epsilon_0 = 0$ , а для  $\beta_{0n}$  построены справочные таблицы, которые могут быть аппроксимированы при  $0,1 \leq \xi_0 \leq 0,9$  следующим образом

$$\beta_{0n} = \sum A_k(\epsilon_0)^k (Z_0^{-1}); \quad i, k = \{0, 1, 2\}, \quad (42)$$

где коэффициенты  $A_{ik}$  задаются матрицей

$$A_{ik} = \begin{pmatrix} A_{00} & A_{01} & A_{02} \\ A_{10} & A_{11} & A_{12} \\ A_{20} & A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5240 & 2,91 & -3,230 \\ 0,3330 & -1,04 & 1,070 \\ 0,0776 & -0,19 & -0,130 \end{pmatrix}. \quad (43)$$

При конкретизации функций  $F^{**}(\bar{e})$  используются экспериментальные зависимости  $G'$  и  $G''$  от амплитуды деформации. Для получения наиболее общих результатов в качестве базовых характеристик принимаются классические, существенно нелинейные зависимости Пейна [9] (рис. 1), построенные для бутилкаучука в широкой области изменения амплитуд деформаций и аппроксимируемые при численных расчетах следующим образом

$$\frac{G'}{G'_L} = \begin{cases} 1 - 10^{(2,3075 \lg \gamma + 4,372)}, & \gamma < 0,006, \\ -0,804 \lg \gamma - 0,937, & 0,006 < \gamma < 0,02, \\ 0,0765 \gamma^{-0,45}, & 0,02 < \gamma < 0,3. \end{cases} \quad (44)$$

$$\frac{G''}{G''_L} = \begin{cases} 0,933 + 0,055 \cdot 10^3 \cdot \gamma + 0,0121 \cdot 10^6 \gamma^2 & \gamma < 0,007, \\ 0,65 + 2,36 \cdot 10^2 \cdot \gamma - 0,80 \cdot 10^4 \gamma^2, & 0,007 < \gamma < 0, \\ -0,104 - 1,360 \lg \gamma, & 0,02 < \gamma < 0,3, \end{cases}$$

где  $\gamma$  – удвоенная амплитуда деформации простого сдвига.

Представленные на рис. 1 данные обобщаются на случай многоосной деформации по формулам

$$e = \frac{\gamma}{\sqrt{2}}, \quad F^{**}(e) = \frac{G^{**}(e\sqrt{2})}{G^{**}_L}$$

т.е. заменой в формулах (44)  $\gamma$  на [10].

Для получения достаточно точных выражений для  $F^{**}(\bar{e})$  выполнен комплекс специальных экспериментальных исследований, позволивший рекомендовать следующие зависимости:

- для слабонаполненных резин на основе НК, СКИ-3 (наполнение 5-30 масс.ч. техническим углеродом)

$$F^{**}(\bar{e}) \equiv 1; \quad (45)$$

- для средненаполненных резин (45-60 масс.ч. техническим углеродом) в диапазоне  $0,01 \leq \gamma \leq 0,3$

$$F'(\gamma) = 9,283\gamma^2 - 4,243\gamma + 1,0;$$

$$F''(\gamma) = 8,513\gamma^2 - 4,761\gamma + 1; \quad (46)$$

$$\bar{e} = \gamma \sqrt{\beta_{0r}/2}.$$

В (46) при определении  $F''(\gamma)$  предполагалось, что в указанном диапазоне деформаций значения  $\psi$  изменяются незначительно [1, 10] и значение  $G''$  пропорционально  $G'$  с точностью до  $\psi/2\pi$ .

Значения  $G''_L$  рассчитываются в соответствии с методикой [3, 4] или определяются экспериментально в каждом конкретном случае.

Значение  $G''_L(\omega, \theta)$  в диапазоне частот  $\omega/2\pi \leq 50$  Гц для резин на основе СКИ-3 с разным наполнением техническим углеродом могут быть приняты постоянными, их значения для  $\gamma = 0,0157$  приведены ниже.

Наполнение техническим углеродом, масс.ч.	5	15	30	45	60	70
$G'$ , МПа	0,55	0,65	0,85	1,5	1,8	2,3
$G''$ , МПа	0,013	0,034	0,58	0,117	0,166	0,267

Пересчет коэффициентов жесткости при сжатии и сдвиге может быть выполнен при одинаковых значениях средней интенсивности деформации в элементах

$$\varepsilon_{0y} [(1+\nu)\beta_{0n}]^{1/2} = \varepsilon_{0x} (\beta_{0r}/2)^{1/2} \quad (47)$$

по формуле  $\beta_n^{**}/\beta_{0n} = \beta_r^{**}/\beta_{0r}$ . (48)

Таким образом, если известен коэффициент  $\beta_r$  при сдвиге  $\varepsilon_{0x}$ , то можно рассчитать величину  $\beta_n$  при деформации сжатия  $\varepsilon_{0y} = \varepsilon_n$

$$\varepsilon_n = \varepsilon_{0x} \left[ \frac{1}{2(1+\nu)} \frac{\beta_{0r}}{\beta_{0n}} \right]^{1/2} \quad (49)$$

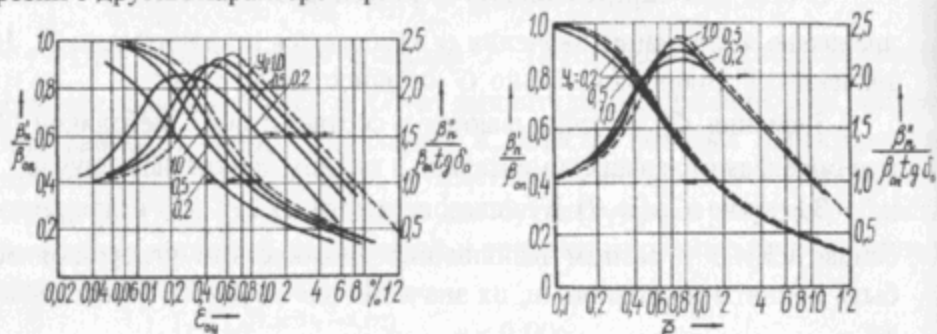
по формуле

$$\beta_n = \beta_r \frac{\beta_{0n}}{\beta_{0r}}. \quad (50)$$

Основные результаты расчета отражены на примере плоских призматических элементов сжатия (рис. 15). Очевидны следующие закономерности: физическая нелинейность материала проявляется в зависимости механических характеристик РД от амплитуды деформации. При этом кривые, отвечающие разным соотношениям размеров  $y_0 = H/L$ , ( $L$  – длина РД) смещены относительно друг друга и экспериментальных данных (штриховые линии), отвечающих однородному напряженно-деформируемому состоянию (НДС) в соответствии с нели-



нейными зависимостями Пейна. Их удается совместить путем введения параметра среднеобъемной интенсивности амплитуд деформаций  $\bar{\epsilon}$ . В [13] установлено, что указанные закономерности справедливы и для резин с другим характером физической нелинейности.



а) в зависимости от амплитуды деформации  $\epsilon_{sy}$  и соотношения размеров  $\gamma_0$ ; б) те же кривые, приведенные к среднеобъемной интенсивности деформаций  $\bar{\epsilon}$

Рис. 15 – Механические характеристики плоских РД сжатия

Применение разработанных прикладных методов расчета позволяет решить целый класс задач для вибрационных машин с нелинейными вязко-упругими элементами. Совмещение эффектов физической и конструктивной нелинейности позволяет управлять амплитудно-частотными характеристиками в широких пределах, что может быть использовано при синтезе вибрационных машин с заданными характеристиками.

Разработанная модель позволила выявить и объяснить некоторые эффекты, связанные с физической нелинейностью материала:

- эффект нелинейного масштабирования НДС кинематически возбуждаемых тел;
- эффект появления локальных минимумов на кривых долговечности в зависимости от деформации сдвига для материалов Пейна.

Первый эффект позволяет существенно упростить исследование локальных характеристик НДС и очагов разрушения тел из нелинейно-вязкоупругих материалов путем сведения задачи к соответствующей линеаризованной задаче и нелинейной задаче, но относительно интегральных характеристик (коэффициента жесткости).

Суть эффекта состоит в следующем.

Определив параметры

$$x^n = \beta^n / \beta_0^n; \quad x = \left| \frac{\tilde{\beta}}{\beta_0} \right|, \quad (51)$$

где  $\left| \tilde{\beta} \right| = (\beta'^2 + \beta''^2)^{1/2}$  – параметр жесткости, определяющий отношение модуля конструкции к модулю материала в нелинейном слу-

чае;

$\tilde{\beta}_0$  – параметр жесткости, отвечающий ассоциированному линейному параметру, получают:

а) произвольные, однородные первой степени по компонентам напряжений характеристики  $\Gamma$  и  $\Gamma_0$  для физически нелинейного и соответствующего линейного материала связаны соотношением

$$\Gamma = x\Gamma_0; \quad (52)$$

б) значение диссипативной функции  $\bar{D}'$  и  $\bar{D}'_0$  нелинейной и линейной постановок связаны соотношением

$$\bar{D}' = x^n \bar{D}'_0. \quad (53)$$

Оценке (52) удовлетворяют такие параметры как максимальные нормальные и касательные напряжение, а также интенсивность напряжений.

Для цилиндров в случаях  $Z_0 = h/R = 0,3$  и  $Z_0 = 0,9$ , погрешность оценок не превосходит 3% во всей области, за исключением весьма малой окрестности угловой точки  $r < 0,02$ .

Эффект нелинейного масштабирования может быть использован для вычисления локальных значений параметров напряженного состояния и диссипации по решению соответствующей линейной задачи и значению интегральной характеристики нелинейного состояния – коэффициента жесткости. При этом отпадает необходимость исследования локальных характеристик в рамках нелинейной задачи, а нелинейность учитывается посредством интегрального параметра, достаточно точно вычисляемого на грубых сетках. При этом указанный параметр, как показывают расчеты, может быть весьма точно вычислен вообще без решения нелинейной задачи.

Второй эффект состоит в том, что для нелинейных вязкоупругих, резиноподобных материалов с эффектами Пейна (модуль потерь  $G''$  имеет колокообразную форму), кривые долговечности в зависимости от деформации сдвига  $\gamma$  имеют локальные минимумы. Последние появляются, если ниспадающая ветвь в функциях  $G''(\gamma)$  убывает быстрее, чем  $1/\gamma^2$ . В противном случае кривые носят монотонный характер. Этот эффект может быть использован при выборе материалов для РД и рациональных режимов их эксплуатации.

### 3 Экспериментальные исследования параметров деформирования РД из наполненных резин

Исследованиям подлежали резинометаллические элементы типа БРМ-101, выполненные из резин на основе СКИ-3 с различным наполнением техническим углеродом: от 5 до 75 масс.ч. Измерялись следующие механические характеристики: условно-равновесный и динамический модули сдвига, коэффициент диссипации энергии. Измерения проводились согласно методик [1, 3, 4] с использованием стандартной тензоизмерительной аппаратуры [1]. Наиболее характерные результаты измерений при температуре окружающей среды 20 °С приведены на рис. 16 – рис. 20.

Погрешность измерений при динамическом нагружении согласно принятой методике не превосходила (с вероятностью 0,95) 5-10 %, при статическом нагружении с той же вероятностью она не превышала 3-5 %.

Полученные данные подтверждают тот вывод, что упругие и демпфирующие характеристики РД весьма существенно зависят от степени наполнения резины техническим углеродом. Эта зависимость, как видно из графиков, выражается в монотонном росте всех измеренных величин при увеличении степени наполнения. Характер и скорость роста модулей сдвига несколько различны на двух участках: при наполнении меньше 20 масс.ч. рост выражен слабо и носит линейный характер, для наполнения более 20 масс.ч. рост становится практически нелинейным и более сильным.

В исследованиях использовалось ядро Работнова (7). Параметры ядра являются реологическими характеристиками материала, имеющими конкретный физический смысл. В соответствии с методикой [3, 4] реологические параметры  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\lambda$ ,  $\chi$  для резин имеют следующий смысл:  $\alpha$  – параметр дробности функции (7), явно выражающийся через параметры спектра времен релаксации и позволяющий учитывать его размытость; параметр  $\beta = \frac{1}{t_0^{1+\alpha}}$ , где  $t_0$  – наиболее «весомое» время релаксации;

$\chi = \lambda \cdot \beta = \frac{G_0 - G_\infty}{G_0} \cdot \frac{1}{t_0^{1+\alpha}}$  обобщенное время релаксации; параметр

$\lambda = \frac{G_0 - G_\infty}{G_0}$  (или  $\lambda = \frac{E_0 - E_\infty}{E_0}$  в случае деформации сжатия) – дефекты

модуля.

Здесь  $G_0$  и  $E_0$  мгновенные значения модулей, а  $G_\infty$  и  $E_\infty$  – условно-равновесные значения модулей сдвига и упругости соответственно.

Ниже приведены результаты исследования реологического пове-

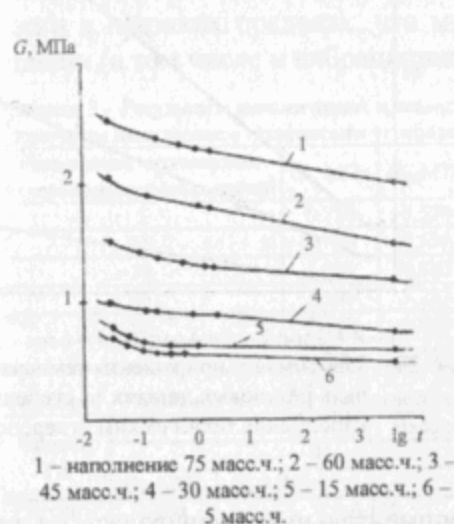


Рис. 16 – Кривые релаксации резин с различным наполнением техническим углеродом

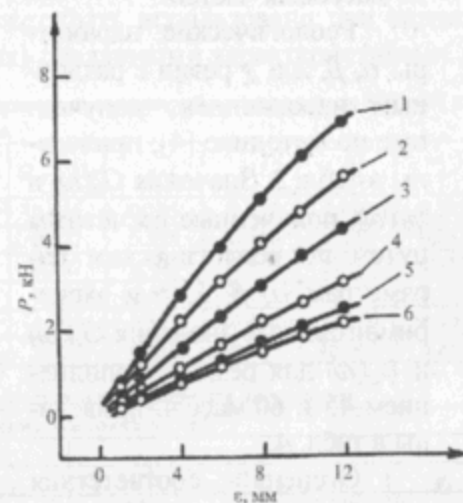


Рис. 17 – Зависимость силы сдвига  $P$  от смещения сдвига

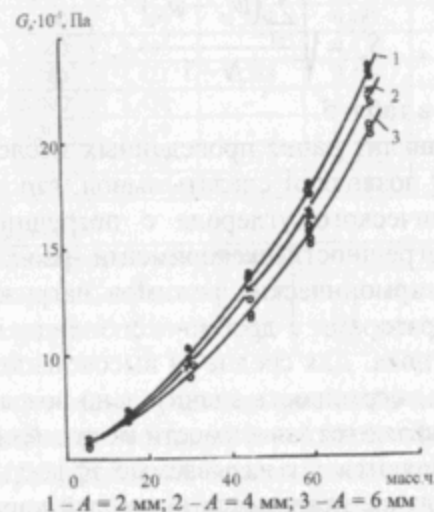


Рис. 18 – Зависимость динамического модуля от степени наполнения техническим углеродом

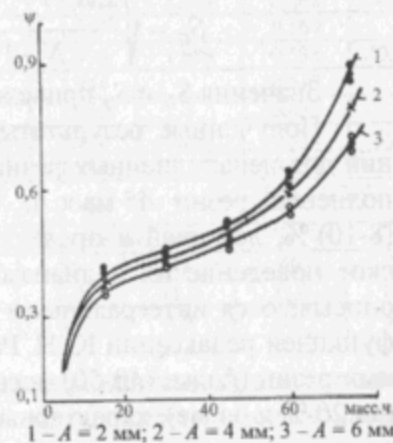


Рис. 19 – Зависимость коэффициента диссипации энергии от степени наполнения техническим углеродом

дения РД, отличающихся содержанием в них технического углерода: 5, 15, 30, 45, 60 и 75 массовых частей.

Реологические параметры  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\lambda$  и  $\chi$  резин с различным наполнением, полученные по методике [4], приведены в табл. 3. Значения  $G_p(\omega)$  и  $\psi_p(\omega)$ , полученные расчетным путем по реологическим параметрам  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\lambda$ ,  $\chi$  и экспериментальные значения  $G_p(\omega)$  и  $\psi_p(\omega)$  для резин с наполнением 45 и 60 масс.ч. приведены в табл. 4.

Степень соответствия расчетных значений  $G$  и  $\psi$  экспериментальным оценивалась по значениям среднеквадратических остаточных отклонений  $S_G$  и  $S_\psi$ , определяемых по формулам

$$S_G = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (G_p - G_s)^2}{N-1}}; \quad S_\psi = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (\psi_p - \psi_s)^2}{N-1}}. \quad (54)$$

Значения  $S_G$  и  $S_\psi$  приведены в табл. 5.

Полученные результаты и анализ ранее проведенных исследований для ненаполненных резин [4] позволяют сделать вывод, что до наполнения резин 45 масс.ч. технического углерода с погрешностью (8-10) %, лежащей в пределах погрешности эксперимента, реологическое поведение их в диапазоне гармонических режимов нагружения, описываются интегральными операторами с дробно-экспоненциальной функцией релаксации Ю.Н. Работнова. Для средне- и высоконаполненных резин (более (40-50) масс.ч.), погрешность значительно возрастает (до 20 % и более), характерными являются зависимости модулей сдвига от амплитуды деформаций, проявляются так называемые эффекты физической нелинейности. В этом случае искажается линейный характер связи напряжение-деформация и для описания реологического поведения наполненных резин следует использовать разработанный  $\beta$ -метод в рамках интегральной математической модели, приведенной в разделе 2.

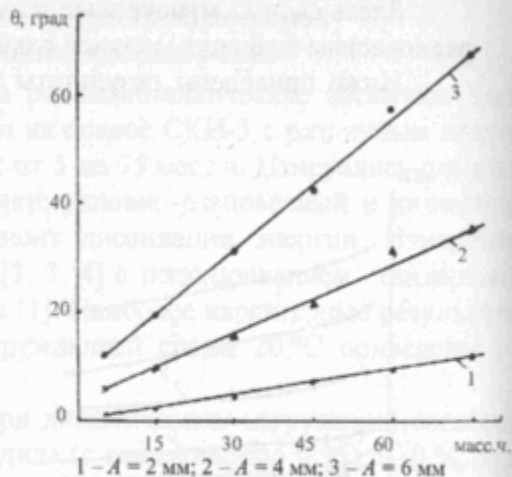


Рис. 20 – Зависимость приращения температуры в резиновых деталях от степени наполнения техническим углеродом

Он позволяет решать определенный класс задач в области расчета резиновых футеровок и динамики машин с нелинейными вязкоупругими связями. Совмещение эффектов физической и конструктивной нелинейности позволяет управлять амплитудно-частотными характеристиками в широких пределах, что может быть использовано при синтезе машин (в том числе и вибрационных) с заданными характеристиками.

Таблица 3 – Результаты динамических и квазистатических испытаний элементов типа БРМ-101 с различным наполнением техническим углеродом.

Наполнение техническим углеродом, массовых частей	$G_0$ , МПа	$G_s$ , МПа	$G_{\infty}$ , МПа	$\psi$	$\alpha$	$\beta$	$\lambda$
5	0,720	0,578	0,445	0,135	-0,857	1,719	0,382
15	0,750	0,656	0,577	0,328	-0,456	8,722	0,231
30	1,000	0,883	0,687	0,440	-0,310	15,100	0,313
45	1,500	1,283	1,182	0,482	-0,148	23,174	0,212
60	2,100	1,670	1,464	0,582	-0,100	34,800	0,303
75	2,600	2,356	1,957	0,710	-0,015	45,960	0,231

Таблица 4 – Расчетные значения динамического модуля и коэффициента диссипации

Частота, Гц	Наполнение, массовых частей							
	45				60			
	$G_p$ , МПа	$G_s$ , МПа	$\psi_p$	$\psi_s$	$G_p$ , МПа	$G_s$ , МПа	$\psi_p$	$\psi_s$
0,500	1,194	-	0,139	-	1,512	-	0,248	-
1,000	1,207	-	0,235	-	1,552	-	0,374	-
2,000	1,237	-	0,368	-	1,621	-	0,518	-
4,500	1,303	1,242	0,508	0,485	1,743	1,641	0,632	0,615
6,000	1,334	-	0,528	-	1,793	-	0,638	-
7,600	1,360	1,259	0,522	0,476	1,833	1,669	0,627	0,609
11,100	1,399	1,283	0,482	0,482	1,894	1,684	0,582	0,582
12,000	1,406	-	0,470	-	1,905	-	0,569	-
14,300	1,421	1,288	0,439	0,437	1,930	1,689	0,538	0,599
16,000	1,430	-	0,417	-	1,944	-	0,517	-
18,300	1,439	-	0,390	-	1,960	-	0,489	-
20,000	1,445	1,319	0,372	0,444	1,970	1,697	0,471	0,600
22,000	1,450	-	0,352	-	1,980	-	0,451	-

Таблица 5

Среднеквадратическая ошибка, %	Наполнение, масс.ч.					
	5	15	30	45	60	75
$S_G$	0,8	1,0	2,0	11,0	21,0	18,0
$S_\psi$	4,0	4,5	4,7	4,0	6,5	8,2

Метод учета нелинейного поведения наполненных резин позволил впервые установить новый эффект нелинейного масштабирования НДС, который может быть использован для вычисления локальных значений параметров напряженного состояния и диссипации по решению соответствующей линейной задачи и значению интегральной характеристики нелинейного состояния – коэффициенту жесткости.

Установленный эффект локальных минимумов на кривой долговечности, заключающийся в том, что для наполненных нелинейных резин с эффектами Пейна (модуль потерь имеет колоколообразную форму) кривые долговечности в зависимости от деформации сдвига  $\gamma$  имеют локальные минимумы, проявляющийся в том случае, когда ниспадающая ветвь в функции  $G''(\gamma)$  убывает быстрее, чем  $1/\gamma^2$ , может быть использован при выборе материалов с оптимальными свойствами для защитных футеровок и виброизоляторов машин.

Для резин, используемых в качестве конструкционного материала для изготовления силовых элементов (защитных футеровок, виброизоляторов, упругих звеньев и т.д.) наиболее подходящим для описания вязкоупругого поведения является дробноэкспоненциальная функция Работнова. Четырехпараметрическое ядро с параметрами  $\alpha, \beta, \lambda, \chi$  позволяет наиболее полно учесть частотные и амплитудные зависимости информативных параметров  $G$  и  $\psi$  в диапазоне частот  $10^{-4}$ – $10^6$  Гц и величин относительной деформации  $\epsilon < 0,45$ . Параметры ядра  $\alpha$  и  $\beta$  являются структурно-чувствительными величинами и отражают природу нестабильности физико-механических характеристик резин во времени (параметр  $\alpha$  определяется при этом через пик релаксационного спектра); параметр  $\lambda$  отражает изменение жесткостных характеристик резин во времени.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Потураев В.Н., Дырда В.И., Круш И.И. Прикладная механика резины. – Киев: Наук. думка, 1980. – 260 с.
2. Дырда В.И. Прочность и разрушение эластомерных конструкций в экстремальных условиях нагружения. – Киев: Наук. думка, 1988. – 232 с.
3. Методика определения реологических параметров резиновых деталей при циклическом деформировании / Потураев В.Н., Круш И.И., Дырда В.И., Науменко Н.Н. – Киев: Наукова думка, 1970. – 27 с.
4. Дырда В.И., Твердохлеб Т.Е., Чижик Е.Ф. Реология упругонаследственных сред // Геотехническая механика. Межвед. сб. научн. тр. – Днепропетровск. – 1999. – Вып. 11. – С. 257-347.
5. Бартенев Г.М. Релаксационные свойства и структура эластомеров // Механика эластомеров. Научн. тр. Кубанского университета. – Краснодар, 1977. – Вып. 1. – С. 7-21.
6. Бартенев Г.М., Зуев Ю.В. Прочность и разрушение высокоэластических материалов. – М.: Л.: Химия, 1964. – 387 с.
7. Релаксационные явления в полимерах; Под ред. Г.М. Бартенева и Ю.В. Зеленева. – М.: Химия, 1972. – 373 с.
8. Бартенев Г.М., Зеленева Ю.В. Курс физики. – Л.: Химия, 1976. –
9. Раупе A.R. Hysteresis in Rubber Vulcanisates // J. Pol. Sci., Symp. – 1974. – P. 169-196.
10. Термомеханика эластомерных элементов конструкций при циклическом нагружении / Потураев В.Н., Дырда В.И., Карнаухов В.Г., Сенченков И.К., Козлов В.И., Мазнецова А.В. – Киев: Наук. думка, 1987. – 288 с.
11. Маллизи Л. Структура и механические свойства наполненных резин // Каучук и резина. – 1968. – № 7. – С. 161-163.
12. Потураев В.Н., Круш И.И., Надутый В.П. Нелинейные эффекты в наполненных резинах за-

- щитных футеровок горных машин. – Днепропетровск, 1974. – 17 с. – Деп. в ВИНТИ 02.07.74, № 305-74.
13. Мазнецова А.В. Разработка прикладных методов расчета силовых резиновых деталей горных вибрационных транспортно-технологических машин: Дис. на соиск. уч. степ. канд. техн. наук: 05.05.06. – Днепропетровск, 1990. – 205 с.
  14. Лукомская А.И., Евстратов В.Ф. Основы прогнозирования механического поведения каучуков и резин. – М.: Химия, 1975. – 360 с.
  15. Дырда В.И., Сенченков И.К., Мазнецова А.В., Твердохлеб Т.Е. Универсальный конструкционно-деформационный параметр и  $\beta$ -метод в механике деформирования резиновых деталей // Тр. II Междунар. симп. по механике эластомеров, 23-26 июня 1997. – Днепропетровск: Полиграфист, 1997. – С. 204-234.
  16. Дырда В.И., Мазнецова А.В., Твердохлеб Т.Е. Расчет силовых резино-технических изделий, используемых в горном машиностроении: Темат. обзор // Производство резинотехнических и асбестотехнических изделий. – М.: ЦНИИТЭнефтехим. – 1991. – Вып. № 2. – 62 с.
  17. Расчет жесткости и диссипативного разогрева нелинейно-вязкоупругих виброизоляторов при циклическом деформировании / И.К. Сенченков, В.И. Дырда, В.И. Козлов, О.П. Червинко, А.В. Мазнецова // Прикл. механика. – 1988. – 24, № 10. – С. 68-75.
  18. К расчету термомеханического поведения систем с нелинейными вязкоупругими виброизоляторами при гармоническом нагружении / И.К. Сенченков, В.И. Дырда, В.И. Козлов, А.В. Мазнецова // Прикл. механика. – 1987. – 23, № 6. – С. 93-105.
  19. Ильюшин А.А., Победра Б.Е. Основы математической теории термовязкоупругости. – М.: Наука, 1970. – 280 с.
  20. Черных К.Ф. Нелинейная теория упругости в машиностроительных расчетах. – Л.: Машиностроение. Ленингр. отд-ние, 1986. – 336 с.
  21. Работнов Ю. Н. Элементы наследственной механики твердых тел. – М.: Наука, 1977. – 384 с.
  22. Работнов Ю.Н., Паперник Л.Х., Степаньчев Е.И. Приложение нелинейной теории наследственности к описанию временных эффектов в полимерных материалах // Механика полимеров. – 1971. – № 1. – С. 74-87.
  23. Розовский М.И. Ползучесть и длительное разрушение материалов // Журнал технической физики. – 1951. – Т. 21, № 11. – С. 29-37.
  24. Кирьяновский В.В., Сахаров А.С. Нелинейные задачи термомеханики конструкций из слабоэластических эластомеров. – Киев: Будівельник, 1992. – 216 с.
  25. Бухина М.Ф. Техническая физика эластомеров. – М.: Химия, 1984. – 224 с.
  26. Бидерман В.Л. Вопросы расчета резиновых деталей // Расчеты на прочность. – М.: Машиностроение, 1958. – Вып. 3. – С. 40-88.
  27. Дарло М.С., Смоли А.И. Влияние деформации и температуры на динамические свойства эластомеров // Тр. Амср. об-ва инженеров-механиков. Конструирование и технология машиностроения. – 1980. – Вып. 1. – С. 31-40.
  28. Резниковский М.М. Об оценке механических свойств резины как конструкционного материала // Резина – конструкционный материал современного машиностроения. – М.: Химия, 1967. – С. 158-168.
  29. Температурно-частотное приведение динамических функций саженаполненных резин в нелинейной области / Г.В. Виноградов, В.И. Гарцман, Б.М. Горелик, А.Я. Малкин // Мех. полимеров. – 1973. – № 4. – С. 751-754.
  30. Потураев В.Н., Дырда В.И., Мазнецова А.В. Нелинейные эффекты в вязкоупругих системах при циклическом нагружении // XI Всесоюзный симпозиум по реологии. – Суздаль. – 1980.
  31. Карнаухов В.Г., Сенченков И.К., Гуменик В.П. Термомеханическое поведение вязкоупругих тел при гармоническом нагружении. – Киев: Наук. думка, 1985. – 288 с.
  32. Уржумцев Ю.С., Максимов Р.Д. Прогностика деформативности полимерных материалов. – Рига: Зинатне, 1975. – 416 с.
  33. Вольтерра В. Теория функционалов, интегральных и интергродифференциальных уравнений. – М.: Наука. Главная редакция физ.-мат. литературы, 1982. – 302 с.
  34. Persoz B. Le principe de superposition de Boltzman // Cahiers Croupe trans. etudes rheol. – 1957. – 2, N 1. – P. 126-281.
  35. Leaderman H. Elastic and creep properties of filaments materials and other briqhpolimers. – Wash-

- ington: Tecstill Foundation, 1944. – 289 p.
36. Колтунов М.А. К вопросу построения нелинейных соотношений термовязкоупругости // *Механика полимеров*. – 1967. – № 4. – С. 989-998.
  37. Колтунов М.А. Ползучесть и релаксация. – М.: Высшая школа, 1976. – 277 с.
  38. Работнов Ю.Н., Паперник М.Х., Звонов Е.Н. Таблицы дробно-экспоненциальной функции отрицательных параметров и интеграла от нее. – М.: Наука, 1969. – 132 с.
  39. Ржаницын А.Р. Некоторые вопросы механики систем, деформирующихся во времени. – М.; Л.: Гостехиздат, 1949. – 267 с.
  40. Бронский А.П. Явление последствия в твердом теле // *Прикладная математика и механика*. – 1941. – Т. 5, № 1. – С. 21-30.
  41. Круш И.И. Интегро-операторный метод исследования демпфирующих свойств упруго-наследственных систем // *Изв. АН СССР. Механика*. – 1965. – № 6. – С. 90-94.
  42. Нелинейные эффекты в наполненных резинах защитных футеровок горных машин / Потурев В.Н., Круш И.И. Надутый В.П. – Днепропетровск, 1974. – 17 с. – ДЕП в ВИНТИ 02.07.74.
  43. Надутый В.П. Исследование и разработка защитных покрытий и упругих подвесок тяжелых горных машин вибрационного типа: Дис. на соиск. канд. техн. наук: 05.05.06. – Днепропетровск. – 1979. – 260 с.
  44. Надутый В.П., Круш И.И. Определение реологических характеристик полимерных просеивающих поверхностей грохотов // *Сб. научн. тр. Вибрационные эффекты в горных машинах и технологиях*. – Киев: Наук. думка, 1990. – С. 94-98.
  45. Шепери Р. Термомеханическое поведение вязкоупругих сред с переменными свойствами при циклическом нагружении // *Тр. Амер. о-ва инженеров-механиков. Прикл. механика*. – 1965. – № 3. – С. 150-161.
  46. Ржаницын А.Р. Теория ползучести. – М.: Стройиздат, 1968. – 418 с.
  47. Ферри Д. Вязкоупругие свойства полимеров. – М.: Изд-во иностр. лит., 1963. – 536 с.
  48. Warnaka G.E. Dynamic strain effects in elastomers // *Rubb. Chem. and Technol.* – 1963. – V. 36, N 2. – P. 31-34.
  49. Кравчук А.С., Майборода В.П., Уржумцев Ю.С. Механика полимерных и композиционных материалов. Экспериментальные и численные методы. – М.: Наука, 1985. – 303 с.
  50. Сенченко И.К., Шевченко А.Ю., Мазнецова А.В. Справочные коэффициенты жесткости призматических и цилиндрических виброизоляторов при сжатии и сдвиге // *Вопросы динамики и прочности*. – Рига: Зинатне, 1987. – Вып. 48. – С. 23-28.
  51. Нелинейные эффекты в наполненных резинах, предназначенных для упругих элементов рельсового транспорта и горных машин / Булат А.Ф., Говоруха В.В., Дырда В.И., Твердохлеб Т.Е. // *Геотехническая механика. Межд. сб. научн. тр.* – Днепропетровск, 2005. – Вып. 60. – С. 3-58.