ISSN 2079-536X

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ, МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ

Дніпропетровський національний університет
імені Олеся Гончара

МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ПРИКЛАДНИХ ЗАДАЧ МЕХАНІКИ ДЕФОРМІВНОГО ТВЕРДОГО ТІЛА

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ПРИКЛАДНЫХ ЗАДАЧ МЕХАНИКИ ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

METHODS OF SOLVING APPLIED PROBLEMS IN SOLIDS MECHANICS

Збірник наукових праць

13
ВИПУСК

Дніпропетровськ
Ліра
2012

УДК 539.3

Методи розв'язування прикладних задач механіки деформівного твердого тіла: зб. наук. праць / ред. кол.: А. П. Дзюба (відп. ред.) та ін. – Дніпропетровськ: Ліра, 2012. – Вип. 13. – 460 с. Рос., укр. та англ. мовами.

Наведені нові результати досліджень у галузі механіки деформівного твердого тіла. Основна увага приділена питанням розробки та удосконалення математичних моделей, методів теоретичного і експериментального дослідження та застосування сучасних комп'ютерних технологій для розв'язування актуальних прикладних задач.

Для наукових співробітників, інженерів-механіків та аспірантів.

Збірник внесено до Переліку наукових фахових видань України, в яких можуть публікуватися результати дисертаційних робіт на здобуття наукових ступенів доктора і кандидата наук (технічні науки (механіка деформівного твердого тіла) – постанова президії ВАК України від 16 грудня 2009 р. № 1-05/6; фізико-математичні науки (механіка) – постанова президії ВАК України від 01 липня 2010 р. №1-05/5).

Рекомендовано до друку Вченою радою Дніпропетровського національного університету імені Олеся Гончара (протокол № 10 від 31 березня 2011 р.)

Адреса редколегії:
49010, м. Дніпропетровськ, пр. Гагаріна, 72,

Дніпропетровський національний університет ім. Олеся Гончара, корп. 3, кімн. 41., *e-mail:* compumech@ua.fm

Свідоцтво про державну реєстрацію друкованого засобу масової інформації КВ № 8831 від 03.06.2004 р.

ISSN 2079-536X

Наукове видання

МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ПРИКЛАДНИХ ЗАДАЧ МЕХАНІКИ ДЕФОРМІВНОГО ТВЕРДОГО ТІЛА

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ПРИКЛАДНЫХ ЗАДАЧ МЕХАНИКИ ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

METHODS OF SOLVING APPLIED PROBLEMS IN SOLIDS MECHANICS

Збірник наукових праць, 2012, вип. 13

Коректор Л. М. Машталір

Комп'ютерна верстка О. Г. Василенко, І. А. Сафронова

За підтримки Оргкомітету IV Міжнародної науково-технічної конференції «Актуальні проблеми прикладної механіки і міцності конструкцій»

Підписано до друку з оригінал макету 25.04.2012, Формат 60×84 1/16. Папір друкарський. Друк плоский. Умов. друк. арк. 28,75. Тираж 100 прим. Замовлення № 141

Свідоцтво про внесення до державного реєстру суб'єктів видавничої справи ДП №14 від 13.07.2000.

Типографія «Ліра», 49038, Україна, м. Дніпропетровськ, пл. Десантників, 1, тел. (056)721-92-60,721-92-63, E-mail: liraLtd@ukr.net

ISSN 2079–536X
2012, вип. 13

УДК 678: 539.376

Ю. Г. Козуб, канд. техн. наук, Г. А. Козуб, канд. техн. наук

ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ ДИНАМИЧЕСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ ВЯЗКОУПРУГИХ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ

Рассмотрены вопросы динамического расчета вязкоупругих эластомерных элементов конструкций на основе метода конечных элементов. Предложенная методика позволяет получать решения задач циклического деформирования конструкций с учетом демпфирования.

Ключевые слова: *эластомер, вязкоупругость, метод конечных элементов.*

В машиностроении и строительстве широкое распространение получили вязкоупругие демпфирующие элементы конструкций. Наиболее широко используются резиновые виброизоляторы. Исследованию вязкоупругих свойств резины, анализу деформирования и разрушения эластомерных элементов конструкций посвящено достаточно большое количество работ отечественных и зарубежных авторов [1, 3 – 9]. Чаще всего при исследовании поведения резины вводится гипотеза о несжимаемости этого материала. Однако при стесненных деформациях эта гипотеза неприемлема [6]. В динамических расчетах следует учитывать эффекты демпфирования резиновых элементов конструкций. Наиболее эффективным для описания вязкоупругих свойств является применение уравнений Вольтерра. Аналитические решения таких уравнений в задачах о циклическом нагружении получены лишь для одномерного случая, что значительно ограничивает возможности получить надежное решение для элементов конструкций, имеющих сложную форму. В этом случае наиболее приемлемым является применение численных методов решения задач в трехмерной постановке, одним из которых является метод конечных элементов.

Целью данной работы является разработка метода интегрирования уравнений динамики вязкоупругих элементов конструкций.

Для решения задачи о динамическом равновесии эластомерного элемента конструкции следует вначале решить задачу о свободных колебаниях. Основываясь на принципе суперпозиции Больцмана, интегральные уравнения можно описать в виде [6]

$$\sigma(t) = E\left[\varepsilon(t) - \int_{-\infty}^{t} K(t-\tau)\varepsilon(t)d\tau\right]$$

где $K(t-\tau)$ – ядро релаксации и, кроме того, является ядром оператора Вольтерра.

Для большинства задач о свободных колебаниях упруго-наследственного тела используется уравнение в виде

$$\ddot{u}(t) + \omega^2 u(t) = 0,$$

где

$$\omega^2\varphi(t) = \omega_0^2\left[\varphi(t) - \int_0^t K(t-\tau)\varphi(t)d\tau\right].$$

Рекуррентная формула для решения характеристического уравнения имеет вид [8]

$$\omega_n^2 = \omega_0^2\left[1 - K\left(\frac{1}{i\omega_n - 1}\right)\right].$$

После проведения преобразований Фурье получим

$$\omega_n^2 = \omega_0^2\left[1 - A(\omega_{n-1}) + iB(\omega_{n-1})\right],$$

где

$$A(\omega) = \int_0^\infty K(z)\cos\omega z dz = \mathrm{Re}\, K\left(\frac{1}{i\omega}\right),$$

$$B(\omega) = \int_0^\infty K(z)\sin\omega z dz = -\mathrm{Im}\, K\left(\frac{1}{i\omega}\right).$$

Как известно [8]

$$1 - A(\omega_0) = \frac{E(\omega_0)}{E_0}, \quad B(\omega_0) = \frac{\psi(\omega_0)}{2\pi},$$

где E_0 – мгновенный модуль упругости; $E(\omega_0)$ – динамический модуль при $\omega = \omega_0$; $\psi(\omega_0)$ – технический коэффициент поглощения при $\omega = \omega_0$.

Приближенное уравнение характеристической виброграммы имеет вид

$$u(t) \approx Ne^{(-ht)}\cos(\omega t + \varphi).$$

Принимая в качестве ядра релаксации дробно-экспоненциальную функцию Работнова [1]

$$K(z) = z^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^n z^{n(1+\alpha)}}{\Gamma[(n+1)(1+\alpha)]},$$

где α, β – реологические параметры материала; $\Gamma(t)$ – гамма-функция; в первом приближении получаем выражение для коэффициента демпфирования

$$h = \frac{\omega_0 \psi(\omega_0)}{4\pi}.$$

Процедура определения частот свободных колебаний представляет собой отдельную задачу определения собственных чисел и векторов.

При динамическом нагружении в каждый момент времени напряженно-деформированное состояние тела должно удовлетворять вариационному уравнению движения, которое можно согласно принципам Даламбера-Лагранжа представить в виде

$$\int_V \rho \ddot{u} \delta u dv + \delta \Pi(u) + \delta W(\dot{u}) = 0\,, \tag{1}$$

где u – вектор перемещений; ρ – плотность материала; Π – потенциальная энергия; W – работа диссипативных сил.

Разрешающие уравнения метода конечных элементов для трехмерной задачи строится на основе использования интерполяционных функций формы для описания полей перемещений, скоростей и ускорений

$$(u : \dot{u} : \ddot{u})_k = \sum_{s=1}^{8} N_{(s)} (u : \dot{u} : \ddot{u})_k^{(s)},$$

где $N_{(s)}$ – степенные функции формы для s-го узла конечного элемента; $(u : \dot{u} : \ddot{u})_k^{(s)}$ – векторы перемещений, скоростей и ускорений s-го узла конечного элемента по k направлению в базисной системе координат.

Для обеспечения высокой точности и эффективности процесса решения широкого класса задач иногда целесообразно повысить степень аппроксимирующих функций.

Тогда уравнение движения (1) можно записать в виде системы дифференциальных уравнений

$$M\ddot{u} + C\dot{u} + Gu = f(t)\,,$$

где M – матрица масс; C – матрица демпфирования; G – матрица жесткости; $f(t)$ – вектор узловых сил.

Для определения компонент матрицы жесткости вариацию потенциальной энергии деформации можно записать в виде

$$\delta\Pi = \int_V \sigma^{ij} \varepsilon_{ij} dv\,.$$

Для описания состояния слабосжимаемого эластомера можно использовать различные законы состояния материала.

Например, согласно закона состояния слабосжимаемого материала Пенга-Ландела компоненты тензора напряжений имеют вид [5]

$$\sigma^{ij} = \sqrt{I_3}\left\{\mu\left[I_3^{-4/3} g^{ij} + \left[I_3^{-1/3} + \frac{4}{9}(I_3 - 1)(I_1 - 2) + \frac{2}{9}(I_3 - 1)\right]G^{ij}\right] + \frac{1}{2}B(I_3 - 1)G^{ij}\right\}.$$

По закону состояния Линдли в компонентной форме полные напряжения имеют следующий вид:

$$\sigma^{ij} = \frac{1}{\sqrt{I_3}}\left[\left(g^{ij} - I_3 G^{ij}\right)\mu + \frac{BC}{2} I_3 (I_3 - 1) G^{ij}\right].$$

По модифицированному закону Гука для слабосжимаемого материала

$$\sigma^{ij} = \int_0^{\varepsilon_{kl}} 2\mu\left(G^{mi}G^{nj} - \frac{1}{3}G^{mn}G^{ij} d\varepsilon_{mn} - \int_0^{G^x} B\left(\sqrt{I_3\left(G^x\right)} - 1\right)\right) dG^{ij}\,.$$

Используя тройную аппроксимацию полей перемещений, деформаций и функции изменения объема [6] получаем матрицу жесткости конечного элемента, моделирующего процесс деформирования слабосжимаемого эластомера

$$\delta\Pi = \delta\{u_s\}^T \{N\}\left[D_{ij}^s\right]^T \left[C^{ijkl}\right]\left[D_{kl}^t\right]\{N\}^T\{u_t\} +$$

$$+\delta\{u_s\}^T \{N\}\left[D_{\theta}^s\right]^T \left[C^{\theta}\right]\left[D_{\theta}^t\right]\{N\}^T\{u_t\} = \{u_s\}^T [G]\{u_t\},$$

где $\left[C^{ijkl}\right]$, $\left[C^{\theta}\right]$ – матрицы упругих констант; $[D]$ – матрица дифференцирования; $\{u_t\}$ – вектор узловых перемещений.

Матрицу масс вычисляем по формуле

$$M = \int_V \{N\}\rho\{N\}^T dv\,.$$

Определение матриц демпфирования с помощью матриц, описывающих свойства конечных элементов не представляется возможным. Поэтому чаще всего ее приближенно вычисляют в виде линейной комбинации матриц жесткости и масс.

Для системы конечных элементов при отсутствии демпфирования решение можно представить в виде разложения по собственным векторам. Из

4. ***Дырда В. И.*** Определение реологических параметров эластомерных материалов / [В. И. Дырда, Ю. Г. Козуб, А. С. Кобец, А. П. Науменко, Т. Е. Твердохлеб, А. А. Яценко] // Сб. научн. тр. «Геотехническая механика». – 2007. – Вып. 70. – С. 56–88.

5. ***Киричевский В. В.*** Метод конечных элементов в механике эластомеров / В. В. Киричевский. – К. : Наук. думка, 2002. – 655 с.

6. ***Киричевский В. В.*** Нелинейные задачи термомеханики конструкций из слабосжимаемых эластомеров / В.В. Киричевский, А.С. Сахаров. – К. : Будівельник, 1992. – 216 с.

7. ***Лавендел Э. Э.*** Прикладные методы расчета изделий из высокоэластичных материалов / Э.Э. Лавендел. – Рига : Зинатне, 1980. – 238 с.

8. ***Потураев В. Н.*** Прикладная механика резины / В. Н. Потураев, В. И. Дырда, И. И Круш. – К. : Наукова думка, 1980. – 260 с.

9. ***Mooney M. A.*** Theory of Large Elastic Deformation / M. A. Mooney // J. Appl. Phys. – 1940. – №11. – P. 582–592.

Государственное учреждение
«Луганский национальный университет
имени Тараса Шевченко»,
Луганск, Украина

Поступила в редколлегию 20.03.2012

Ю. Г. Козуб, канд. техн. наук, Г. О. Козуб, канд. техн. наук

ЧИСЕЛЬНИЙ АНАЛІЗ ДИНАМІЧНОГО ДЕФОРМУВАННЯ В'ЯЗКОПРУЖНИХ ЕЛЕМЕНТІВ КОНСТРУКЦІЙ

Розглянуто питання динамічного розрахунку в'язкопружних еластомірних елементів конструкцій на основі методу скінченних елементів. Запропонований метод дозволяє отримати розв'язки задач циклічного деформування конструкцій з врахуванням демпфування.

Ключові слова: *еластомер, в'язкопружність, метод скінченних елементів.*

Y. G. Kozub, Associate Professor, G. A. Kozub, Associate Professor

NUMERICAL ANALYSIS OF DYNAMIC DEFORMATION OF VISCOELASTIC STRUCTURAL ELEMENTS

Problems of dynamic analysis of viscoelastic elastomeric structural elements based on the finite element method are discussed. The proposed method allows to obtain solutions to cyclic deformation structures subject to damping.

Keywords: *elastomer, viscoelasticity, finite element method.*