

Дніпропетровський національний університет  
імені Олеся Гончара

**МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ  
ПРИКЛАДНИХ ЗАДАЧ МЕХАНІКИ  
ДЕФОРМІВНОГО ТВЕРДОГО ТІЛА**

**МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ПРИКЛАДНЫХ ЗАДАЧ МЕХАНИКИ  
ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА**

**METHODS OF SOLVING APPLIED PROBLEMS  
IN SOLIDS MECHANICS**

*Збірник наукових праць*

**13**

**випуск**

Дніпропетровськ

Ліра

2012

Методи розв'язування прикладних задач механіки деформівного твердого тіла: зб. наук. праць / ред. кол.: А. П. Дзюба (відп. ред.) та ін. – Дніпропетровськ: Ліра, 2012. – Вип. 13. – 460 с. Рос., укр. та англ. мовами.

Наведені нові результати досліджень у галузі механіки деформівного твердого тіла. Основна увага приділена питанням розробки та удосконалення математичних моделей, методів теоретичного і експериментального дослідження та застосування сучасних комп'ютерних технологій для розв'язування актуальних прикладних задач.

Для наукових співробітників, інженерів-механіків та аспірантів.

*Збірник внесено до Переліку наукових фахових видань України, в яких можуть публікуватися результати дисертаційних робіт на здобуття наукових ступенів доктора і кандидата наук (технічні науки (механіка деформівного твердого тіла) – постановва президії ВАК України від 16 грудня 2009 р. № 1-05/6; фізико-математичні науки (механіка) – постановва президії ВАК України від 01 липня 2010 р. № 1-05/5).*

Рекомендовано до друку Вченою радою Дніпропетровського національного університету імені Олеся Гончара (протокол № 10 від 31 березня 2011 р.)

#### РЕДАКЦІЙНА КОЛЕГІЯ:

д-р техн. наук, проф. **А. П. Дзюба** (відп. редактор); канд. техн. наук, с.н.с. **Ю. М. Селіванов** (відп. секретар); д-р техн. наук, проф. **Ю. С. Воробйов**; канд. фіз.-мат. наук, доц. **О. О. Бобильов**; д-р техн. наук, проф. **В. З. Грищак**; д-р техн. наук, проф., чл.-кор. НАНУ **В. С. Гудрамович**; д-р техн. наук, проф. **М. М. Дронь**; д-р техн. наук, проф. **О. С. Каіров**; д-р фіз.-мат. наук, проф. **В. І. Кузьменко**; д-р техн. наук, проф. **В. М. Левін**; д-р фіз.-мат. наук, проф. **В. В. Лобода**; д-р техн. наук, проф. **А. І. Маневич**; д-р техн. наук, проф. **Н. І. Ободан**; д-р фіз.-мат. наук, проф. **А. М. Пасічник**; д-р техн. наук, проф., чл.-кор. НАН України **О. В. Пилипенко**; д-р фіз.-мат. наук, проф. **А. К. Приварников**; д-р фіз.-мат. наук, проф. **О. А. Приходько**; д-р фіз.-мат. наук, проф. **С. О. Смирнов**; д-р фіз.-мат. наук, проф. **П. О. Стеблянко**; д-р фіз.-мат. наук, проф. **Ю. А. Черняков**

Рецензенти: д-р техн. наук, проф. **В. О. Бараненко**.

д-р фіз.-мат. наук, проф. **О. А. Зевін**,

Адреса редколегії:

49010, м. Дніпропетровськ, пр. Гагаріна, 72,

Дніпропетровський національний університет ім. Олеся Гончара, корп. 3, кімн. 41.,  
e-mail: [compumech@ua.fm](mailto:compumech@ua.fm)

Свідоцтво про державну реєстрацію друкованого засобу масової інформації  
КВ № 8831 від 03.06.2004 р.

ISSN 2079-536X

© Дніпропетровський національний університет імені Олеся Гончара, 2012.

© Автори статей. 2012

<b>Гришин В. А., Гришина В. А., Реут В. В., Реут Е. В.</b>	
Исследование интенсивности напряжений в пластинчатой конструкции с трещинами под действием изгибающей нагрузки	106
<b>Гутьера С. С., Хомяк Ю. М.</b>	
Круговая трещина в плоскости сцепления трансверсально-изотропных полупространств	114
<b>Дзюба А. П., Селиванов Ю. М.</b>	
Некоторые подходы к решению проблемы рационального распределения материала тонкостенных структур	121
<b>Довжик М. В., Назаренко В. М.</b>	
Разрушение при сжатии вдоль трещины, для малых расстояний между свободной поверхностью и трещиной	131
<b>Долгих А. В., Приварников А. К.</b>	
Смешанная задача теории упругости для многослойного основания с частично упруго закреплённой границей	137
<b>Дородных Т. И.</b>	
Совместные процессы повреждаемости и деформирования хрупких материалов	144
<b>Дырда В. И., Лисица Н. И., Новикова А. В., Гребенюк С. Н., Козуб Ю. Г., Бова А. А.</b>	
Определение напряженно-деформированного состояния резинометаллических сейсмоопор	152
<b>Дьяченко Н. М., Манько Н. И.-В., Шашкова Е. В.</b>	
Задача контакта квадратного в плане штампа с шероховатым полупространством в условиях частичного проскальзывания	159
<b>Зашкільняк І. М., Костенко І. С., Николишин Т. М., Ростун М. Й.</b>	
Предельное равновесие изготовленной из функционально-градиентного материала цилиндрической оболочки с двумя поверхностными трещинами	169
<b>Заяц В. И., Новикова О. С.</b>	
Решение задачи о тепловом деформировании упругой пластины в ультрасферических многочленах	179
<b>Зеленський А. Г.</b>	
Метод зниження порядку неоднорідних диференціальних рівнянь із частинними похідними	188
<b>Киричевский Р. В., Донченко В. Ю.</b>	
Численная сходимость решений с использованием трёхмерных конечных элементов с линейной аппроксимацией в программном комплексе MIRELA+	197
<b>Клименко А. А., Михлин Ю. В.</b>	
Нелинейные нормальные формы колебаний маятниковых систем	204

<b>Ковальчук П. С., Янчевский И. В.</b>	
Управление радиальными колебаниями толстостенного сферического пьезокерамического излучателя	212
<b>Козуб Ю. Г., Козуб Г. А.</b>	
Численный анализ динамического деформирования вязкоупругих элементов конструкций	224
<b>Кузьо І. В., Корендій В. М.</b>	
Деформації лопатей вітроколеса при згині	231
<b>Курапов С. В., Чеченя В. С.</b>	
Математическая модель упругой системы на основе рисунка графа	237
<b>Куреннов С. С.</b>	
Динамические напряжения в клеевом соединении с консолью на основе модели Голанда – Рейсснера	245
<b>Левада В. С., Хижняк В. К., Левицкая Т. И.</b>	
Изгиб полубесконечной анизотропной пластины с шарнирно-опертым краем, находящейся под действием сосредоточенной нагрузки	254
<b>Луньо Н. Б.</b>	
Контактна взаємодія двох півпросторів з початковими (залишковими) напруженнями і пружного циліндричного штапу	260
<b>Максимчук Д. М.</b>	
Контакт двух співвісних кінцевих циліндрів і пружного шару з початковими (залишковими) напруженнями	266
<b>Меркотан Г. В., Шамровський О. Д.</b>	
Динамічна задача поширення термопружних хвиль в однорідній пластині	272
<b>Михальчук А. И., Кузьменко В. И.</b>	
Вариационная формулировка контактной задачи адгезионного движения	280
<b>Николаев А. Г., Танчик Е. А.</b>	
Трёхмерная периодическая модель зернистого композиционного материала	287
<b>Николишин М. М., Опанасович В. К., Куротчин Л. Р., Слободян М. С.</b>	
Знаходження довжини пластичних зон біля вершини наскрізної тріщини на прямолінійній межі поділу матеріалів при розтязі кусково-однорідної ізотропної пластини	294
<b>Оксенчук Н. Д.</b>	
Напружено-деформований стан сталевго циліндра при тепловому опроміненні та врахуванні мікроструктурних перетворень	301
<b>Ольшанский В. П., Ольшанский С. В.</b>	
Расчет напряжений в цилиндрическом стержне при крутильном ударе	309

Наукове видання

## МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ПРИКЛАДНИХ ЗАДАЧ МЕХАНІКИ ДЕФОРМІВНОГО ТВЕРДОГО ТІЛА

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ПРИКЛАДНЫХ ЗАДАЧ МЕХАНИКИ  
ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

METHODS OF SOLVING APPLIED PROBLEMS  
IN SOLIDS MECHANICS

Збірник наукових праць, 2012, вип. 13

Коректор Л. М. Машталір

Комп'ютерна верстка О. Г. Василенко, І. А. Сафронова

За підтримки Оргкомітету IV Міжнародної науково-технічної конференції  
«Актуальні проблеми прикладної механіки і міцності конструкцій»

Підписано до друку з оригінал макету 25.04.2012, Формат 60×84 1/16. Папір  
друкарський. Друк плоский. Умов. друк. арк. 28,75. Тираж 100 прим. Замовлення № 141

Свідоцтво про внесення до державного реєстру суб'єктів видавничої справи  
ДП №14 від 13.07.2000.

Типографія «Ліра», 49038, Україна, м. Дніпропетровськ, пл. Десантників, 1,  
тел. (056)721-92-60, 721-92-63, E-mail: lira.ltd@ukr.net

УДК 678: 539.376

Ю. Г. Козуб, канд. техн. наук, Г. А. Козуб, канд. техн. наук

### ЧИСЛЕННИЙ АНАЛІЗ ДИНАМІЧЕСКОГО ДЕФОРМУВАННЯ В'ЯЗКОУПРУГИХ ЕЛЕМЕНТІВ КОНСТРУКЦІЙ

Рассмотрены вопросы динамического расчета вязкоупругих эластомерных элементов конструкций на основе метода конечных элементов. Предложенная методика позволяет получать решения задач циклического деформирования конструкций с учетом демпфирования.

**Ключевые слова:** эластомер, вязкоупругость, метод конечных элементов.

В машиностроении и строительстве широкое распространение получили вязкоупругие демпфирующие элементы конструкций. Наиболее широко используются резиновые виброизоляторы. Исследованию вязкоупругих свойств резины, анализу деформирования и разрушения эластомерных элементов конструкций посвящено достаточно большое количество работ отечественных и зарубежных авторов [1, 3 – 9]. Чаще всего при исследовании поведения резины вводится гипотеза о несжимаемости этого материала. Однако при стесненных деформациях эта гипотеза неприемлема [6]. В динамических расчетах следует учитывать эффекты демпфирования резиновых элементов конструкций. Наиболее эффективным для описания вязкоупругих свойств является применение уравнений Вольтерра. Аналитические решения таких уравнений в задачах о циклическом нагружении получены лишь для одномерного случая, что значительно ограничивает возможность получить надежное решение для элементов конструкций, имеющих сложную форму. В этом случае наиболее приемлемым является применение численных методов решения задач в трехмерной постановке, одним из которых является метод конечных элементов.

Целью данной работы является разработка метода интегрирования уравнений динамики вязкоупругих элементов конструкций.

Для решения задачи о динамическом равновесии эластомерного элемента конструкции следует вначале решить задачу о свободных колебаниях. Основываясь на принципе суперпозиции Больцмана, интегральные уравнения можно описать в виде [6]

$$\sigma(t) = E \left[ \varepsilon(t) - \int_{-\infty}^t K(t-\tau) \varepsilon(\tau) d\tau \right],$$

где  $K(t-\tau)$  – ядро релаксации и, кроме того, является ядром оператора Вольтерра.

Для большинства задач о свободных колебаниях упруго-наследственного тела используется уравнение в виде

$$\ddot{u}(t) + \omega^2 u(t) = 0,$$

где

$$\omega^2 \varphi(t) = \omega_0^2 \left[ \varphi(t) - \int_0^t K(t-\tau) \varphi(\tau) d\tau \right],$$

Рекуррентная формула для решения характеристического уравнения имеет вид [8]

$$\omega_n^2 = \omega_0^2 \left[ 1 - K \left( \frac{1}{i\omega_n - 1} \right) \right].$$

После проведения преобразований Фурье получим

$$\omega_n^2 = \omega_0^2 [1 - A(\omega_{n-1}) + iB(\omega_{n-1})],$$

где

$$A(\omega) = \int_0^{\infty} K(z) \cos \omega z dz = \operatorname{Re} K \left( \frac{1}{i\omega} \right),$$

$$B(\omega) = \int_0^{\infty} K(z) \sin \omega z dz = -\operatorname{Im} K \left( \frac{1}{i\omega} \right).$$

Как известно [8]

$$1 - A(\omega_0) = \frac{E(\omega_0)}{E_0}, \quad B(\omega_0) = \frac{\psi(\omega_0)}{2\pi},$$

где  $E_0$  – мгновенный модуль упругости;  $E(\omega_0)$  – динамический модуль при  $\omega = \omega_0$ ;  $\psi(\omega_0)$  – технический коэффициент поглощения при  $\omega = \omega_0$ .

Приближенное уравнение характеристической виброграммы имеет вид

$$u(t) \approx N e^{(-ht)} \cos(\omega t + \varphi).$$

Принимая в качестве ядра релаксации дробно-экспоненциальную функцию Работнова [1]

$$K(z) = z^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^n z^{n(1+\alpha)}}{\Gamma[(n+1)(1+\alpha)]},$$

где  $\alpha, \beta$  – реологические параметры материала;  $\Gamma(t)$  – гамма-функция; в первом приближении получаем выражение для коэффициента демпфирования

$$h = \frac{\omega_0 \psi(\omega_0)}{4\pi}$$

Процедура определения частот свободных колебаний представляет собой отдельную задачу определения собственных чисел и векторов.

При динамическом нагружении в каждый момент времени напряженно-деформированное состояние тела должно удовлетворять вариационному уравнению движения, которое можно согласно принципам Даламбера-Лагранжа представить в виде

$$\int_V \rho \ddot{u} du dv + \delta \Pi(u) + \delta W(\dot{u}) = 0, \quad (1)$$

где  $u$  – вектор перемещений;  $\rho$  – плотность материала;  $\Pi$  – потенциальная энергия;  $W$  – работа диссипативных сил.

Разрешающие уравнения метода конечных элементов для трехмерной задачи строятся на основе использования интерполяционных функций формы для описания полей перемещений, скоростей и ускорений

$$(u : \dot{u} : \ddot{u})_k = \sum_{s=1}^8 N_{(s)} (u : \dot{u} : \ddot{u})_k^{(s)},$$

где  $N_{(s)}$  – степенные функции формы для  $s$ -го узла конечного элемента;

$(u : \dot{u} : \ddot{u})_k^{(s)}$  – векторы перемещений, скоростей и ускорений  $s$ -го узла конечного элемента по  $k$  направлению в базисной системе координат.

Для обеспечения высокой точности и эффективности процесса решения широкого класса задач иногда целесообразно повысить степень аппроксимирующих функций.

Тогда уравнение движения (1) можно записать в виде системы дифференциальных уравнений

$$M\ddot{u} + C\dot{u} + Gu = f(t),$$

где  $M$  – матрица масс;  $C$  – матрица демпфирования;  $G$  – матрица жесткости;  $f(t)$  – вектор узловых сил.

Для определения компонент матрицы жесткости вариацию потенциальной энергии деформации можно записать в виде

$$\delta \Pi = \int_V \sigma^{ij} \varepsilon_{ij} dv.$$

Для описания состояния слабосжимаемого эластомера можно использовать различные законы состояния материала.

Например, согласно закона состояния слабосжимаемого материала Пенга-Ландела компоненты тензора напряжений имеют вид [5]

$$\sigma^{ij} = \sqrt{I_3} \left\{ \mu \left[ I_3^{-4/3} g^{ij} + \left[ I_3^{-1/3} + \frac{4}{9}(I_3 - 1)(I_1 - 2) + \frac{2}{9}(I_3 - 1) \right] G^{ij} \right] + \frac{1}{2} B(I_3 - 1) G^{ij} \right\}.$$

По закону состояния Линдли в компонентной форме полные напряжения имеют следующий вид:

$$\sigma^{ij} = \frac{1}{\sqrt{I_3}} \left[ (g^{ij} - I_3 G^{ij}) \mu + \frac{BC}{2} I_3 (I_3 - 1) G^{ij} \right].$$

По модифицированному закону Гука для слабосжимаемого материала

$$\sigma^{ij} = \int_0^{\varepsilon_{kl}} 2\mu \left( G^{mi} G^{nj} - \frac{1}{3} G^{mn} G^{ij} \right) d\varepsilon_{mn} - \int_0^{\varepsilon^x} B \left( \sqrt{I_3(G^x)} - 1 \right) dG^{ij}.$$

Используя тройную аппроксимацию полей перемещений, деформаций и функции изменения объема [6] получаем матрицу жесткости конечного элемента, моделирующего процесс деформирования слабосжимаемого эластомера

$$\delta \Pi = \delta \{u_s\}^T \{N\} [D_{ij}^s]^T [C^{ijkl}] [D_{kl}^t] \{N\}^T \{u_t\} + \\ + \delta \{u_s\}^T \{N\} [D_0^s]^T [C^\theta] [D_0^t] \{N\}^T \{u_t\} = \{u_s\}^T [G] \{u_t\},$$

где  $[C^{ijkl}]$ ,  $[C^\theta]$  – матрицы упругих констант;  $[D]$  – матрица дифференцирования;  $\{u_t\}$  – вектор узловых перемещений.

Матрицу масс вычисляем по формуле

$$M = \int_V \{N\} \rho \{N\}^T dv.$$

Определение матрицы демпфирования с помощью матриц, описывающих свойства конечных элементов не представляется возможным. Поэтому чаще всего ее приближенно вычисляют в виде линейной комбинации матриц жесткости и масс.

Для системы конечных элементов при отсутствии демпфирования решение можно представить в виде разложения по собственным векторам. Из

4. Дырда В. И. Определение реологических параметров эластомерных материалов / [В. И. Дырда, Ю. Г. Козуб, А. С. Кобец, А. П. Науменко, Т. Е. Твердохлеб, А. А. Яценко] // Сб. научн. тр. «Геотехническая механика». – 2007. – Вып. 70. – С. 56–88.

5. Киричевский В. В. Метод конечных элементов в механике эластомеров / В. В. Киричевский. – К. : Наук. думка, 2002. – 655 с.

6. Киричевский В. В. Нелинейные задачи термомеханики конструкций из слабосжимаемых эластомеров / В. В. Киричевский, А. С. Сахаров. – К. : Будівельник, 1992. – 216 с.

7. Лавендел Э. Э. Прикладные методы расчета изделий из высокоэластичных материалов / Э. Э. Лавендел. – Рига : Зинатне, 1980. – 238 с.

8. Потураев В. Н. Прикладная механика резины / В. Н. Потураев, В. И. Дырда, И. И. Круш. – К. : Наукова думка, 1980. – 260 с.

9. Mooney M. A. Theory of Large Elastic Deformation / M. A. Mooney // J. Appl. Phys. – 1940. – №11. – P. 582–592.

Государственное учреждение

«Луганский национальный университет

имени Тараса Шевченко»,

Луганск, Украина

Поступила в редколлегию 20.03.2012

Ю. Г. Козуб, канд. техн. наук, Г. О. Козуб, канд. техн. наук

## ЧИСЕЛЬНИЙ АНАЛІЗ ДИНАМІЧНОГО ДЕФОРМУВАННЯ В'ЯЗКОПРУЖНИХ ЕЛЕМЕНТІВ КОНСТРУКЦІЙ

Розглянуто питання динамічного розрахунку в'язкопружних еластомерних елементів конструкцій на основі методу скінченних елементів. Запропонований метод дозволяє отримати розв'язки задач циклічного деформування конструкцій з врахуванням демпфування.

*Ключові слова:* еластомер, в'язкопружність, метод скінченних елементів.

Y. G. Kozub, Associate Professor, G. A. Kozub, Associate Professor

## NUMERICAL ANALYSIS OF DYNAMIC DEFORMATION OF VISCOELASTIC STRUCTURAL ELEMENTS

Problems of dynamic analysis of viscoelastic elastomeric structural elements based on the finite element method are discussed. The proposed method allows to obtain solutions to cyclic deformation structures subject to damping.

*Keywords:* elastomer, viscoelasticity, finite element method.